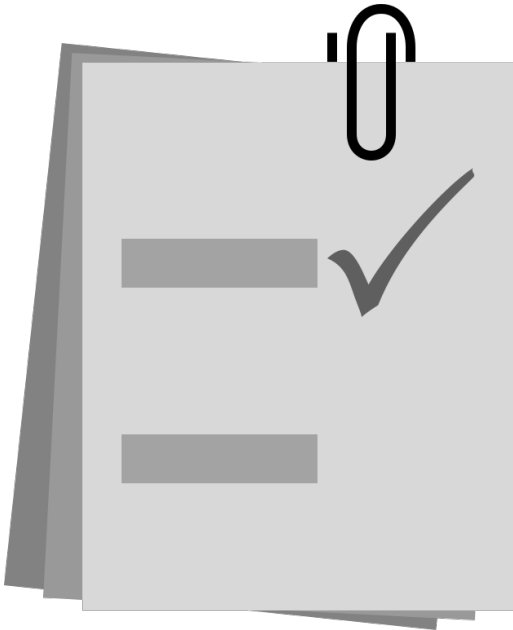


Merni sistemi u računarstvu 13E053MSR, <https://automatika.etf.bg.ac.rs/sr/13e053msr>

Univerzitet u Beogradu - Elektrotehnički fakultet, <http://www.etf.bg.ac.rs/>

Merna nesigurnost tipa B



Dr Nadica Miljković, vanredni profesor, nadica.miljkovic@etf.bg.ac.rs

Zadaci prikazani u ovim materijalima su preuzeti iz [MIEM](#) udžbenika.

U Beogradu, januara 2024. godine

Zadaci za rad sa rešenjima

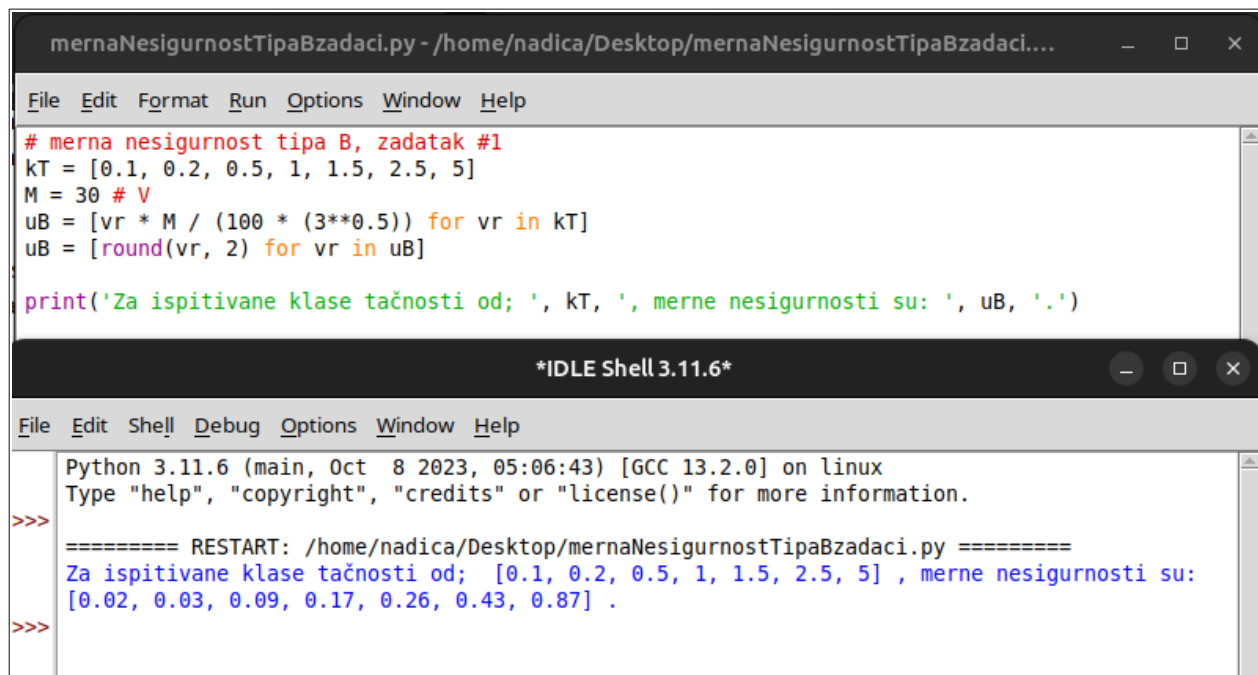
1. Dati su analogni voltmetri istih opsega od $M=30$ V, ali različitih klasa tačnosti K_T od 0.1, 0.2, 0.5, 1, 1.5, 2.5 i 5. Kolike su merne nesigurnosti tipa B (MNB) svih instrumenata?

Rešenje 1. zadatka:

Ako se pretpostavi uniformna raspodela rezultata merenja, onda se MNB u oznaci u_B procenjuje kao standardna devijacija za uniformnu raspodelu:

$$u_B = \frac{K_T M}{100 \sqrt{3}}$$

Moguće je izvršiti ova proračunavanja u Pajtonu i rezultat je kao na Sl. 1.



```
mernaNesigurnostTipaBzadaci.py - /home/nadica/Desktop/mernaNesigurnostTipaBzadaci...
File Edit Format Run Options Window Help
# merna nesigurnost tipa B, zadatak #1
kT = [0.1, 0.2, 0.5, 1, 1.5, 2.5, 5]
M = 30 # V
uB = [vr * M / (100 * (3**0.5)) for vr in kT]
uB = [round(vr, 2) for vr in uB]

print('Za ispitivane klase tačnosti od; ', kT, ', merne nesigurnosti su: ', uB, '.')

*IDLE Shell 3.11.6*
File Edit Shell Debug Options Window Help
Python 3.11.6 (main, Oct 8 2023, 05:06:43) [GCC 13.2.0] on linux
Type "help", "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>>
===== RESTART: /home/nadica/Desktop/mernaNesigurnostTipaBzadaci.py =====
Za ispitivane klase tačnosti od; [0.1, 0.2, 0.5, 1, 1.5, 2.5, 5] , merne nesigurnosti su:
[0.02, 0.03, 0.09, 0.17, 0.26, 0.43, 0.87] .
>>>
```

Slika 1, Pajton skripta i rezultat za računavanje mernih nesigurnosti tipa B (u_B) za zadate klase tačnosti (k_T) i maksimalni opseg (M) kod 7 instrumenata.

Očekivano, MNB koje odgovaraju većim klasama tačnosti su i veće (Sl. 1). Dodatno, kako je maksimalni opseg merenja isti za sve ove instrumente, to se MNB može izraziti u procentima. Za MNB u procentima dobijaju se sledeće vrednosti: 0.07%, 0.10%, 0.30%, 0.57%, 0.87%, 1.43% i 2.90%.

NAPOMENA: Kada se predstavljaju vrednosti u procentima, uobičajeno je zaokruživanje na celobrojne vrednosti, ređe na jednu decimalu, a skoro nikada se ne zaokružuje na više od jedne decimale. Ovde je to urađeno sa ciljem kako bi bilo jasno da prva MNB nije jednaka nuli (ako bi se prikaz rezultata realizovao

bez decimala, odnosno isključivo za celobrojne vrednosti), ali jeste dovoljno mala da se njen uticaj može zanemariti.

2. Neka je dat instrument sa 3½ cifara. Izračunati mernu nesigurnost ovog instrumenta u procentima.

Rešenje 2. zadatka:

Instrument sa 3½ cifara prikazuje najmanju vrednost od 0000 i najveću vrednost of 1999, pa je ukupan broj *count*-a (vrednosti koje se mogu prikazati na instrumentu) jednak 2000.

Rezolucija takvog instrumenta u procentima je $\delta_x = \frac{1}{2000} 100\% = 0.05\%$. Kako se za poznatu rezoluciju

δ_x merena vrednost x nalazi u opsegu $\left[x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2} \right]$, to je MNB u oznaci u_B jednaka

$$u_B = \frac{\delta_x}{\sqrt{12}} = 0.29 \delta_x = 0.0145\%, \text{ odnosno } 0.01\%.$$

3. Potrebno je izračunati ukupnu mernu nesigurnost za 10 merenja DC napona od nominalnih 3.3 V (sa Beselovom korekcijom) primenom UNO R3 mikrokontrolerske pločice koja ima rezoluciju A/D konvertora od 10 bita. Dodatno, maksimalna vrednost napona koju može da meri UNO R3 je 5 V, a minimalna 0 V. Ponovljena merenja su prikazana u Tabeli 1.

Preporučeno je da se MNB proceni kao procentualna greška u odnosu na pročitano vrednost (eng. *accuracy*).

Tabela 1, Podaci izmereni prilikom 10 ponovljenih merenja DC napona nominalne vrednosti od 3.3 V.

redni br. merenja	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
DC napon	3.2	3.3	3.1	3.0	3.4	3.3	3.2	3.1	3.4	3.0

Rešenje 3. zadatka:

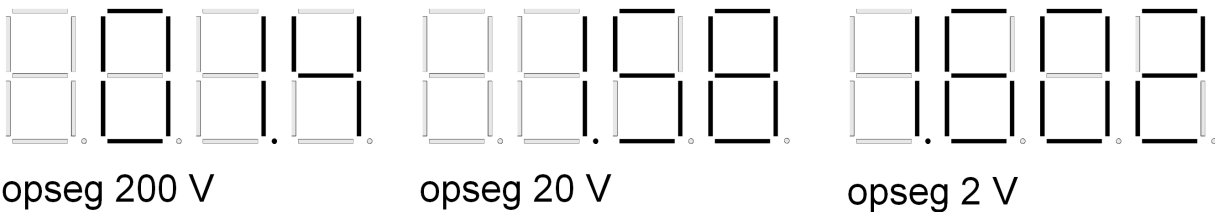
Rezolucija ovog instrumenta δ_1 je $\delta_1 = \frac{5V}{2^{10}} = 4.88 \text{ mV}$, a MNB je jednaka: $u_B = \frac{\delta_x}{\sqrt{12}} = 1.41 \text{ mV}$. Merna nesigurnost tipa A se računa prema formuli sa Beselovom korekcijom. Prema tome, $u_A = 14.91 \text{ mV}$. Kombinovana merna nesigurnost u_C se računa prema sledećoj formuli:

$$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

Zamenom brojnih vrednosti dobija se da je: $u_C = 14.98 \text{ mV}$.

NAPOMENA: U ovom slučaju MNB se mogla zanemariti, jer kombinovana merna nesigurnost u najvećoj meri zavisi od MNA.

4. Digitalnim voltmetrom sa $3\frac{1}{2}$ cifara meri se napon od 1.6 V. Ako DMM za merenje DC napona ima tačnost definisanu kao $\pm(0.5\% + 3^1)$ od merene vrednosti, potrebno je odrediti mernu nesigurnost tipa B za mereni napon. Merenje napona za različite opsege je prikazano na Sl. 2.



Slika 2, Očitavane vrednosti merenog napona nominalne vrednosti od 1.6 V primenom tri različita opsega. Primer iz udžbenika.

Rešenje 4. zadatka:

MNB za najveći opseg od 200 V je jednaka (primetiti da je u tom slučaju $LSD = 0.1 \text{ V}$):

$$u_{B200} = \frac{\Delta_x + 3 * LSD}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{\delta_1}{100} X + 3 * 0.1}{\sqrt{3}} = 0.18 \text{ v}$$

U prethodnoj relaciji sa δ_1 je predstavljena tačnost (ovde 0.5%) od merene vrednosti X (ovde 1.4 V) na opsegu od 200 V (LSD je jednaka 0.1 V, jer predstavlja najmanji korak). Analogno, za opseg od 20 V (menja se LSD koja je sada 0.01 V), a MNB je jednaka:

¹ Broj 3 označava da je proizvođač definisao mernu nesigurnost kao 3 LSD (eng. *Least Significant Digit*) – pogledati predavanja za detalje.

$$u_{B20} = \frac{\Delta_x + 3 * LSD}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{\delta_1}{100} X + 3 * 0.01}{\sqrt{3}} = 0.03 \text{ V}$$

Na kraju, za najmanji opseg (od 2 V) za koji je LSD jednaka 0.001 V, MNB je:

$$u_{B2} = \frac{\Delta_x + 3 * LSD}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{\delta_1}{100} X + 3 * 0.001}{\sqrt{3}} = 0.01 \text{ V}$$

NAPOMENA: U knjizi MNB nije predstavljena sa uniformnom raspodelom, odnosno vrednosti koje su dobijene nisu podeljene sa $\sqrt{3}$, pa treba imati na umu moguća neslaganja rezultata. Oba načina su tačna. Naime, ovde je pretpostavljena uniformna raspodela, a u knjizi je samo na osnovu podataka i na osnovu preporuke proizvođača $\pm(0.5\% + 3)$ izračunata MNB. Takođe, greška u proceni MNB neće biti velika ako se umesto merene uzme očekivana vrednost od 1.6 V, ali potrebno je razumeti da očekivana vrednost u praktičnom slučaju ne postoji.

Na osnovu dobijenih MNB (u_{B200} , u_{B20} i u_{B2}), zaključuje se da je poželjno meriti u najmanjem mogućem opsegu. Veći broj digitalnih instrumenata automatski podešava opseg.

5. Pod pretpostavkom da su unutrašnje otpornosti ampermetra, voltmetra i izvora jednosmernog napona idealne, da je faktor proširenja $k=2$, da je $E=12 \text{ V}$, kao i da su svi instrumenti pravilno kalibrisani, izračunati mernu nesigurnost tipa A za merenje nepoznate otpornosti R_x u slučaju indirektnog merenja. Izmerene vrednosti napona (V) voltmetrom i struje (mA) ampermetrom za ponovljena merenja date su u Tabeli 2.

Tabela 2, Rezultati merenja nepoznate otpornosti indirektnom metodom.

U_i [V]	12.00	12.10	11.80	12.20	12.30	11.50	12.00	12.08	12.10	11.90
I_i [mA]	13.50	14.60	14.80	13.90	14.70	14.00	14.90	13.80	13.90	14.40

Rešenje 5. zadatka:

```

mernaNesigurnostTipaBzadaci.py - /home/nadica/Desktop/mernaNesigurnostTipaBzadaci.py (3.11.6)
File Edit Format Run Options Window Help
# merna nesigurnost tipa A, kombinovano merenje, zadatak #5

import numpy as np
ui = [12, 12.1, 11.88, 12.2, 12.3, 11.5, 12, 12.08, 12.1, 11.9]
ii = [13.5, 14.6, 14.8, 13.9, 14.7, 14, 14.9, 13.8, 13.9, 14.4]

U = np.mean(ui)
I = np.mean(ii)
u_Au = np.std(ui) / (len(ui) - 1)
u_Ai = np.std(ii) / (len(ii) - 1)

u_rx = ( (u_Au/I)**2 + (U*u_Ai/(I**2))**2 )**0.5
print('Merna nesigurnost tipa A indirektnog merenja je: ', u_rx, ', a u procentima: ',
      100*u_rx/(U/I))

IDLE Shell 3.11.6
File Edit Shell Debug Options Window Help
Python 3.11.6 (main, Oct 8 2023, 05:06:43) [GCC 13.2.0] on linux
Type "help", "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>>
===== RESTART: /home/nadica/Desktop/mernaNesigurnostTipaBzadaci.py =====
Merna nesigurnost tipa A indirektnog merenja je: 0.0034458905382225916 , a u procentima: 0.40899500391197685
>>>

```

Slika 3, Pajton skripta za računanje merne nesigurnosti tipa A kod indirektnog merenja.

Za indirektno merenje nepoznate otpornosti koristi se sledeći izraz: $R_x = \frac{U}{I}$. Sa U je označena procenjena vrednost napona na osnovu izvršenih merenja, odnosno srednja vrednost merenog napona, a sa I je predstavljena srednja vrednost merene struje.

Ako su sa u_v i sa u_i označene merne nesigurnosti za merenje napona i struje, onda je moguće izračunati mernu nesigurnost u_{rx} indirektnog merenja nepoznate otpornosti na sledeći način:

$$u_{rx} = \sqrt{\left(\left|\frac{\partial R_x}{\partial U}\right| u_v\right)^2 + \left(\left|\frac{\partial R_x}{\partial I}\right| u_i\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{I} u_v\right)^2 + \left(\frac{U}{I^2} u_i\right)^2}$$

Rešenje ovog zadatka se nalazi u datoteci "mernaNesigurnostTipaBzadaci.py". Izgled Pajton koda i rezultat su prikazani na Sl. 3.

NAPOMENA: Detaljno urađen primer pogledati u knjizi. Za datu nominalnu vrednost otpornika preko npr. *Color Code*-a moguće je odrediti i apsolutnu i relativnu grešku merenja. Za više detalja pogledati i slajdove sa predavanja.

6. Neka je potrebno odrediti kombinovanu mernu nesigurnost za faktor proširenja $k=2$ prilikom merenja struje analognim ampermetrom. Rezultati $n=8$ ponovljenih merenja su dati u Tabeli 3. Opseg mernog instrumenta je $I_{max}=3$ A, a tačnost očitavanja (iz specifikacije proizvođača) je $\pm 0.04\%$ i tačnost opsega (iz specifikacije proizvođača) je $\pm 0.007\%$. Smatrati da je unutrašnja otpornost ampermetra dovoljno mala i da se svi sistematski efekti mogu zanemariti. Pretpostaviti Gausovu funkciju gustine

verovatnoće za ponovljena merenja i uniformnu funkciju gustine verovatnoće za računanje merne nesigurnosti tipa B.

Tabela 3, Vrednosti ponovljenih merenja struje

redni broj merenja	1	2	3	4	5	6	7	8
I [A]	0.98	0.90	1.10	1.00	1.05	0.97	1.12	1.03

Rešenje zadatka 6:

Za ponovljena merenja, moguće je izračunati srednju vrednost struje kao:

$$\bar{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i = 1.02 \text{ A}$$

Merna nesigurnost tipa A (kao standardna devijacija od srednje vrednosti sa Beselovom korekcijom) je:

$$u_A = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2} = 0.0255 \text{ A}$$

Merna nesigurnost tipa B se može izraziti kao:

$$u_B = \frac{\frac{\delta_1}{100} I_{max} + \frac{\delta_2}{100} \bar{I}}{\sqrt{3}} = 0.0004 \text{ A}$$

Sada se na osnovu prethodna dva izraza dobija kombinovana merna nesigurnost: $u_c = 0.03 \text{ A}$. U ovom slučaju se uticaj merne nesigurnosti tipa B može i zanemariti jer je $u_c \approx u_A$. Za faktor proširenja $k=2$, dobija se rezultat merenja oblika: $1.02 \pm 0.06 \text{ A}$. A Pajton kod?