



Matematički modeli u mehanici fluida
Viskoznost, površinski napon i kapilarne pojave

Dr. Sc. Dževad Hadžihafizović

Sarajevo. 2020.

SADRŽAJ

1. UVOD	01
1.1. Numerički (matematički) modeli	01
2.0. Karakteristične fizikalne veličine fluida	05
2.1. Uvod	05
2.2. Promjena gustoće	06
2.2.1. Osnovne karakteristike	06
2.2.2. Gustoće tekućina	07
2.2.3. Plinovi	10
2.3. Trenje u tekućinama	11
2.3.1. Viskoznost mazivog ulja	15
2.3.2 Ovisnost viskoznosti o temperaturi	16
2.3.3 Ovisnost viskoznosti o pritisku	18
2.3.4 Viskoznost u funkciji napona smicanja $\eta = f(\tau)$	21
2.3.5. Viskoelastična maziva	22
2.4. Viskoznost fluida	23
2.5 Klasifikacija motornih ulja prema viskoznosti, SAE klasifikacija	25
2.6 Metode određivanja viskoznosti	26
2.6.1 Zakoni viskoznog toka i određivanje viskoznog toka	26
2.6.2 Određivanje viskoznosti viskozimetrom	29
2.6.2.1 Mjerenje viskoznosti po Couette-u	29
2.6.2.2 Mjerenje viskoznosti po Ostwald-u - Kapilarni viskozimetar	29
2.6.2.3 Određivanje viskoznosti po Höppler-u	32
2.6.2.4 Određivanje viskoziteta Englerovim viskozimetrom	33
2.6.2.5 Rotacijski viskozimetar	34
2.6.3 Indeks viskoznosti	37
2.6.4 Stvrdnjavanje maziva	38
2.6.5 Plamište i gorište	38
2.6.6. Oksidacijska stabilnost	38
2.7. Ne Njutnovi fluidi - viskoelastični fluidi	39
2.7.1 Viskoelastični modeli tečnosti	40

2.7.2	Viskoelastični model za velike protoke strujanja	42
2.7.3	Analiza viskoelastičnog toka tekućine	43
2.7.4	Rješenje diferencijalne jednačbe protoka	44
2.7.5	Pritisци u rukavcu ležaja	46
2.7.6	Poboljšanja performansi podmazivanja rukavca ležajeva	49
3.0	Površinski napon i kapilarne pojave	52
3.1	Uvod	52
3.2	Istorija	52
3.3	Među molekularne sile	54
3.4	Površinski napon kod tečnosti	59
3.5	Potencijalna energija površinskog sloja	63
3.6	Određivanje koeficijenta površinskog napona	64
3.6.1.	Termodinamičke jednačine za sisteme sa razvijenom površinom	67
3.7	Zavisnost koeficijenta površinskog napona od temperature	68
3.7.1	Pritisak ispod zakrivljene površine tečnosti	71
3.7.2	Površinski napon na zakrivljenoj površini tečnosti - Laplasova jednačina	72
3.7.3	Dopunski pritisak za sfernu površinu	75
3.7.4	Koeficijent površinskog napona binarnih rastvora	76
3.7.5	Metode mjerenja površinskog napona	78
3.7.5.1	Metoda kapilarne cijevi	78
3.7.5.2	Metoda maksimalnog pritiska u mjehuru	78
3.7.5.3	Metoda mjerenja mase kapi	79
3.7.6.	Tenziometrija	80
3.7.6.1	Mjerenje koeficijenta površinskog napona metodom otkidanja prestena (du Noüy metod)	81
3.7.6.2	Metoda ploče po Vilhelmiju (Wilhelmy)	84
3.8	Kapilarnost i kontaktne površine	85
3.9	Kapilarne pojave	87
3.9.1	Kontaktни ugao, kvašenje i razlivanje	90
3.9.2	Ravnoteža sila - Tomas Jangovu jednačina	96
3.9.3	Athezioni rad - Dipreova jednačina	97

3.9.4 Adhezije i kohezije sile na površini	98
3.9.5 Krive površine	99
3.9.6 Kapilarnost tekućine	100
3.9.6.1 Kapilarno podizanje	102
3.9.6.2 Kapilarno spuštanje	102
3.10 Zakrivljena slobodna površina tečnosti – meniskus	102
3.11 Značaj kapilarnih pojava i površinskog napona	104
3.12 Napon pare sfernih kapljica - Kelvinov efekat	105
3.13 Posljedice Kelvinovog efekta na homogenu nukleaciju	107
Literatura	

1. UVOD

1.1. Numerički (matematički) modeli

Riječ model ima puno definicija koje opisuju njeno značenje i toliko je često u upotrebi da je ponekad teško objasniti njeno značenje. Model je možda najjednostavnije definisati kao približan prikaz stvarnog sistema ili procesa. Konceptualni model je hipotetski prikaz načina na koji neki sistem ili proces djeluju. Ta hipoteza kvantitativno se može prikazati kao **matematički model**.

Matematički modeli na apstraktan način prikazuju procese kroz jednačine, a fizička svojstva kroz konstante ili koeficijente. Karakterizacija stanja ili njihov potencijal u sistemu se predstavljaju kao varijable.

Većina matematičkih modela, koji su danas u upotrebi, su determinističkog karaktera. Deterministički modeli se temelje na zakonu očuvanja mase, količine gibanja i energije te prikazuju uzročno - posljedične veze. Temeljna pretpostavka je da postoji visoki stepen razumijevanja o procesima koji djeluju u sustavu te je moguće unaprijed odrediti reakcije sistema na bilo koji skup djelovanja.

Deterministički modeli uglavnom potražuju rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina. Tačna rješenja dobivaju se analitičkim rješavanjem no analitički modeli zahtijevaju visok stepen idealizacije parametara i rubnih uslova, klasifikacija po fizikalnim karakteristikama. Heterogenost (prostorna raznolikost) svojstava realne sredine vodotoka ili vodonosni sloja predstavlja važnu osobinu i osnovna je karakteristika svih realnih kontinuiranih akvatičkih ili geoloških sistema. Stoga je uobičajeno koristiti modele sa prostorno i/ ili vremenski varijabilnim parametrima koji omogućavaju vjerniji prikaz realne sredine.

Numeričke metode rješavanja jednačina procesa daju približna rješenja kroz prostornu i vremensku diskretizaciju. U okvirima promatrane modelske domene promjenjiva svojstva te granice i djelovanja vezana za promatrani sustav dane su kao pretpostavljene vrijednosti.

Broj i oblik jednačina koje se rješavaju određuje se temeljem poznavanja dominantnih procesa. Koeficijenti u jednadžbama su pokazatelji svojstava, rubnih uslova i djelovanja na promatrani sistem. Zavisne varijable u jednačinama su pokazatelji stanja sistema i matematički su određene rješenjem jednačina.

Kada se numerički algoritam prikazan u računarskom kodu upotrijebi za rješavanje jedne ili više parcijalnih diferencijalnih jednačina, rezultirajući računalni kod može se smatrati generičkim modelom. Kada se dimenzije diskretizacije mreže, rubni uslovi i koeficijenti filtracije odnose na određeno geografsko područje, tada se dobija karakteristični model područja.

Sposobnost generičkih modela za tačno rješavanje jednadžbi procesa se u pravilu verificira kroz primjenu na pojednostavljenim problemima. Ta sposobnost ne uvjetuje jednaku tačnost kada se isti model primjeni na problem sa složenijom problematikom.

U determinističkim modelima prisutna je kontrola nad svim parametrima i varijablama, a ponašanje tih modela je unaprijed predvidivo. Varijable se odnose na koordinate prostora x , y , z i parametre vremena t . U većini modela, naročito u relativno jednostavnim primjerima, dovoljno je formulirati problem uzevši u obzir samo podskup te četiri varijable.

U ovisnosti o broju prostornih dimenzija, govori se o 0D, 1D, 2D ili 3D modelima.

0D modeli ovisni su o jednoj varijabli i to o vremenu t . 0D modeli podrazumijevaju homogenost sistema, tj. da je trenutno stanje po cijelome kontrolnom volumenu nepromjenjivo. Npr. trenutna koncentracija je u svakoj točki promatranog volumena jednaka. Kako je vrijeme t jedina nezavisna varijabla i u stacionarnom kontrolnom volumenu, analitičkom formulacijom dolazi se do običnih diferencijalnih jednadžbi, u kojima nepoznate funkcije ovise samo o jednoj nezavisnoj varijabli. Ako je nepoznata funkcija, funkcija više varijabli, takvu jednačinu nazivamo parcijalnom diferencijalnom jednadžbom.

Modeli koji nisu ovisni o vremenu nazivaju se stacionarni modeli, a modeli ovisni o vremenu nestacionarni modeli. Do stacionarnog stanja dolazi se u idealiziranim modelima, a neophodan uvjet za stacionarno stanje je taj da su vanjski procesi ili parametri nepromjenjivi u vremenu.

1D modelima promatraju se npr. promjene u vertikalnom ili horizontalnom smjeru sistema, primjer vertikalni ili horizontalni pronos zagađivala ili evaporacije prema površini. Također se procesi u rijekama (maksimalne razine vodostaja ili kretanje zagađivala nizvodno) mogu promatrati 1D modelima. Voda od površinskog vodotoka koja infiltrira u vodonosni sloj može se opisati 1D modelom, uz uslove da su osnovni tok i dimenzije posmatranog prostora konstantne.

1D modeli za stacionarno stanje opisuju se jednostavnim diferencijalnim jednačinama. Modeli nestacionarnog stanja, uključujući barem jedan smjer u prostoru, opisuju se parcijalnim diferencijalnim jednačinama.

2D modeli uključuju dvije prostorne varijable. Primjerice, horizontalni dvodimenzionalni modeli za opisivanje procesa pronosa u kojima je horizontalna dimenzija toka dominantno veća od dubine toka u otvorenim vodotocima ili debljine vodonosnog sloja.

3D modeli koriste se za po smatranje promjena po cijelome promatranom volumenu, za sve tri prostorne varijable. 3D modeli su dosta kompleksni modeli i pogodni su za modeliranje pronosa u okolini izvora zagađivanja koji se pretpostavlja da je uglavnom točkasti. Kod izrade takvih modela pronosa u višedimenzionalnim stacionarnim ili ne stacionarnim problemima, koriste se numerički algoritmi koji najčešće koriste metode konačnih razlika, konačnih volumena ili konačnih elemenata.

Uspostava modela provodi se kroz nekoliko koraka. Proces izrade od prirodnog sistema do odgovarajućeg modela sadrži različite korake, gdje svaki korak ovisi o dobro obavljenom prethodnom koraku. Glavni cilj je da se izradi konceptualni model koji se može opisati matematičkom analizom i kojim se rješavaju diferencijalne jednačine.

Prvi korak je formuliranje koncepta. Koncept se izrađuje iz poznatih ili raspoloživih znanstvenih podataka i ekspertiza, kao i iz podataka koji se dobiju promatranjem predmetnog sustava. Koncept sadrži sve procese koji su neophodni za procjenu dinamike sustava. Izrada konceptijskog modela ne sadrži numeričke podatke.

Primjerice, kod modeliranja procesa u ekologiji, moraju se uključiti znanstvene discipline kao što su: hemija, fizika, biologija, geologija, ekologija, hidrologija i hidraulika.

Slijedeći korak je formulacija konceptualnog modela sa matematičkim izrazima. Funkcije varijabli i parametara vremena i prostora povezane su matematičkim izrazima.

Kombinacijom i transformacijom tih izraza, te korištenjem teoretskih i empirijskih zakona i principa, dolazi se do diferencijalnih jednačbi. U jednostavnim primjerima dolazi se do jedne jednačine, a uopšte se dolazi do cijelog sustava jednačina.

Slijedeći korak u modeliranju je rješavanje sustava jednačina sa kojim se opisuje analizirani proces temeljem analitičkih izraza ili numeričke modelske implementacije.

Povratne petlje u uspostavi modela potrebne su da bi se poboljšali raniji koraci, da bi se ispravile greške i da bi se model prilagodio u pogledu izmjerenih podataka.

Izraz provjera koristi se prilikom testiranja i razvoja proračunskog koda za modeliranje. Kako bi se provjerio pravilan rad proračunskog koda, testiraju se poznati slučajevi kako bi se vidjelo da model daje tačan rezultat. Testiranja se mogu bazirati na jednostavnim naknadnim provjerama, na analitičkim rješenjima i usporedbom s rezultatima drugih modela.

Usporedba rezultata test primjera, naziva se benchmarking ili sustavno vrednovanje, ocjenjivanje. U koracima testiranja provjerava se da li proračunato rješenje donosi rezultat diferencijalnih jednačina. Izraz kalibracija ili baždarenje modela koristi se za proceduru podešavanja parametra modela za specifičnu aplikaciju proračunskog koda. U slučaju da se rezultat provjere ili usporedbe pokaže kao ne zadovoljavajući, po dešavaju se parametri, rade se izmjene matematičkih jednažbi ili se podešava konceptualni model. Ako se rezultatom provjere dokaže da je model tačan, tada se može reći da se model ponaša kao reprezentativni prirodni ili realni sustav. Mora se utvrditi koji se dijelovi realnog sustava prezentiraju numeričkim modelom. Kako model nije identičan reprezentativnom stvarnom sustavu, uvijek su prisutni i stvarni aspekti za koje model nije dostatan. Matematička formulacija mora biti bazirana na dobro koncipiranom modelu i mora biti potpuna.

Doprinos ovog rada je da iz obimne literature iz oblasti mehanike fluida izvrši apstrakt najvažnijih metoda koji su zastupljeni u definisanju matematički modela u oblasti mehanike fluida i da ih prezentira na način.

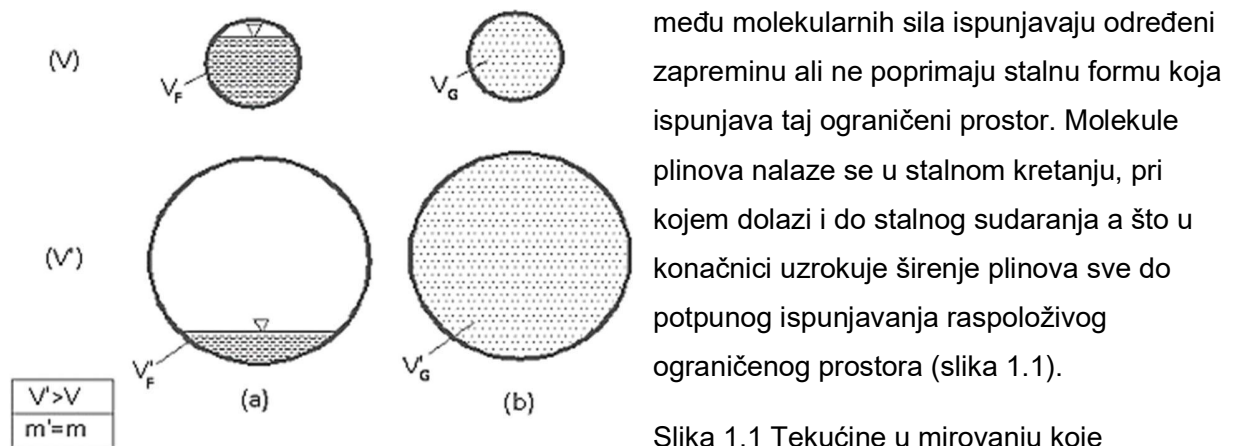
Ovaj rad je pogodna kao i referenca za inženjere i istraživače. Izabrani dijelovi ovog rad također bi bili prikladni za kurs i predavanja iz oblasti o mehanici fluida.

2.0. Karakteristične fizikalne veličine fluida

2.1. Uvod

Osnovna podjela fluida je prema agregatnom stanju, a to su tekućine (kapljevine), pare i plinovi. Dok se pod tekućinama podrazumijevaju fluid koje imaju osobine ukapljanja odnosno formiranja slobodne površine, pare su ustvari plinovi koji se nalaze blizu točke ukapljanja. Para je zasićena ukoliko i pri najmanjem smanjenju temperature dolazi do njezinog ukapljanja (kondezacija), dok je pregrijana para ukoliko je za njeno ukapljanje potreban pad temperature s konačnom vrijednošću kao i odgovarajuće povećanje pritiska. Plinovi su ništa drugo nego jako pregrijane pare. Obzirom da je sve plinove moguće ukapljiti u osnovi i nema razlike između plinova i para.

Pri dovoljno velikoj temperaturi i dovoljno malom pritisku njihovo ponašanje poprima karakteristike idealnog plina. U opštem slučaju kapljevine u ograničenom prostoru zbog jakih



među molekularnih sila ispunjavaju određeni zapreminu ali ne poprimaju stalnu formu koja ispunjava taj ograničeni prostor. Molekule plinova nalaze se u stalnom kretanju, pri kojem dolazi i do stalnog sudaranja a što u konačnici uzrokuje širenje plinova sve do potpunog ispunjavanja raspoloživog ograničenog prostora (slika 1.1).

Slika 1.1 Tekućine u mirovanju koje

ispunjavaju dva spremnika različitih volumena (a - tekućina, b - plin).

U mehanici krutog tijela pojam „nakupljenih“ čestica daje smisaonu podlogu za potrebne opise statike, kinematike i dinamike krutog tijela, no u mehanici tekućina je samo uslovno primjenjiv.

U mehanici tekućina zamišlja se kontinuirano raspodijeljena masa tvari po prostoru, zbog čega se govori o kontinuumu. Osnovna karakteristika kontinuumu je da u svakoj njegovoj prostornoj i vremenskoj koordinati postoji masa. Prema tome umjesto konačno velikog broja nakupljenih čestica u kontinuumu postoji beskonačno veliki broj elementarnih masa koje ostvaruju kontinuirano interakcijsko djelovanje. Zbog toga je kontinuum moguće dijeliti na beskonačno male volumene a da se pri tome ne izgube njegove fizikalne karakteristike.

Naravno, kontinuum je samo jedna idealizirana predstava odnosno model potreban za jednostavnije opisivanje ponašanja stvarnog materijalnog tijela. Slučajeve u kojima se analizira ponašanje tijela na mikroskopskoj razini pri kojoj duljine slobodnog kretanja atoma ili molekula nisu više male naspram dimenzija tijela ne može se rješavati kroz mehaniku kontinuuma.

Uvođenje **pojma kontinuuma** znatno se pojednostavljuje matematički model potreban za opisivanja tekućine u mirovanju ili kretanju i to zbog makroskopskih karakteristika izraženih u vidu neprekinutih funkcija prostora i/ili vremena.

Suprotno krutom tijelu, tekućine su karakterizirane i s pomakom njezinih djelića bez obzira koliko bila mala sila i rad koji se primjenjuju pri njezinu deformiranju. Tekućine se također dijele na homogene i nehomogene (heterogene). Homogene su one koje u svakoj tački prostora imaju iste vrijednosti pojedine fizikalne veličine.

2.2. Promjena gustoće

2.2.1. Osnovne karakteristike

Kapljevina u spremniku čak i pri vrlo visokim pritiscima ostvaruje vrlo malu promjenu zapremine zbog čega se u većini praktičnih inženjerskih problema tretira kao ne stišljiva. Npr. pri promjeni pritiska od 1bar i pri sobnoj temperaturi voda će promijeniti svoju zapreminu za samo 0,005% pa se može usvojiti pretpostavka o njezinoj ne stišljivosti, odnosno konstantnoj gustoći. Ipak, mala elastičnost kapljevine u pojedinim inženjerskim problemima poput hidrauličkog udara igra važnu ulogu te se ne može zanemariti.

S druge strane plinovi, primjerice zrak, generalno se ne mogu tretirati kao ne stišljivi, budući da ostvaruju volumno širenje sve do potpunog popunjavanja prostora omeđenog rubovima unutar kojih se nalaze. Pri tom širenju značajno se mijenja i gustoća plina. Osim toga pri stalnom pritisku promjena zapremine može uslijediti i kao posljedica promjene temperature. Potrebno je skrenuti pažnju i na eksperimentalno dokazanu činjenicu da pri brzinama znatno manjim od brzine zvuka, plinovi trpe vrlo male promjene gustoće, a zbog čega ih je u takovim uslovima moguće smatrati ne stišljivim. Npr. pri strujanju zraka pri atmosferskom pritisku i sobnim temperaturama s brzinama < 55 m/s promjena gustoće je samo 1,5%. Iako i temperatura i pritisak u opštem slučaju imaju ulogu u promjeni gustoće, korištenje pojma kompresibilnost ukazuje na značajniju ulogu pritiska.

2.2.2. Gustoće tekućina

Pojam gustoće po definiciji se odnosi na masenu gustoću ρ u volumenu ΔV u kojem je kontinuirano rasprostranjena masa tekućine Δm .

$$\rho = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \quad ; \quad \rho = \frac{1}{v_v} \quad (1.1)$$

Gustoća je fizikalna veličina kapljevine s dimenzijom m/l^3 odnosno jedinicom kg/m^3 .

Specifični volumen izražava se kao $V_v = dV/dm = 1/\rho$ i kao takav češće se upotrebljava u području termodinamike. U opštem slučaju fizikalne veličine ρ i V_v su ovisne o pritisku p (N/m^2) i temperaturi T (K) odnosno $\rho = f(p,T)$ i $V_v = f^{-1}(p,T)$.

Ukupna promjena gustoće tekućina može se opisati s parcijalnim promjenama pri konstantnoj temperaturi i konstantnom pritisku:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \beta_T dp - \beta_p dT \quad \text{sa} \quad \beta_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T, \quad \beta_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (1.2 \text{ a,b})$$

gdje je:

β_T – izotermni koeficijent stišljivosti ($1/Pa$);

β_p – toplotni koeficijent izduženja ($1/K$);

Između modula elastičnosti tekućine E_F i koeficijenta kompresibilnosti vrijedi odnos $E_F = 1/\beta_T$, a za ne stišljive tekućine vrijedi i $\beta_T = \beta_p = 0$.

Barotropnim tekućinama se nazivaju one stišljive tekućine u kojima gustoća ovisi samo o pritisku $\rho = f(p)$. Pri promatranju ponašanja tekućina pod pojmom adijabatskog procesa podrazumijeva se samo onaj proces u kojem je točno određena masa tekućine toplinski izolirana od okoline pa s njom nema ni toplinske izmjene.

Iz eksperimentalnog istraživanja provedenog s vodom poznato je da se koeficijent stišljivosti β_T vrlo malo mijenja s promjenama temperature i pritiska, odnosno da iznosi $\beta_T \approx 5 \cdot 10^{-10} 1/Pa$, a čime se dobiva i vrijednost modula elastičnosti $E_F \approx 2 \cdot 10^9 Pa$ koja se usvaja u rješavanju većine inženjerskih problema. Nasuprotno tome, toplotni koeficijent izduženja β_p bitno ovisi o temperaturi pa npr. pri pritisku od 1bar i temperaturama 0^0 , 4^0 i $99,6^0 C$ koeficijent β_p poprima vrijednosti $-0,08 \cdot 10^{-3}$, 0 i $0,75 \cdot 10^{-3} 1/K$. Zbog $\beta_p = 0$ pri $T = 4^0 C$ voda ima najveću gustoću. Ova anomalija upravo je i razlog pojavi leda na vodenoj površini.

U tabeli 1.1 prikazane su vrijednosti osnovnih fizičkih parametara za pojedine tekućine.

Tabela 1.1 Vrijednosti fizičkih parametara za neke tekućine pri parametrima: $p = 1\text{bar}$ i $T=0^\circ\text{C}$ te $p = 1\text{bar}$ i $T=100^\circ\text{C}$.

	KAPLJEVINA				PARA				PLIN			
	voda	metanol	živa	voda	zrak	kisik	dušik	vodik	helij	ugljični dioksid		
	H_2O	CH_3O	Hg	H_2O		O_2	N_2	H_2	He	CO_2		
gustoća	ρ $\beta_T \cdot 10^5$ $\beta_p \cdot 10^3$ α_s	810 0,000 1,19 11226	13596 0,000 0,181 284067	999,8 0,0001 -0,085 19945	1,275 1,007 3,674 1,397	1,410 0,987 3,677 1,398	1,234 0,987 3,678 1,402	0,0888 0,999 3,666 1,412	0,176 0,987 3,657 1,668	1,951 1,007 3,746 1,300		
brzina zvuka	c	1185	1455	1412	331	315	337	1261	973	258		
specifična plinska konstanta	R	—	—	—	287,2	259,8	296,8	4124	2077	188,9		
dinamički koeficijent viskoznosti	$\eta \cdot 10^5$ T_A T_B T_S	81,7 1110 -20 —	168,5 160 -96 —	179,3 506 -150 —	1,710 — — 122	1,924 — — 125	1,672 — — 117	0,782 — — -10	1,871 — — 86	1,367 — — 242		
kinem. koef. viskoznosti	$\nu \cdot 10^6$	1,009	0,124	1,794	13,41	13,46	13,37	88,11	104,8	7,006		
specifični toplinski kapacitet	$c_p \cdot 10^{-3}$ $\alpha = c_p/c_v$	2,428 1,226	0,140 1,134	4,217 1,001	1,006 1,402	0,917 1,399	1,041 1,402	14,19 1,410	5,193 1,667	0,827 1,309		
toplinska vodljivost	$\lambda \cdot 10$	2,14	77,9	5,983	0,237	0,243	0,240	1,620	1,453	0,150		
temperaturna vodljivost	$a \cdot 10^6$	0,109	4,09	0,135	18,49	18,54	18,46	128,8	157,0	9,286		
Prandtl-ov broj	Pr T_p	9,25 1970	0,030 533	13,31 2071	0,72 —	0,726 —	0,724 —	0,685 —	0,667 —	0,755 —		
temperatura vrenja	t_s	64,5	357	99,63	—	—	—	—	—	—		

Definicija pojedinih pojmova.

Tekućina (kapljevina), tvar u agregatnom stanju koje se odlikuje lakom promjenom oblika uz istodobnu, gotovo potpunu, ne stišljivost. Poprima oblik posude u kojoj se nalazi, ali ju ne ispunja u cijelosti (kao plin), već oblikuje svoju slobodnu površinu okomitu na smjer vanjskih sila. Posljedica je to strukture u kojoj se molekule tekućine nalaze na stalnim međusobnim razmacima, ali nemaju stalan položaj.

Unutarnji pritisak nastaje zbog djelovanja privlačnih sila među molekulama, sprječava razdvajanje molekula i omogućuje postojanost volumena.

Površinska napetost objašnjava se usmjerenošću rezultante privlačnih među molekularnih sila u površinskome sloju tekućine. Naime, na molekulu koja se nalazi u unutrašnjosti tekućine djeluju privlačne kohezijske sile okolnih molekula u svim mogućim smjerovima, pa se njihovo djelovanje međusobno poništava. Ako se pak molekula nalazi u površinskome sloju (npr. na granici prema zraku), na nju djeluju privlačne sile okolnih molekula u tekućini, dok s druge strane površinskoga sloja takvih sila nema ili su mnogo manje. Zbog toga se javljaju sile kojima su molekule površinskoga sloja čvrsto vezane u tekućini, kao da tvore površinsku opnu. Kada tekućina graniči s plinom, ona zbog napetosti površine nastoji poprimiti sferičan oblik (oblik kapljica), u kojem je razlika površine i volumena (zapremine) najmanji. Međutim, ponašanje tekućine na površini čvrste tvari ovisi i o svojstvima (osobinama) te tvari. Tekućina se na površini čvrste tvari može rasprostrijeti (ako ju vlaži, kao što voda vlaži staklo), može se skupiti u kuglice (ako ju ne vlaži, npr. živa) ili poprimiti oblik razlivenih kapljica.

Viskoznost je unutarnje trenje među slojevima tekućine tijekom strujanja. Ono je za laminarno strujanje to veće što je veća dodirna površina slojeva i njihova relativna brzina te što je manji njihov razmak. Recipročna vrijednost viskoznosti je fluidnost. Odsutnost viskoznosti tekućine naziva se super fluidnost i zapažena je samo u tekućem heliju pri temperaturi do oko 2 K.

Zajednički je naziv za tekućine i plinove fluid, a za tekućine i čvrsta tijela kondenzirana tvar.

Riječ "tekućina" prevedenica je europeizma fluid, a ta je pak riječ iskovana iz latinskog pridjeva fluidus (tekući), koji ima isti korijen kao riječi fluo (teći), flumen (rijeka, tekuća voda općenito), flumineus (riječni), fluvius (tekuća voda) i dr. Isto znači i latinska imenica liquor (koju M. Divković prevodi kao "tekućina, tečnost, Tjtkost"). S njom stoji u vezi glagol liquo (topiti, otopiti, pa i pretakati) i pridjev liquidus (tekući, rastopljen).

No koja je razlika između fluid i liquor? Fluid bi bila tekućina u gibanju, u tečenju. Liquor bi pak bila tekućina u mirovanju, u nekoj posudi. Za riječ “kapljevina” ne nalazimo, međutim, ekvivalenta u latinskom, a koliko mi je poznato, ni u drugim jezicima.

Latinska riječ za kap, gutta ima, osim osnovnog, još samo metaforičko značenje, kao “suza”, “pjega” ili “mrvica”. Kap je očito odijeljeni dio, “komadić”, tekućine, a ne sama tekućina.

Po mome jezičnom osjećaju postoji mala razlika između riječi “tekućina” i “kapljevina”. Imenicu “kapljevina” dovodim u vezu s riječi destillo (lat. kapati), pa bi stoga kapljevina bila tekućina dobivena destilacijom (destilat, kondenzat). U prilog tomu navodim prevedenice riječi destilirati (“prekapati”) i destilirana voda (“prekapana voda”). Odakle je došlo do zabune, dakle do upotrebe riječi “kapljevina”? Rekao bih da to možemo zahvaliti prije svega tehnolozima, koji većinu tekućina dobivaju “prekapavanjem” (destilacijom). Tako shvaćena riječ ima smisla: tekućine dijelimo na otopine i taline, pa i na kapljevine. Izvor iz M. Divković, Latinsko-hrvatski rječnik, Zagreb, 1900. (pretisak Naprijed, Zagreb, 1997.).

2.2.3. Plinovi

Plinovi koji pri kretanju ostvaruju veće promjene u gustoći ne mogu se promatrati kao nestišljive tekućine a promjena gustoće je u funkciji tlaka i temperature $\rho = f(p,T)$. Veza između fizikalnih veličina T , p , v i ρ naziva se **termička jednadžba stanja (Boyle, Gay-Lussac, Marotte)**:

$$p v_v = RT, \quad p = \rho RT, \quad \frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}; \quad \frac{\rho}{\rho_b} = \frac{p}{p_b} \frac{T_b}{T} \quad (\text{plin}) \quad (1.3a,b,c ; d)$$

gdje je:

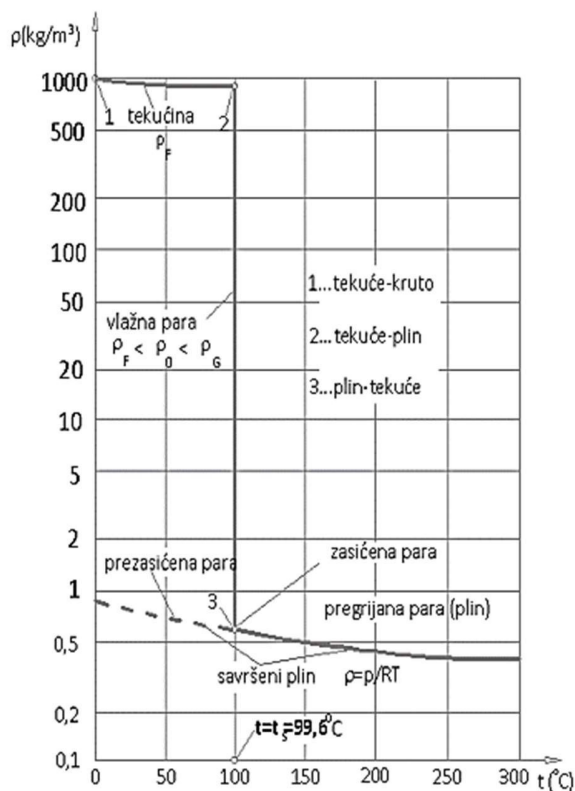
$R = R/M$ – specifična plinska konstanta pojedinog plina (J/kg K);

R – univerzalna plinska konstanta = 8,3143 J/mol K;

M – molekularna masa (kg/kmol);

ρ_b – referentna gustoća pri referentnoj temperaturi T_b i referentnom tlaku p_b .

Važno je napomenuti da gornja jednadžba definira zakon u graničnom području koje je obilježeno s vrlo malim tlakovima $p \rightarrow 0$ i ne pre niskim temperaturama. **Plinovi koji se ponašaju prema termičkim jednadžbama stanja nazivaju se i idealni plinovi.**



Pri analizi kretanja pregrijane pare također se može koristiti idealizacija u njezinom opisu u kojem se pregrijana para promatra kao idealan plin. Kod blago pregrijanih para (plinovi u blizini točke ukapljivanja) nastupa odstupanje od ponašanja po zakonima definiranim jednadžbom 1.3 zbog čega se uvodi i proširenje jednadžbe stanja za idealne plinove s dodatnom van der Waals-ovom jednadžbom stanja.

Na slici 1.2 dan je prikaz promjene gustoće vode i prelazak u vodenu paru pri promjeni temperature T (zagrijavanje pri konstantnom tlaku $p = 1 \text{ bar}$). U prikazanom slučaju s malim tlakovima termička jednadžba stanja 1.3 zadovoljava potrebe proračuna gustoća pregrijane pare.

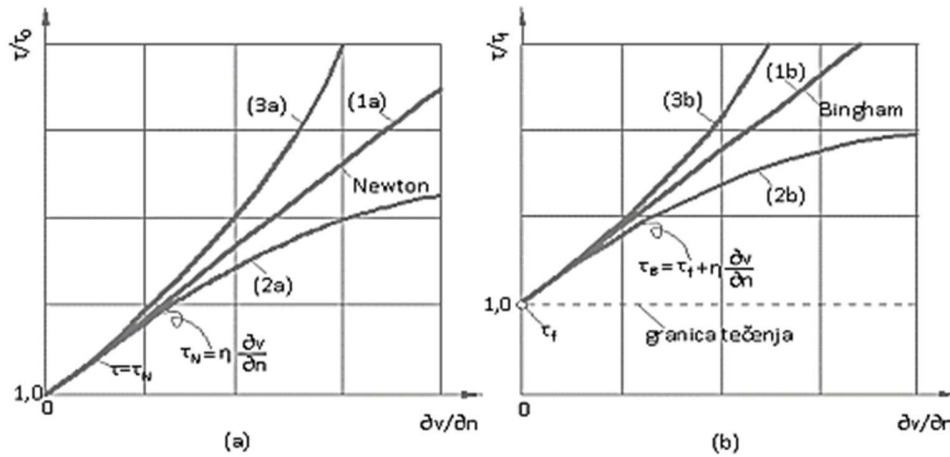
Slika 1.2 Prikaz promjene gustoće vode i prelazak u vodenu paru pri promjeni temperature T (zagrijavanje pri konstantnom tlaku $p = 1 \text{ bar}$).

2.3. Trenje u tekućinama

Iskustvo i eksperimentalna djelatnost pokazali su da se u nekim slučajevima tečenja utjecaj trenja može zanemariti i ispustiti iz jednadžbi koje opisuju ponašanje toka tekućine. U tim slučajevima govori se o tečenju idealne odnosno bezviskozne tekućine. Isto tako iz iskustva dobivenog na temelju eksperimenata poznato je da, primjerice u slučaju opstrujavanja tekućine oko nekog tijela ili kretanja tijela kroz tekućinu, postoji sila tekućine na tijelo i obratno. Ta sila je posljedica viskoznosti odnosno unutarnjeg trenja kao temeljnog svojstva realne tekućine. Isto tako, pri bilo kojem vidu tečenja, uslijed međusobnog djelovanja susjednih djelića tekućine pojavljuje se i njihova deformacija, a što također ukazuje na prisustvo naprezanja uzrokovanih trenjem. U tehničkom smislu trenje predstavlja vrlo važan segment u analizi tečenja tekućina budući da je ono i uzročnik nastalih gubitaka mehaničke energije.

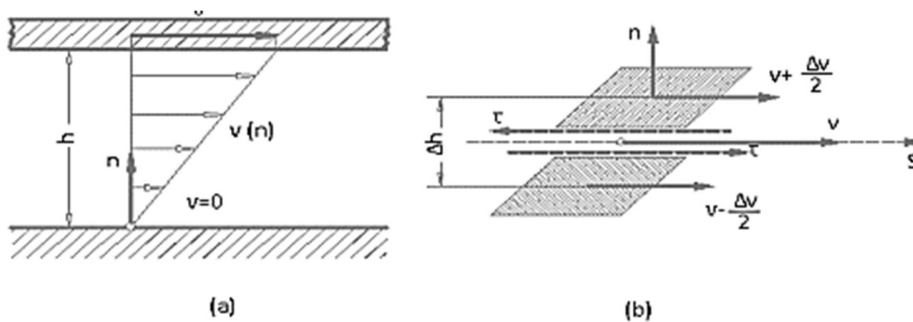
Obzirom da trenje pokazuje različite vidove pojavnosti, realne tekućine se dijele na Newton-ove tekućine i anomalno viskozne tekućine (ne Newton-ove tekućine).

Eksperimentalna disciplina koja se bavi proučavanjem i analizom funkcijskih odnosa između deformacija i naprezanja uslijed pojave trenja u tekućinama naziva se reologija.



Slika 1.3 Ovisnosti između tangencijalnih naprezanja i promjene brzine po normali za Newtonove tekućine (1a), Bingman-ova tekućina (1b), strukturno viskozne tekućine (2a,b), dilatacijske tekućine (3a,b).

Već je Isak Newton zaključio da osim «suhog» trenja koje se pojavljuje pri kretanju čvrstog tijela, pri kretanju tekućina postoji viskoznost odnosno unutarnje trenje između djelića tekućine. To trenje je približno neovisno o prisutnim normalnim naprezanjima i proporcionalno je razlici brzina između djelića tekućine.



Slika 1.4 Prikaz raspodjele brzine u laminarnom toku i u profilu realne Newton-ove tekućine između podloge u mirovanju i duge ploče koja se kreće s brzinom v_0 te između dva djelića tekućine.

Na slici 1.4 a, dat je prikaz profila brzina u tekućini koja se nalazi između podloge u mirovanju i vrlo duge paralelne ploče na vrlo bliskoj udaljenosti h koja se pomiče jednolikom brzinom v_0 .

Pritisak je konstantan u cijelom prostoru ispunjenom s tekućinom između dvije ploče. Brzina čestice tekućine uz podlogu je $v = 0$ dok čestica tekućine priljubljena ispod ploče u kretanju ima brzinu $v = v_0$. Na proizvoljnom položaju između ploče u kretanju čestica tekućine ima brzinu $v = (v_0 / h) n$. Kako bi takvo kretanje bilo održivo očigledno je da na podlozi gornje ploče djeluje jedna tangencijalna sila u smjeru njezinog kretanja a koja je u ravnoteži sa silama trenja u tekućini ispod nje. Na temelju eksperimenata dobiven je i zaključak da je tangencijalno naprezanje τ ispod ploče proporcionalno brzini v_0 i obrnuto proporcionalno udaljenosti od podloge h a koeficijent proporcionalnosti označen je s η i ovisi o tekućini koja se analizira. Nadalje, zaključak razmatranja je važeći i za cijelo područje između ploče i podloge. Prema slici 1.4b dva susjedna djelića tekućine na normali prema smjeru tečenja imaju brzine $v+\Delta v/2$ (gornji) odnosno $v-\Delta v/2$ (doljnji). Kroz unutarnji otpor gornji djelić s većom brzinom deformira se isto kao i doljnji djelić a pri čemu se gornji djelić usporava odnosno doljnji ubrzava. Pri tome tangencijalno naprezanje definirano je na sljedeći način:

$$\tau = \eta \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta n} = \eta \frac{\partial v}{\partial n} \quad (1.4)$$

Na temelju eksperimenata (empirije) koeficijent proporcionalnosti η označava **dinamički koeficijent viskoznosti** s jedinicom Pas koji ima različite vrijednosti ovisno o promatranoj tekućini. Dinamički koeficijent viskoznosti jako ovisi o temperaturi i manje o pritisku pa se može usvojiti i pretpostavka $\eta = f(p,T) \approx f(T)$.

Jednačina 1.4 naziva se i konstitutivnom jednadžbom Newton - ove tekućine pri laminarnom tečenju.

Ukoliko se dinamički koeficijent viskoznosti podijeli s gustoćom dobiva se novi koeficijent viskoznosti koji zbog neovisnosti o gustoći postaje kinematska veličina a naziva se **kinematski koeficijent viskoznosti** u s pripadnom jedinicom (m^2/s):

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (1.5)$$

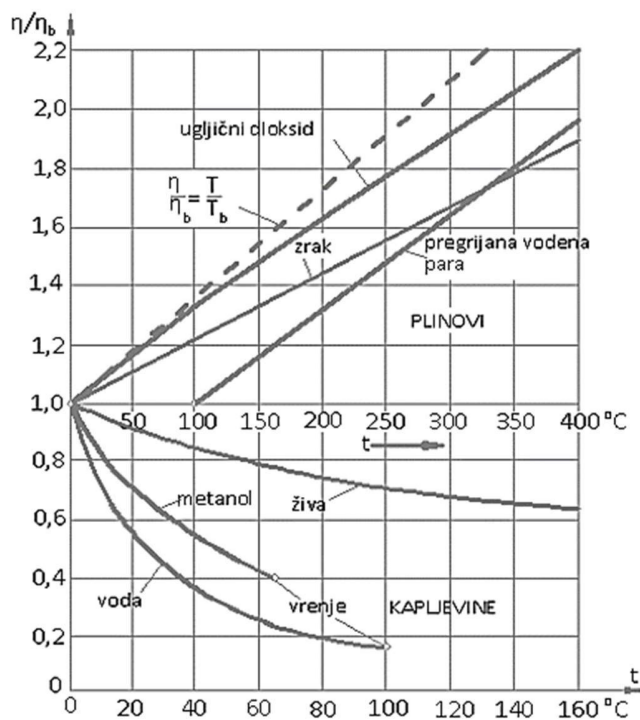
Za različite tekućine u rasponu temperatura $0 < T < 100$ °C dinamički koeficijent viskoznosti η približno je neovisan o pritisku, a promjene njegove vrijednosti izražene su sljedećom jednačinom:

$$\frac{\eta}{\eta_b} = \exp\left(\frac{T_A}{T + T_B} - \frac{T_A}{T_b + T_b}\right) \quad (1.6)$$

gdje je:

η_b – referentna vrijednost pri referentnom pritisku $p_b = 1 \text{ bar}$ i referentnoj temperaturi $T_b = 0^\circ\text{C}$ (za vodu, metanol i živu vidi tablicu 1.1);

T_A, T_B – konstante pojedine tekućine (eksperimentalno određene – vidi tablicu 1.1).



Kako i iz gornje jednadžbe proizlazi, s povećanjem temperature, vrijednost dinamičkog koeficijenta viskoznosti η pada i redovito se s porastom temperature smanjuje. (slika 1.5).

Na slici 1.5 je i prikaz promjena vrijednosti dinamičkog koeficijenta viskoznosti naspram referentnih vrijednosti η_b pri referentnom tlaku $p_b = 1 \text{ bar}$ i referentnoj temperaturi $T_b = 0^\circ\text{C}$ (vidi tablicu 1.1) za neke plinove i tekućine. Iz dijagrama sa slike 1.4 razvidno je da za plinove pri povećanju temperature vrijednost dinamičkog koeficijenta raste η (slika 1.5).

Slika 1.5 Prikaz promjena vrijednosti dinamičkog koeficijenta viskoznosti naspram referentnih vrijednosti η_b pri referentnom pritisku $T_b = 1 \text{ bar}$ i referentnoj temperaturi $p_b = 0^\circ\text{C}$.

U praktičnim problemima često puta se usvaja aproksimativni linearni odnos između temperature i viskoznosti prema jednadžbi 1.7c.

Za plinove također vrijedi da je dinamički koeficijent viskoznosti η približno neovisan o pritisku, a njegove vrijednosti pri različitim temperaturama izražene su poluempirijskom jednačinom:

$$\frac{\eta}{\eta_b} = \frac{T_b + T_s}{T + T_s} \left(\frac{T}{T_b} \right)^{3/2}; \quad \frac{\eta}{\eta_b} \approx \left(\frac{T}{T_b} \right)^\omega \approx \frac{T}{T_b} \approx T \quad (1.7a;b,c)$$

gdje je:

T_s – Southerland-ova konstanta (eksperimentalno određena – vidi tablicu 1.1);

ω - koeficijent s vrijednostima koje se aproksimativno mogu odrediti s $\omega = 1/2 + T_s / (T_b + T_s)$.

2.3.1. Viskoznost mazivog ulja

Motorno ulje je u radu stalno izloženo velikim smičućim naprezanjima, visokim temperaturama i nečistoćama (produkti izgaranja). To je danas pogotovo izraženo jer se u razvoju automobila i motora teži povećanju snage i specifičnog opterećenja uz što manji zapreminu i težinu motora. Veličina unutrašnjeg trenja je u idealnom slučaju ovisna jedino o pritisku p i temperaturi T . U tom je slučaju uspostavljena brzina smicanja tekućine du/dy koja je proporcionalna smičnom naprezanju τ . Iz te dvije veličine možemo definirati dinamičku viskoznost η pri konstantnom pritisku i temperaturi:

$$\tau = \frac{F}{A} = \eta \cdot \frac{dv_x}{dy} \text{ [Pa]} \quad (1.8)$$

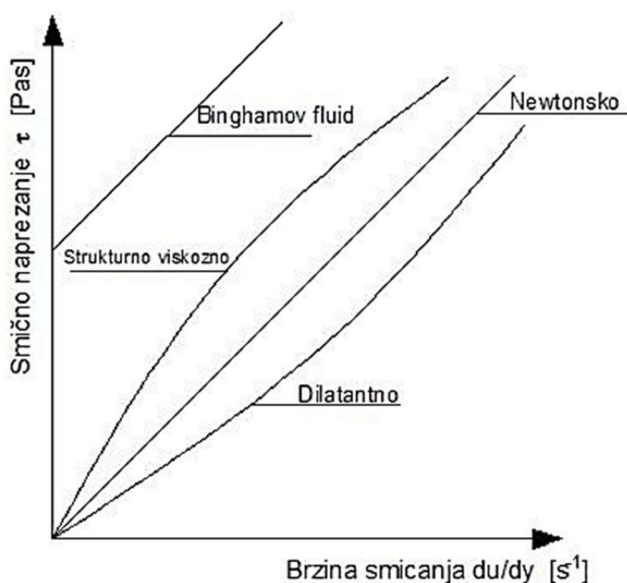
pri čemu je:

η - dinamička viskoznost, Pas

τ - smično naprezanje, Pa

du/dy - brzina smicanja, s^{-1} .

Svi fluidi koji se ponašaju prema ovome zakonu nazivaju se newtonski fluidi. Newtonski fluid zadržava konstantnu viskoznost u svakom sloju smicanja, te nastavlja tok bez obzira na sile koje djeluju na njega. Postoje fluidi koji se ne ponašaju po Newtonovom zakonu trenja, pošto njihova viskoznost ovisi o brzini smicanja du/dy , to jest smičnom naprezanju τ i nazivaju se ne-newtonski fluidi. Kod ne-newtonskog fluida viskoznost ovisi osim o temperaturi T i pritisku p još i o brzini smicanja. Kod ne newtonskog fluida miješanje može stvoriti prazninu ili uzrokovati stanjivanje fluida. Takva svojstva imaju fluidi poput majoneze ili pudinga.



Kod ne newtonskih fluida viskoznost se mijenja ovisno o primjenjenoj sili te je nije moguće precizno definirati, time takvi fluidi ne zadovoljavaju gore navedenu jednačinu (1.8)

Slika 1.6. Prikaz ovisnosti smičnog naprezanja i brzine smicanja.

Linearna ovisnost između τ i du/dy osim kod newtonskih fluida, također postoji još i kod drugih fluida kada se savlada minimalno smično naprezanje i postigne ustaljenost tečenja kod takozvanih Binghamovih fluida. Njima pripadaju mazive masti. Ako brzina smicanja raste eksponencijalno s temperaturom, tada se radi o padu viskoznosti s porastom smičnog naprezanja. Takvi fluidi se u užem smislu označavaju kao strukturno viskozni fluidi. Suprotno ponašanje, tj. očvršćivanje s porastom smičnog naprezanja, označava se kao dilatantni fluidi.

2.3.2 Ovisnost viskoznosti o temperaturi

Viskoznost mazivih ulja opada s porastom temperature brzo i po određenoj zakonitosti. Viskozno - temperaturnim ponašanjima je potrebno posvetiti posebnu pažnju, prije svega kod mazivih ulja (naročito motorna i ulja za zupčaničke prenosnike) koja svoju funkciju moraju ispunjavati u vrlo širokom temperaturnom području.

Manje promjene viskoznosti s povišenjem temperature određuju kvalitetu ulja. Dodavanje određenih aditiva (poboljšivača indeksa viskoznosti) ili sintetskih komponenti, doprinijelo je da viskozno-temperaturna ponašanja nekog mazivog ulja postanu što prihvatljivija. Da bi se omogućilo grafičko izračunavanje viskoznosti kod drugih temperatura, nego što je temperatura mjerenja, moraju se viskozno-temperaturna ponašanja opisati nekom formulom koja omogućava njegovo linearno predstavljanje. Često se za to koristi približna jednačina Walthera i Ubbelohdea:

$$\lg \lg(\nu + c) = K - m \lg T \quad (1.9)$$

gdje je:

ν - kinematička viskoznost, mm^2/s

T - temperatura, K

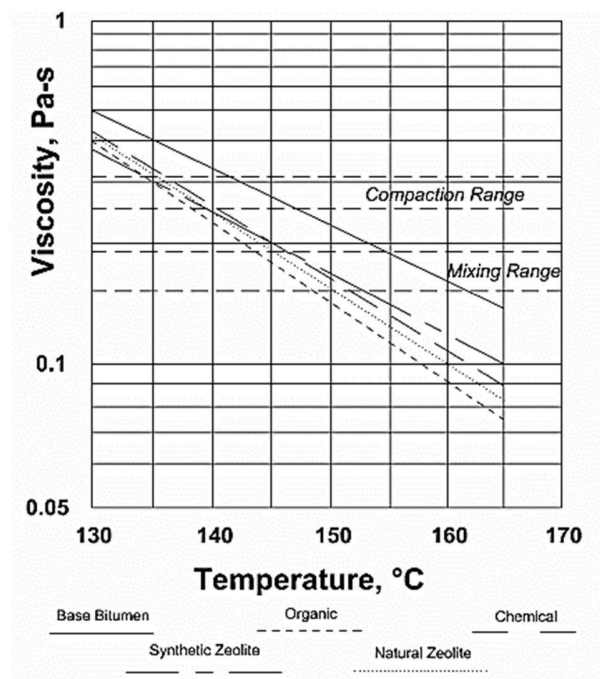
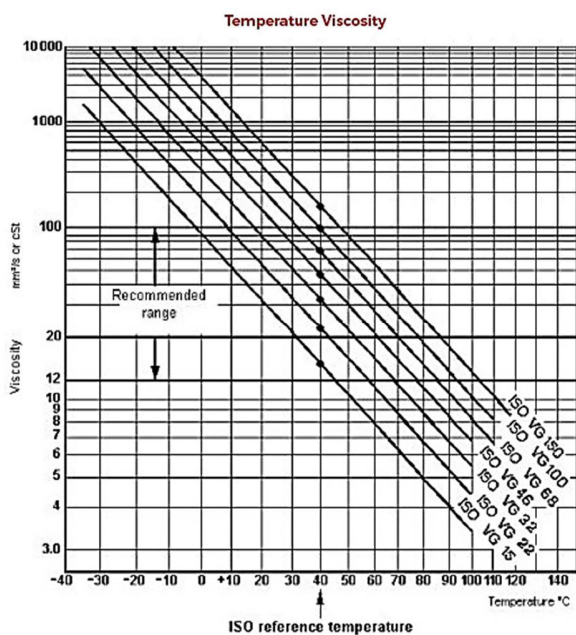
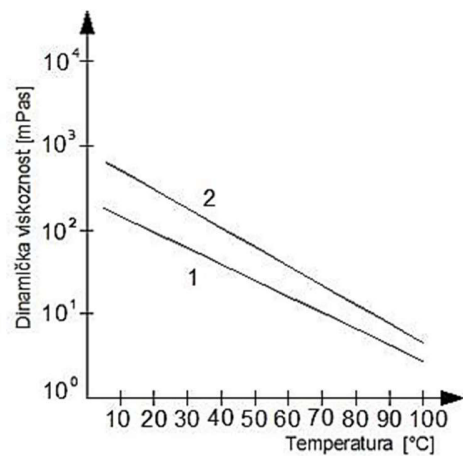
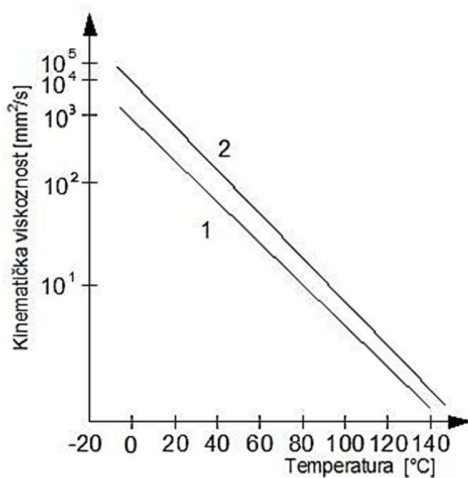
m – koeficijent nagiba pravca

c – konstanta (za mineralna ulja 0,6 - 0,9, po DIN-u 53017 iznosi 0,8).

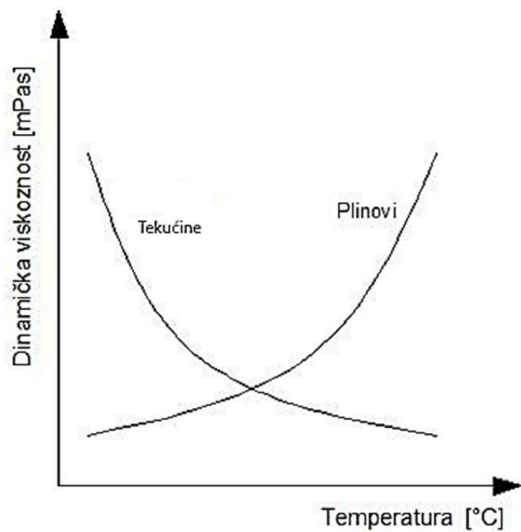
Krivulje viskoznosti u logaritamskom mjerilu su približno pravocrtne linije. Time se viskozno-temperaturno ponašanje nekog ulja obuhvaća određivanjem viskoznosti kod dvije temperature. Odnos viskoznosti i gustoće, dakle kinematička viskoznost, nanosi se za dvije temperature, čime se dobiva pravac koji služi kao karakteristika viskozno-temperaturnog ponašanja. Ovo linearno prikazivanje je pouzdano jedino za temperature između 20 °C i 100 °C.

Na osnovu Walther - Ubbelohdeove jednačine napravljeni su svi ASTM dijagrami za izračunavanje ovisnosti kinematičke viskoznosti o temperaturi, koji se danas široko primjenjuju. Istina je da oni opisuju ponašanje mazivih ulja (posebno motornih i ulja za zupčaničke prijenosnike) tako dobro da se na osnovu dvije egzaktne izmjerene vrijednosti kinematičke viskoznosti mogu interpolirati s velikom točnošću u širokim temperaturnim granicama.

Slika 1.7. Viskozno – temperaturni pravci 1 kinematičke viskoznosti i 2 dinamičke viskoznosti (1- parafinsko ulje, 2 – naftensko ulje), 3 ASTM dijagrami za izračunavanje ovisnosti kinematičke viskoznosti o temperaturi, 4 grafikon viskoznosti i temperature za bazu i WMA koji uključuju bitumene.



Pri normalnom pritisku zraka viskoznost gasova za razliku od tkućina raste s porastom temperature. Uzrok tome je što je kod fluida dominantna sila kohezije, odnosno



međumolekularna sila koja opada s porastom temperature pa samim time opada i viskoznost. Nasuprot tome kod plinova je dominantna difuzija molekula među slojevima. Difuzija uzrokuje izmjenu impulsa i time izjednačava brzine susjednih slojeva, što je ekvivalentno sili trenja među slojevima, odnosno javlja se viskoznost. Utjecaj difuzije u plinovima puno je manji od utjecaja međumolekularnih sila u kapljevinama tako da u odnosu na njih plinovi pokazuju znatno manju viskoznost.

Slika 1.8. Prikaz ovisnosti viskoznosti plinova i fluida o temperaturi.

Manji iznos viskoznosti znači manji otpor mazivog ulja što sa sobom povlači manje gubitke snage motora. S druge pak strane, veći iznos viskoznosti bolje štiti motor i njegove pokretne dijelove od trošenja.

2.3.3 Ovisnost viskoznosti o pritisku

Viskoznost mineralnih ulja kao i sintetičkih ulja povećava se s pritiskom. Učinak pritiska na viskoznost mineralnih ulja značajan je samo pri relativno visokom tlaku, kao što je elasto-hidrodinamičko podmazivanje točkastih ili linijskih kontakata u zupčanicima ili ležajevima valjaka. Učinak tlaka uzima se u obzir za analizu podmazivanja samo ako maksimalni tlak prelazi 7000kPa (oko 1000psi). U analizi hidrodinamičkih ležajeva dnevnika, učinci viskoznosti i pritiska obično se zanemaruju. Međutim, u visoko opterećenim hidrodinamičkim ležajevima omjer ekscentričnosti može biti relativno visok. U takvim slučajevima, maksimalni tlak (blizu područja minimalne debljine folije) može biti iznad 7000kPa. Ali u takvim je slučajevima temperatura pri tome relativno visoka regija, a taj učinak kompenzira svako povećanje viskoznosti pritiskom. Međutim, kod elasto-hidrodinamičkog podmazivanja kugličnih ležajeva, zupčanika i valjka maksimalni je tlak mnogo veći i u analizi se mora uzeti u obzir rastuća viskoznost. Pod vrlo visokim tlakom, iznad 140.000kPa (20 000psi), određena ulja postaju plastična kruta tvar.

Povećanje pritiska povećava se gustoću molekula fluida, a time i njegovu viskoznost. Zbog male kompresibilnosti tekućina za veće povećanje viskoznosti je potreban veliki pritisak.

Barus (1893) uveo je slijedeći približni eksponencijalni odnos ovisnost viskoznosti o pritisku može se izraziti jednačinom:

$$\eta_p = \eta_0 \cdot e^{\alpha p}, \quad [\text{mPas}] \quad (1.10)$$

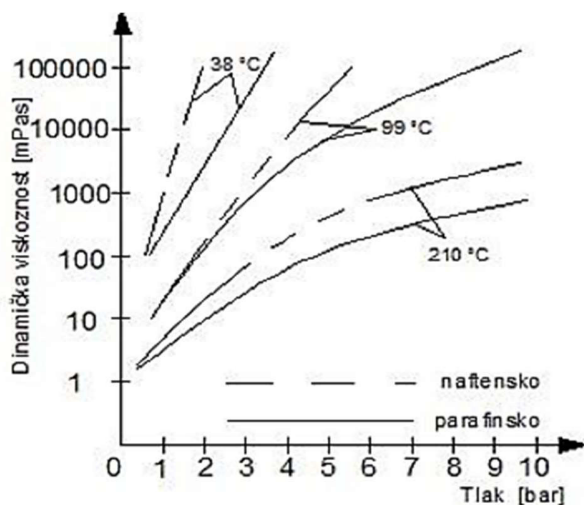
gdje je:

η_p - viskoznost kod posmatranog pritiska p , mPas;

η_0 - viskoznost kod atmosferskog pritiska, mPas

α – koeficijent pritiska - viskoznosti, koji zavisi o radnoj temperaturi, (m^2/N).

$$\alpha = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{d\eta}{dp} \quad (1.11)$$



Određivanje ovisnosti viskoznosti o pritisku nije sasvim jednostavno, budući da α ovisi o strukturi ispitivane fluida. Naročite poteškoće u pogledu izračunavanja α postoje kod mineralnih ulja čija molekulska struktura općenito nije poznata, pošto se radi o smjesi mnogobrojnih ugljikovodika. Porastom temperature smanjuje se ovisnost viskoznosti o pritisku, a porastom sadržaja aromata i naftena povećava.

Slika 1.9. Ovisnost viskoznosti mineralnih ulja o pritisku.

Vrijednosti koeficijenta pritiska i viskoznosti, α (m^2/N), za različite lubrikante maziva su izmjerene. Te su vrijednosti navedene u tabeli 1.2.

Bearing Design in Machinery: Engineering Tribology and Lubrication 1st Edition Avraham Harnoy, 46 strana.

TABLE 1.2. Pressure-Viscosity Coefficient, α [m^2/N], for Various Lubricants

Fluid	Temperature, t_m		
	38°C	99°C	149°C
Ester	1.28×10^{-8}	0.987×10^{-8}	0.851×10^{-8}
Formulated ester	1.37	1.00	0.874
Polyalkyl aromatic	1.58	1.25	1.01
Synthetic paraffinic oil	1.77	1.51	1.09
Synthetic paraffinic oil	1.99	1.51	1.29
Synthetic paraffinic oil plus antiwear additive	1.81	1.37	1.13
Synthetic paraffinic oil plus antiwear additive	1.96	1.55	1.25
C-ether	1.80	0.980	0.795
Superrefined naphthenic mineral oil	2.51	1.54	1.27
Synthetic hydrocarbon (traction fluid)	3.12	1.71	0.937
Fluorinated polyether	4.17	3.24	3.02

Source: Jones et al., 1975.

Bila je tačnija jednačina za širi raspon pritisaka koji je predložio Rhoelands (1966.), a nedavno se koristio za elastohidro dinamička analiza. Međutim, budući da Barusova jednačina ima jednostavnu eksponencijalnost oblik, bio je osnova većine analitičkih analiza.

Postoji više vrsta viskoznosti i to: dinamička, kinematička i volumenska viskoznost. Dinamička viskoznost je koeficijent unutrašnjeg trenja čestica fluida i izražava se u Pas ($1 \text{ Pa} = 1,4504 \times 10^{-4} \text{ psi}$). Kinematička predstavlja odnos dinamičke viskoznosti i specifične gustoće fluida, a izražava se u m^2/s . Volumenska viskoznost (često nazvana druga viskoznost) je važna za efekte gdje je bitna stišljivost fluida. Primjer su udarni valovi i širenje zvukova. Volumenska viskoznost jednoatomnih gasovima jednaka je nuli, a u strujanjima gdje je brzina promjene volumena čestica fluida (odnosno gustoće fluida) mala, koeficijent volumenske viskoznosti se može zanemariti.

U opšte za opisivanje stišljivost fluida koristi se volumni modul stišljivosti, koji prestavlja omjer promjene pritiska i time izazvane relativne promjene volumena fluida (promjena volumena izražena po jedinici volumena):

$$B = \frac{dp}{-\left(\frac{dV}{V}\right)} \quad (1.12)$$

Negativni predznak uzima u obzir činjenicu da se povećanjem pritiska volumen fluida smanjuje. Okrene li se ovu definiciju, promjena pritiska d_p izaziva sljedeću promjenu volumena:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dp}{B} \quad (1.13)$$

Ako su promjene pritska malene, a volumni modul stišljivosti velik, može se rezultirajuća promjena volumena zanemariti. To je slučaj kod tekućina. Za plinove je volumni modul stišljivost znatno manji i uz to ovisi o termodinamičkom procesu kojem je plin podvrgnut, pa se uopšteno ne može zanemariti. Primjerice u izotermnom procesu je:

$$B = p \quad (1.14)$$

a u adijabatskom (γ je omjer toplinskih kapaciteta plina):

$$B = \gamma p \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad (1.15)$$

volumni modul stišljivosti tekućini obično se određuje iz brzine širenja zvuka u tekućini:

$$B = \frac{v_o^2}{\rho} \quad (1.16)$$

2.3.4 Viskoznost u funkciji napona smicanja $\eta = f(\tau)$

Već je spomenuto da Njutnove tekućine pokazuju linearni odnos između napona smicanja i brzine smicanja i da je viskoznost njutnovih tekućina konstantna i neovisna o brzini smicanja. Za redovna mineralna i sintetička ulja to je odgovarajuća pretpostavka, ali ta mast nije točna za masti. Mineralna ulja koja sadrže aditive dugolančanih polimera, kao što su višegradna ulja su ne newtonska tekućina, u smislu da je viskoznost funkcija brzine smicanja. Ove tekućine pokazuju svojstva stanjivanja smicanja; naime, viskoznost se smanjuje brzinom smicanja. Disciplina rheologije usredotočena je na ispitivanje karakteristika protoka ne-njutonskih tekućina, a učinjeno je mnogo istraživačkog rada na reologiji maziva.

Sljedeća jednaka jednačina zakona snage koristi se široko za opisivanje viskoznosti ne-njutonskih tekućina:

$$\eta = \eta_0 \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right|^{n-1} \quad (0 < n < 1) \quad (1.17)$$

Jednačina napona smicanja je:

$$\tau = \eta_0 \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (0 < n < 1) \quad (1.18)$$

Apsolutna vrijednost brzine smicanja koristi se jer smicalni napon može biti pozitivan ili negativna, dok viskoznost ostaje pozitivna. Napon smicanja, τ , ima isto znak kao brzina smicanja prema jednačini (1.18).

2.3.5. Viskoelastična maziva

Polimerna talina, kao i tekućine s aditivima dugolančanih polimera u otopinama mineralnih ulja, pokazuju viskozna i elastična svojstva te se nazivaju viskoelastičnim tekućinama. Eksperimenti s viskoelastičnim tekućinama pokazuju da smicalni napon nije samo funkcija trenutne brzine smicanja, već i memorijska funkcija povijesti brzine smicanja. Ako se napon smicanja naglo ukloni, brzina smicanja će se vremenom polako smanjivati. Taj se učinak naziva opuštanje stresa. Opuštanje smičnog naprezanja odvija se preko određeno prosječno vremensko razdoblje, koje se naziva i vrijeme opuštanja. Karakteristike takvih tekućina su prilično složene, ali u principu, Maxwell-ov model opruge i spremnika za pranje (viskozni prigušivač) u seriji može približiti viskoelastično ponašanje.

Pod produžetkom opruga ima samo elastičnu silu, dok instrument za upravljanje ima samo viskoznu otpornost. Prema Maxwell modelu, u jednostavnom smicanju, $v = v(y)$, opisuje napon smicanja i brzinu smicanja sa sljedećom jednačinom:

$$\tau + \lambda \frac{\partial \tau}{\partial t} = \eta \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.19)$$

Ovdje je λ vrijeme opuštanja (ima jedinicu vremena). Drugi pojam s vremenom opuštanja opisuje karakteristiku fluid-opuštanja stresa uz viskozne karakteristike Newtonovih tekućina.

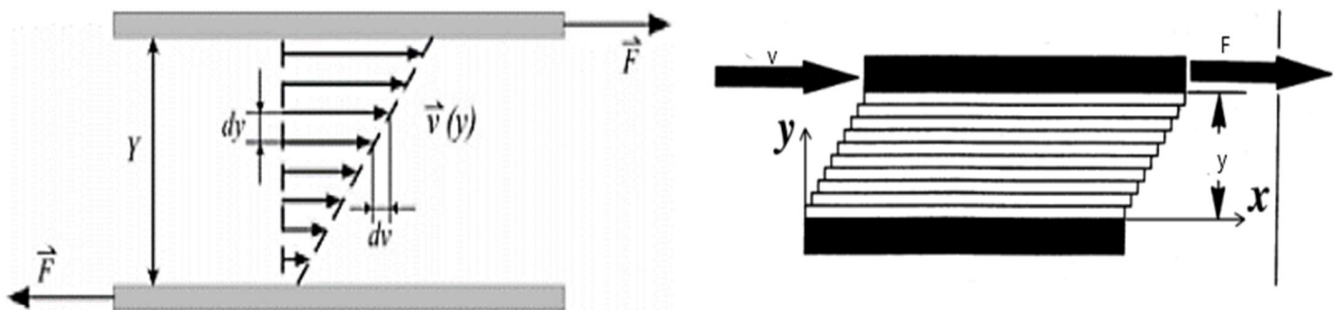
Kao primjer: U Njutnovom toku tekućine, ako je smično naprezanje, t sinusoidno, to će rezultirati brzinom sinusoidnog smicanja u fazi s oscilacijama napona smicanja.

Međutim, prema Maxwell modelu, doći će do faznog zastoja između smicanja napona, t i brzine sinusoidnog smicanja. Analiza hidrodinamičkog podmazivanja viskoelastičnim tekućinama predstavljena je u poglavlju ne - Njutnove fluide i viskoelastični elementi.

2.4. Viskoznost fluida

Fluid se opire vanjskim smičnim silama putem viskoznih napetosti, koja se javljaju kao reakcija na brzinu deformacije (u elastičnim tijelima su te napetosti definirane Hookovim zakonom, kao reakcija na deformaciju). U njutnovskim fluidima viskozna napetosti su linearno razmjerne brzini deformacije fluida. Koeficijent razmjernosti se naziva (dinamička) viskoznost fluida η .

Viskoznost je fizikalno svojstvo fluida, koje pokazuje njegov otpor ka tečenju, a ovisi o termodinamičkom stanju fluida. Kod plinova s porastom temperature viskoznost raste, a kod kapljevine opada (slika 1.8).



Slika 1.10 Prikaz raspodjele brzine u laminarnom toku i u profilu realne Newton-ove tekućine između podloge u mirovanju i duge ploče koja se kreće s brzinom v , pomjera nje slojeva fluida.

Disipativna sila koja djeluje pri gibanju fluida je sila unutarnjeg trenja između slojeva fluida te između stijenki cijevi i fluida. Upravo zbog pojave sila viskoznog trenja između slojeva fluida i trenja između stijenki cijevi i fluida, realni fluidi razlikuju se od idealnih.

Na taj način se pomiču samo slojevi tekućine koji su blizu gornjoj površini te je njihov pomak veći što su bliži gornjoj površini. Nakon nekog vremena površina će se kretati brzinom $v(y)$. To znači da je vučna sila F silom trenja – F .

Zbog adhezije sloj tekućine koji su u samu površinu je prilijepljen uz površinu i kreće se zajedno s njom. Ovaj sloj djeluje manjom silom adhezije na susjedni niži i povlači ga za sobom u smjeru kretanja. Međutim, na susjedni sloj djeluje i sila unutarnjeg trenja (viskoznost) između slojeva tekućine pa se on kreće sporije. To se događa i između ostalih slojeva. Uslijed toga brzine pojedinih slojeva tekućine postaju sve manje i opadaju s dubinom tekućine ispod gornje površine tako da će sloj tekućine uz donju stijenkicu praktički mirovati (slika 1.10).

Ovakvo kretanje fluida se naziva laminarnim ili slojevitim, te se pri takvom kretanju slojevi fluida se ne miješaju. Sila F je proporcionalna dodirnoj površini S među slojevima te je veća što se brzina v više mijenja sa udaljenosti y od ploče. Prema tome, sila viskoznog trenja između dva susjedna sloja fluida, čija je površina S i koji su međusobno udaljeni za dy je:

$$F = \eta \cdot S \frac{dv}{dy} \quad (1.20)$$

Relacija (1.20) vrijedi samo za laminarno, odnosno slojevito gibanje fluida (Njutnov kriterij). Pri tome je η koeficijent dinamičke viskoznosti koji ovisi o vrsti fluida i o temperaturi. Koeficijent dinamičke viskoznosti se mijenja s temperaturom prema relaciji:

$$\eta = Ae^{\frac{E}{RT}} \quad (1.21)$$

gdje su A i E konstante koje ovise o vrsti fluida, R gasna konstanta, a T temperatura fluida.

Mjerna jedinica, prema SI-sustavu, za koeficijent dinamičke viskoznosti je Pas (paskal sekunda). Koeficijent dinamičke viskoznosti ima malu vrijednost za fluide koji lako protječu, npr. vodu i benzin, dok veliku vrijednost ima za fluide koji teško protječu, npr. glicerin i ulje.

Fluid	Dinamička viskoznost / η [Pa · s]			
	0 °C	20 °C	50 °C	100 °C
Voda	$17,9 \cdot 10^{-4}$	$10,0 \cdot 10^{-4}$	$5,5 \cdot 10^{-4}$	$2,8 \cdot 10^{-4}$
Etanol	$17,8 \cdot 10^{-4}$	$12,0 \cdot 10^{-4}$	$7,0 \cdot 10^{-4}$	$3,3 \cdot 10^{-4}$
Glicerin	12.1	1.48	0.18	-
Zrak	$17,9 \cdot 10^{-6}$	$18,5 \cdot 10^{-6}$	$19,3 \cdot 10^{-6}$	$21,2 \cdot 10^{-6}$

Tabela 1.3. Tablične vrijednosti dinamičke viskoznosti fluida ovisno o temperaturi.

Koeficijent u kinematičke viskoznosti fluida određen je relacijom:

$$\nu = \eta / \rho \quad (1.5)$$

gdje je:

η - koeficijent dinamičke viskoznosti.

ρ - gustoća fluida.

Mjerna jedinica za koeficijent kinematičke viskoznosti m^2/s .

Fluid	Kinematička viskoznost / ν [m^2/s]			
	0 °C	20 °C	50 °C	100 °C
Voda	$17,9 \cdot 10^{-6}$	$1,00 \cdot 10^{-6}$	$0,55 \cdot 10^{-6}$	$0,29 \cdot 10^{-6}$
Etanol	$2,2 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^{-6}$	$0,9 \cdot 10^{-6}$	$0,45 \cdot 10^{-6}$
Glicerin	$9,5 \cdot 10^{-3}$	$1,17 \cdot 10^{-3}$	$0,15 \cdot 10^{-3}$	-
Zrak	$13,7 \cdot 10^{-6}$	$15,6 \cdot 10^{-6}$	$18,5 \cdot 10^{-6}$	$23,7 \cdot 10^{-6}$

Tabela 1.4. Tablične vrijednosti kinematičke viskoznosti ovisno o temperaturi.

2.5 Klasifikacija motornih ulja prema viskoznosti, SAE klasifikacija

SAE-klasifikacija motornih ulja prema viskoznosti predstavlja najrašireniji sustav klasifikacije maziva u automobilske industriji i prometu. Godine 1926. Američko udruženje inženjera koje se bavilo razvojem automobilske industrije SAE (Society of Automotive Engineers) podijelilo je ulja po viskoznosti u dvije osnovne skupine:

- monogradna – sezonska, moraju se mijenjati prema godišnjim dobima - zima/ljeto
- multigradna – koriste se tijekom cijele godine

Zimska ulja s oznakom W – propisana je maksimalna viskoznost kod niskih temperatura i minimalna viskoznost kod 100 °C.

Ljetna ulja – propisana je minimalna i maksimalna viskoznost kod 100 °C.

Multigradna ulja – ulja čija viskoznost kod niskih temperatura udovoljava propisima za zimska ulja, a kod 100 °C zahtjevima za ljetna. Multigradna ulja koriste se u podnebljima gdje su karakteristike klime takve da je neophodna upotreba zimskih i ljetnih ulja.

Prema navedenoj kvalifikaciji definiraju se dvije kategorije viskoznosti motornih ulja:

1. gradacije označene slovom W definirane su:
 - maksimalnom dinamičkom viskoznosti na niskim temperaturama.

Viskoznost se određuje prema proceduri ASTM D 2602 pri određenoj temperaturi test metodom za prividnu viskoznost motornih ulja na niskim temperaturama, koristeći uređaj Cold Cranking Simulator (CCS)

- najvećom graničnom temperaturom pumpabilnosti (ASTM D 3829) koja govori o sposobnosti dobavljanja ulja do uljne pumpe i uspostavljanju odgovarajućeg tlaka motornog ulja u početnoj fazi rada motora, tj. u hladnom startu motora pri niskim temperaturama kad treba zadovoljiti zahtjeve za viskoznošću
 - minimalnom kinematičkom viskoznosti u mm^2/s na 100 °C koja se mjeri prema ASTM D 445
2. gradacije koje ne sadrže slovo W definirane su određivanjem kinematičke viskoznosti u mm^2/s na 100 °C koja se određuje prema normi ASTM D 445. Kako je svaka W gradacija definirana maksimalnom dinamičkom viskoznosti pri niskim temperaturama i najvećom graničnom temperaturom pumpabilnosti, postoji mogućnost da neko ulje zadovolji zahtjevima više od jedne W gradacije, pa se onda označava najnižom

gradacijom. Isto tako, ulje može odgovarati i gradaciji bez slova W, npr. SAE 40, te je takvo ulje multigradno s oznakom npr. 5W-40.

SAE viskozna grupa	Viskoznost na niskim temperaturama		Viskoznost na visokim temperaturama		Granična temperatura pumpabilnosti ASTM D 3829 °C max.
	mPas najviše	na. °C	100 °C ASTMD D 445 mm ² /s		
			min.	max.	
0W	6200	-35	3,8	-	-40
5W	6600	-30	3,8	-	-35
10W	7000	-25	4,1	-	-30
15W	7000	-20	5,6	-	-25
20W	9500	-15	5,6	-	-20
25W	13000	-10	9,3	-	-15

Tabela 1.5. Klasifikacija motornih ulja prema viskoznosti, SAE klasifikacija.

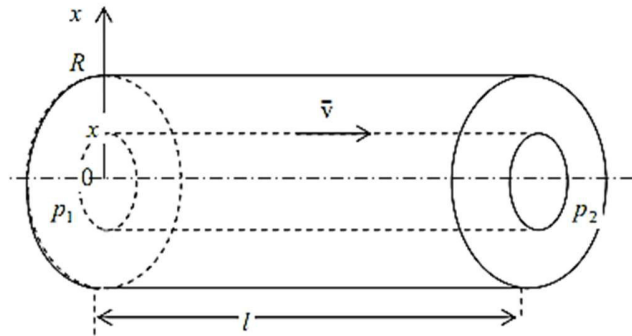
2.6 Metode određivanja viskoznosti

Za mjerenje viskoznosti koriste se uređaji viskozimetri. Ovisno o tome je li fluid njutnovski ili ne njutnovski postoje različiti viskozimetri:

1. viskozimetri za ispitivanje njutnovih tekućina:
 - a) kapilarni viskozimetar,
 - b) viskozimetar zasnovan na padanju kuglice,
 - c) rotacijski viskozimetar.
2. viskozimetri za ispitivanje ne njutnovih fluida:
 - a) rotacijski viskozimetar,
 - b) viskozimetar sa kupom i pločom.

2.6.1 Zakoni viskoznog toka i određivanje viskoznog toka

Ako po smatramo stacionarno proticanje ne stišljivog fluida kroz cijev radijusa R i dužine l pod dejstvom razlike pritiska koji djeluje na krajevima cijevi $P_1 - P_2$, gdje pritisak P_1 djeluje na početku cijevi, a P_2 na njenom kraju (slika 1.11). Pretpostavimo da je brzina fluida uz zid cijev jednaka nuli i da prema centru raste, gdje dostiže maksimalnu vrijednost.



Slika 1.11. Proticanje tečnosti kroz cijev pri razlici pritiska P_1 i P_2 .

Vučna sila kojom razlika pritiska djeluje na fluidna rastojanju r od centra cijevi je F_r i jednaka je proizvodu iz razlike pritiska i površine na koju ova razlika djeluje:

$$F = \pi r^2 (P_1 - P_2) \quad (1.22)$$

Proticanju fluida se suprotstavlja viskozna sila unutrašnjeg trenja koja je prema Njutnovom zakonu jednaka:

$$F_r^v = -\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r l \quad (1.23)$$

gdje je $2\pi r l$ površina omotača cilindra radijusa r . Pri stacionarnom protoku ove dvije sile su jedanke tako da se dobije:

$$dv = -\frac{(P_1 - P_2)}{2\eta l} r dr \quad (1.24)$$

Posle integriranja posljednje jednačene dobije se sljedeća relacija:

$$v = \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta l} (R^2 - r^2) \quad (1.25)$$

Ako je zapremina fluida dV koja protokne kroz cilindar radijusa r i debljine dr , u vremenu t jednaka je:

$$dV = vt 2\pi r dr = \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta l} \pi t (R^2 r - r^3) dr \quad (1.26)$$

tada će ukupna zapremina koja istekne kroz čitav cilindar u vremenu t dobiti integracijom gornje jednačine:

$$dV = \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta l} \pi t \int_0^R (R^2 r - r^3) dr = \frac{(P_1 - P_2)}{8\eta l} \pi R^4 t \quad (1.27)$$

što predstavlja **Poazejevu jednačinu** za ne stišljive fluide. Da bi ova jednačena zavisila i za gasove, treba uzeti u obzir zavisnost zapremine gasa od pritiska, stoga se zapremina fluida koja je mjerena na pritisku P_0 mora korigirati, tako da će zapremina pri nekom srednjem pritisku $(P_1 + P_2)/2$ biti:

$$V = \frac{(P_1 - P_2)}{8\eta l} \pi R^4 t \frac{(P_1 + P_2)}{2P_0} = \frac{(P_1^2 - P_2^2)}{16\eta l P_0} \pi R^4 t \quad (1.28)$$

i jednačina predstavlja **Poazejevu jednačinu za gasove**.

Na osnovu Poazejeve jednačine može se odrediti apsolutni koeficijent viskoznosti. Međutim najčešće se vrše relativna određivanja nepoznate tečnosti u odnosu na tečnost poznatog koeficijenta viskoznosti. Ako se mjeri vreme za koje iste zapremine tečnosti ističu kroz vertikalnu, kapilarnu cijev iste duzine i radijusa, tada je relativna viskoznost:

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\Delta P_1 t_1}{\Delta P_2 t_2} = \frac{\rho_1 t_1}{\rho_2 t_2} \quad (1.29)$$

Kako razlika pritisaka na krajevima cijevi potiče od razlike hidrostatičkih pritisaka i kako se mjeri vreme isticanja tečnosti za istu razliku visina, to će razlika pritisaka biti za različite tečnosti razmjerna samo gustinama tih tečnosti.

Drugi metoda se sastoji u mjerjenju vremena padanja čvrste kuglice ili kapljice tečnosti koja je nemešljiva sa tečnošću čiji se koeficijent određuje. Kuglica mase m , gustine ρ pada kroz tečnost gustine ρ' pod dejstvom sile zemljine teže koja tezi vertikalno naniže dok u suprotnom smeru deluje sila potiska, tako da je rezultujuća sila koja deluje vertikalno naniže:

$$F_1 = 2/3\pi r^3 (\rho - \rho') g \quad (1.30)$$

Nasuprot ove sile djeluje viskozna sila suprotnog smera koja se suprotavlja kretanju kuglice kroz tečnost. Stoks je pokazao da ova sila, F_2 , koja deluje na sferu radijusa r , i koja se kreće brzinom v kroz fluid koeficijent viskoznosti iznosi:

$$F_2 = 6\pi r \eta v \quad (1.31)$$

Kada su ove dvije sile jednakog intezitea dolazi do kretanja kuglice konstantnom brzinom, koja je povezana sa koeficijentom viskoznosti sljedećom relacijom:

$$\eta = \frac{2r^2 g(\rho - \rho')}{9v} \quad (1.32)$$

Korišćenjem ovog izraza može se odrediti apsolutni koeficijent viskoznosti ako su poznati poluprečnik kuglice, njena gustina i gustina tečnosti kroz koju se kuglica kreće, dok se mjerenjem vremena za koje kuglica pređe određeno poznato rastojanje nalazi brzina kretanja kuglice. Češće se određuje relativni koeficijent viskoznosti:

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{(\rho - \rho'_1)t_1}{(\rho - \rho'_2)t_2} \quad (1.33)$$

Voda čiji je koeficijent viskoznosti na 20°C iznosi 0,01002 P najčešće se koristi kao standardna tečnost.

2.6.2 Određivanje viskoznosti viskozi metrom

2.6.2.1 Mjerenje viskoznosti po Couette-u

Koeficijent viskoznosti se može odrediti pomoću viskozimetra po Keutu. Tečnost čiji se koeficijent viskoznosti meri, ispunjava cilindar koji rotira, a u koji je smeštena cilindrična ploča koja visi na torzionoj žici. Meri se sila torzije kojom tečnost deluje na ploču i izaziva uvrtnje žice. Umesto cilindrične ploče može se koristiti cilindar koji je uronjen u tečnost koja se nalazi između spoljašnjeg cilindra koji rotira i unutrašnjeg koji je nepokretan i visi o torziju žicu. U ovom slučaju se određuje relativna viskoznost, a kao standard se najčešće koristi voda.

2.6.2.2 Mjerenje viskoznosti po Ostwald-u - Kapilarni viskozimetar

Viskoznost newtonskih fluida određuje se mjerenjem vremena koje je potrebno da ispitivana količina protекne kroz kapilaru između dvije oznake pri određenoj temperaturi pod utjecajem gravitacijske sile. Kapilarni viskozimetar se još najčešće naziva Ostwaldov viskozimetar.

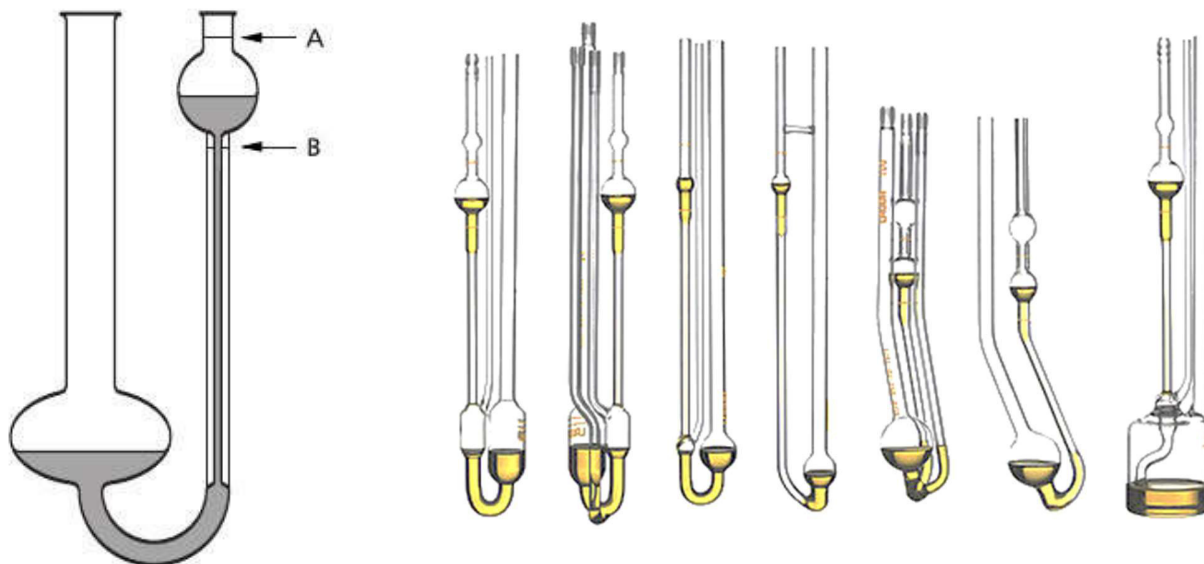
Ostwaldov viskozimetar poznat i kao viskozimetar s U-cijevi ili kapilarni viskozimetar, je uređaj za mjerenje viskoziteta tekućina poznate gustoće. Određivanje viskoziteta određuje se na mjerenju istjecanja tekućine kroz kapilaru (zabilježi se vrijeme kad razina tekućine stigne od točke A do točke B).

Ostwaldov viskozimetar izmislio je njemački kemičar Wilhelm Ostwald (1853.-1932.). Instrument se prvo baždari tekućinom poznatog viskoziteta kao što je čista (deionizirana) voda.

Poznavajući viskozitet jedne tekućine lako se izračuna viskozitet druge:

$$\eta_1 = \eta_2 \cdot \frac{\rho_1 t_1}{\rho_2 t_2} \quad (1.34)$$

gdje je: η_1 , η_2 viskoziteti ispitivane tekućine i vode a ρ_1 , ρ_2 njihove gustoće.



Slika 1.12. Kapilarni (Ostwaldovi) viskozimetri, A-gornja oznaka, B-donja oznaka.

Vrijeme protjecanja kroz kapilaru između dvije oznake ne smije biti kraće od 200 s da bi mjerenje bilo valjano. Kinematička viskoznost se izračunava na način da se vrijeme protjecanja t izraženo u sekundama pomnoži s konstantom kapilare C pa je prema:

$$\nu = C \cdot t \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right] \quad (1.35)$$

gdje je:

ν - kinematička viskoznost , m^2/s ,

t - vrijeme protjecanja, s.

Dinamička viskoznost se dobiva kao umnožak dobivene kinematičke viskoznosti i gustoće ispitivanog fluida pri istoj temperaturi kojoj je mjerena kinematička viskoznost pa je prema:

$$\eta = \rho \cdot \nu, [\text{Pas}] \quad (1.36)$$

gdje je:

ρ - gustoća , g/cm^3 ,

ν - kinematička viskoznost , cSt.

Raspon kinematičkog koeficijenta s obzirom na odabrani tip viskozimetra i proizvođača kreće se od 0.2 – 300000 cSt.

Za određivanje viskoznosti iz brzine isticanja tečnosti koristi se Ostvaldov (Ostwald) viskozimetar (slika 1.12).

To je relativna metoda, jer se upoređuje brzina isticanja određene zapremine tečnosti poznate viskoznosti, standarda (npr. vode) sa brzinom isticanja iste zapremine tečnosti nepoznate viskoznosti na istoj temperaturi.

Merenje viskoziteta Ostwaldovim viskozimetrom može se izvesti na osnovu brzine isticanja tečnosti kroz kapilaru. Tokom eksperimenta određuje se relativni viskozitet koji predstavlja odnos viskoziteta ispitivane tečnosti prema viskozitetu standardne tečnosti. Kao standardna tečnost obično se koristi voda.

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\rho_1 t_1}{\rho_2 t_2} \quad (1.36)$$

$$\eta_1 = \eta_2 \frac{\rho_1 t_1}{\rho_2 t_2} \quad (1.37)$$

gdje je:

η_1 -vizkoznost tečnosti

η_2 -viskoznost standarda

ρ_1 -gustina ispitivane tečnosti na datoj temperaturi

ρ_2 -gustina standarda na datoj temperaturi

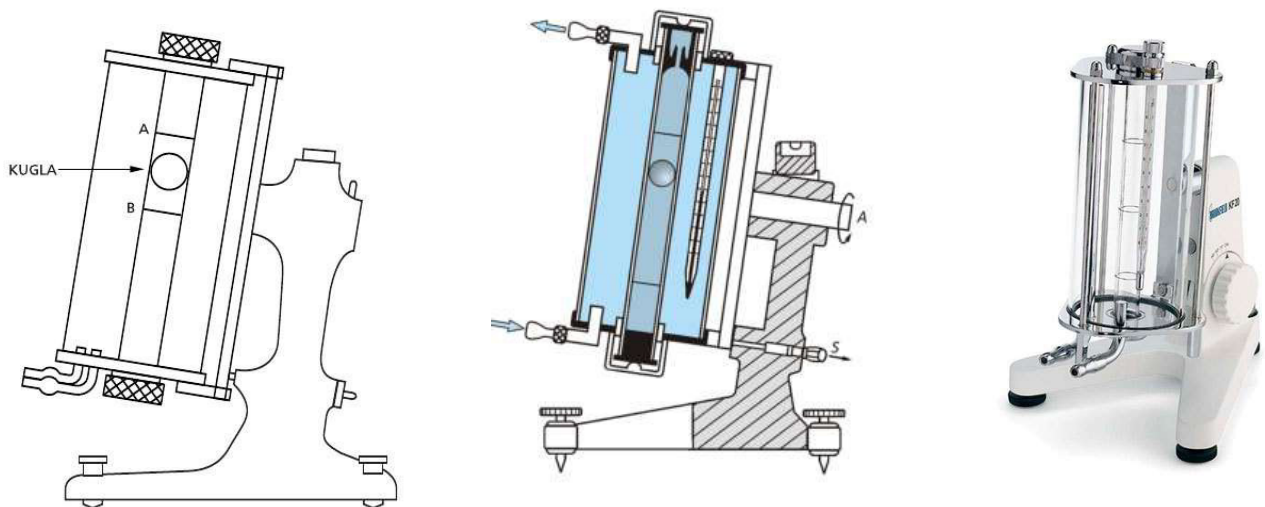
t_1, t_2 -vreme isticaja ispitivane tečnosti, odnosno standarda

Viskozimetar se sastoji iz dva rezervoara A i B, spojeni kapilarom, kroz koju protiče tečnost iz rezervoara A u rezervoar B.

Eksperimentalno se mjeri vreme koje je potrebno da iz rezervoara A kroz kapilaru isteče određeni volumen tečnosti od oznaka „A“ do oznake „B“. Prvo se mjeri vreme isticanja standardne tečnosti, a zatim vreme isticanja istog volumena ispitivane tečnosti.

2.6.2.3 Viskozimetar zasnovan na padanju kuglice Određivanje viskoznosti po Höppler-u

Za određivanje viskoznosti po ovoj metodi koristi se Heplerov viskozimetar (sl. 3). Ova metoda zasnovana je na Stoksovom zakonu. Cijev je napunjena tečnošću poznate gustine. Kuglica, poznate gustine, pada kroz cijev čiji je prečnik neznatno veći od prečnika kuglice. Meri se vrijeme padanja kuglice između označenih linija A i B. Kompletan postupak izvodi se uz termostatiranje. Prethodno je potrebno (u uputstvu za uređaj) naći vrijednost konstante K za kuglice poznatih gustina i prečnika.



Slika 1.13. Heplerov viskozimetar.

Viskozimetar se spoji na termostat i temperatura podesi na 20 °C. Zatim se pomoću libela na aparatu kontroliše da li je u ispravnom položaju. Nakon toga se otvore gornji i donji poklopac mjerne cijevi i ispere se ispitivanom tečnošću. Zatvori se donji poklopac, cijev se ispuni ispitivanom tečnošću, pincetom uzme kuglica, isplahne i stavi u cijev pazeći pri tome da na njoj ne ostane mjehurić vazduha. Nakon što se gornji otvor mjerne cijevi zatvori, pričekava se da se tečnost dostigne određenu temperaturu i zaokrene viskozimetar za 180 °. Kad kuglica padne na dno, viskozimetar se ponovno zaokrene za 180 °, te se sa štopericom mjeri vreme padanja kuglice od gornje do donje crte na mjerne cijevi (100,0 mm). Ponovnim zakretanjem nastavlja se sa mjerenjem sve dotle, dok se dva uzastopna mjerenja ne razlikuju više od $\pm 0,1$ sek.

Princip ovog viskozimetra zasnovan je na padanju staklene ili čelične kuglice kroz skoro vertikalno postavljenu staklenu cijev koja je ispunjena uzorkom na konstantnoj temperaturi. Kugla je poznate gustoće i promjera, a brzina kojom ona pada je obrnuto proporcionalna viskoznosti uzorka. Ovaj viskozimetar se još naziva Höppler-ov viskozimetar. Izračunavanje dinamičke viskoznosti slijedi iz Stokesovog zakona:

$$F_d = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot R \cdot v \text{ [N]} \quad (1.31)$$

gdje je:

F_d – sila trenja, N,

η - dinamički koeficijent viskoznosti, Pas,

R – radijus sferičnog predmeta, m,

v – brzina padanja kuglice, m/s.

Kuglica pada pod utjecajem gravitacijske sile:

$$F_1 = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot (\rho_k - \rho_t) \cdot g \text{ [N]} \quad (1.38)$$

Izjednačavanjem (1.31) i (1.39) slijedi izraz za koeficijent viskoznosti:

$$\eta = \frac{\frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot (\rho_k - \rho_t) \cdot g}{6 \cdot \pi \cdot R \cdot \frac{s}{t}} = \frac{\frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot g}{6 \cdot \pi \cdot R \cdot s} \cdot (\rho_k - \rho_t) \cdot t = K \cdot (\rho_k - \rho_t) \cdot t, \text{ [Pas]} \quad (1.39)$$

gdje je:

η - dinamički koeficijent viskoznosti, (Pas)

K - konstanta kuglice, (mPa s cm³ / g s)

t – vrijeme padanja kuglice, (s)

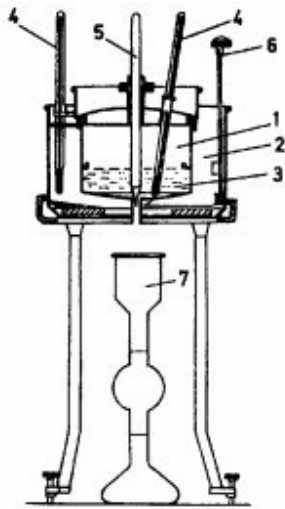
ρ_k - gustoća kuglice, (g/cm³)

ρ_t - gustoća uzorka, (g/cm³).

Kuglice koje se koriste mogu biti različite gustoće i promjera, a raspon koeficijenta viskoznosti se kreće od 0,05 – 20 Pas. Vrijeme padanja kuglice propisano je prema DIN 53015, 2001.

2.6.2.4 Određivanje viskoziteta Englerovim viskozi metrom

Engelovim viskozi metrom (slika 1.14) određuje se relativan viskozitet i izražava se u Englerovim stepenima E° . Međutim, zbog čitavog niza konstruktivnih nedostataka, rezultati mjerenja Engerovim viskozimetrom su manje tačni od rezultata mjerenja dobijenih Osvaldovim ili Heplerovim viskozi metrom. Zbog toga nije dozvoljeno preračunavanje Englerovih stepena u jedinice kimetičkog viskoziteta, dok za obrnuto preračunavanje ne postoje nikakve smetnje. Najčešće se primjenjuje kod ispitivanja viskoznosti ulja.



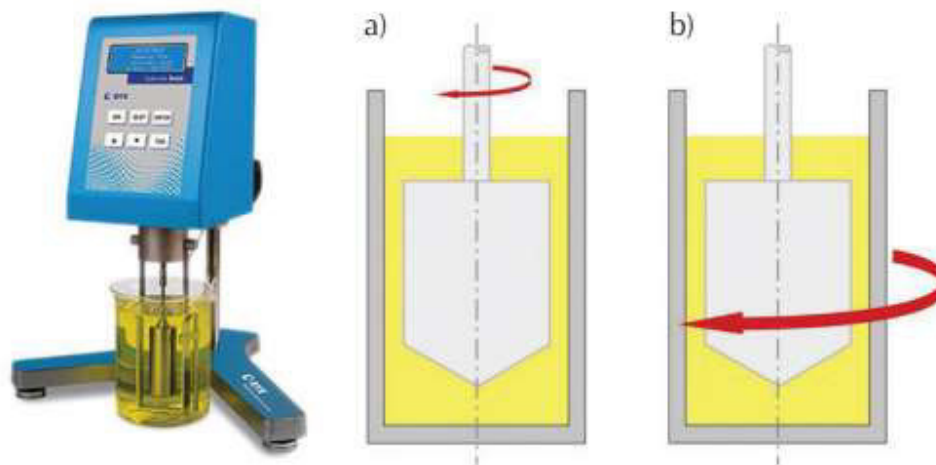
Slika 1.14. Enaglerov viskozimetar. 1.unutrašnji sud sa ulje, 2.spoljašnji sud za vodu, 3.ulje koje se ispituje, 4.termometri, 5.zatvarač za isticanje ulja, 6.mešalica, 7.sud za isticanje.

Suština ispitivanja se sastoji u tome da se vrši uspoređenje vremena isticanja 200 cm³ ispitivanog ulja, sa vremenom isticanja iste količine destilovane vode na 20 °C. Viskoznost se najčešće određuje na temperaturama 30, 50, 70 i 100°C. U unutrašnji sud uspe se 200 cm³ ispitivanog ulja, koje se zagrije do temperature ispitivanja (npr. t = 50°C). Nakon toga, vadi se zatvarač i štopericom izmjeri vrijeme isticanja ulja kroz otvor viskozimetra. Zatim se postupak ponavlja sa destilovanom vodom. U unutrašnji sud uspe se 200 cm³ destilovane vode koja se zagrije na 20°C, nakon čega se mjeri vreme isticanja vode. Viskoznost ulja dobija se iz odnosa vremena isticanja ulja na ispitivanoj temperaturi i vremena isticanja destilivane vode na 20°C. Izražava se u stepenima Englera, a računa se preko obrasca:

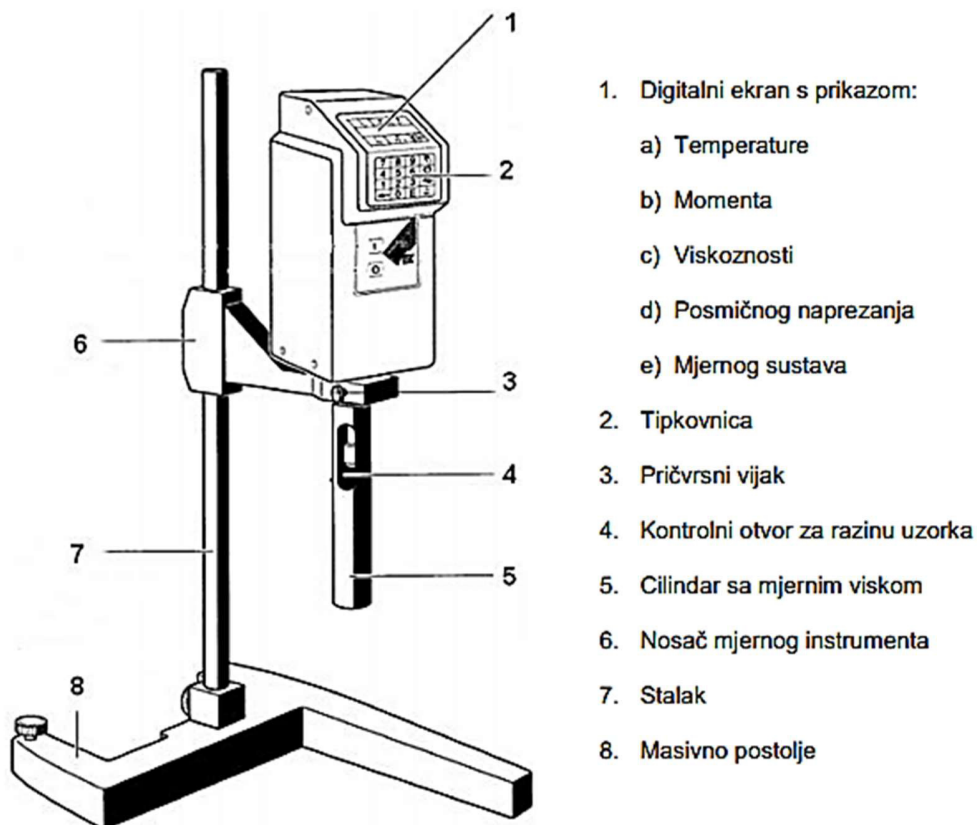
$$\eta = \frac{t_{ulja}}{t_{vode}} \text{ [}^\circ\text{E]} \quad (1.40)$$

2.6.2.5 Rotacijski viskozimetar

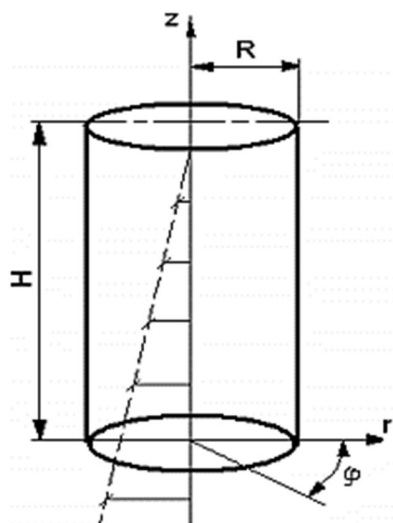
Rotacijski viskozimetar služi za određivanje dinamičkog viskoziteta η . Moguće je mjeriti apsolutni viskozitet uz standardna rotirajuća tijela, kao i relativni viskozitet koji se često koristi za komparativna mjerenja kvalitete u procesima proizvodnje. Princip mjerenja zasniva se na momentu koji je potreban da se zadrži konstantna brzina vrtnje cilindričnog viska koji je uronjen u ispitni uzorak pri konstantnoj temperaturi pri čemu se mjeri relativna otpornost na rotaciju. Izmjereni moment i izmjerena brzina se koriste za određivanje viskoznosti η [Pas]. Za podešavanje i održavanje temperature koristi se temperaturna kupka s vodom u koju je uronjen grijač, i koja okružuje i prenosi temperaturu na ispitivani uzorak.



Slika 1.15. a) Viskozimetar na Searleovom načelu – motor okreće mjerni plovak unutar posude ispunjene uzorkom; b) Viskozimetar na Couetteovom načelu – motor okreće posudu s uzorkom oko fiksnog plovka.



Slika 1.16. Rotacijski viskozimetar.



Mjerna glava i mjerna cijev čvrsto su povezane, a mjerna jedinica pokretana je snagom elektromotora. U mjernu cijev ulivena je potrebna količina uzorka, a za mjerenje je primjenjen pločasti visak koji odgovara rasponu viskoznosti za konkretni slučaj. Kod različitih brzina vrtnje mjernog viska izmjeri se odgovarajući moment, te se s tim vrijednostima pomoću mikroprocesora iščitavan dinamička viskoznost.

Slika 1.17. Rotacijski viskozimetar, princip rada.

Formule za određivanje viskoznosti uzorka:

$$\tau = \frac{T}{2\pi R_b^2 L} \quad (1.41)$$

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{2R_c^2}{R_c^2 - R_b^2} \right) \omega \quad (1.42)$$

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad (1.43)$$

gdje je:

T - izmjereni moment

ω - izmjerena kutna brzina viska (rad/s)

R_c - polumjer spremnika

R_b - polumjer viska

L - efektivna dužina viska

Prema DIN 53 018 postoje faktori koji mogu utjecati na ishod mjerenja te ih je potrebno eliminirati kako bi se dobili pouzdani rezultati.

Faktori koji utječu na mjerenje:

- a) Utjecaj površine mjernog viska,
- b) Greška zbog ekscentričnog položaja cilindra-momenta unutarnje i vanjske strane različiti jedni od drugih,

- c) Utjecaj temperaturnog širenja fluida- korigira se prema korekcijskim tablicama DIN 53 018 u ovisnosti o vrsti fluida,
- d) Dodatni okretni moment zbog trenja,
- e) Granica stabilnosti- dolazi do pojave turbulentnog miješanja na čeonj površini mjernog viska.

2.6.3 Indeks viskoznosti

Promjena viskoznosti s promjenom temperature označuje se indeksom viskoznosti (ulja većeg indeksa viskoznosti pokazuju manju promjenu viskoznosti s promjenom temperature). Mineralna ulja imaju indeks viskoznosti do približno 100, dok se dodatkom aditiva može postići i znatno viši (do 200). Sintetska ulja mogu imati indeks viskoznosti i veći od 200. Sustav njegovog određivanja se temelji na dva niza standardnih mazivih ulja različitih viskoziteta:

L - ("low") - ulja s IV = 0, pokazuju izrazito veliku ovisnost viskoziteta o temperaturi (pretežno naftensko-aromatska struktura);

H - ("high") - ulja s IV = 100, pokazuju malu ovisnost viskoziteta o temperaturi (pretežno parafinska struktura).

$$i.v = \frac{L-U}{L-H} \cdot 100 \quad (1.44)$$

gdje je:

U – izmjerena kinematička viskoznost ulja na 40 °C čiju vrijednost indeksa viskoznosti trebamo izračunati,

L – kinematička viskoznost ulja na 40 °C, kojemu je indeks viskoznosti jednak nuli, a koji pri 100 °C ima istu viskoznost kao i ulje kojem se indeks viskoznosti želi izračunati,

H – kinematička viskoznost ulja pri 40°C, kojemu je indeks viskoznosti 100, a koji pri 100 °C ima istu viskoznost kao i ulje kojem se indeks viskoznosti želi izračunati.

Ulja s visokim indeksom viskoznosti primjenjuju se kod avionskih motora i automobila koji rade pri vrlo niskim temperaturama, ili kod instrumenata koji su podvrgnuti vrlo velikim promjenama temperature.

2.6.4 Stvrdnjivanje maziva

Vrlo važno niskotemperaturno svojstvo maziva je stvrdnjivanje maziva ili temperatura na kojoj mazivo prestane teći, a koja također ovisi o kemijskom sastavu i strukturi ulja. stvrdnjivanje mazivih ulja određeno je primjenom normirane ispitne metode ASTM D 97 za određivanje stvrdnjivanje maziva i naftnih proizvoda. Nakon početnog zagrijavanja, uzorak se hladi prema utvrđenom režimu hlađenja, te se tečivost uzorka provjerava svaka 3 °C. Najniža temperatura na kojoj uzorak više ne teče bilježi se kao stvrdnjivanje maziva (engl. pour point).

2.6.5 Plamište i gorište

Plamište mazivog ulja je najniža temperatura na kojoj se pod utvrđenim uvjetima ispitivanja događa prvo zapaljenje smjese uljnih para sa zrakom, a da pritom ne slijedi daljnje gorenje. Daljnim zagrijavanjem ulja i stvaranjem dovoljne količine pare koja će podržati gorenje dulje od 5 s znači da je postignuta temperatura gorišta, koja je za motorna ulja obično 20 – 30 °C viša od plamišta. Postoje dvije osnovne metode:

- po Marcussonu - otvoren lončić, za ulja s plamištem iznad 100 °C ;
- po Pensky-Martensu - zatvoren lončić za motorna i loživa ulja s plamištem ispod 100 °C.

Plamište i gorište su kontrolne veličine važne za korisnike iz sigurnosnih razloga i te se temperature smanjuju ukoliko se ulje pomiješa s gorivom u određenoj količini (~10% masenog udjela benzina) čak i do područja radne temperature motora.

2.6.6. Oksidacijska stabilnost

Tijekom eksploatacije, maziva ulja su često duži vremenski period uz prisustvo kisika izložena visokim temperaturama. Pri tome dolaze u dodir sa materijalima koji pokazuju katalitičko djelovanje, kao što su na primjer metali. Pri takvim uvjetima dolazi do tzv. Starenja ulja. S jedne strane se oslobađaju slobodne i vezane kiseline, kao produkti starenja, putem procesa oksidacije, a s druge strane smolasta tvar kao rezultat reakcija oksidacije i polimerizacije. Ova smolasta tvar je u početnom stadiju rastvorljiva u mazivom ulju, a zatim se u toku daljnjeg starenja u njemu izdvajaju u obliku taloga. U principu parafinski ugljikovodivi su skloni da stvaraju kiseline i kondenzacijske produkte koji dovode do porasta viskoznosti ulja. Aromatski ugljikovodivi su podložni oslobađanju kondenzacijskih molekulskih tvari koji izazivaju porast viskoznosti. Određivanje oksidacijske stabilnosti, to jest starenja ima za cilj procjenjivanje vijeka uporabe i ponašanja mazivog ulja u pogonu.

Iz tih se razloga, pri izvođenju oksidacijskih ispitivanja trebaju odabrati uvjeti koji najviše odgovaraju uvjetima u praksi. Oksidacijska stabilnost gotovih motornih ulja se određuje u ispitnim motorima. Bitni parametri u oksidacijskim ispitivanjima, vrijeme ispitivanja, temperatura, oksidacijsko sredstvo i katalizator utječu na rezultate ispitivanja na karakterističan način i moraju međusobno biti usklađeni u odnosu jedan na drugoga.

2.7. Ne njutnovi fluidi - viskoelastični fluidi

Međutim, ne Njutnovi fluidi - multigradna maziva, koja se još nazivaju i poboljšana ulja, danas su uobičajena, osobito u motorima motornih vozila. Višegradna maziva uključuju aditive molekula polimera dugog lanca koji mijenjaju protočne karakteristike baznih ulja. U ovome poglavlju, hidrodinamička analiza proširena je za višegradna ulja.

Početa motivacija razvoja višegradnih maziva bila je smanjenje ovisnosti viskoznosti maziva o temperaturi (za poboljšanje indeksa viskoznosti). Ovo svojstvo važno je u motorima motornih vozila, npr. pokretanje motora hladnim jutrima. Kasnije su pokusi pokazali da višekvalitetna maziva imaju složene ne-newtonske karakteristike. Otkriveno je da maziva koja sadrže polimer imaju i druga reološka svojstva osim viskoznosti. Ova maziva su viskoelastične tekućine, u smislu da imaju viskozna i elastična svojstva. Polimerni aditivi mijenjaju nekoliko karakteristika protoka baznog ulja. Polimerni aditivi mijenjaju nekoliko karakteristika protoka baznog ulja.

1. Polimerni aditivi povećavaju viskoznost baznog ulja.
2. Polimerni aditivi umjereno smanjuju viskoznost temperatura (poboljšati indeks viskoznosti).
3. Viskoznost postaje opadajuća funkcija brzine smicanja (smicanje - svojstvo prorjeđivanja).
4. Uvode se normalni naponi. U jednostavnom smicanju, $v = v(y)$, tamo jesu li normalne razlike u naponu $\sigma_x - \sigma_y$ (prva razlika) i $\sigma_y - \sigma_z$ (druga razlika). Prva je razlika mnogo veća od druge razlike.
5. Polimerni aditivi uvode karakteristike relaksacije stresa tekućina, prikazana faznim odmakom između napona smicanja i a periodična brzina smicanja. Ovo svojstvo je ono što se podrazumijeva pod pojmom viskoelastičnost; naime, tekućina postaje elastična i viskozna.

Iako su gradna ulja razvijena za poboljšanje indeksa viskoznosti, kasniji eksperimenti otkrili su značajno poboljšanje performansi podmazivanja ležajeva ležajeva, a to se ne može objasniti promjenama viskoznosti. Dubois i sur. (1960) usporedili su performanse mineralnih ulja i

poboljšanih VI ulja u ležajevima dnevnika pod statičkim opterećenjem. Koristili su velike brzine dnevnika i izmjerili nosivost, trenje i ekscentričnost. Rezultati su pokazali vrhunske performanse multigradnih ulja s polimernim aditivima. Dodatni zaključak ovog istraživanja (važan za usporedbu s analitičkim istraživanjima) je da relativno povećanje opterećenja VI poboljšanih ulja postaje veće s povećanjem ekscentričnosti. Okrent (1961) i Savage i Bowman (1961) pronašli su manje trenja i habanja u ležaju klipnjača u motoru automobila (dinamički napunjeni ležajevi ležaja).

Analitička ispitivanja pokazala su da poboljšanja u svojstvima podmazivanja VI poboljšanih ulja nisu posljedica promjena viskoznosti. Horowitz i Steidler (1960) obavili su analitičko istraživanje i pokazali su da poboljšanje performansi podmazivanja ne može biti povezano s različitom funkcijom viskoznosti nasuprot brzini smicanja i temperature. U stvari, otkrili su da n-newtonska viskoznost povećava koeficijent trenja koji je suprotan trend eksperimentima Duboisa i sur., 1960).

Istraživanje prethodnog analitičkog istraživanja Harnoya (1978) pokazuje da je izmjereni redoslijed magnitude prvog i drugog normalnog naprezanja prenizak da bi objasnio bilo kakvo značajno poboljšanje performansi maziva.

Ova diskusija ukazuje da je elastičnost tekućine (učinak relaksacije na stres) najvjerojatnije objašnjenje poboljšanja performansi viskoelastičnih maziva.

Kriterij za poboljšanje performansi maziva je vrlo važno. Na primjer, polimerni aditivi povećavaju viskoznost mineralnih ulja; zauzvrat se povećava nosivost. Međutim, naša je osnova usporedbe nosivost na ekvivalentnoj viskoznosti i geometriji ležaja. Sama veća viskoznost ne smatra se poboljšanjem performansi maziva, jer su gubici trenja i nosivost opterećeni proporcionalno veličini viskoznost. Nadalje, moguće je koristiti ulja više viskoznosti, a da se pri tome ne pribjegavaju uljnim aditivima molekula polimera dugog lanca. Odgovarajući kriterij za poboljšanje performansi maziva je omjer sile trenja i nosivosti (koeficijent trenja ležaja).

2.7.1 Viskoelastični modeli tečnosti

Za analizu viskoelastičnih tekućina razvijeni su različiti modeli. Modeli su u obliku reoloških jednadžbi, koje se nazivaju i konstitutivne jednadžbe. Primjer je Maxwell-ova jednadžba tekućine (poglavlje 2.3.5.).

Višekvalitetna multigradna maziva uglavnom su viskozna tekućina s malim elastičnim učinkom. Stoga u hidrodinamičkom podmazivanju viskoznost ima dominantnu ulogu u stvaranju pritiska

vala, dok elastičnost tekućine ima samo mali učinak (drugog reda). U takvim se slučajevima protok ne-newtonskih viskoelastičnih tekućina može analizirati korištenjem diferencijalnih tipa konstitutivnih jednačini. Glavna prednost od ove jednačine su da su komponente napona eksplicitne funkcije komponentata naprezanja. Na sličan način kao što su Newtonove Navier-Stokesove jednačbe, viskoelastične jednačbe diferencijalnog tipa mogu se izravno primijeniti za rješavanje protoka. Jednačbe diferencijalnog tipa široko su korištene u teoriji podmazivanja ležajeva u stabilnim i posebno nestabilnim uslovima.

Rani analitički rad u hidrodinamičkom podmazivanju viskoelastike tečnosti se zasnivaju na jednačini tekućina drugog reda Rivlina i Ericksena (1955) ili na jednačini Oldroyda (1959). Ove rane jednačine nazivaju se konvencionalnim, diferencijalnim reološkim jednačbama. Coleman i Noll (1960) pokazali su da Rivlin i Ericksen-ova jednačina predstavlja prvo uznemirenost iz Newtonove tekućine za sporo protok, ali je njegova upotreba kasnije proširena i na visoku brzina smicanja podmazivanja.

Analiza zasnovana na konvencionalnoj jednačini drugog reda (Harnoy i Hanin, 1975) pokazala je značajna poboljšanja performansi viskoelastičnog podmazivanja u ležajevima ležajeva pod stalnim i dinamičkim opterećenjima. Pored toga, poboljšanja se povećavaju ekscentričnošću (u skladu s trendovima zapaženim u eksperimentima Duboisa i sur., 1960).

Važna karakteristika ovih konvencionalnih jednačbi za viskoelastične tečnosti je ta što opisuju nestabilni efekat relaksacije stresa i prvu normalnu - naponsku razliku ($\sigma_x - \sigma_y$) u stalnom protoku smicanja po istom parametru. U mnogim slučajevima vrijeme opuštanja koje opisuje dinamičke (nestabilne) efekte protoka određeno je mjerenjima normalnog naprezanja u stalnom smicanju između rotacije ploča i konus (Weissenbergov reometar).

U uobičajenim reološkim jednačinama normalni naponi proporcionalni su drugoj snazi smicanja. Hidrodinamičko podmazivanje uključuje vrlo visoke stope smicanja, a konvencionalne jednačine predviđaju nerealno visoke razlike između prvog i normalnog stresa. Šta više, kad se za mazanje uzeta u obzir stvarna izmjerena veličina normalnih naprezanja, njen učinak je zanemarivo malen u poređenje sa efektom opuštanja stresa. Utvrđeno je da se za velike protoke smicanja, dva efekta prve normalne razlike naprezanja i opuštanje naprezanja moraju opisati pomoću dvaju parametara sposobnih za odvojeno eksperimentalno određivanje.

Za protoke podmazivanja velike brzine smicanja, dolje navedeni argumenti ukazivali su na to da postoji zahtjev za drugačijim viskoelastičnim modelom koji može odvojiti nestabilne efekte opuštanja od uobičajenih naprezanja.

2.7.2 Viskoelastični model za velike protoke strujanja

Harnoy (1976) je razvio i upotrijebio reološku jednadžbu koja odvaja normalne napone od efekta opuštanja i koristila je za hidrodinamičko podmazivanje.

U tu svrhu se u koordinatnom sustavu koji je pričvršćen na tri glavna smjera izvedenog tenzora definira jedinstveni konvektivni derivat vremena, $\delta = \delta t$. Ova reološka jednačina može se izvesti iz Maxwell-ovog modela (analogija opruge i zaprega u nizu). Maxwell-ov model u smislu devijatorskih naprezanja, τ' , je:

$$\tau'_{ij} + \lambda \frac{\delta}{\delta t} \tau'_{ij} = \mu e_{ij} \quad (1.45)$$

Gdje je:

λ - vrijeme opuštanja,

e_{ij} - komponente za brzinu naprezanja.

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.46)$$

gdje je:

v_i komponente brzine u ortogonalnim koordinatama x_i .

Tenzor devijatorskih naprezanja može se izričito izvesti kao:

$$\tau'_{ij} = \mu \left(1 + \lambda \frac{\delta}{\delta t} \right)^{-1} e_{ij} \quad (1.47)$$

Širenje operatera u pogledu beskonačnog niza sve većih snaga λ rezultira u:

$$\tau'_{ij} = \mu \left(e_{ij} - \lambda \frac{\delta}{\delta t} e_{ij} + \lambda^2 \frac{\delta^2}{\delta t^2} e_{ij} + \dots + (-\lambda)^{n-1} \frac{\delta^{n-1}}{\delta t^{n-1}} e_{ij} \right) \quad (1.48)$$

Za mali Deborov broj, $De \lambda = \Delta t$, gdje je Δt karakteristično vrijeme toka, drugog reda i veće snage Δ su zanemarive. Stoga se razmatraju samo pojmovi s prvom snagom λ , a jednačina dobija sljedeći pojednostavljeni oblik:

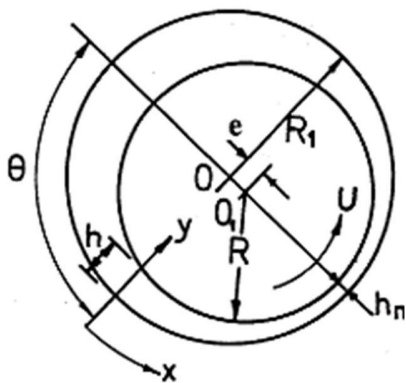
$$\tau'_{ij} = \mu \left(e_{ij} - \lambda \frac{\delta}{\delta t} e_{ij} \right) \quad (1.49)$$

Derivat vremena tenzora je definiran na sljedeći način (Harnoy 1976 Cambridge University Press Fluid Film Lubrication st. 390):

$$\frac{\delta e_{ij}}{\delta t} = \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_\alpha} v_\alpha - \Omega_{i\alpha} e_{\alpha j} + e_{i\alpha} \Omega_{\alpha j} \quad (1.50)$$

Definicija je slična onoj iz vremenske derivacije Jaumann (vidi Prager 1961). Ovdje je, međutim, vektor rotacije Ω_{ij} rotacijske komponente krutog, pravougaonom Dekartovom koordinatnom sustava (1, 2, 3), čiji je izvor fiksiran na česticu fluida i kreće se s njim. Istovremeno se njeni smjerovi uvijek podudaraju s tri glavna smjera izvedenog tenzora. Posljednja dva izraza, koja imaju rotaciju, Ω_{ij} , mogu se zanemariti zbog protoka velike brzine smicanja, jer je rotacija glavnih smjerova vrlo spora. Jednačine (1.49) i (1.50) tvore model viskoelastične tečnosti za sljedeću analizu.

2.7.3 Analiza viskoelastičnog toka tekućine



Sljedeća izvedba polazi od ravnoteže sila koje djeluju na infinitezimalni fluidni element koji ima oblik pravokutnog paralelograma s dimenzijama dx i dy , kao što je prikazano na slici 1.18. Sljedeća izvedba Harnoya (1978) odnosi se na dvodimenzionalni tok u smjerovima x i y . Kod beskonačno dugog ležaja nema gradijenta protoka ili pritiska u smjeru z , postiže se ravnoteža snaga:

$$dt \, dx = dp \, dy \quad (1.51)$$

Slika 1.18. Koordinate dugog ležaja.

Ako se inercija fluida ne zanemari, jednačba ravnoteže u smjeru x za dvodimenzionalni tok je:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (1.52)$$

Nakon zanemarivanja termina inercije fluida na lijevoj strani, jednačba je jednaka jednačini (1.51.). U dvodimenzionalnom toku jednačina je kontinuiteta:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.53)$$

Za viskoelastične tečnosti, konstitutivne jednačbe (1.49) i (1.50) uspostavljaju odnos napona i brzine. Zamjena ekvivalenta (1.49) u jednačbi ravnoteže (1.52) dobiva se sljedeća diferencijalna jednačba stabilnog protoka u dvodimenzionalnom filmu za podmazivanje:

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \lambda \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} v \right) \quad (1.54)$$

Pretvaranje u bezdimenzionalne varijable:

$$\bar{u} = \frac{u}{U}; \quad \bar{v} = \frac{R}{C} \frac{v}{U}; \quad \bar{x} = \frac{x}{R}; \quad \bar{y} = \frac{y}{C} \quad (1.55)$$

Odnos Γ , koji se često naziva i Deborahov broj, De, je definiran kao:

$$De = \Gamma = \frac{\lambda U}{R} \quad (1.56)$$

Jednačina protoka (1.54) postaje:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} - \mu \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}} \bar{u} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \bar{v} \right) = 2F(\bar{x}) \quad (1.57)$$

Gdje je:

$$2F(\bar{x}) = \frac{C^2}{\eta UR} \frac{dp}{d\bar{x}} \quad (1.58)$$

U tim je jednadžbama, λ je malo u odnosu na karakteristično vrijeme toka Δt . Karakteristično vrijeme Δt je vrijeme za značajni periodični protok, kao što je protok oko ležaja ili vrijeme u oscilirajućem protoku. Iz toga proizlazi da je De mali u protoku podmazivanja ili $\Gamma \ll 1$.

2.7.4 Rješenje diferencijalne jednadžbe protoka

Tok $\bar{u} = \bar{u}(\bar{y})$ može se podeliti na njutnovski tok, \bar{u}_0 i sekundarni tok \bar{u}_1 , zahvaljujući elastičnosti tečnosti:

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + \Gamma \bar{u}_1 \quad (1.59)$$

U jednadžbama protoka, sekundarni pojmovi protoka uključuju koeficijent Γ .

Da bi se riješila nelinearna diferencijalna jednadžba protoka za mali Γ , koristi se metoda uznemirenosti, koja proširuje snage Γ i zadržava samo prvu snagu, kako slijedi:

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + \Gamma \bar{u}_1 + 0(\Gamma^2) \quad (1.60)$$

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \Gamma \bar{v}_1 + 0(\Gamma^2) \quad (1.61)$$

$$F(\bar{x}) = F_0(\bar{x}) + \Gamma F_1(\bar{x}) + 0(\Gamma^2) \quad (1.62)$$

Uvođenjem jednačina 1.60 – 1.62 u jednačinu protoka 1.57 i izjednačavanje pojmova sa odgovarajuće snage Γ daju dvije linearne jednačine:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial \bar{y}^2} = 2F_0(\bar{x}) \quad (1.63)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{y}^2} - \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \bar{u}_0 + \frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial \bar{y}^2} \bar{v}_0 \right) = 2F_1(\bar{x}) \quad (1.64)$$

Granični uvjeti toka su:

$$\bar{y} = 0, \quad \bar{u} = 0 \quad (1.65)$$

$$\bar{y} = \frac{h}{c}, \quad \bar{u} = 1 \quad (1.66)$$

Budući da nema bočnog protoka, protok q je konstantan:

$$\int_0^h u \, dy = q = \frac{h_e U}{2} \quad (1.67)$$

Za prvi termin brzine \bar{u}_0 , granični uslovi su:

$$\bar{y} = 0 \quad \bar{u}_0 = 0 \quad (1.68)$$

$$\bar{y} = \frac{h}{c} \quad \bar{u}_0 = 1 \quad (1.69)$$

Širenje fluksa u snagu u Γ :

$$q = q_0 + \Gamma q_1 + o(\Gamma^2 q) = \frac{h_e U}{2} \quad (1.70)$$

i označavamo:

$$h_i = \frac{2q_i}{U} \quad \text{za } i = 0 \text{ i } 1 \quad (1.71)$$

Brzina protoka brzine nulte reda (njutnovska) je:

$$\int_0^{h/c} \bar{u}_0 \, d\bar{y} = \frac{q_0}{CU} = \frac{h_0}{2C} \quad (1.72)$$

Poslije integracije jednačine 1.63 dva puta i koristeći granične uslove 1.68 – 1.69 i 1.72 jednačine jednake vrijednosti rezultiraju dobro poznatim njutnovim rješenjima:

$$\bar{u}_0 = M\bar{y}^2 + N\bar{y} \quad (1.73)$$

gdje je:

$$M = 3C^2 \left(\frac{1}{h^2} - \frac{h_0}{h^3} \right) \quad (1.74)$$

$$N = C \left(\frac{3h_0}{h^2} - \frac{2}{h} \right) \quad (1.75)$$

Komponenta brzine u smjeru y, v_0 , određuje se iz jednadžbe kontinuiteta. Zamjena \bar{u}_0 i \bar{v}_0 u jednadžbi 1.64, omogućava rješenje druge brzine, \bar{u}_1 . Granični uslovi za \bar{v}_1 su:

$$\bar{y} = 0, \quad \bar{u}_1 = 0 \quad (1.76)$$

$$\bar{y} = \frac{h}{c}, \quad \bar{u}_1 = 0 \quad (1.77)$$

$$\int_0^{h/c} \bar{u}_1 d\bar{y} = \frac{q_1}{CU} = \frac{h_1}{2C} \quad (1.78)$$

Rezultirajuće rješenje za brzinu u smjeru x je:

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + \Gamma u_1 = \alpha \bar{y}^4 + \beta \bar{y}^3 + \gamma \bar{y}^2 + \delta \bar{y} \quad (1.79)$$

gdje je:

$$\alpha = 3\Gamma C^4 \left(-\frac{2}{h^5} + \frac{5h_e}{h^6} - \frac{3h_e^2}{h^7} \right) \frac{dh}{d\bar{x}} \quad (1.80)$$

$$\beta = \Gamma C^3 \left(18 \frac{h_e^2}{h^6} - \frac{24h_e}{h^5} + \frac{8}{h^4} \right) \frac{dh}{d\bar{x}} \quad (1.81)$$

$$\gamma = 3C^2 \left(\frac{1}{h^2} - \frac{h_e}{h^3} \right) + \Gamma C^2 \left(-\frac{6}{5h^3} + \frac{9h_e}{h^4} - \frac{54h_e^2}{5h^5} \right) \frac{dh}{d\bar{x}} \quad (1.82)$$

$$\delta = C \left(\frac{3h_e}{h^2} - \frac{2}{h} \right) + \Gamma C \left(\frac{9h_e^2}{5h^4} - \frac{4}{5} \frac{1}{h^2} \right) \frac{dh}{d\bar{x}} \quad (1.83)$$

$h_e = h_o + \Gamma h_1$ - je nepoznata konstanta.

2.7.5 Pritisci u rukavcu ležaja

Sljedeća jednačina pritisak valova dobivena je iz jednadžbe 1.54 i brzina fluida:

$$p = 6R\mu U \int_0^x \left(\frac{1}{h^2} - \frac{h_e}{h^3} \right) dx + \Gamma R\mu U \left(-\frac{4}{5} \frac{1}{h^2} + \frac{9}{10} \frac{h_e^2}{h^4} \right) + k \quad (1.84)$$

Zadnja konstanta, k, određena je vanjskim pritiskom dovoda ulja. Konstanta h_e određena je iz graničnih uslova pritiska p oko ležaja.

Analiza je ograničena na vrijeme opuštanja λ koje je mnogo manje od karakterističnog vremena, Δt protoka. U ovom slučaju je karakteristično vrijeme $\Delta t = O(U/R)$, što je redoslijed veličine vremena da čestica fluida teče oko ležaja. Stanje postaje $\lambda \ll U/R$.

Za rukavac ležajevе riješen je pritisak tlaka za viskoelastično mazivo i uspoređivan s Njutnovim fluidom, vidi Harnoy (1978).

Jedna razlika između krutih i viskoznih tečnosti je u odnosu između komponenata naprezanja i naprežanja. U slučaju jednostavnog smicanja, smicalni napon, τ , u čvrstom materijalu proporcionalan je deformacijskom, deformacijskom naprežanju. Pod naprežanjem, materijal prestaje da se deformira kada se postigne određena elastična deformacija. Suprotno tome, u viskoznim tečnostima stopa deformacije se nastavlja (tečnost teče) sve dok se na tečnost primenjuju naprežanja. Primjer je jednostavan smični protok viskoznih tekućina gdje se smična brzina, $du = dy$, nastavlja sve dok se primenjuje smicalni napon, τ . Za tečnosti je potreban smični stres kako bi se nadvladale kohezivne sile između molekula kako bi se održao protok, koji uključuje kontinuirano relativno kretanje molekula. Koeficijent proporcionalnosti za čvrstu tvar je modul smicanja, dok je koeficijent proporcionalnosti za viskoznu tečnost viskoznost, μ . U jednostavnom protoku smicanja Newtonove tekućine linearni odnos smicanja napona i brzine smicanja prikazan je:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1.85)$$

Za usporedbu, slična linearna jednadžba elastične jednostavne smicarske deformacije čvrstog tijela je:

$$\tau = G \frac{de_x}{dy} \quad (1.86)$$

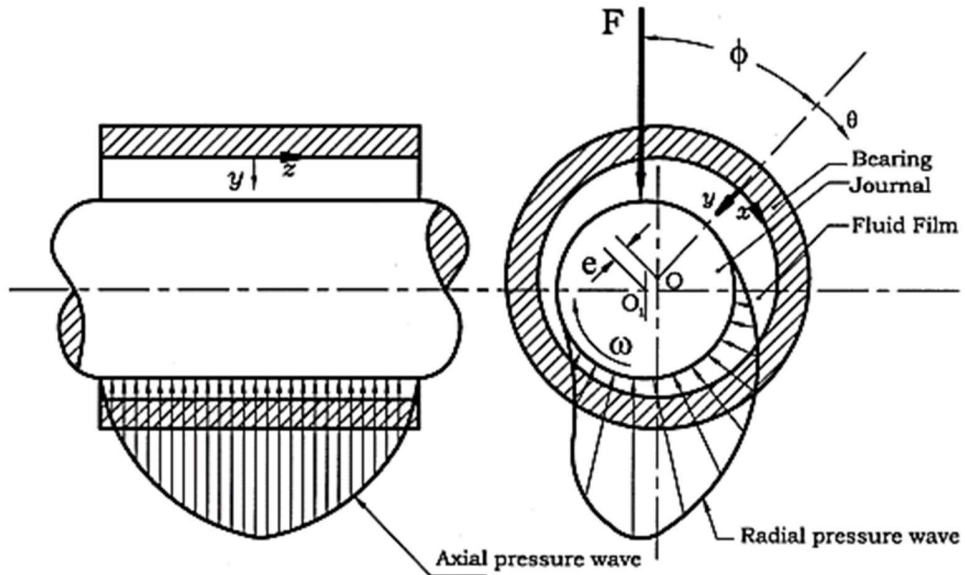
gdje je:

e_x pomak (jednokratni pomak u smjeru x),

G je modul elastičnog smicanja čvrstog tijela.

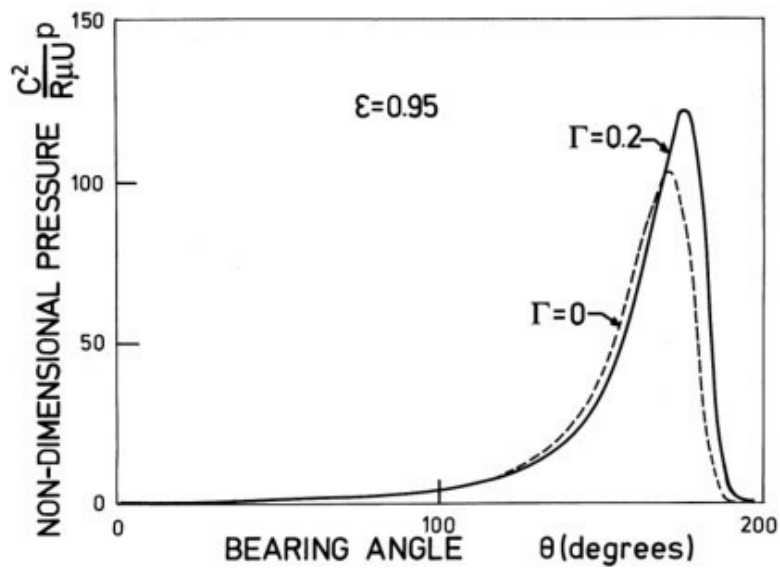
Kad god postoji viskozni protok, moraju biti prisutni smicalni naponi kako bi se nadvladale kohezivne sile između molekula. U stvari, kohezijske sile i naponi smicanja smanjuju se s temperaturom, što ukazuje na smanjenje viskoznosti s porastom temperature. Za analizu hidrodinamičkih ležajeva približno se pretpostavlja da je viskoznost, μ , samo funkcija temperature. Međutim, viskoznost je i funkcija pritiska, mada to postaje značajno samo pri vrlo visokom pritisku. U ekstremnim uvjetima vrlo visokih pritisaka, npr. U točkovnim ili linijskim

kontaktima u ležajevima ili zupčanicima kotrljajućih elemenata, viskoznost se smatra funkcijom pritiska fluida.



Slika 1.19. Hidro dinamički rukava ležaja.

Val pritiska riješen je numeričkom integracijom. Za valni pritisak su primijenjeni realni granični uvjeti. Val pritiska započinje s $\theta = 0$, a završava na θ_2 , gdje gradijent pritiska također nestaje. Rješenje na slici 19-1 pokazuje da elastičnost fluida povećava valni pritisak i nosivost.

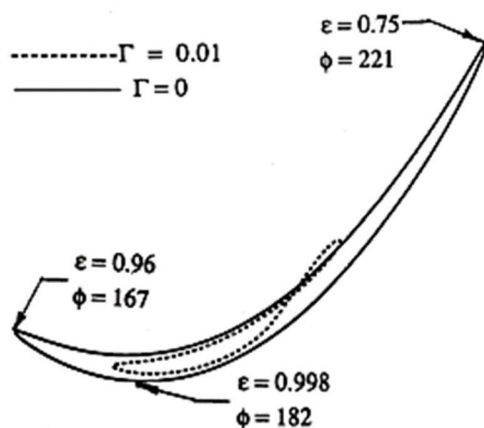


Slika 1.20. Valni pritisak valjka za njutnova i viskoelastična maziva. (Iz Harnoya, 1978.).

2.7.6 Poboljšanja performansi podmazivanja rukavca ležajeva

Brzina u jednačini 1.79 omogućuje izračunavanje posmičnih naprezanja i momenta trenja na struji. Rezultati su pokazali (Harnoy, 1978) da elastičnost tečnosti ima vrlo mali učinak na gubitke viskoznog trenja rukavca ležaja, a smanjenje koeficijenta trenja je uglavnom posljedica poboljšanja nosivosti. Kao što je spomenuto, koeficijent trenja je kriterij za poboljšanje performansi podmazivanja pod statičkim opterećenjem. U kratkim hidrodinamičkim ležajevima dnevnika, npr., u motorima automobila, elastičnost fluida smanjuje koeficijent trenja sličnim redoslijedom veličine (Harnoy, 1977).

Harnoy i Zhu (1991) izvršili su dinamičku analizu kratkih hidrodinamičkih rukavca ležajeva temeljenih na istom modelu viskoelastične tekućine. Rezultati pokazuju da viskoelastična maziva igraju značajnu ulogu u poboljšanju performansi maziva pri velikim dinamičkim opterećenjima, gdje je omjer ekscentričnosti visok; slika 1.21.



Sljedeći je primjer rješenje za mjesto kratkog hidrodinamičkog ležaja opterećenog sinusoidnom silom koja je naslonjena na konstantno okomito opterećenje. Primjer uspoređuje mjesto njutonske i viskoelastične tečnosti.

Opterećenje je prema jednadžbi

$$F(t) = 800 + 800 \sin 2\omega t \quad (1.87)$$

Slika 1.21. Položaj centra rukavca ležajeva za opterećenje $F(t) = 800 + 800 \sin 2\omega t$ i rukavca ležaja $\bar{m} = 100$.

Za viskoelastično mazivo, maksimalan omjer ekscentričnosti ε_{\min} cenzar središta ležaja značajno je smanjen u usporedbi s Newtonovim mazivom. Zaključno, analitički rezultati zasnovani na modelu viskoelastične tečnosti ekvivalenata, jednačine (1.48) i (.1.49) pokazali su značajna poboljšanja performansi podmazivanja pod stalnim i dinamičkim opterećenjima. Štaviše, poboljšanje se povećava ekscentričnošću. Ovi su rezultati u skladu s trendovima dobivenim u eksperimentima Duboisa i sur. 1960.

Za prvi eksperiment opterećenja pri konstantnoj brzini, svi viskoelastični modeli su u skladu s eksperimentima malog smanjenja nosivosti. Međutim, za drugi eksperiment pod stalnim

opterećenjem, rani konvencionalni modeli (fluid drugog reda i drugi modeli) su u sukobu s eksperimentima. Leider i Bird (1974) izvodili su eksperimentalne filmove pod stalnim opterećenjem. Za viskoelastične tečnosti, eksperimenti su pokazali duže vreme stiskanja (vreme spuštanja) nego za uporedivu viskoznu tečnost. Grimm (1978) je pregledao mnoge prethodne eksperimente koji dovode do istog zaključka.

Tichy i Modest (1980) bili su prvi koji su analizirali tok stisnutog filma temeljen na Harnoyevim reološkim jednačinama (1.48) i (.1.49). Kasnije su Avila i Binding (1982), Sus (1984), i Harnoy (1987) analizirali dodatne aspekte protoka viskoelastične tekućine stisnutog filma prema ovom modelu. Rezultati svih ovih analitičkih istraživanja pokazuju da Harnoyova jednadžba pravilno predviđa trend povećanja vremena spuštanja pod stalnim opterećenjem, u skladu sa eksperimentiranjem. U tom se slučaju teorija i eksperimenti slažu da elastičnost tekućine poboljšava performanse podmazivanja u nestabilnom cijevi za pritisak pod stalnim opterećenjem.

Brindley i dr. (1976) riješili su drugi eksperimentalni problem stisnutog filma pod stalnim opterećenjem koristeći fluidni model drugog reda. Rezultat predviđa suprotan trend smanjenja vremena spuštanja, što je u sukobu s eksperimentima. U ovom se slučaju drugi dinamički eksperiment može koristiti za validaciju reoloških jednačina. Dodatni primjer gdje se reološke jednačine (1.48) i (.1.49), slažu s eksperimentima, dok su konvencionalne jednadžbe u sukobu s eksperimentima je tok graničnog sloja oko cilindra. Ovi eksperimenti mogu se koristiti i za sličnu validaciju odgovarajućeg viskoelastike modeli, što rezultira sličnim zaključcima za velike protoke smicanja (Harnoy, 1977, 1989)

Zaključak

Teorija i eksperimenti pokazuju da viskoelastičnost poboljšava performanse podmazivanja u odnosu na njutonsko mazivo, posebno pod dinamičkim opterećenjima.

Iako elastičnost fluida povećava nosivost posteljice ležaja, mora se ispitati i stabilnost ležaja. Elastičnost tekućine (opruga i podmetač u nizu) mora utjecati na dinamičke karakteristike i stabilnost ležajeva ležajeva. Mukherjee i dr. (1985.) proučavao je stabilnost ležaja na osnovu Harnoyjevih reoloških jednadžbi [Eqs. (19.5) i (19.6)]. Njihovi rezultati pokazali su da je mapa stabilnosti viskoelastične tekućine drugačija nego za njutonsko mazivo.

Ovaj zaključak važan je inženjerima projektovanja za sprečavanje nestabilnosti, kao što je vrtlog ležaja.

Kao što je spomenuto ranije, ovi su eksperimenti bili u sukobu sa prethodnim reološke jednadžbe koje opisuju normalne naprezanja kao i efekt relaksacije stresa. Međutim, eksperimenti su bili u skladu s trendom koji predviđa reološki model zasnovan na ekvivalentima jednačinama (1.48) i (1.49), što ne uzima u obzir normalna naprezanja.

LITERATURA

Hirschfelder, J. O.; Curtiss, C. F.; Bird, R. B.: Molecular theory of gases and liquids, Wiley & Sons, New York, 1964.

Holman, J. P.: Heat Transfer, McGraw-Hill, New York, 1997.

Jović, V.: Uvod u hidromehaniku, Element, Zagreb, 2005.

Reid, R. C.; Sherwood, T. K.: The properties of gases and liquids, Their estimation and correlation, McGraw-Hill, New York, 1966.

Skelland, A. H. P.: Non-newtonian flow and heat transfer, Wiley & Sons, New York, 1967.

White, F. M.: Viscous fluid flow, McGraw-Hill, New York, 2005.

White, F. M.: Fluid Mechanics, McGraw-Hill, New York, 2005.

Agroskin, I. I., Dmitrijev, G. T., Pikalov, F. I. Hidraulika, Tehnička knjiga, Zagreb 1973.

Bollrich, G. Technische Hydromechanik Band 1, Verlag Bauwesen, Berlin 2000.

Shaughnessy, E. J. Jr., Katz, I. M., Scaffer, J. P. Introduction to fluid mechanics, Oxford University Press, New York 2005.

Anderson, W. J., Fleming, D. P., and Parker, R. J. (1972): "The Series-Hybrid Bearing – A New High-Speed Bearing Concept", ASME Trans. J. of Lubrication Technology, Series F, Vol. 94, No. 2, pp. 117–124.

Anderson, W. J. (1973): "High Speed Hybrid Bearing, A Fluid Bearing and Rolling Bearing Connected in Series", U. S. Patent No. 3,759,588.

Armstrong-He'louvy, B. (1991): "Control of Machines with Friction", Kluwer Academic Publishers, Boston, Massachusetts.

Bamberger, E. N., (1983): "Status of Understanding of Bearing Materials" Tribology in the '80s. Vol. 2, NASA CP-2300-VOL-2, Editor: W. F. Loomis, pp. 773–794.

Barus, C., (1893): "Isothermals, Isopiestic, and Isometrics Relative to Viscosity". Amer. Journal of Science, Vol. 45, pp. 87–96.

Bassani, R. and Piccigallo, B. (1992): Hydrostatic Lubrication, Elsevier.

3.0 Površinski napon i kapilarne pojave

3.1 Uvod

Posmatranjem različitih prirodnih fenomena koji su im poznati i dostupni, učenici postavljaju niz pitanja: Zašto su sitne kapi tečnosti sfernog oblika? Kako voda iz Zemlje stiže do najviših grana i listova drveća? Kako insekti hodaju po površini vode?

U prirodi ne postoji pojava koja nema svoj uzrok, svaka je uslovljena nekom drugom pojavom. Cio svet, koji nas okružuje, izgrađen je od molekula, atoma, sićušnih nevidljivih čestica čija svojstva i kretanja određuju osobine makroskopskih tijela. Ako bi trebali ukratko da definišemo pojam fluida i da razumijemo njihove osobine, potrebno je da se udubimo u strukturu fluida do molekularnog nivoa, odnosno da analiziramo među molekularne sile. Da bismo zadovoljili radoznalost učenika, kao i ljudskog duha u opštem slučaju, nije dovoljno samo poznavanje ponašajna materijalnih tijela kao cjeline u svim svojim pojavnim oblicima, ili poznavanje načina na koji se odigravaju interakcije između njih, neophodno je također analizirati mikrostrukturu supstance, kao i elementarne procese čija će sveobuhvatnost izazvati vidljive pojave. Da bismo takva ispitivanja doveli do konačnog cilja potrebne su usavršene eksperimentalne tehnike, koje dopuštaju otkrivanje krajnjih elementarnih delova. Tehnika proširuje i produbljuje prirodne nauke usavršavanjem njegovih sredstava, zadire u odnos prirode prema čovjeku, mijenja njegovu okolinu i na taj način neprekidno predočava prirodno naučni aspekt sveta.

3.2 Istorija

Po nekim istorijskim dokumentima, Leonardo da Vinči (Leonardo da Vinci, 1452-1519.god.) se smatra prvim koji je proučavao kapilarne pojave, ali prva tačna zapažanja, o privlačenju čestica stakla i tečnosti u cevima pripisuje se Frensis Hoksbiju (Francis Hauksbee, 1666-1713.god.). On je primetio da je efekat isti i u debljim cijevima, a ne samo u tankim cevčicama i zaključio je da su samo one čestice stakla, koje su veoma blizu površine, imale bilo kakav uticaj na ovaj fenomen. Plato Žozef Antoan Ferdinand (Plateau Joseph Antoine Ferdinand, 1801- 1883.god.) belgijski fizičar, koji se uglavnom bavio pitanjima iz oblasti optike, ali dio njegovog izučavanja predstavljali su, također, kapilarnost i površinski napon. Polazna tačka za ovu istragu je bio događaj iz 1840.godine kada je sluga slučajno prolio ulje u mješavinu vode i alkohola. Plato je primjetio da kapi ulja formiraju savršenu sferu u toj mešavini. Posle ovog slučajnog događaja sproveo je niz eksperimenata sa sapunicom i glicerinom u koje je potopio različite žičane konture.

1858.godine eksperimentalnim putem je dokazao da opna, zbog sile površinskog napona, zauzima najmanji mogući oblik. On nije dovoljno poznao matematički aparat da bi sa teorijskog aspekta dublje istražio problem.

Tomas Jang (Thomas Young, 1773-1829.god.), naučnik koji je 1802.godine postavio teoriju kapilarnih pojava na osnovu principa površinskog napona. Bavio se pitanjem konstantnosti ugla kvašenja između površine tečnosti i čvrstog tijela. Njegov esej sadrži rešenje za veliki broj problema, uključujući i neke koje je kasnije rešavao Laplas, ali ogledi, iako su uvek bili tačni, ponekad su bili i nejasni zbog izbegavanja matematičkih problema. Obrazloženje pojave se zasnivalo na tome da čestice djeluju jedna na drugu putem dve različite sile od kojih privlačna sila djeluje jače na većim međusobnim rastojanjima od odbojne sile. On tvrdi da privlačna sila ne menja vrednost, dok odbojna sila vrlo brzo raste sa smanjivanjem rastojanja. Time je pokazao da čestice koje se nalaze na površini teže ka unutrašnjosti tečnosti i došao do zaključka da je rezultujuća sila koja djeluje na česticu proporcionalna zbiru zakrivljenosti površina u dve normalne ravni pod pravim uglom jedna na drugu. Poznata Thomasova jednačina je :

$$\gamma_{c,g} - \gamma_{c,t} - \gamma_{t,g} \cos \theta = 0 \quad (3.1)$$

Pjer Simon Laplas (Pierre Simon Laplace, 1749-1827.god.) francuski matematičar i astronom proučavao je rezultujuće sile koje deluju normalno na površinu tečnosti u beskonačnom tankom sudu. Rezultati eksperimenata koje je vršio su u mnogim aspektima bili identični sa predhodnim eksperimentima, ali je metoda dolaska do njih je bila potpuno različita. U potpunosti je sproveo matematičke proračune. Laplas je izveo jednačinu površine tečnosti iz uslova da rezultujuća sila koja djeluje na čestice na površini mora biti normalna na tu površinu. Međutim njegovo objašnjenje za porast nivoa tečnosti u kapilarima zasniva se na pretpostavci konstantnosti ugla kvašenja za iste tečnosti i čvrsta tela, za koju nije imao zadovoljavajući dokaz. Izveo je obrazac za pritisak u unutrašnjosti tečnosti ispod zakrivljene površine:

$$p = \gamma \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) \quad (3.2)$$

Džon Lesli (Sir John Leslie, 1766-1832.god.), škotski fizičar i matematičar koji je dao ispravno objašnjenje za podizanje tečnosti u sudu razmatranjem privlačenja suda i veoma tankog sloja tečnosti. On je pokazao da je privlačna sila svuda normalna na površinu čvrste materije. Direktni uticaj privlačenja je da se poveća pritisak sloja tečnosti u kontaktu sa čvrstim tijelom kako bi bio veći od pritiska u unutrašnjosti tečnosti. Rezultat ovog pritiska je da se tečnost podiže na zid suda.

Karl Fridrih Gaus (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855. god.) njemački fizičar i matematičar koji je napravio veliki korak u nauci primenivši zakon održanja energije (slika 2.5). On je formirao izraz za zbir svih potencijalnih energija koje potiču iz zajedničkog delovanja parova čestica. Sastoji se iz tri djela, prvi zavisi od djelovanja gravitacije, drugi od uzajamnog djelovanja između čestica tečnosti, a treći od interakcije između čestice tečnog i čvrstog tijela.

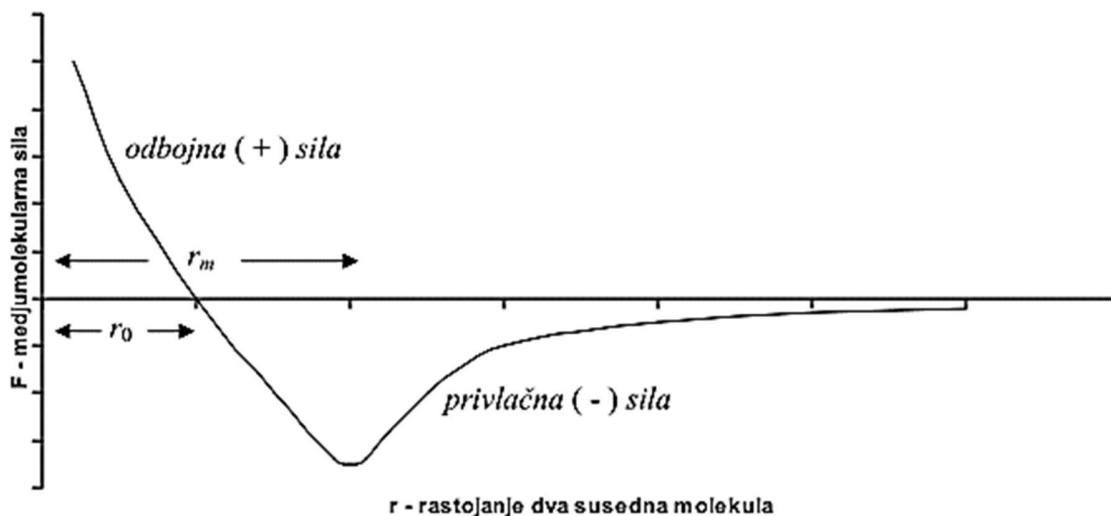
Johan Andreas fon Zegner (Johann Andreas von Segner, 1704-1777. god.) mađarski fizičar i matematičar, 1751. godine je uveo jednu važnu ideju o površinskom naponu tečnosti upoređujući je sa membranom. Došao je do zaključka da zategnutost površine tečnosti ne zavisi od veličine njene površine, odnosno ista je za istu tečnost dok kod membrane to nije slučaj. Pokušao je da istražuje sile koje djeluju između konačnih delova tečnosti na isti način kao što je to primenjivao i kod konačnih delova elastičnih tijela. U pokušaju da se izračuna efekat površinskog napona kod kapi, on je uzeo u obzir zakrivljenost ravni meridijana, ali je zanemario uticaj krivine pod pravim uglom na ovu ravan.

Etveš Lorand (Eötvös Loránd, 1848-1919. god.) mađarski fizičar, bavio se fenomenom kapilarnosti (slika 2.7). Razvio je novi metod za mjerenje površinskog napona, metod refleksije. Teorijski je dokazao da postoji zavisnost između površinskog napona tečnosti na različitim temperaturama i molekularne težine i predstavlja Etvešov zakon.

3.3 Među molekularne sile

Da bi se razumjele makroskopske osobine fluida neophodno je poznavati osnovna svojstva međumolekularnih sila. Molekuli i atomi tečnosti, odnosno gasova nalaze se u stanju haotičkog termičkog kretanja, pri čemu imaju različite brzine tj. različite kinetičke energije. U tečnom stanju molekuli su relativno blizu jedan drugom. Kako je srednje rastojanje između susjednih molekula malo, na njihova kretanja utiču i međusobne interakcije. Sile kojima ti konstituenti međusobno deluju i koje ih drže na okupu nazivaju se među molekularne sile. Dejstvo privlačnih sila brzo opada sa rastojanjem i ograničeno je sferom molekularnog dejstva. Svojstvo među molekularnih sila da djeluju samo između najbližih susjeda zove se zasićenost.

Na grafiku na sl. 3.1. je prikazana zavisnost sile, kojom međusobno djeluju dva susedna molekula, od njihovog međusobnog rastojanja. Rastojanje ta dva molekula (r) je prikazano na horizontalnoj osi, dok je vrijednost među molekularne sile (F_{mm}) prikazana na vertikalnoj osi.



Slika 3.1. Zavisnost sile, kojom međusobno djeluju dva susedna molekula, od njihovog međusobnog rastojanja.

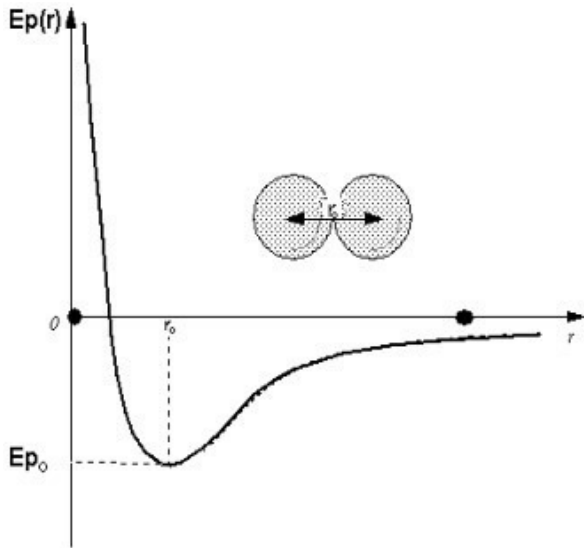
Za jednostavno čitanje grafika najbolje je pretpostaviti da je jedan molekul uvijek u koordinatnom početku, dok je drugi negde na r – osi. Tamo gdje se nalazi pokretni molekul treba povući vertikalnu do grafika. Dužina te vertikale pokazuje jačinu sile kojom ta dva molekula međusobno deluju. Ako je grafik iznad r – ose tada je sila pozitivna, a to znači da je odbojna. A ako je grafik ispod r – ose tada je sila negativna tj. privlačna.

Funkcija ima nulu na rastojanju koje ćemo obilježiti sa r_0 . Funkcija ima minimum na rastojanju koje se može obeležiti sa r_m . Grafik se čita na sledeći način:

- na rastojanju r_0 dva molekula uopšte ne djeluju međusobno nikakvom silom,
- na rastojanju manjem od r_0 dva molekula se odbijaju, a što su bliže to je odbijanje jače,
- na rastojanju većem od r_0 , ali manjem od dva molekula se privlače, a sa povećanjem rastojanja privlačenje je sve jače,
- na rastojanju r_m međusobno privlačenje je maksimalno,
- na rastojanjima većim od r_m sila je i dalje privlačna, ali sada sa povećanjem rastojanja sila slabi.

Interakcija između dva molekula jednostavnije se može opisati pomoću potencijalne energije njihove međusobne interakcije (slika 3.1). Predpostavimo da se dva molekula nalaze na izvesnom rastojanju r . Ukoliko je ovo rastojanje mnogo veće od prečnika samog molekula, međumolekularna sila njihovog uzajamnog delovanja je praktično zanemarljiva.

Smanjivanjem međusobnog rastojanja privlačna sila raste sve dok se molekuli ne približe do rastojanja približno jednakog prečniku molekula, kada počinje preklapanje elektronskih omotača. Sa daljim približavanjem molekula javljaće se odbojna međumolekularna sila koja veoma intezivno raste sa daljim smanjivanjem rastojanja.



Na rastojanjima $r > r_0$, gdje vlada privlačna sila, potencijalna energija interakcije sa smanjivanjem rastojanja opada, a u domenu $r < r_0$, gdje dominira odbojna sila sa smanjivanjem rastojanja potencijalna energija vrlo brzo raste.

Pri rastojanju r_0 (prečnik molekula) molekuli će imati ravnotežno rastojanje. Tada će potencijalna energija interakcije imati minimalnu vrednost, privlačna sila se uravnotežava sa odbojnom silom, a međumolekularna sila postaje nula.

Slika 3.2. Potencijalna kriva međumolekularne interakcije.

Zavisnost molekulskih sila od rastojanja prikazana je sledećim izrazom:

$$\mathbf{F} = -\frac{a}{r^7} + \frac{b}{r^9} \quad (3.3)$$

gdje su: a i b koeficijenti koji zavise od vrste molekula. Prvi član u formuli se odnosi na privlačnu silu, a drugi na odbojnu interakciju.

U zavisnosti od kinetičke i potencijalne energije molekula sistem pri ravnotežnom rastojanju može da se nađe u jednom od tri karakteristična agregatna stanja: u čvrstom, tečnom i gasovitom stanju. Ukoliko je srednja kinetička energija molekula reda veličine dubine potencijalne jame E_{p0} , molekuli se pri sudaru vezuju veoma slabo, odnosno mogu lako međusobno da menjaju mjesta. Tada molekuli nisu strogo vezani za svoja mjesta u tijelu i pod ovim uslovima tijelo će se nalaziti u tečnom stanju, a pri srednjoj kinetičkoj energiji, koja je mnogo veća od potencijalne energije vezivanja, molekuli se ne vezuju i predstavljaju gas. Kod čvrstog tela molekuli osciluju oko ravnotežnog položaj r_0 , čvrsto su vezani obzirom da je kinetička energija molekula relativno mala.

Osnova djelovanja među molekularne sile je električna – Kulonova sila. Prilikom međusobnog približavanja ili udaljavanja dva molekula dolazi do prostorne preraspodele naelektrisanja u njima što izaziva njihovo međusobno dejstvo.

Pomoću ovog grafika se objašnjava veliki broj pojava u prirodi. Jedna od njih je mogućnost da se odredi međusobno rastojanje susjednih molekula u čvrstim, tečnim i gasovitim tijelima, a na osnovu nekih poznatih makro – osobina ovih tijela.

O čvrstim tijelima znamo da su velike gustine – što ukazuje na mala rastojanja između molekula, a istovremeno znamo da se molekuli ne kreću slobodno po tijelu – jer bi tada oblik čvrstog tijela bio promjenljiv, već znamo da oni osciluju oko svojih stalnih položaja u tijelu – jedino rastojanje na grafiku koje može objasniti oscilovanje molekula je rastojanje r_0 . Ovo objašnjenje je sledeće: zamislimo dva molekula na rastojanju r_0 , tada između njih ne deluje nikakva sila. Iz definicije unutrašnje energije tijela znamo da molekuli imaju svoju ličnu energiju na svim temperaturama većim od apsolutne nule. Jednim dijelom ova energija je kinetička, a drugim dijelom potencijalna. Zbog toga što posjeduje kinetičku energiju molekul se kreće i ako pokuša da se udalji od sebi susjednog molekula onda ga privlačna sila vrati nazad, a kada pokuša da mu se približi tada ga odbojna među molekularna sila vraća u početni položaj, što znači da posmatrani molekul osciluje.

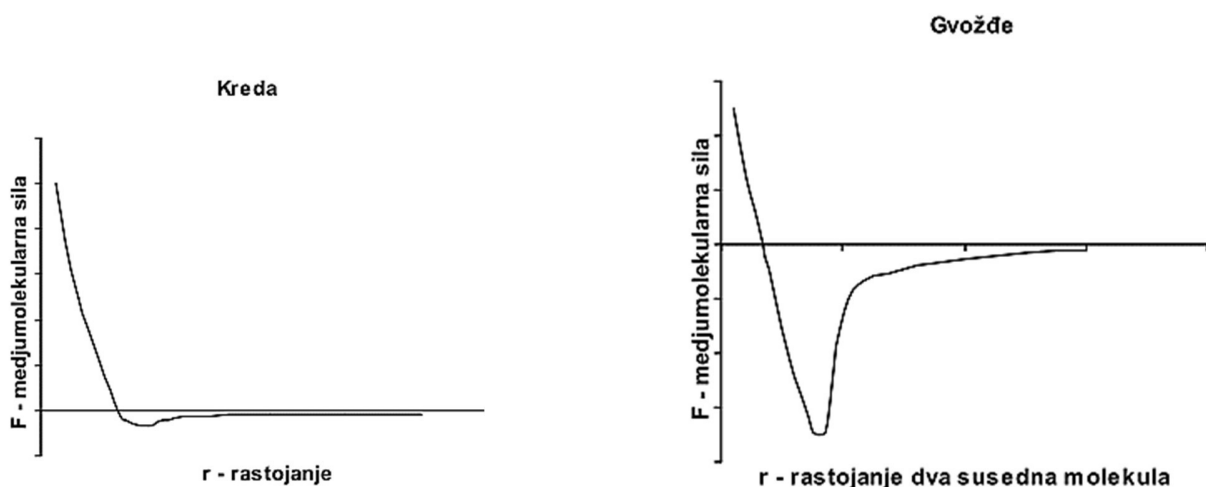
Kao potvrdu prethodne analize možemo navesti i otpornost čvrstih tijela na istezanje i sabijanje. Naime ako čvrsto telo pokušamo da istegnemo to dovodi do udaljavanja njegovih molekula koji tada počnu da se privlače i združenim privlačenjem pružaju otpor istezanju i eventualnom kidanju. Ako pak pokušamo da sabijemo čvrsto tijelo to dovodi do približavanja njegovih molekula i do pojave odbojnih među molekularnih sila koje svojim združenim djelovanjem sprečavaju dalje sabijanje. Treba primjetiti da u oba ova slučaja međumolekularne sile ne samo da pružaju otpor pokušanoj deformaciji, već i po prestanku dejstva sile, koja vrši deformaciju, pokušavaju da vrate molekule na početna rastojanja (r_0), tj. pokušavaju da tijelo vrate u prvobitni oblik – što je osnova osobine elastičnosti čvrstih materijala.

Tečnosti su nešto razrađenije od čvrstih tijela ali ne previše, to ukazuje da su rastojanja između susjednih molekula nešto veća od r_0 , ali ne previše velika. Dakle rastojanja susjednih molekula su malo veća od r_0 , ali i manja od r_m . Između njih deluju slabe privlačne sile koje drže tečnost na okupu, a molekulima omogućavaju haotično kretanje u okviru tečnosti. Molekuli se pod dejstvom ovih slabih međusobnih privlačenja ipak ne vraćaju na rastojanja r_0 , zato što imaju veću kinetičku energiju od molekula čvrstih materijala, a dobili su je zagrijavanjem, ne treba

ispustiti iz vida činjenicu da tečnost nastaje od čvrstog tijela topljenjem a za to je osnovni način zagrijavanje tijela.

Gasovi su jako razrijeđeni u odnosu na tečnosti i čvrste materijale, što ukazuje na to da su molekuli gasa na jako velikim međusobnim rastojanjima. To rastojanje je mnogo veće od r_0 i r_m omogućava veliku slobodu molekulama jer između njih djeluju vrlo slabe privlačne sile, koje je moguće i zanemariti – kao u slučaju idealnog gasa. Još jedna važna karakteristika gasova je da su oni nastali zagrijavanjem i isparavanjem tečnosti pri čemu su molekuli dobili tako veliku kinetičku energiju da su u stanju da »lete« u gravitacionom polju, za razliku od molekula tečnosti koji za to nemaju dovoljno velike brzine – pa zato tečnost uvijek zauzima dno posude u kojoj se nalazi, dok gas ispunjava jednako celu njenu zapreminu. Ovo poslednje svakako nema neposredne veze sa među molekularnim silama u gasu i u tečnosti, ali osobina da se gasovi mogu relativno lako sabijati ili širiti je u neposrednoj vezi sa velikim međusobnim rastojanjima molekula gasa.

Zanimljivo je primjetiti da razmišljanje o razlici između agregatnih stanja zasovanoj na različitoj međusobnoj udaljenosti molekula može da nas dovede na pomisao da bi se jedan gas mogao prevesti u tečno stanje ne samo hlađenjem, već i enormnim sabijanjem pri čemu bi bilo potrebno da molekule dovedemo na rastojanja karakteristična za tečnost, ali i da bi se na isti način tečnost mogla pretvoriti u čvrsto tijelo. Da je to istina može nam poslužiti zemljino jezgro koje se sastoji od nikla i gvožđa (Ni – Fe zona). Temperatura jezgra je oko 7000 °C (što je za oko 2000 stepeni toplije od površine Sunca), ali umjesto da bude u gasovitom stanju ova mešavina dva metala je ipak u čvrstom stanju – zbog ogromnog spoljašnjeg pritiska (oko 1 000 000 puta većem od atmosferskog, a radi poređenja pritisak u gumama automobila je oko 2 puta veći od atmosferskog) kojem je izložena. Na kraju, slici nije isti za sve materijale, slika 3.3.



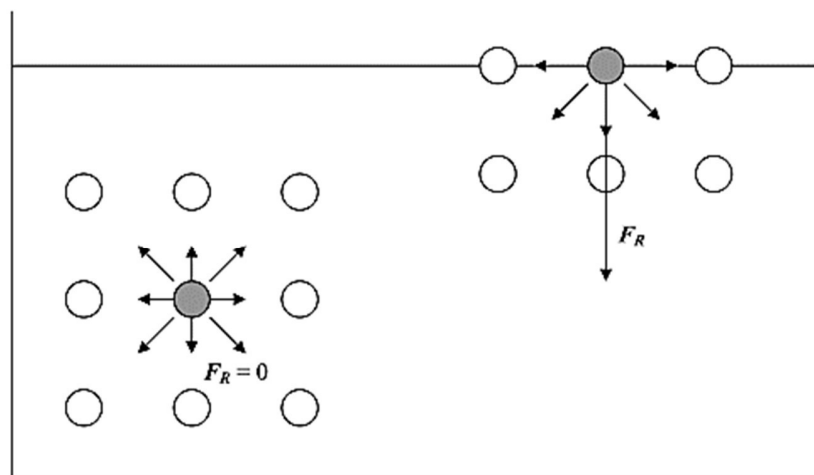
Na primjer: kreda nije uopšte sklona istežanju, ali i pri vrlo slaboj sili, koja je isteže, dolazi do njenog kidanja. To ukazuje na to da je grafik (slika 3.3), izuzetno plitak ali i uzan u oblasti oko rastojanja r_m .

Zato su privlačne sile između molekula krede izuzetno slabe, a i na već sasvim malo povećanim rastojanjima, do kojih dolazi zbog sile koja vrši istežanje, privlačenje će naglo opasti i molekuli krede više neće moći da spriječe svoje razdvajanje, tj. kidanje.

Sa druge strane gvožđe ima vrlo dubok i uzan dio grafika oko r_m što ukazuje da i sa veoma malim povećanjem rastojanja između molekula (pri istežanju) dolazi do naglog i velikog povećanja privlačnih sila između susjednih molekula što, osim u slučaju izuzetno jakih sila istežanja, onemogućava dalje istežanje gvožđa. Međutim, ako su sile istežanja ipak dovoljno jake da savladaju združene privlačne među molekularne sile tada će molekuli gvožđa biti dovedeni na rastojanja veća od r_m , a tu privlačne sile naglo opadaju, pa će posljedica biti kidanje posmatranog komada gvožđa.

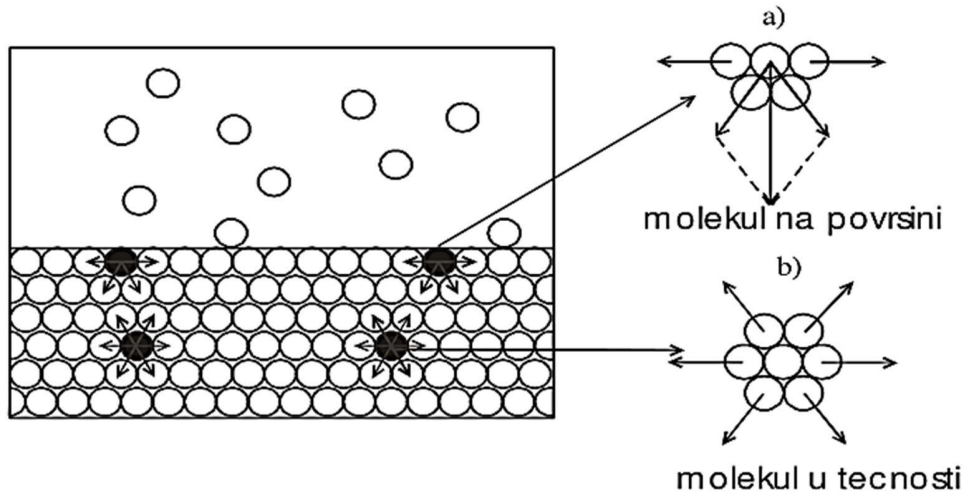
3.4 Površinski napon kod tečnosti

Površinski napon je osobina površine svake tečnosti. Postojanje ove osobine je moguće objasniti na sledeći način. Posmatrajmo jedan molekul koji se nalazi unutar neke tečnosti i jedan molekul koji se nalazi na njoj površini (slika 3.3). Posmatra ćemo i sile kojima okolni molekuli te tečnosti djeluju na izabrana dva molekula.



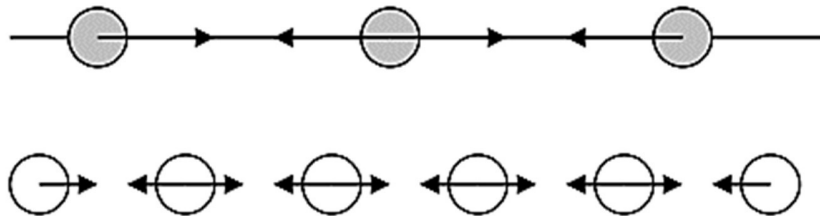
Slika 3.4. Sile kojima okolni molekuli te tečnosti djeluju na izabrana dva molekula.

Okolni molekuli ih privlače među molekularnim silama, zato što se susedni molekuli tečnosti nalaze na rastojanju, grafik među molekularnih sila (slika 3.4).



Slika 3.5. Rezultujuće sile površinskih molekula i u dubinu.

Razlika između ova dva izabrana molekula je u tome što je molekul unutar tečnosti sa svih strana okružen molekulima, pa se njihova privlačenja međusobno poništavaju (slika 3.5), dok iznad površinskog molekula nema molekula tečnosti iznad njega, pa privlačne sile koje na njega djeluju naniže nisu poništene. Vektorski zbir ovih neponištenih sila je rezultujuća sila koja djeluje na svaki površinski molekul, pokušavajući da ga odvuče sa površine u dubinu tečnosti.

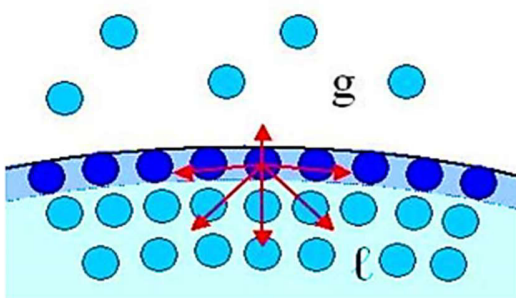


Slika 3.6. Molekule koji se preraspoređuju po površini tečnosti.

Pod dejstvom ove rezultujuće sile izvjestan broj površinskih molekula odlazi u dubinu, pa zbog toga na površini tečnosti ostaje smanjeni broj molekula koji se preraspoređuju tako da pokriju čitavu površinu tečnosti, a to znači na međusobno povećanim rastojanjima (slika 3.6), odnosu na molekule koji čine dublje slojeve tečnosti. Zbog toga su rastojanja susednih molekula na površini tečnosti bliska rastojanju r_m , a to znači da su međusobna privlačenja između njih pojačana (slika 3.1).

Površinski napon kod tečnosti se upravo i zasniva na ovom pojačanom privlačenju površinskih molekula. Posljedica je da molekuli površine tečnosti jako teže da se međusobno približe, a to znači da tečnost teži da smanji svoju slobodnu površinu. Ovo je i prvi način da se iskaže definicija površinskog napona. Dakle: površinski napon je težnja tečnosti da smanji svoju slobodnu površinu. Zanimljivo je da je površinski napon uzrok što su kapi tečnosti okrugle. Tečnost u kapi teži da smanji svoju slobodnu površinu, a iz geometrije je poznato da od svih tijela jednake zapremine lopta ima najmanju površinu, pa zato kap zauzima oblik lopte. Površinski napon je uzrok da je površina tečnosti u sudu ravna – zato što je to način da površina bude minimalna – izuzev kada neka spoljašnja sila izazove neravnu površinu, tj. njenu ustalasanost.

Mjehur od sapunice posle izvjesnog vremena mora da prsne. Zid mjehura je u tečnom stanju, a ova tečnost ima jako veliku površinu – pri čemu u površinu mjehura ulazi i njegova spoljašnja i unutrašnja površina. Zbog površinskog napona mjehur smanjuje svoju slobodnu površinu tako što se smanjuje, a višak tečnosti koji na ovaj način nastaje formira kap na dnu mjehura. Kada ova kap dovoljno naraste gravitacija je, vukući je naniže, otkine od mjehura i tada mjehur prsne.



Posmatrajmo graničnu površinu gas-tečnost. U gasu se nalaze molekuli između kojih je srednje međusobno rastojanje mnogo veće nego između molekula koje se nalaze u samoj tečnosti. Posljedica toga je slaba međumolekularna interakcija. Molekula na površini tečnosti i molekula u dubini nisu u ravnopravnom položaju (slika 3.7).

Slika 3.7. Molekuli u unutrašnjosti i na površini tečnosti

Oni koji su u unutrašnjosti tečne faze izloženi su dejstvu međumolekularnih privlačnih sila manje ili više sferno simetrično raspoređenih oko svakog molekula. Budući da su sa svih strana okruženi približno jednakim brojem susjeda, ukupna rezultujuća sila na njih biće nula. Sile koje djeluju na molekule koji se nalaze na površini tečnosti nisu uniformno raspoređene. Obzirom da sa gornje strane nisu u jednakom broju okruženi molekulima iste vrste, na ove molekule u većoj mjeri djeluju sile usmjerene ka unutrašnjosti tečne faze, pri čemu će molekuli težiti da pređu u unutrašnjost tečnosti. Rezultantne sile su uvijek tako usmjerene da imaju težnju da molekule rasporede na taj način da slobodna površina bude minimalna.

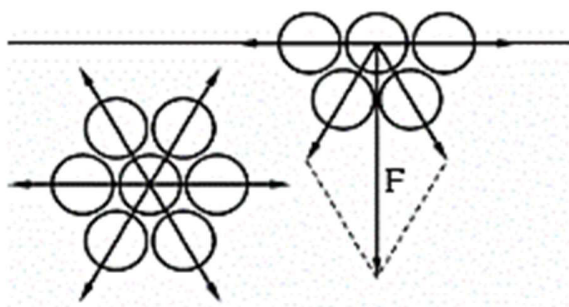
U težnji da se zauzme oblik sa najmanjom površinom ona kontrahuje do najmanje moguće vrijednosti. Zategnutost slobodne površine tečnosti ne zavisi od veličine njegove površine. Pri povećanju ili smanjenju slobodne površine tečnosti njena zategnutost se ne mijenja, odnosno stalna je za datu tečnost. U slučaju membrane, napravljene od elastičnog materijala, zategnutost se povećava sa povećanjem njene površine (slika 3.8).



Slika 3.8. Dejstvo rezultujućih sila na molekule.

Sila kojom jedan molekula privlači susedne molekule brzo opada sa rastojanjem, tako da je već na rastojanju od nekoliko efektivnih poluprečnika molekula zanemarljiva. Odgovarajuće rastojanje r naziva se poluprečnik molekularnog dejstva i predstavlja najmanje rastojanje na kojem se ispoljava delovanje sile između molekula. Sfera poluprečnika R u čijem centru se nalazi molekula nazivamo sferom molekularnog dejstva (slika 3.8). Ovom sferom je ograničeno dejstvo među molekularnih privlačnih sila i približno odgovara sferi trostrukog poluprečnika molekula r . Svaki molekul je privlačen od susednih molekula koji se nalaze u sferi njegovog dejstva.

Posmatrajmo molekul čija je udaljenost od površine tečnosti veća od poluprečnika molekularnog



dejstva r tako da je cela sfera njegovog dejstva u unutrašnjosti tečnosti. Takav molekul je okružen sa svih strana istim takvim molekulima tako da je rezultujuća sila među molekulskog privlačenja jednaka nuli. Zbog simetričnog rasporeda molekula u sferi dejstva njihova delovanja se poništavaju.

Slika 3.8. Sfera molekularnog dejstva.

Ako je udaljenost molekula od površine tečnosti manja od r tada, pošto je gustina gasa sa kojom se graniči površina tečnosti mnogo manja od gustine tečnosti, dio sfere molekularnog dejstva iznad tečnosti biće manje popunjen molekulima nego ostali dio sfere unutar tečnosti. Zato djelovanje molekula pare ili vazduha na molekule tečnosti se može zanemariti. Uslijed toga će na molekul, koji se nalazi u površinskom sloju debljine r , dejstvovati sila usmjerena ka unutrašnjosti tečnosti i biće normalna na tu površinu. Veličina te rezultujuće sile je veća što je molekul bliže površini tečnosti. Takav molekul je izložen dejstvu maksimalne sile, pošto mu je samo donja polovina sfere dejstva popunjena molekulama tečnosti. Sloj tečnosti u kojem se nalaze svi takvi molekuli zove se površinski sloj tečnosti.

3.5 Potencijalna energija površinskog sloja

Da bi molekul prešao iz unutrašnjosti tečnosti u površinski sloj debljine r , potrebno je da molekul izvrši izvjestan rad protiv sile koja na njega dejstvuje u tom sloju. Rad koji izvrši molekul na račun svoje kinetičke energije ide na povećanje njegove potencijalne energije. Dakle, molekul u površinskom sloju tečnosti raspolaže nekim viškom potencijalne energije u odnosu na molekul koji je u unutrašnjosti tečnosti.

Prema opštem principu, svaki sistem u prirodi teži da zauzme takvo ravnotežno stanje u kome mu je potencijalna energija minimalna. Među svim tijelima iste zapremine najmanju površinu ima lopta. Stoga će i tečnost, koja je ostavljena sama sebi, kretanjem molekula zauzeti oblik sa najmanjom slobodnom površinom, a to je oblik lopte, jer je tada najmanji broj molekula u površinskom sloju tečnosti. Mi takav oblik uglavnom ne vidimo, jer tečnost nije prepuštena sama sebi, već se nalazi u polju Zemljine teže, pa ima i odgovarajuću gravitacionu potencijalnu energiju. Kod malih kapi, recimo kapljice rose na travi, gravitaciona potencijalna energija je zanemarljiva, pa su te kapi gotovo pravilnog sfernog oblika. Veće kapi imaju i veću masu, pa se gravitaciona energija ne može zanemariti, one imaju spljošten oblik pri kojem će zbir površinske i gravitacione potencijalne energije biti minimalan.

Težnja površine tečnosti da zauzme najmanju moguću vrijednost možemo na jednostavan način eksperimentalno dokazati. Belgijski fizičar Plato je prvi dokazao u svojim ogledima ovu pojavu, ali nije imao matematičko objašnjenje za to. Na prstenastom ramu opna tečnosti je ravna površina. Ako bi smo uzeli bilo koju drugu složeniju geometrijsku konturu opna koja bi se formirala bila bi manja nego što bi očekivali.

3.6 Određivanje koeficijenta površinskog napona

Zbog težnje da smanji potencijalnu energiju odnosno površinu, površinski sloj tečnosti ponaša se nalik zategnutoj opni po kojoj djeluju elastične sile. Ponašanje površine tečnosti, uslijed među molekularni sila, kao zategnute elastične opne je pojava koja se naziva površinski napon. Ako se opna na nekom mjestu pritisne ona će se deformirati i javiće se elastična sila koja će težiti da je vrati u prvobitno stanje u kome je imala najmanju površinu. Na primjer, kada bi se na površini tečnosti nalazio neki žičani prsten, na svaki djelić prstena tečnost bi djelovala silom površinskog napona. U svakoj tački pravac sile je normalan na tu graničnu liniju i tangentan na površinu tečnosti, a smjera je prema unutrašnjosti konture (slika 3.6).

Težnja tečnosti da ima minimalnu slobodnu površinu ispoljava se djelovanjem sila površinskog napona. Sile površinskog napona ne djeluju samo duž dodirne linije površine tečnosti i čvrstog tijela. Takve sile djeluju svuda po slobodnoj površini tečnosti. Kod nekih tečnosti te sile su jače, kod nekih slabije. Zato površinski napon nije isti za sve supstance, već zavisi od vrste tečnosti, odnosno intenziteta sila kohezije koje djeluju između određenih molekula. Veličina kojom se kvantitativno izražava težnja tečnosti ka smanjenju površine zove se koeficijent površinskog napona γ . On pokazuje koliki rad je potreban da se opna tečnosti poveća za jedinicu. Po ovom principu konstanta površinskog napona je sila koja djeluje na jedinicu dužine slobodne površine tečnosti. Jedinica za koeficijent površinskog napona je N/m.

Energija čestica na površini tečnosti je obično veća od njihove energije unutar tečnosti. Zbog toga svaka tečnost nastoji da što više smanji svoju površinu i ovu tendenciju nazivamo površinski napon.

Između molekula tečnosti postoji interakcija. Sile između molekula koje pripadaju istoj tečnosti se zovu kohezivne sile, dok se sile između molekula iz posmatrane tečnosti i čestica izvan nje zovu adhezione sile. Kada je rastojanje između dva molekula veće od nekog karakterističnog rastojanja r_0 ovi molekuli se privlače, dok se u suprotnom odbijaju. Interakcija između molekula se veoma brzo menja sa njihovim rastojanjem r . Za $r > r_0$, tj kada se molekuli privlače, sila opada sa nekim dosta visokim stepenom n rastojanja r : $F \sim 1/r^n$; za van der Waals sile je npr. $n = 7$. Za $r < r_0$, tj kada se molekuli odbijaju, sila još brže raste sa smanjenjem rastojanja, za van der Waals sile je npr. $F \sim 1/r^{13}$. Pri uobičajenim pritiscima prosečno rastojanje između molekula u tečnosti je veće od karakterističnog rastojanja, te prevladavaju privlačne sile.

Unutar tečno molekuli su sa svih strana okruženi drugim molekulima te je prosečna rezultujuća sila među molekulskih interakcija jednaka nuli, slika 3.5. Okruženje molekula na površini tečnosti nije simetrično te se na njih javlja sila usmjerena ka unutrašnjosti tečnosti. Stoga je pri pomjeraju molekula iz zapremine tečnosti na njenu površinu potrebno utrošiti neki rad.

Neka se izotermiski (i kvazi-statički) površina tečnosti poveća za ΔS pri neizmenjenoj zapremini. Tom prilikom se utroši rad ΔA koji je proporcionalan sa ΔS zato što je broj molekula prenesenih iz zapremine na površinu tečnosti proporcionalan sa ΔS . Koeficijent proporcionalnosti je veličina koja se naziva koeficijent površinskog napona.

$$\gamma \equiv \frac{\Delta A}{\Delta S} \quad (3.4)$$

Tabela 3.1. Konstanta površinskog napona nekih tečnosti γ (N/m)

Tečnost	Koef. povr. napona γ (N/m)
Voda (na 0°C)	0,0756
Voda (na 20°C)	0,0728
Voda (na 100°C)	0,0589
Sapunica	0,0370
Etil alkohol	0,0223
Glicerin	0,0631
Živa	0,465
Maslinovo ulje	0,032
Krv (na 37°C)	0,058
Krvna plazma (na 37°C)	0,073
Zlato (na 1070°C)	1,000
Kiseonik (na -193°C)	0,0157
Helijum (na -269°C)	0,00012

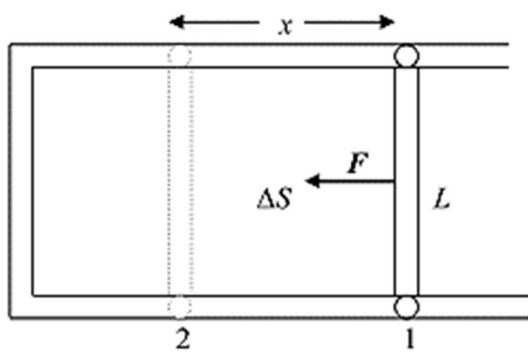
Koeficijent površinskog napona zavisi od prirode tečnosti odnosno od intenziteta među molekularnih sila privlačenja unutar tečnosti. Mora se voditi i računa i o materijalu sa kojim se graniči tečnost, jer broj i vrsta molekula iznad granične površine utiče na vrijednost koeficijenta površinskog napona. Na njegovu vrijednost u znatnoj mjeri utiču još i primjese. Rastvaranjem neke supstance u tečnosti mijenja se konstanta površinskog napona. Rastvorene supstance na njegovu vrijednost djeluju dvojako, mogu da smanje ili da povećaju njegovu vrijednost.

Temperatura također utiče na površinski napon. Smanjenje površinskog napona sa porastom temperature se odigrava zato što na višim temperaturama dolazi do povećanja intenziteta toplotnog kretanja molekula, što djeluje na smanjenje sila privlačenja između njih, pa prema

tome i do sniženja površinskog napona. Površinski napon tečnosti opada sve do temperature bliske kritičnoj. Na kritičnoj temperaturi nestaju razlike između gasne i tečne faze i površinski napon postaje nula. U tabeli 3.2. prikazane su neke vrijednosti površinskog napona na različitim temperaturama.

t [°C]	H ₂ O	CCl ₄	C ₆ H ₆	C ₆ H ₅ NO ₂	C ₂ H ₅ OH	CH ₃ COOH
0	75,64	29,00	31,60	46,40	24,00	29,50
25	71,97	26,10	28,20	43,20	21,80	27,10
50	67,91	23,10	25,00	40,20	19,80	24,60
75	63,35	20,20	21,90	37,30	–	22,00

Tabela 3.2. Površinski napon γ (10^{-3} N/m) tečnosti na različitim temperaturama.



Vežu između koeficijenta površinskog x napona i sile površinskog napona najlakše je uspostaviti iz primjera prikazanog na slici 3.9. Na slici je pravougaoni ram čija je desna strana pomična žica dužine L . U ramu je opna od sapunice. Ova opna je u tečnom stanju, a njena po vršina je ogromna u odnosu na vrlo malu zapreminu, pri čemu treba imati na umu da opna ima dvostruku površinu.

Slika 3.9. Opna od sapunice na ramu sa jednim pokretnim stranom.

Zato će jaka sila površinskog napona vući pokretnu stranicu ulijevo, težeći da smanji slobodnu površinu opne. Nek je put koji pritom ona pređe, od tačke 1 do tačke 2 označen sa x . Sada rad A koji je pritom izvršila sila površinskog napona može da se odredi na dva načina. Prvi način se zasniva na prethodnoj definiciji koeficijenta površinskog napona:

$$\gamma \equiv \frac{\Delta A}{\Delta S} \Rightarrow \Delta A = \gamma \Delta S \quad (3.5)$$

Sa slike 3.9 se vidi da je promjena površine:

$$\Delta S = 2L \cdot x \quad (3.6)$$

Pa je:

$$\Delta A = 2\gamma L \Delta x \quad \text{odnosno} \quad A = 2\gamma L x \quad (3.7)$$

Drugi način je da upotrijebimo obrazac za rad sile, naime rad sile nad datim tijelom je jednak proizvodu sile koja vrši rad i puta koji pređe to tijelo, što važi pod uslovom da sila djeluje duž tog puta: $\Delta A = F \cdot x$ odnosno $A = F \cdot x$ (3.8)

Sada je jasno da ako su lijeve strane ovako dobijenih izraza za rad iste, tada moraju biti jednake i njihove desne strane:

$$F \cdot x = 2\gamma \cdot L \cdot x \quad (3.9)$$

Slijedi: $F = 2\gamma \cdot L$ (3.10)

Brojni faktor 2 se javlja zato što opna ima dvije površine. U nekom slučaju u kome bi tečnost imala samo jednu površinu intenzitet sile površinskog napona bi bio dvostruko manji:

$$F = \gamma \cdot L \quad (3.11)$$

Iz prethodnog izraza koeficijent površinskog napona je:

$$\gamma = \frac{F}{L} \quad (3.12)$$

Koeficijent površinskog napona date tečnosti je brojno jednak sili površinskog napona koja djeluje na jedinicu dužine granične linije koja oivičava površinu te tečnosti.

3.6.1. Termodinamičke jednačine za sisteme sa razvijenom površinom

U sistemima kod kojih je površina velika u odnosu na njihovu zapreminu (sistemi sa razvijenom površinom) neophodno je da se u termodinamičke jednačine uvrsti doprinos površinske energije. Kada se ogled prikazan na (slika 3.9) izvodi reverzibilno pri $p = \text{const.}$ i $T = \text{const.}$, uloženi rad jednak je promjeni Gibsove energije.

$$dG = dw \quad (3.13)$$

pa je površinski napon:

$$\gamma = \left(\frac{\partial G}{\partial A} \right)_{p,T} = G^S \quad (3.15)$$

gdje je:

G^S - Gibsova površinska energija po jedinici površine.

Helmholz-ova i Gibbs-ova energija se koriste za izražavanje količine rada potrebnog za promijenu površine. Pri različitim uslovima, dA i dG odgovaraju radu izvršenom pri promjeni površine sistema za dA :

- pri konstantnom pritisku P i T : $dG = \gamma dA$ $\gamma = \left(\frac{\partial G}{\partial A} \right)_{P,T}$
gdje je: konstanta proporcionalnosti, γ , poznata kao površinski napon, a ima jedinice: $J m^{-2}$ ili $N m^{-1}$ (pošto je $1 J = 1 N m$).
- pri konstantnoj zapremini V i T : $dA = \gamma dA$ $\gamma = \left(\frac{\partial A}{\partial A} \right)_{V,T}$

Za Gibsovu površinsku energiju G^S važe jednačine analogne onima za Gibsovu energiju G :

$$G^S = H^S - TS^S$$

$$\left(\frac{\partial G^S}{\partial T} \right)_p = -S^S \quad \text{ili} \quad \left(\frac{\partial \gamma}{\partial T} \right)_p = -S^S \quad (3.16)$$

Promena Gibsove slobodne energije pri beskonačno maloj promjeni temperature, pritiska, količine supstancije i površine je:

$$dG = -SdT + VdP + \mu dn + \gamma dA \quad (3.18)$$

$$\gamma = \left(\frac{\partial G}{\partial A} \right)_{P,T,n} = G^S \quad \text{površinska Gibsova slobodna energija} \quad (3.19)$$

$$H^S = \gamma - T \frac{d\gamma}{dT} \quad \text{površinska entalpija} \quad (3.20)$$

3.7 Zavisnost koeficijenta površinskog napona od temperature

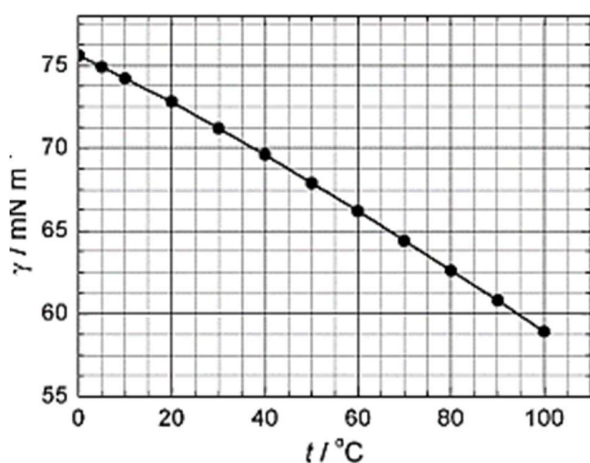
Površinski napon odražava interakcije između čestica jedne faze i interakcija na granici dodira dvije faze za koju se površinski napon definiše. U tabeli 3.3 su date vrijednosti površinskog napona za neke tečnosti, tačnije za granicu date tečnosti i vazduha. Očigledno je da su vrijednosti različite za različite tečnosti i da su vrijednosti za organske rastvarače slične i znatno manje od površinskog napona za vodu. Ovakvo ponašanje je očekivano s obzirom da interakcije između molekula tečnosti zavise od njihove prirode. Te interakcije obuhvataju van der Valsove sile, a između molekula vode djeluju i vodonične veze. U slučaju žive, interakcije između njenih jona predstavljaju pravu hemijsku vezu (metalnu vezu). Prema nekim proračunima u površinskom naponu vode od $72,8 \text{ mN m}^{-1}$ Londonove disperzne sile daju doprinos od $21,8 \text{ mN m}^{-1}$, a vodonične veze doprinose sa 51 mN m^{-1} .

Kada se ove vrijednosti uporede sa površinskim naponom organskih tečnosti u tabeli 3.3, vidi se da dio koji potiče od van der Valsovih sila za vodu odgovara ukupnom površinskom naponu za organske tečnosti. Iako između površinskog napona na granici faza tečnost/gas i na granici tečnost/tečnost nema suštinske razlike, uobičajeno je da se pojam površinski napon odnosi na granicu tečnost/vazduh, dok se za granicu tečnost/tečnost koristi pojam međufazni napon. Podrazumijeva se da se dvije tečnosti ne mješaju, jer samo u tom slučaju postoji granica faza. Podaci za međufazni napon na granici tečnost/voda također su prikazani u tabeli 3.3.

Tabela 3.3 Površinski napon (γ) i međufazni napon u odnosu na vodu (γ_i) za pojedine tečnosti na 20 °C

Tečnost	$\gamma / \text{mN m}^{-1}$	$\gamma_i / \text{mN m}^{-1}$
Voda	72,8	-
Glicerol	63,4	-
Benzen	28,9	35,0
Sirćetna kiselina	27,6	-
Aceton	23,7	-
CCl_4	26,8	45,1
Etanol	22,3	-
n-Oktan	27,5	8,5
n-Heksan	18,4	51,1
Živa	485	375

Na slici 3.10 prikazana je temperaturna zavisnost površinskog napona vode. Kao što se vidi,



površinski napon opada sa povećanjem temperature. To se objašnjava slabljenjem među molekulskih interakcija sa povećanjem temperature. Kada se temperatura tečnosti približava kritičnoj temperaturi, gustina tečnosti i pare se približavaju jedna drugoj, a granična površina između dvije faze postepeno iščezava da bi na kritičnoj temperaturi potpuno nestala, a površinski napon postao jednak nuli.

Slika. 3.10. Zavisnost površinskog napona

vode od temperature.

Postoji više empirijskih jednačina koje povezuju površinski napon i temperaturu. Jedna od najčešće korištenih je Remzi-Šildsova jednačina (Ramsey, Shields):

$$\gamma \left(\frac{M}{\rho} \right)^{2/3} = k_s (T_c - T - 6) \quad (3.21)$$

gdje je:

M - molarna masa tečnosti,

ρ - gustina tečnosti,

T_c - kritična temperatura,

k_s - konstanta.

Koeficijent površinskog napona γ je po Etvešovoj formuli (Loránd Eötvös 1848-1919 - mađarski fizičar čuven po seriji eksperimenata (1885-1909) kojima je dokazana ekvivalencija gravitacione i inertne mase.) linearna funkcija temperature:

$$\gamma = k(T - T_c)/V^{2/3} \quad (3.22)$$

gdje je:

T - apsolutna temperatura,

T_c - kritična temperatura,

V - molarna zapremina (tj zapremina po jednom molu) posmatrane tečnosti,

k - Etvešova konstanta $k = 2,1 \times 10^{-7} \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{mol}^{2/3})$ ista za sve tečnosti.

Formula (3.16) je, kako se lako vidi, u skladu sa činjenicom da se površinski napon javlja samo ispod kritične temperature, dok je na višim temperaturama jednak nuli.

Postoje i složenije formule, npr. Guggenheim - Katayama formula:

$$\gamma = \gamma^0 \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)^n \quad (3.23)$$

u kojoj je γ^0 koeficijent površinskog napona na temperaturi apsolutne nule (za van der Waals fluide je:

$$\gamma^0 = k' \sqrt[3]{P_c T_c^2} \quad (3.24)$$

gdje je:

k' - konstanta ista za sve van der Waals fluide,

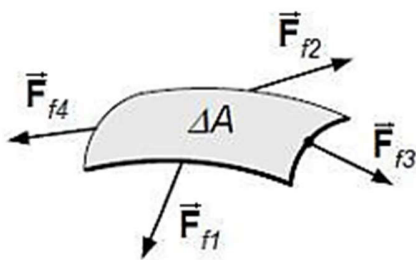
n - karakteristični eksponent, koji za organske tečnosti iznosi 11/9.

Napomenimo i da su osim formula, koje su poput (3.23) formule opšteg karaktera, u upotrebi i posebne empirijske formule kao što je formula za koeficijent površinskog napona vode:

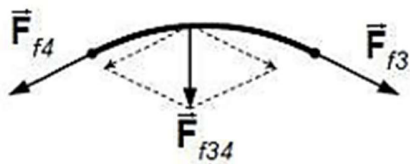
$$\gamma = B \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)^\mu \left[1 + b \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right) \right] \quad (3.25)$$

u kojoj je $B = 235,8 \times 10^{-3} \text{ N/m}$, $b = -0,625$, $\mu = 1,256$ i $T_c = 647,096 \text{ K}$.

3.7.1 Pritisak ispod zakrivljene površine tečnosti



Dosada smo po smatrali slučaj kada je opna tečnosti bila ravna površina. U tom primjeru površinske sile su djelovale u ravni površine tečnosti kao i njihova rezultujuća sila. Kod krive površine površinske sile djeluju u ravni tangente površine tečnosti, a rezultujuća sila ima i normalnu komponentu koja je normalna na element date površine (slika 3.11).



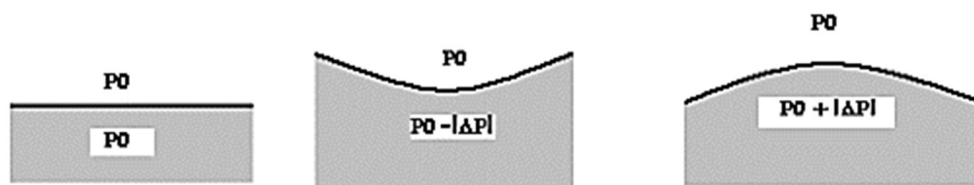
Kada je slobodna površina tečnosti kriva, pritisak iznad (sa one strane koja nije u tečnosti) i ispod nje nije isti. Kod konkavnih (udubljenih) površina veći je pritisak iznad, a kod konveksnih (ispupčenih) pritisak je veći ispod površine.

Slika 3.11. Dejstvo sile na element površine tečnosti.

Razlika pritisaaka iznad i ispod slobodne površine tečnosti zove se dopunski pritisak ili pritisak ispod zakrivljene površine:

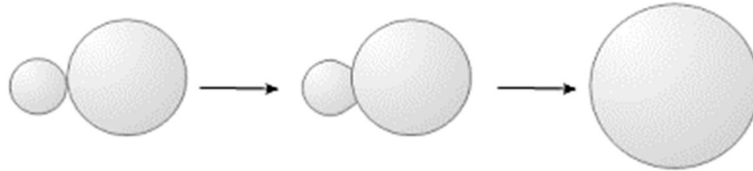
$$\Delta p = p - p_0 \quad (3.26)$$

Ako je dopunski pritisak negativan $\Delta p < 0$ površina tečnosti je konkavna, a kod konveksne površine on će biti pozitivan $\Delta p > 0$ (slika 3.12).



Slika 3.12. Dopunski pritisak ispod zakrivljene površine.

Površinski napon također stvara pritisak unutar mehurova. Uslijed težnje da slobodna površina bude što manja, opna mjehura sabija gas koji je zarobljen unutar njega i time mu povećava pritisaka. Kada se sudare dva mjehura uvijek iz manjeg uđe vazduh u veći pri čemu se dobija još veći mjehura (slika 3.13).



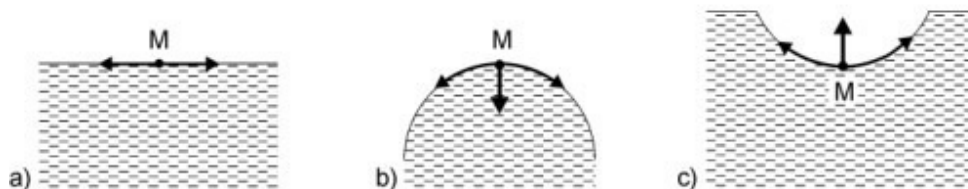
Slika 3.13. Spajanje manjeg mjehura sa većim mjehurom.

Pritisak unutar mjehura će biti utoliko veći ukoliko će polu prečnik R mjehura biti manji:

$$P = \frac{4\gamma}{R} \quad (3.27)$$

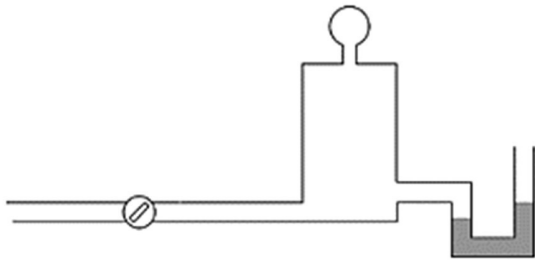
3.7.2 Površinski napon na zakrivljenoj površini tečnosti - Laplasova jednačina

Površinski napon ima značajne posljedice na ponašanje tečnosti čija je površina zakrivljena. Zakrivljene površine granice faza tečnost/gas javljaju se kod mehurova, šupljina u tečnosti, kapljica tečnosti i kod tečnosti u kapilarama. Pod mjehurom se podrazumijeva tanak film tečnosti koji okružuje paru, često u smješi sa vazduhom. Mjehur ima dvije površine (sa svake strane filma po jednu), dok šupljina u tečnosti ispunjena parom ima samo jednu površinu. Šupljine u tečnosti se također često nazivaju mjehurićima. Kapljice predstavljaju malu zapreminu tečnosti koja je okružena svojom parom, a često i vazduhom. Pod kapilaram se podrazumijeva veoma uska cijev za koju je karakteristično da kada se uroni u tečnost u njoj se formira ili konkavan ili konveksan menisk. Površinski napon na zakrivljenoj površini tečnosti dovodi do razlike pritisaka na konveksnoj i konkavnoj strani površine i to tako da je pritisak veći na strani faze koja ima konveksnu površinu. Kao posljedica toga dolazi do podizanja ili spuštavanja nivoa tečnosti u kapilarama i povećanja ili smanjenja napona pare, u zavisnosti od toga da li se radi o konveksnoj ili konkavnoj površini. Otežana nukleacija pri formiranju nove faze je prouzrokovana zavisnošću napona pare od zakrivljenosti površine tečnosti.



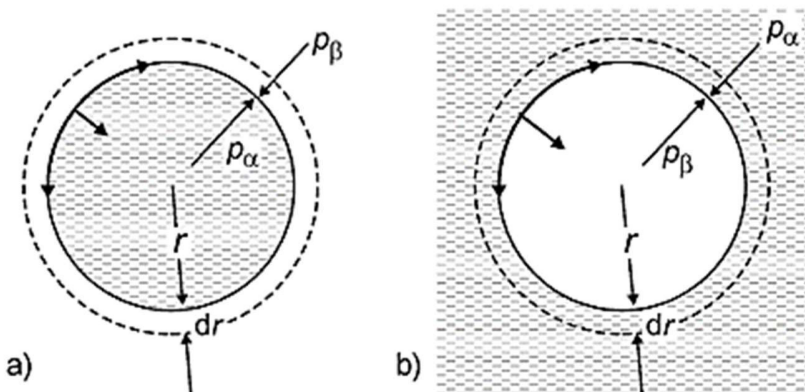
Sl. 3.13. Zavisnost površinskog napona od krivine površine: a) ravna površina, b) kap tečnosti i c) šupljina u tečnosti.

Povećan pritisak unutar faze sa konveksnom površinom može se dokazati i izmjeriti jednostavnim ogledom (slika 3.14). Staklena cijev na jednom kraju ima slavinu, drugi kraj je savijen u obliku lule i napunjen vodom te predstavlja manometar, dok se na sredini cijevi nalazi mali otvor. Kada se kroz taj otvor izduva mjehur od sapunice (slučaj koji odgovara slika 3.13. c) i slavina zatvori, manometar registruje da je pritisak unutar mjehura veći od spoljašnjeg pritiska.



Slika 3.14. Eksperiment kojim se pokazuje da je pritisak unutar mjehura od sapunice veći od spoljašnjeg pritiska.

Zavisnost spomenute razlike pritiska od poluprečnika krivine može se izvesti na primjeru sferne kapi čiste tečnosti (faza α) koja je u kontaktu sa svojom parom (faza β) na konstantnoj temperaturi (slika. 3.15 a).



Slika 3.15.

a) Sferna kapa tečnosti u kontaktu sa svojom parom i
b) sferni mjehur unutar tečnosti.

Kap je u ravnoteži kada je njena težnja za smanjenjem

površine uravnotežena povećanjem pritiska unutar kapi. Ako je pritisak unutar kapi p_α , a njen poluprečnik r , sila koja djeluje iz unutrašnjosti kapi prema spoljašnjoj sredini je:

$$F_\alpha = p_\alpha \cdot 4 \pi r^2 \quad (3.28)$$

Sila koja deluje sa strane parne faze ka unutrašnjosti kapi tečnosti potiče od pritiska u parnoj fazi, p_β , i od površinskog napona, γ , koji je usmjeren ka unutrašnjosti kapi:

$$F_\beta = p_\beta \cdot 4 \pi r^2 + F_\gamma \quad (3.29)$$

Izraz za silu površinskog napona se izvodi preko rada koga treba uložiti da bi se poluprečnik kapi povećao za diferencijalno malu vrijednost.

Promjena površine sferne kapi površine $S = 4 \pi r^2$, kada joj se polu prečnik promjeni za diferencijalno malu vrijednost dr je:

$$dS = 8 \pi r dr \quad (3.30)$$

pa je rad koji treba uložiti da bi se površina kapi povećala za ovu vrijednost:

$$dw = 8 \pi r \gamma dr \quad (3.31)$$

Pošto je rad jednak *sila* \times *put*, sila površinskog napona koja se suprotstavlja širenju površine je:

$$F_\gamma = 8 \pi r \gamma \quad (3.32)$$

Kada je uspostavljena ravnoteža, sve sile koje djeluju na graničnu površinu između tečnosti i gasa moraju biti u ravnoteži:

$$p_\alpha \cdot 4 \pi r^2 = p_\beta \cdot 4 \pi r^2 + 8 \pi r \gamma \quad (3.33)$$

što jednostavnim skraćivanjem daje:

$$p_\alpha = p_\beta + \frac{2\gamma}{r} \quad (3.34)$$

Jednačina (3.34) se naziva **Laplasova jednačina** i ona pokazuje da je pritisak unutar kapi tečnosti veći od pritiska u parnoj fazi, pri čemu je razlika pritiska obrnuto srazmerna poluprečniku krivine granične površine. Sa povećanjem poluprečnika razlika pritiska iščezava, što je slučaj sa ravnim površinama tečnosti. Na sličan način se može pokazati da je pritisak unutar šupljine (mjehura) u tečnosti (slika 3.14 b) veći od pritiska u tečnosti i to za isti iznos $2\gamma/r$:

$$p_\beta = p_\alpha + \frac{2\gamma}{r} \quad (3.35)$$

Opšti zaključak je da je pritisak sa konkavne strane granice faza veći nego sa konveksne strane. Jednačina (3.36) koja je izvedena za kap tečnosti može se primeniti na mjehur u tečnosti i na osnovu konvencije da je poluprečnik zakrivljenosti površine pozitivan ako leži u tečnoj fazi (Sl. 3.15 a), a negativan ako leži u gasovitoj fazi (Sl. 3.15 b).

Ne mora svaka zakrivljena površina biti sferna. Takve površine su određene pomoću dva poluprečnika, r_1 i r_2 , pa je opšti oblik Laplasova jednačine:

$$p_\alpha = p_\beta + \gamma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (3.36)$$

3.7.3 Dopunski pritisak za sfernu površinu

Po smatramo sfernu kap tečnosti u vazduhu. Neka je polu prečnik sfere R , a pritisak vazduha p_o . Sile površinskog napona zatežu površinu tečnosti i stvaraju pritisak unutar kapi veći nego spolja. Ako uzmemo da se površina tečnosti promijenila za beskonačno malu vrijednost $\Delta R \rightarrow 0$, sile površinskog napona će izvršiti rad jednak promjeni energije površinskog sloja:

$$\Delta A = \Delta E = \gamma \Delta S \quad (3.37)$$

$$\Delta A = (p - p_o) \Delta V$$

$$(p - p_o) \Delta V = \gamma \Delta S \quad (3.38)$$

$$(p - p_o) \frac{4}{3} \pi [R^3 - (R - \Delta R)^3] = \gamma 4 \pi [R^2 - (R - \Delta R)^2]$$
$$\frac{1}{3} (p - p_o) [3R^2 \Delta R - 3R(\Delta R)^2 + (\Delta R)^3] = \gamma [2R \Delta R - (\Delta R)^2]$$

Ako uzmemo u obzir uslov $\Delta R \rightarrow 0$, dobijamo sledeći izraz:

$$(p - p_o) R^2 \Delta R = 2 \gamma R \Delta R \quad (3.39)$$

$$(p - p_o) = \frac{2\gamma}{R}$$

Odakle slijedi da je dopunski pritisak ispod sferne površine tečnosti jednak:

$$\Delta p = \frac{2\gamma}{R} \quad (3.40)$$

Dopunski pritisak je veći ukoliko je poluprečnik krivine manji, odnosno ako je površina više kriva. U većini slučajeva dopunski pritisak može se zanemariti. U slučaju da po smatramo mjehur sapunice za dopunski pritisak dobi ćemo sledeći izraz:

$$\Delta p = \frac{4\gamma}{R} \quad (3.41)$$

Dopunski pritisak kod tečnosti u uskoj cijevi kružnog poprečnog presjeka možemo dobiti na sledeći način.

Slobodna površina tečnosti u uskoj cijevi je dio sfere, konveksan ili konkavan meniks.

Ugao između poluprečnika cijevi r i poluprečnika sferne površine R isti je kao ugao između tangente na sfernu površinu i zida cijevi.

$$R = \frac{r}{\cos \varphi} \quad (3.42)$$

Sledi da je razlika pritisaka ispod i iznad konveksnog meniska tečnosti u uskoj cijevi:

$$\Delta p = \frac{2\gamma}{R} = \frac{2\gamma \cos \varphi}{r} \quad (3.43)$$

Ista formula važi i za dopunski pritisak ispod konkavnog meniska s tim što je pritisak iznad površine tečnosti veći.

$$\Delta p = - \frac{2\gamma \cos \theta}{r} \quad (3.44)$$

Uzimajući u obzir da je $\phi = \pi - \theta$ dopunski pritisak u slučaju kvašenja i ne kvašenja, možemo predstaviti sa istom formulom.

3.7.4 Koeficijent površinskog napona binarnih rastvora

Binarnim rastvorom zovemo smještu dvije tečnosti, označimo ih sa A i B, koje se rastvaraju jedna u drugoj. Neka su γ_A i γ_B koeficijenti površinskih napona ovih tečnosti i neka je, odrađenosti radi, $\gamma_A < \gamma_B$. Neka u rastvoru imamo n_A molova tečnosti A i n_B molova tečnosti B.

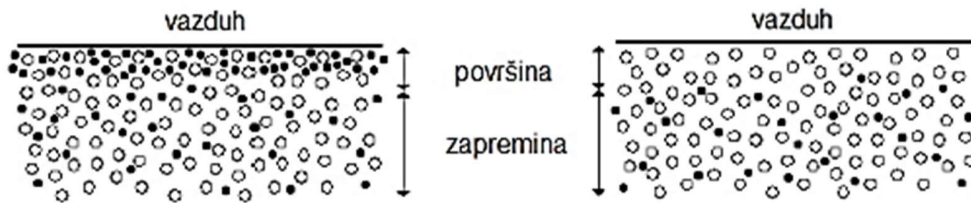
Veličine: $x_A \equiv n_A / (n_A + n_B)$, odnosno $x_B \equiv n_B / (n_A + n_B)$, zovemo molarni udio tečnosti A, odnosno tečnosti B, očigledno vrijedi $x_A + x_B = 1$.

Najjednostavnije pred viđanje kako koeficijent površinskog napona rastvora zavisi od njegovog sastava je dato Raulovim pravilom za idealne smješe:

$$\gamma = \gamma_A x_A + \gamma_B x_B \quad (3.45)$$

François-Marie Raoult (1830 - 1901), francuski hemičar koji je, između ostalog, dao pravilo da je veličina izmjerena na smješi linearna kombinacija istih tih veličina za komponente sa molarnim udjelima kao koeficijentima linearne kombinacije; npr. pritisak pare smješe je $p = p_A x_A + p_B x_B$, gdje su p_A i p_B pritisci pare za komponente smješe A i B. Raulovo pravilo važi samo za tzv. idealne smješe. Kod većine realnih smješa javljaju se odstupanja te se Raulovo pravilo može iskoristiti samo za grubu procjenu jer se u gotovo svim situacijama javljaju znatna odstupanja.

Osnovni razlog odstupanja je da je površinski sloj rastvora znatno bogatiji komponentom rastvora koja ima niži površinski napon nego ostatak rastvora jer se na taj način ostvaruje niža ukupna energija sistema, slika 3.16.



Slika 3.16. Koncentracija molekula rastvorene supstance uz površinu i u zapremini rastvora.

U odnosu na rastvarač, koeficijent površinskog napona rastvorene supstance je viši (lijevo), odnosno niži (desno).

Imajući navedeno u vidu može se dati jednostavna modifikacija **Raulovog pravila** za koeficijent površinskog napona rastvora po kojem je:

$$\gamma = \gamma_A y_A + \gamma_B y_B \quad (3.46)$$

gdje su:

y_A i y_B molarni udijeli komponenata A i B u površinskom sloju rastvora.

Kao i za x_A i x_B , za njih vrijedi $y_A + y_B = 1$, ali je odnos y_A / y_B na površini rastvora veći od odnosa x_A / x_B u ostatku rastvora. Ono što je esencijalno je da u slučaju smiješa relativno sličnih tečnosti količnik ova dva odnosa:

$$S = \frac{y_A / y_B}{x_A / x_B} \quad (3.47)$$

ne zavisi od sastava rastvora, te se može iskoristiti za predikciju koeficijenta površinskog napona:

$$\gamma = \frac{S\gamma_A x_A + \gamma_B x_B}{Sx_A + x_B} \quad (3.48)$$

odnosno:

$$\gamma = \frac{\gamma_B + (S\gamma_A - \gamma_B)x_A}{1 + (S - 1)x_A} \quad (3.49)$$

gde je koeficijent površinskog napona rastvora dat u funkciji molarnog udijela komponente A kao jedine nezavisne veličine (jer je $x_B = 1 - x_A$). Ovaj izraz se može napisati u obliku:

$$\frac{\gamma - \gamma_A}{\gamma_B - \gamma} = \frac{1}{S} \left(\frac{1}{x_A} - 1 \right) \quad (3.50)$$

po kojem je veličina $(\gamma - \gamma_A)/(\gamma_B - \gamma)$ linearna funkcija veličine $1/x_A - 1$.

3.7.5 Metode mjerenja površinskog napona

Površinski napon se može direktno odrediti samo na granicama faza tečnost/gas i tečnost/tečnost. Metode mjerenja površinskog napona mogu se podijeliti na statičke i dinamičke. Kod statičkih metoda veličina površine tečne faze se ne mijenja, dok se kod dinamičkih metoda veličina površine pri mjerenju mijenja. Kod jedno komponentnih tečnosti obje vrste metoda daju približno iste rezultate zato što se ravnotežno stanje granice faza uspostavlja gotovo trenutno. Kod rastvora, gdje generalno dolazi do nagomilavanja rastvorene supstance na granici faza, za uspostavljanje ravnotežnog stanja potrebno je izvjesno vrijeme da bi rastvorena supstanca došla difuzijom iz dubine rastvora do granične površine. Ako je vreme potrebno za postizanje ravnotežnog stanja granične površine veće od vremena nastajanja nove granice faza pri određenoj dinamičkoj metodi mjerenja, ta metoda će dati nepouz dane rezultate.

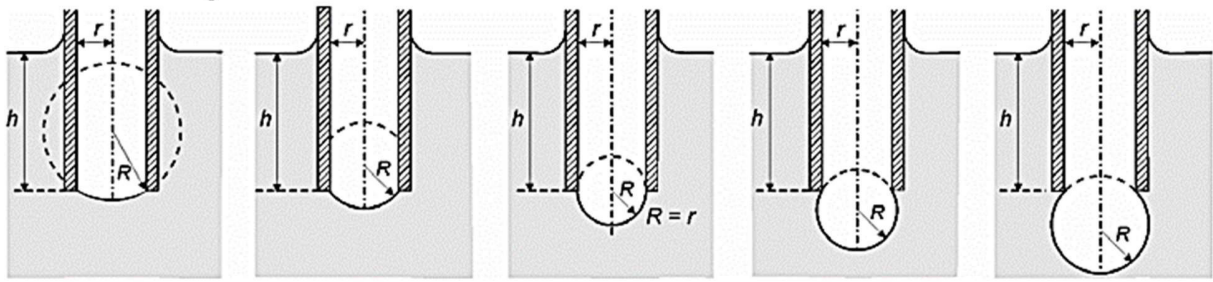
3.7.5.1 Metoda kapilarne cijevi

Metoda kapilarne cijevi se zasniva na kapilarnom podizanju odnosno spuštanju tečnosti u uskoj staklenoj cijevčici. Prema jednačini $h = 2 \gamma / \rho g r$, ako je poznat prečnik kapilare mjerenjem visine h može se odrediti površinski napon tečnosti čija je gustina poznata. Ako prečnik kapilare nije poznat, metoda se može koristiti kao relativna, odnosno prečnik se može odrediti pomoću neke tečnosti čiji je površinski napon poznat. Kapilara bi trebalo da je dovoljno uska da se može smatrati da je $\cos \theta_c \approx 1$. Također je važno da spoljašnja površina tečnosti ima prečnik najmanje 4 cm, jer se tek tada može smatrati da je zadovoljavajuće ravna.

3.7.5.2 Metoda maksimalnog pritiska u mjehuru

Metoda maksimalnog pritiska u mjehuru se sastoji u tome da cijev uroni u tečnost i da se kroz cijev uduvava inertan gas pri čemu se na kraju cijevi formira mjehur (slika 3.17). Kada je cijev uronjena do dubine h , potrebno je primeniti pritisak p da bi se formirao mehur poluprečnika R :

$$p = \rho g h + 2 \frac{\gamma}{R} \quad (3.51)$$



Slika 3.17. Mjerenje površinskog napona metodom maksimalnog pritiska u mjehuru.

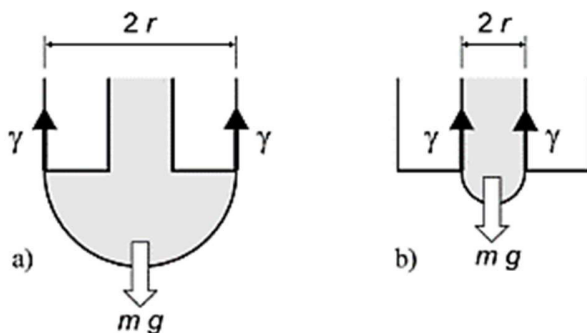
Prvi član ove jednačine predstavlja pritisak koji je neophodno primijeniti da bi se savladao hidrostatički pritisak u tečnosti na dubini h , a drugi član predstavlja višak pritiska na konkavnoj strani mjehura poluprečnika R . U početku mjehur raste, a njegov poluprečnik R se smanjuje dok ne dobije oblik polulopte poluprečnika r koji je jednak poluprečniku kapilare. Tada je pritisak maksimalan, jer je poluprečnik mehura minimalan:

$$p = \rho g h + 2 \frac{\gamma}{r} \quad (3.52)$$

Dalje povećanje pritiska uz povećanje poluprečnika R dovodi do otkidanja mjehura, pa se merenjem tog maksimalnog pritiska pomoću odgovarajućeg manometra može izračunati površinski napon. Prednost ove metode nad metodom kapilarne cijevi je u tome što je manje osjetljiva na nečistoće, jer svaki mjehur stvara novu površinu.

3.7.5.3 Metoda mjerenja mase kapi

Metoda mjerenja mase kapi se zasniva na mjerenju mase kapi koja se otkida sa ravne površine kapilarne cijevi. Težina kapi tečnosti koja se pri isticanju iz cijevi formira na kraju kapilare zavisi od poluprečnika cijevi i od površinskog napona tečnosti. U momentu otkidanja kapi tečnosti sila površinskog napona koja djeluje po obimu kapi na mjestu dodira sa kapilarom je približno jednaka težini kapi (slika 3.18):



Slika 3.18. Kap tečnosti na kraju kapilare kada:

- a) tečnost kvasi kapilaru i
- b) tečnost ne kvasi kapilaru

$$m g = 2 \pi r f \gamma \quad (3.53)$$

gdje je:

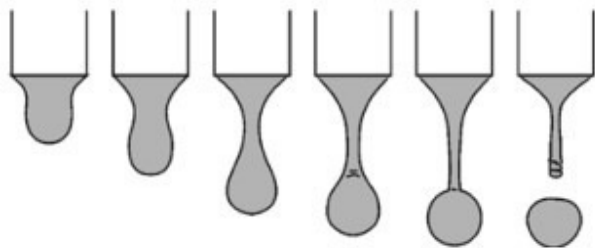
m - masa kapi,

r - poluprečnik kapilare,

f - korekcionni faktor

koji potiče od toga što kap koja se otkida sa vrha kapilare ne sadrži svu tečnost koja je do momenta otkidanja kapi istekla iz kapilare.

Faze otkidanja kapi tečnosti sa vrha kapilare prikazane su na slika 3.19.



Slika 3.19. Promena oblika kapi tokom otkidanja sa vrha kapilare.

Vrijednost faktora f zavisi od poluprečnika kapilare i zapremine kapi i njegove vrijednosti za razne odnose $r/V_k^{1/3}$ mogu se naći u literaturi. Ako se pretpostavi da je za jednu kapilaru faktor f nezavisan od vrste tečnosti, jednačina (3.53) se može koristiti za relativno određivanje površinskog napona poređenjem mase ili zapremine kapi sa masom ili zapreminom kapi tečnosti čiji je površinski napon poznat.

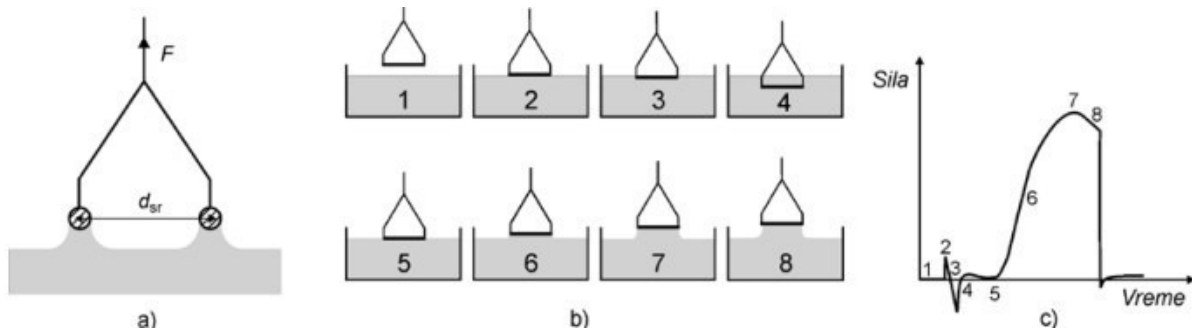
3.7.6. Tenziometrija

Tenziometrija je grupa metoda koja se zasnivana merenju sile interakcije između čvrstog tela i površine granice faza dva fluida (najčešće tečnosti i vazduha). U ovim eksperimentima čvrsto telo pogodnog oblika koje je obešeno na vagu, dovodi se u kontakt sa površinom tečnosti čiji se površinski napon meri. Na osnovu izmerene sile interakcije izračunava se površinski napon. U zavisnosti od oblika čvrstog tela, razvijene su metoda prstena i metoda ploče. U oba slučaja materijali od kojega su napravljeni prsten odnosno ploča moraju biti dobro kvašljivi.

3.7.6.1 Mjerenje koeficijenta površinskog napona

metodom otkidanja prstena (du Noüy metod)

Metoda prstena po Di Noiju (Du Noüy) koristi tanak prsten izrađen od platine ili neke njene legure. Prsten se uroni u tečnost ispod površine i lagano se podiže.



Slika 3.20. Mjerenje površinskog napona metodom prstena po Di Noiju:

- a) prsten u kontaktu sa površinom tečnosti čiji se površinski napon meri,
- b) podizanje prstena iz unutrašnjosti tečnosti i c) izmerena sila.

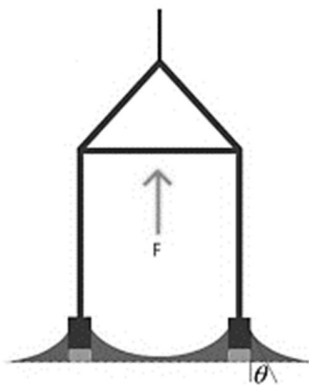
Tokom podizanja prstena formira se menisk tečnosti (slika 3.20 a) koji se, kada se prsten dovoljno podigne, kida i površina tečnosti se vraća u prvobitni položaj. Faze pri podizanju prstena iz unutrašnjosti tečnosti su prikazane šematski na slika 3.20 b. Sve vreme se bilježi sila koja se mijenja u zavisnosti od položaja prstena kao što je prikazano na slika 3.20 c. Površinski napon se izračunava pomoću maksimalne vrednosti sile, F_{max} , koju treba korigovati za težinu tečnosti, F_w , koju prsten podigne:

$$\gamma = \frac{F_{max} - F_w}{2\pi d_{sr} \cdot \cos\theta_c} \quad (3.54)$$

gdje je:

d_{sr} srednja vrijednost unutrašnjeg i spoljašnjeg prečnika prstena, odnosno $2\pi d_{sr}$ je okvašen obim, a θ_c kontaktni ugao koji je jednak nuli u momentu kada sila dostiže maksimum.

Metod otkidanja prstena (du Noüy, 1919.) je jedan od standardnih metoda za mjerenje koeficijenta površinskog napona. Iako manje tačan od drugih metoda (npr. kapilarnog koji se smatra referentnim, do 1930. godine rezultati mjerenja ovim metodom se nisu slagali sa rezultatima drugih metoda pa se nisu ni navodili u referentnim tablicama.), ovaj metod je dosta brz, te se zato često koristi kada je potrebno brzo izmjeriti koeficijent površinskog napona a da rezultati mjerenja ne moraju imati referentnu tačnost. U metodi otkidanja prstena se mjeri sila potrebna da se otkine prsten potopljen u ispitivanu tečnost, slika 3.14.



Slika 3.21. Shema metoda otkidanja prstena;

θ je kontaktni ugao između tečnosti i prstena.

Predstavljen je prsten sa pravougaonim presjekom kakav je na aparaturi u laboratoriji. U originalnoj metodi prsten ima kružni poprečni presjek.

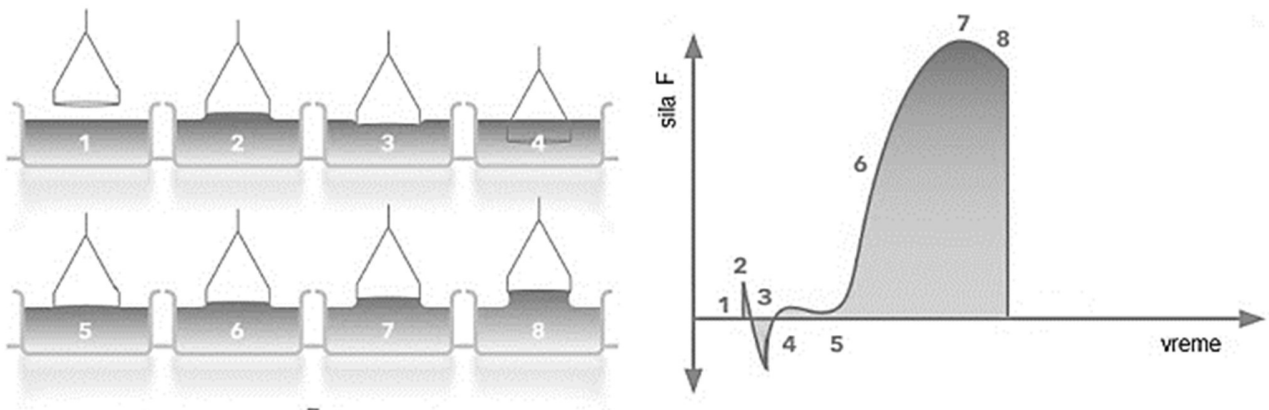
Sila uslijed površinskog napona se javlja na kontaktnoj liniji prstena sa tečnošću. Za idealan prsten to su dvije koncentrične kružnice u istoj horizontalnoj ravni: spoljašnje sa prečnikom D_s i unutrašnja sa prečnikom D_u . Stoga je ukupna dužna kontaktne linije prstena i tečnosti:

$$l = \pi(D_s + D_u) \quad (3.55)$$

Sila površinskog napona na svaki segment ove linije je usmjerena pod uglom θ u odnosu na vertikalnu, gdje je θ kontaktni ugao između prstena i tečnosti. Na taj način je ukupna sila površinskog napona na prsten jednaka:

$$F_{pn} = \gamma\pi(D_s + D_u) \cos \theta \quad (3.56)$$

i usmjerena je vertikalno naniže.



Slika 3.22. Vremenska zavisnost sile F između prstena i površine tečnosti tokom različitih faza otkidanja prstena; pozitivna smjer za F je vertikalno naviše.

(1) - prsten u vazduhu, $F = 0$.

- (2) - prsten uz samu površi tečnosti; sila $F > 0$ je mala i potiče od adhezije između prstena i tečnosti.
- (3) - tokom potiskivanja prstena u tečnost potrebna je mala sila $F < 0$ da bi se savladao površinski napon.
- (4) - prsten je potpuno potopljen u tečnost; mala sila $F > 0$ potiče od površinskog napona na držačima prstena.
- (5) i (6) - tokom podizanja prstena sila F raste sve dok ne dostigne maksimum (7).

Nakon toga se tokom kidanja dodirne linije prstena i tečnosti smanjuje te pada na nulu (8) kada je prsten otkinut i visoko iznad tečnosti.

U metodi otkidanja prstena na prsten djeluje sila F vertikalno naviše. Ova sila, slika 3.22, se mijenja tokom otkidanja i ima najveća vrijednost u trenutku kada kontaktna linija prsten tečnost počne da se kida. Ta najveća vrijednost se zove sila otkidanja prstena i to je veličina koja se mjeri u metodi. Sila otkidanja prstena F je nešto manja od sile površinskog napona F_{pn} računatoj po formuli (3.56). Detaljne studije, u koje se ne možemo upuštati, su pokazale da je količnik:

$$C \equiv \frac{F_{pn}}{F} \quad (3.57)$$

veličina koja zavisi od odnosa prečnika i debljine prstena, kao i od odnosa $R^3 (\rho - \rho')g/F$,

gdje je:

R - srednji polu prečnik prstena,

g - ubrzanje Zemljine teže,

dok su ρ i ρ_0 gustine tečnosti i njene zasićene pare.

Stoga formula za koeficijent površinskog napona određen metodom otkidanja prstena glasi:

$$\gamma = \frac{F}{\pi(D_s + D_u) \cos \theta} C \quad (3.58)$$

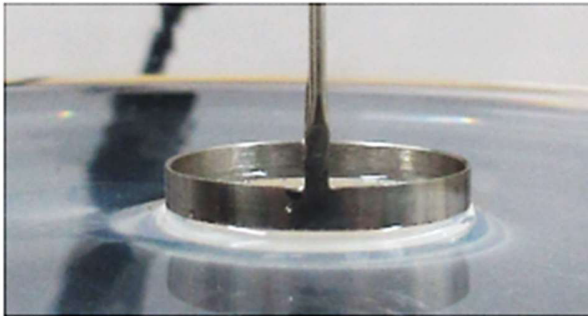
Sile otkidanja prstena su tipično male (reda mN) i za njihovo mjerenje se može koristiti torziona vaga. Ona se sastoji od ravnokrake poluge povezane sa torzionom niti. Kada se poluga nagne za ugao ϕ , za isti ugao se uvrne i torziona nit te na polugu djeluje restitucionim torzionim momentom $M = -k\phi$ koji nastoji da vrati nit u nedeformisano stanje (otud znak minus). Zato ako poluga zaklapa ugao α u odnosu na horizontalu i na jedan njen kraj djeluje sila F' pod uglom β u odnosu na g , tada će torziona nit biti u ravnoteži kada se uvrne za ugao ϕ za koji je:

$$k\phi = F' l_p \cos(\alpha - \beta) \quad (3.60)$$

gdje je:

l_p - rastojanje od centra poluge do napadne tačke sile F' .

Pri mjerenju sila torzionom vagom se nastoji da je $\alpha = \beta = 0$; tada je $k\phi = F' l_p$, što znači da je ugao uvrtnja niti proporcionalan sili F' priloženoj na kraj poluge, te se mjerenje sile F' svodi na mjerenje ugla uvrtnja torzione nite ϕ .



Navedimo na kraju da kontaktni ugao θ zavisi od materijala prstena i vrste tečnosti. Za prsten od platine (profesionalne aparature) je $\theta \approx 0$.

U PHYWE aparaturi je prsten, da bi bio jeftiniji, izrađen od legiranog čelika i za kontakt prsten-voda iznosi oko $13,5^\circ$, slika 3.23.

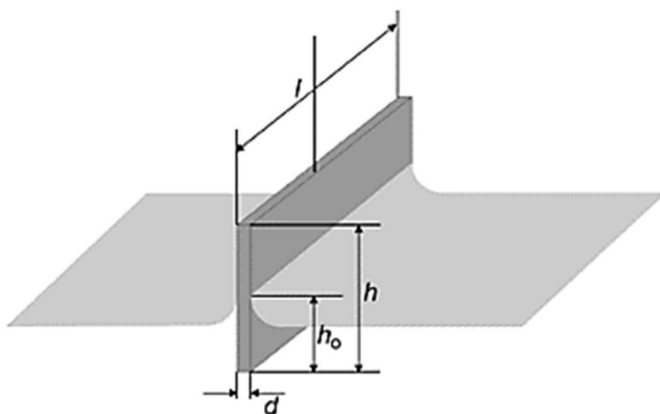
Slika 3.23. Kontaktni ugao između prstena (PHYWE torziona vaga) i vode.

metoda ploče

3.7.6.2 Metoda ploče po Vilhelmiju (Wilhelmy)

Druga varijanta tenziometrije je metoda ploče po Vilhelmiju (Wilhelmy). Ploča napravljena obično od hrapave platine uroni se u tečnost da se potpuno okvasi, a zatim se podigne tako da bude delimično uronjena u tečnost i sačeka da se granica faza uravnoteži (slika 3.24).

Ovo pokazuje da je za razliku od metode prstena, metoda ploče statička metoda. S obzirom da



tečnost kvasi ploču, menisk koji se formirao je konkavan na gore. Granica tečnost/gas je povećana i površinski napon teži da skupi površinu, odnosno da povuče ploču na dole. Sila koju mjeri tenziometar je jednaka zbiru težine ploče i sile površinskog napona koja djeluje po okvašenom obimu ploče, a umanjena je za silu potiska:

Slika 3.24. Mjerenje površinskog napona metodom ploče po Vilhelmiju.

$$F = \rho_p(l h d) g - \rho_t(l h_0 d) g + 2(l + d) \gamma \cos \theta_c \quad (3.61)$$

gdje je:

l - dužina ploče, h - njena visina i d - debljina, h_0 je visina do koje je ploča uronjena u tečnost, ρ_p i ρ_t su gustine ploče i tečnosti, θ_c je kontaktni ugao.

Ukoliko tečnost potpuno kvasi ploču, taj ugao je nula.

3.8 Kapilarnost i kontaktne površine

Molekule tekućina koje se nalaze na kontaktnoj površini dviju fluida ili tekućin i plina, koje se ne miješaju, izložene su djelovanju molekularnim privlačnim silama obje tekućine. Forma kontaktne površine ovisi o prirodi obadvije tekućine. Ukoliko se jedna kapljica tekućine manje gustoće položi na tekućinu veće gustoće, tekućina manje gustoće će zadržati svoj oblik kapljice ili će se razliti u obliku tankog filma po površini gušće tekućine (nafta na vodi ili voda na živi).

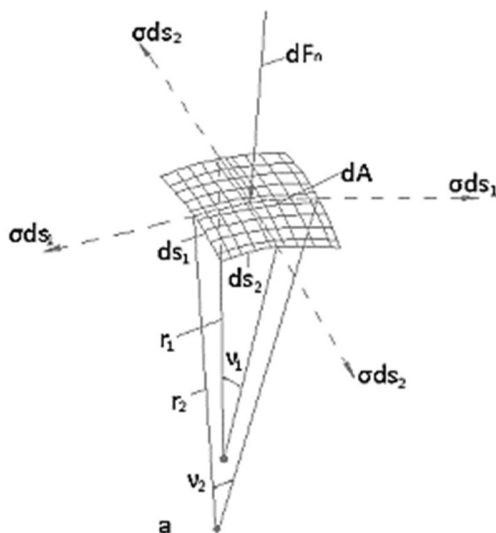
Na svaku molekulu tekućine koja se nalazi u mirovanju djeluju privlačne sile koje se nazivaju kohezivne ukoliko se promatraju molekule dviju različitih tekućina. Te sile imaju mali radijus djelovanja ($r_M = 10^{-7}$ cm). Ukoliko se molekula tekućine nalazi na udaljenosti $a > r_M$ od kontaktne površine s plinom, sile na tu molekulu djelovati će istim intenzitetom u svim smjerovima zbog čega će se i poništavati. Ukoliko je udaljenost $a < r_M$ na molekulu djeluju sile koje nisu međusobno uravnotežene pa postoji i rezultantna sila F_M različit od 0. Privlačne sile molekula plina na molekule tekućine su zanemarivo male pa je rezultantna sila F_M to veća što je udaljenost od kontaktne površine a manja. Iz tog razloga na kontaktnoj površini ostaje onaj broj molekula koji je minimalno potreban za formiranje slobodnog vodnog lica odnosno te kontaktne plohe između plina i tekućine. Prema tome može se reći da slobodna površina jedne tekućine ima tendenciju ka smanjenju. Forma kapljice upravo to i dokazuje budući da se njom postiže minimalna površina kojom se obuhvaća volumen tekućine u kapljici. Zadržavanje kapljičaste forme moguće je samo ukoliko u kontaktnoj površini s plinom postoji određeno stanje naprezanja a koje se naziva površinska napetost.

Naponi na kontaktnoj plohi nazivaju se i kapilarnim naponima σ . U svim točkama kontaktne površine vrijednost σ je ista a odgovarajuća jedinica je N/m. σ je također jedna konstitutivna fizikalna veličina koja ovisi o obadvije međusobno ne miješajuće tekućine a uobičajeno je za nju koristiti i naziv «kapilarna konstanta». Tanke cjevčice u kojima je efekt kapilarnosti vrlo izražen nazivaju se i kapilare.

Kombinacija tekućina		N/m
Voda	Zrak	0,073
	Vodena para	0,059
Živa	Zrak	0,475
	Voda	0,427
Alkohol	Zrak	0,023
	Voda	0,004
Ulje	Zrak	0,025...0,035
	Voda	0,023...0,048

U tabeli 3.4 dat je i prikaz vrijednosti kapilarne konstante σ za neke karakteristične kombinacije tekućina u kontaktu i bez njihovog međusobnog miješanja.

Rezultantni površinski naponi koji se pojavljuju u horizontalnom dijelu kontaktne plohe jednaki su 0 budući da se oni međusobno poništavaju, no na dijelovima kontaktne plohe koja je zakrivljena pojavljuje se i razlika tlakova koja će uravnotežiti rezultante površinske napone različite od 0 kako bi se ostvario konstantan položaj (mirovanje) kontaktne plohe.



Naprezanje σ na zakrivljenom segmentu kontaktne plohe dA imaju rezultantu dF_n koja ustvari predstavlja silu okomitu na taj segment kontaktne plohe. Rezultanta dF_n proporcionalna je zakrivljenosti segmentne plohe. Rezultantni tlak p_K na zakrivljenom segmentu kontaktne površine dobiva se dijeljenjem rezultantne sile dF_n s površinom zakrivljenog segmenta kontaktne površine dA , ima jedinicu Pa i određuje se jednačinom (slika 3.17):

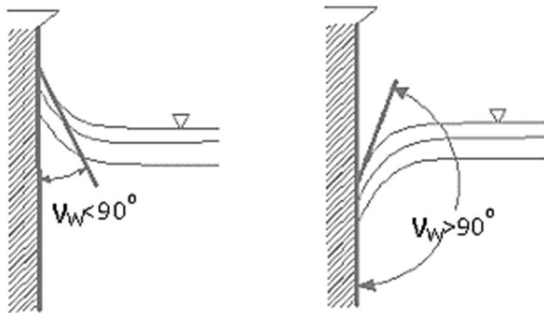
$$p_K = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad p_K = \frac{2\sigma}{r_K} \quad (r_1 = r_2 = r_K) \quad (3.62)$$

Slika 3.25. Zakrivljeni segment kontaktne plohe dA i pripadna rezultanta dF_n .

Vrijednost p_K je pozitivna (prema «unutra» ukoliko je kontaktna ploha konveksna. U slučaju konkavne kontaktne plohe radijuse r_1 i r_2 potrebno je uvrstiti s negativnim predznakom.

Jednčina 3.62, važeća je za kontaktne plohe koje imaju formu kugle ($r_1 = r_2 = r_K$).

Ukoliko kapljevina dodiruje stjenku krutog tijela njezine molekule nisu više samo pod utjecajem obje kontaktne tekućine (plina i kapljevine) već i pod utjecajem «krute» granice odnosno čvrste



stjenke (adhezivne sile). Ukoliko su privlačne sile između čvrste stjenke i molekula tekućine, primjerice vode, znatno veće nego privlačne sile između molekula tekućine, tekućina (voda) će u blizini čvrste stjenke imati tendenciju ka širenju po njoj. Kod žive to nije slučaj pa živa u blizini čvrste stijene ima tendenciju ka formiranju

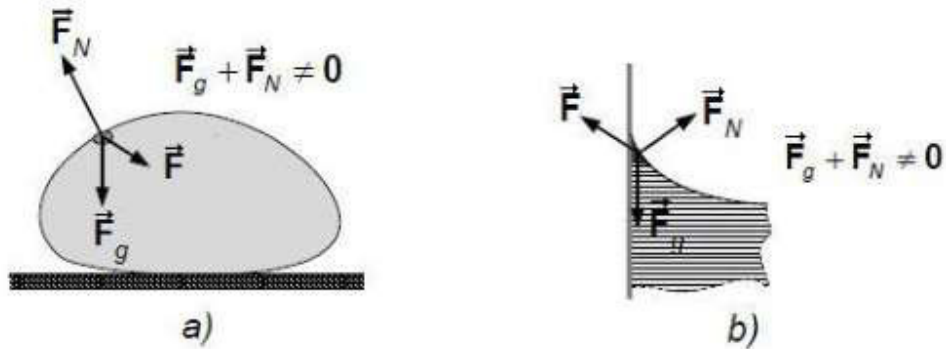
zakrivljene slobodne površine (vidi sliku 3.26,b). Slika 3.26:a,b Oblici slobodnih površina kapljevina na kontaktu s čvrstom stijenom (a – voda i staklo; b – živa i staklo)

3.9 Kapilarne pojave

Mnogobrojne su i svakome pristupačne pojave u kojima se ispoljava površinski napon i kapilarnost. Jedna od karakterističnih pojava jeste podizanje, odnosno spuštanje tečnosti u kapilarnoj cijevi. Kapilarnost je posljedica pojave na granici tečnosti i čvrstog tijela. Razni efekti koji se javljaju pri dodiru tečnih i čvrstih tijela nastaju zbog dejstva privlačnih molekularnih sila. Tečnost u kapilarima (uske cijevi, unutrašnjeg prečnika oko 1mm) se ne ponaša po zakonu spojenih sudova, već je iznad ili ispod nivoa tečnosti u sudu. Uzrok podizanja ili spuštanja tečnosti u kapilarnoj cijevi je površinski napon.

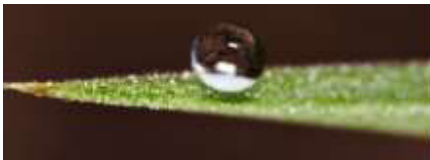
Na molekula koji je u dodiru sa glatkom površinom pored sile gravitacije, F_g i sile koja je normalna na površinu tečnosti, F_n , djeluje i sila, F , koja se odupire povećanju površine u vidu površinskog napona (slika 3.27).

U slučaju podizanja tečnosti u cijevi odnosno pri kvašenju zida suda, zbog ravnoteže molekula koji se nalazi na granici tečnosti zida, djeluje sila koja je usmjerena ka unutrašnjosti zida. Samo na ovaj način možemo objasniti i primjer zašto živa na čvrstoj površini čini stabilnu kap. Da bi molekula koji se nalazio na površini tečnosti bio u ravnoteži, pored sile F_g i F_n mora da djeluje jedna sila F koja će djelovati prema unutrašnjosti kapi tečnosti.

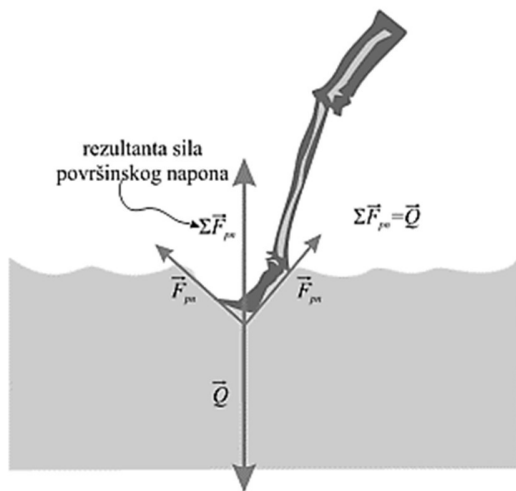


Slika 3.27. Ravnoteža sila u kapi tečnosti.

Pri dodiru tečnosti sa čvrstim tijelom treba uzeti u obzir ne samo silu uzajamnog dejstva između molekula tečnosti, već i silu uzajamnog dejstva između molekula tečnosti i čvrstog tijela . Da bi se napravila razlika između privlačenja istovrsnih čestica i privlačenja raznorodnih čestica, uvodi se pojam **kohezionih i adhezionih sila**. Sila privlačenja između molekula iste vrste naziva se sila kohezije. Na primjer, to su sile koje drže molekule kapi vode na okupu. Sile kohezije redukuju slobodnu površinu tečnosti na najmanju vrijednost (slika 3.28).



Slika 3.28. Kap vode na listu i insekt koji hoda po površini vode (efekti adhezije i kohezije).



Hodanje nekih insekata po vodi, kao i pojavu da tečnost ostaje u sudu otvorenom odozgo može se objasniti postojanjem sile kohezije (slika 3.29). U slučaju hodanja insekta po vodi, površinski napon se suprotstavlja težini insekta i on ostaje na površini vode ne prodirući u nju. Površina opne je otporna na razvlačenje i kidanje. Dio noge insekta koji je dodiruje izaziva zakrivljenje njene površine. Uslijed toga se javlja sila površinskog napona koja ima težnju da smanji slobodnu površinu tečnosti, odnosno da je vrati u stanje kada je imala

minimalnu energiju. Slika 3.29. Hodanje insekta na vodi, efekat kohezije

Ta sila je tangencijalna na površinu tečnosti, a njena rezultanta je usmjerena vertikalno naviše. Sile površinskog napona koje djeluju na razne molekule u zakrivljenom djelu površine mogu da se razlože na dvije komponente, jednu vertikalnu i drugu pod pravim uglom u odnosu na nju. Te normalne komponente se poništavaju jer ih ima podjednak broj sa svih strana posmatranog molekula, dok se vertikalne sabiraju i daju spomenutu rezultujuću silu koja je usmjerena na više.

Slično se dešava kada se na površinu vode postavi spajalica za papir (slika 3.30). Ona također



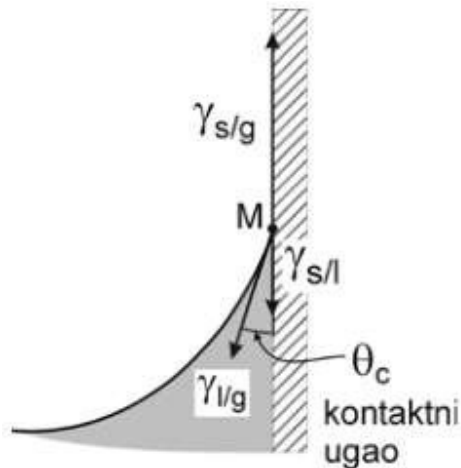
neće potonuti, ali ne možemo reći ni da pluta na vodi uslijed sile potiska, jer je njena gustina znatno veća od gustine vode, pa bi u skladu sa time trebalo da potone. Ona deformiše slobodnu površinu tečnosti uslijed čega se javlja sila površinskog napona čija je rezultanta usmjerena suprotno od težine spajalice i na taj način kompenzuje težinu spajalice.

Slika 3.30. Održavanje spajalice na površini vode.

Ako spajalicu spustimo vertikalno na površinu vode njena težina će djelovati na manju površinu, probija površinski sloj vode i tone na dno.

3.9.1 Kontaktni ugao, kvašenje i razlivanje

Oblik meniska tečnosti u kapilari može biti konkavan ili konveksan što zavisi od odnosa sila površinskih napona na granicama faza koje su u kontaktu. Posmatrajmo molekul M koji se nalazi u tački gdje se dodiruju tečnost, gas i zid kapilare (slika 3.31).



Slika 3.31. Površinski naponi koji deluju u tački u kojoj se dodiruju tri faze: tečna, čvrsta i gasovita; slučaj kada tečnost kvasi zid kapilare

Na taj molekul djeluju sile tri površinska napona: površinski napon na granici faza čvrsto/ gas, $\gamma_{s/g}$, površinski napon na granici faza čvrsto/tečnost, $\gamma_{s/l}$ i površinski napon na granici faza tečnost/gas, $\gamma_{l/g}$.

Da bi molekul M ostao u miru, a to odgovara stanju ravnoteže, sile sva tri pomenuta površinska napona

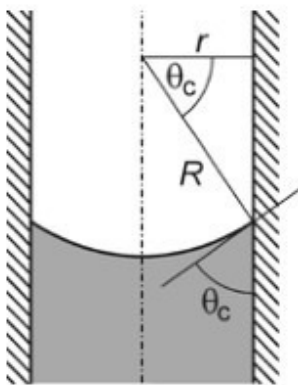
moraju biti u ravnoteži, odnosno njihov vektorski zbir mora biti jednak nuli:

$$\gamma_{s/l} + \gamma_{l/g} \cos \theta_c = \gamma_{s/g} \quad (3.63)$$

Ugao θ_c koji u tački dodira čvrste, tečne i gasovite faze zaklapa tangenta povučena na graničnu površinu tečnost/gas sa površinom čvrste faze i koji se mjeri kroz tečnost naziva se kontaktni ugao. On se koristi kao pokazatelj kvašljivosti čvrste površine tečnošću. Ako je kvašenje potpuno, kontaktni ugao je 0° , a ako nema kvašenja, onda on iznosi 180° . Međutim, uobičajeno je da se kaže da tečnost kvasi čvrstu površinu kada je kontaktni ugao manji od 90° , odnosno da tečnost ne kvasi čvrstu površinu kada je kontaktni ugao veći od 90° . U prvom slučaju menisk je konkavan i takva tečnost se penje u kapilari, dok je u drugom slučaju menisk konveksan i nivo tečnosti u kapilari se spušta.

Ako je kapilara veoma uska, menisk će imati oblik sfere prečnika koji je jednak prečniku kapilare. U tom slučaju je kontaktni ugao jednak nuli i sve tri sile površinskog napona djeluju u istom pravcu.

Međutim, u opštem slučaju tečnost dodiruje zid kapilare pri nekom kontaktnom uglu θ_c (slika 3.31), što zahteva korekciju jednačine (3.63) za kapilarno podizanje odnosno spuštanje. Ako je poluprečnik kapilare r , a poluprečnik sfernog meniska R (slika 3.32), važiće odnos $R = r / \cos \theta_c$, pa visina za koju se tečnost u kapilari podiže ili spušta iznosi:

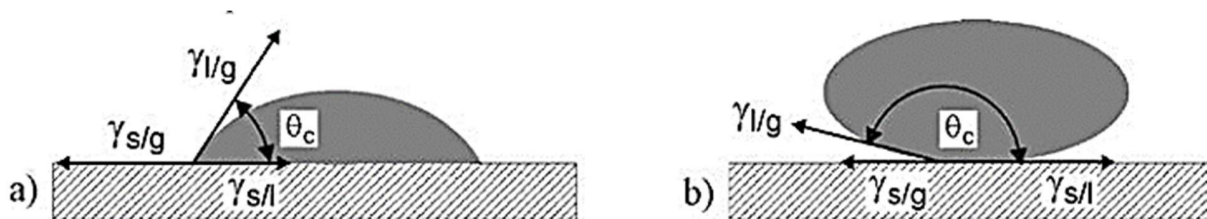


$$h = \frac{2\gamma \cos \theta_c}{\rho g r} \quad (3.64)$$

Slika 3.32. Menisk čiji je poluprečnik, R , veći od poluprečnika kapilare, r .

Kada se kap tečnosti stavi na čvrstu površinu, njen oblik će, slično obliku meniska tečnosti u kapilari, zavisiti od odnosa sila površinskog napona na granicama faza tečno/gas γ_{lg} , tečno/čvrsto γ_{ls} i gas/čvrsto γ_{gs} .

Ravnotežni oblik se postiže pri nekom kontaktnom uglu θ_c koji obezbeđuje da je zbir sila površinskog napona jednak nuli. Na slici 3.33 a, prikazana je kap tečnosti koja kvasi čvrstu površinu, a na slici 3.33 b kap tečnosti koja ne kvasi čvrstu površinu.



Slika 3.33. Kap tečnosti na čvrstoj površini:

a) tečnost kvasi podlogu i b) tečnost ne kvasi podlogu.

Međutim, u trenutku kada se kap nanese na čvrstu površinu sile površinskog napona neće biti u ravnoteži i oblik kapi će se mijenjati pod dejstvom horizontalnih komponenti sila površinskih napona:

$$F = \gamma_{sl/g} - \gamma_{sl/l} - \gamma_{lg} \cos \theta' \quad (3.65)$$

gdje je:

θ' - kontaktni ugao u trenutku formiranja granice faza čvrsto/tečno/gasovito.

Granica faza će se kretati u smjeru koji zavisi od sile F sve dok ugao θ' ne dostigne vrijednost pri kojoj je sila $F = 0$, što odgovara ravnoteži koja je opisana jednačinom 3.63. Ukoliko za date vrijednosti površinskog napona ne postoji ugao pri kome je $F = 0$, tečnost će se potpuno razliti po čvrstoj površini, te će kontaktni ugao biti $\theta_c = 0$, odnosno $\cos \theta_c = 1$:

$$F(\theta_c = 0) = \gamma_{s/g} - \gamma_{s/l} - \gamma_{l/g} \quad (3.66)$$

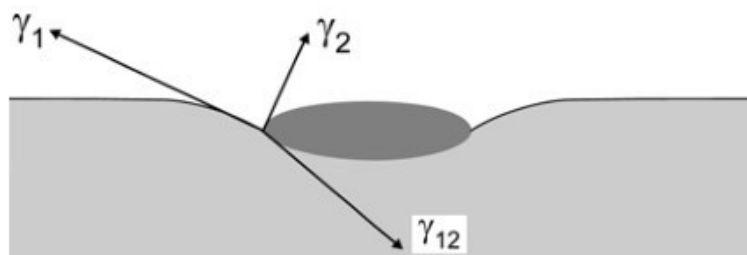
Pogodno je definisati koeficijent razlivanja tečnosti na čvrstoj površini kao:

$$S_{s/l} = \gamma_{s/g} - \gamma_{s/l} - \gamma_{l/g} \quad (3.67)$$

Ako je $S_{s/l} > 0$, tečnost se potpuno razliva do sloja čije je debljina određena samo van der Valsovim silama. U slučaju $S_{s/l} \leq 0$ tečnost se ne razliva potpuno, a granica faza se uravnotežava pri uglu $0 < \theta_c < 180^\circ$ za koji je $F = 0$.

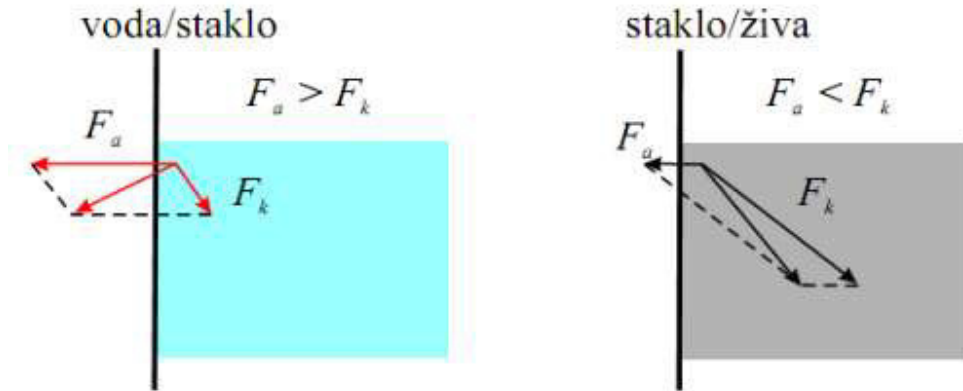
S obzirom da kontaktni ugao zavisi od odnosa sila kohezije i adhezije, kvašljivost će zavistiti od prirode tečnosti i čvrste površine. Opšte pravilo je da voda bolje kvasi površine koje imaju polarne grupe, kao npr. OH grupe, a da slabo kvasi polimerne materijale koji sadrže nepolarne grupe. Za površine koje se dobro kvase vodom kaže se da su hidrofilne, dok su one koje se slabo kvase hidrofobne. Iz istih razloga organske tečnosti dobro kvase polimerne materijale. Pored hemijskog sastava, na kvašljivost čvrste površine utiče i njena mikrostruktura. Tako površine koje imaju mikrometarske neravnine mogu biti superhidrofobne, što znači da kontaktni ugao kapi vode na njima ima vrijednost veću od 150° .

Kada se kap jedne tečnosti nanese na površinu druge tečnosti sa kojom se ne meša takođe može doći do razlivanja i do formiranja potpunog monosloja jedne tečnosti na drugoj ili do formiranja kapi u obliku manje ili više spljoštenog sočiva (Slika 3.34).



Slika 3.34. Kap tečnosti l_1 na površini druge tečnosti l_2 s kojom se ne miješa.

Adhezione sile su sile između različitih molekula, npr. vode i stakla posude u kojoj se voda nalazi. Takve sile drže kapi kondenzovane vode zalepljene za prozorska stakla ili lišće biljaka. Od međusobnih odnosa adhezione i kohezione sile zavise pojave koje se javljaju na ivici spoja tečnosti sa sudom.



Slika 3.35. Odnos adhezione i kohezione sile.

Moguća su dva slučaja:

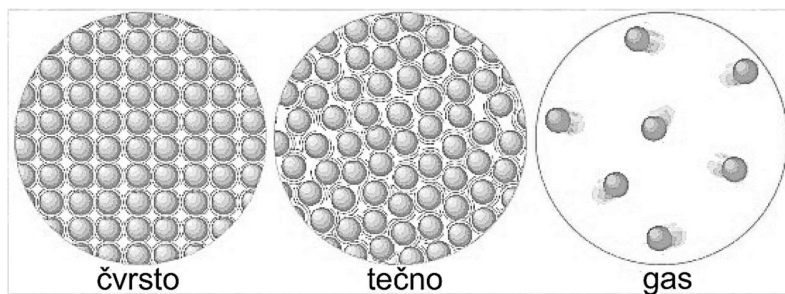
- kada je sila kohezije manja od sile adhezije $F_k < F_a$,
- kada je sila kohezije veća od sile adhezije $F_k > F_a$.

Ako su adhezione sile između tečnosti i zida posude jače od kohezivnih tada se tečnost penje uz zid staklene posude i tečnost kvasi zid suda. Ako su kohezione sile jače tada se tečnost spušta niz zid posude (slika 3.35). Ove pojave imamo kod dodira vode sa staklom i žive sa staklom. Tako voda kvasi staklo a ne kvasi parafin, dok živa ne kvasi staklo, a kvasi čistu površinu gvožđa, itd. Pored vode, staklo i kvarc potpuno kvase još alkohol, etar, glicerin i drugo. Rezultujuća sila kohezije i adhezije uvijek mora biti normalna na graničnu površinu tečnosti, inače bi postojala komponenta sile u ravni površine koja bi tečnost pomjerala.



Slika 3.36. Tečnost kvasi, a živa ne kvasi zid suda od stakla.

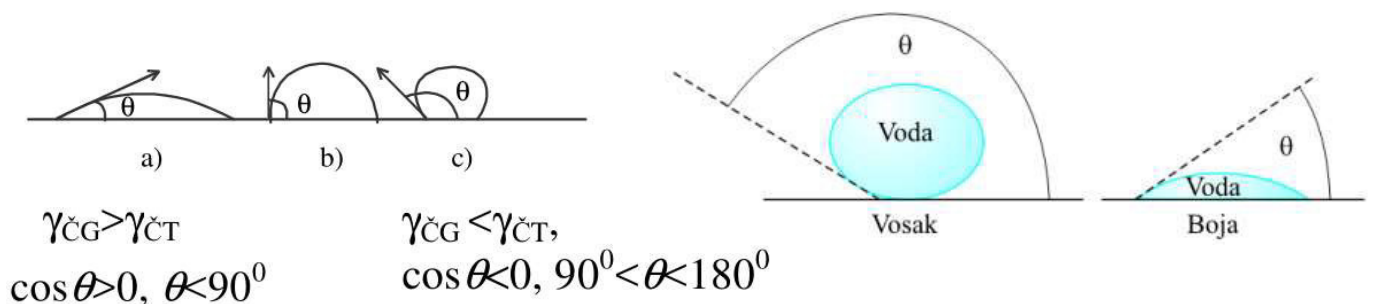
Ugao θ između tangente površine tečnosti i površine čvrstog tijela sa kojom se tečnost dodiruje, naziva se ugao kvašenja θ , slika 3.36. Ugao dodira je ugao (uvijek u tečnosti) između meniska tečnosti i zida suda u kome se tečnost nalazi. Ovaj ugao je posljedica ravnoteže sila između tečnosti i čvrste površine koje su u kontaktu (interfejs-među površina).



Slika 3.37. Faze fluida: čvrsto Č, tečno T, gas G.

Definiše se iz ravnoteže sila na graničnu liniju između G, T i Č faza u horizontalnoj ravni:

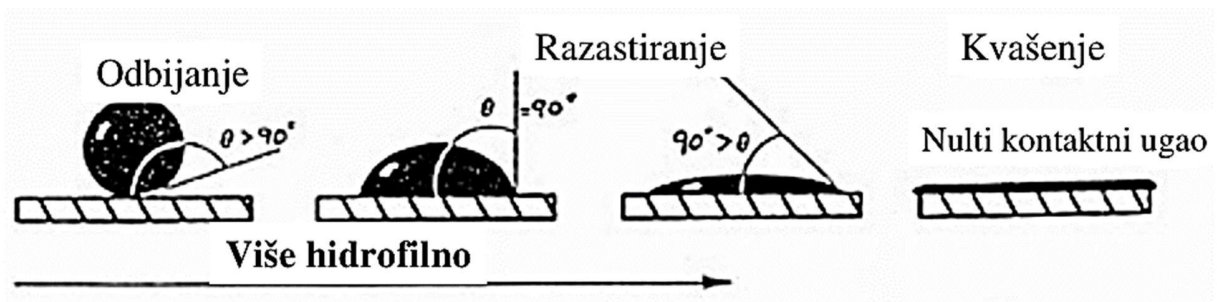
$$\gamma_{\check{C}G} = \gamma_{\check{C}T} + \gamma_{TG} \cos \theta \quad (3.68)$$



Slika 3.38. Ugao kvašenja kada tečnost nekvasi i kvasi čvrstu površinu.

Ako je ugao kvašenja θ :

- oštar ugao (manji od 90°), tečnost kvasi telo,
- tupi ugao (veći od 90°), tečnost ne kvasi telo,
- ako je $\theta = 0$ govorimo o potpunom kvašenju, a kada je $\theta = 180$ o potpunom ne kvašenju.

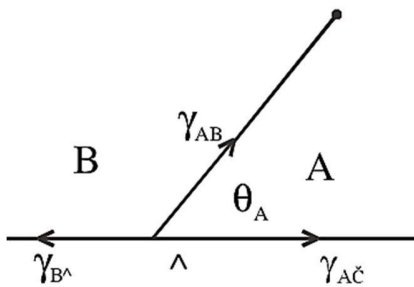


Slika 3.39. Ugao kvašenja kada tečnost nekvasi i kvasi čvrstu površinu.

Visok površinski napon zbog jačih kohezionih sila od adhezionih dovodi do konveksnog meniska Hg u staklenoj cevi.

Za dve nemešljive tečnosti važi sljedeća jednačina:

$$\gamma_{\check{C}B} = \gamma_{A\check{C}} + \gamma_{BA} \cos \theta_A \quad (3.69)$$

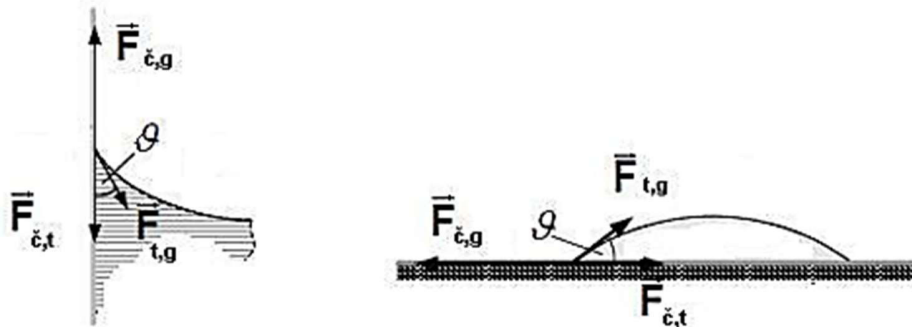


Od dvije ne mešljive tečnosti čvrstu površinu kvasiti ona tečnost koja ima manji površinski napon.

Slika 3.40. Dve nemešljive tečnosti.

3.9.2 Ravnoteža sila - Tomas Jangovu jednačina

Voda potpuno kvasi staklo, dok ga živa potpuno ne kvasi. Jedna ista tečnost može da kvasi jedna, a da ne kvasi druga čvrsta tijela. Ugao kvašenja se dobija iz ravnoteže sila na graničnoj liniji između tečne, čvrste i gasovite faze u horizontalalnoj ravni (slika 3.22).



Slika 3.41. Ravnoteža sila.

Rezultujuća sila od komponenata mora biti jednaka nuli zbog ravnoteže:

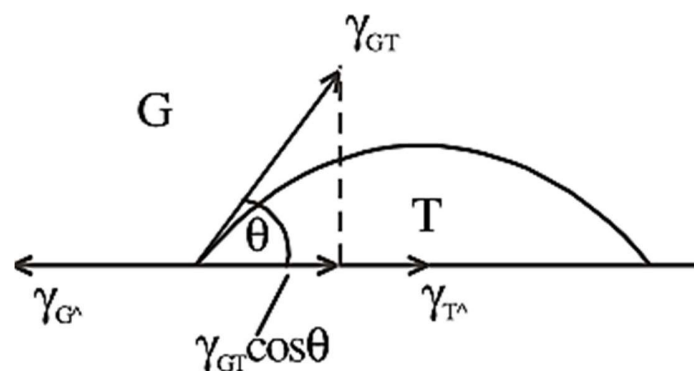
$$F_{c,g} - F_{c,t} - F_{t,g} \cos \theta = 0 \quad (3.70)$$

Ako primijenimo izraz površinske sile $F = \gamma l$ koja djeluje između granice dvije faze za svaki par, možemo dobiti:

$$\gamma_{c,g} - \gamma_{c,t} - \gamma_{t,g} \cos \theta = 0 \quad (3.71)$$

$$\cos \theta = \frac{\gamma_{c,g} - \gamma_{c,t}}{\gamma_{t,g}} \quad (3.72)$$

Ovaj izraz predstavlja poznatu **Tomas Jangovu jednačinu**.



Slika 3.42. Ugao kvašenja θ .

Tabela 3.5 Ugao kvašenja neke supstance na 20°C.

Supstance	Ugao kvašenja θ
Živa/staklo	140°
Voda/staklo	0°
Voda/parafin	107°
Voda/srebro	90°
Organske tečnosti/staklo	0°
Etil alkohol/staklo	0°
Kerozin/staklo	26°

Tako pri uglu od $\theta < 90^\circ$ sledi da je $\gamma_{\check{c},g} >$

$\gamma_{\check{c},t}$, a ako je ugao između $180^\circ < \theta < 90^\circ$

biće $\gamma_{\check{c},g} < \gamma_{\check{c},t}$,

U tabeli 3.5. su dati neki primjeri za vrijednosti ugla kvašenja θ na 20°.

3.9.3 Athezioni rad - Dipreova jednačina

Athezioni rad: rad potreban da se površina između tečnosti čvrstog tijela smanji za jediničnu vrijednost (**Dipreova jednačina**):

$$w_{\check{c}T} = \gamma_{\check{c}G} + \gamma_{TG} - \gamma_{\check{c}T} \quad (3.73)$$

Kohezioni rad: rad koji se izvrši nasuprot kohezivnih sila, a koji je potreban da se stub tečnosti jedinične površine pod dejstvom sila smicanja razdvoji na dva dijela:

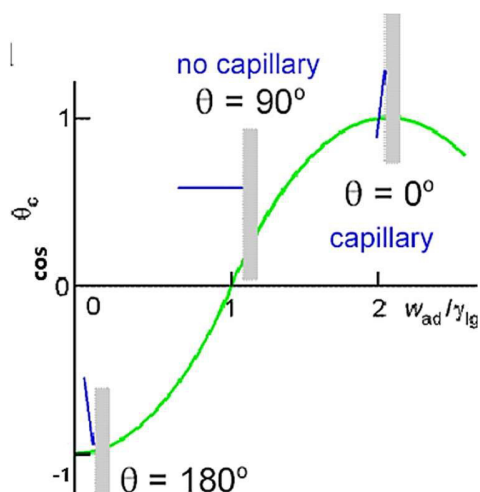
$$w_{TT} = 2\gamma_{TG} \quad (3.74)$$

Athezioni rad tečnosti po jedinici površine kontakta je:

$$w_{ad} = \gamma_{cg} + \gamma_{tg} - \gamma_{ct} \quad (3.75)$$

odakle je ugao dodira:

$$\cos \theta_c = \frac{w_{ad}}{\gamma_{lg}} - 1 \quad (3.76)$$



$\theta_c < 90^\circ$, $w_{ad} > \gamma_{lg}$ - tečnost kvasi površinu,

$90^\circ < \theta_c < 180^\circ$, $w_{ad} < \gamma_{lg}$ - tečnost ne kvasi površinu.

Za živu $\theta_c = 140^\circ$, tako da je $w_{ad} / \gamma_{lg} = 0,23$, što znači mali athezioni rad između žive i stakla, zbog jakih kohezivnih sila u živi.

Ugao dodira za kerozin je 26° a za vodu 0° (ako je površina stakla idealno čista).

Slika 3.43. Ugao dodira i kvašenje površina.

3.9.4 Adhezione i kohezije sile na površini



Slika 3.44. Razastiranje tečnosti.

Dvije ne mešljive tečnosti A i B, tečnost A razastire se spontano po tečnosti B:

$$\gamma_{AB} + \gamma_A - \gamma_B < 0 \quad (3.77)$$

γ_{AB} – ΔG zbog povećanja površine između A i B,

γ_A – ΔG zbog povećanja površine između A i gasovite faze,

γ_B – ΔG zbog smanjenja površine između B i gasovite faze.

Athezioni rad između A i B:

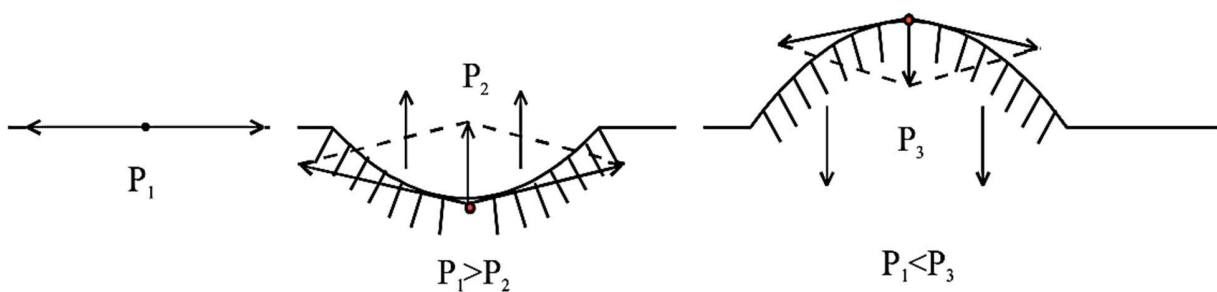
$$W_{AB} = \gamma_A + \gamma_B - \gamma_{AB} \quad (3.78)$$

Uslov za razastiranje:

$$W_{AB} > 2\gamma_A \quad (3.79)$$

Koeficijent razastiranja:

$$\gamma_B - \gamma_A - \gamma_{AB} \quad (3.80)$$



Slika 3.45. Površinski napon i razlika pritisa.

3.9.5 Krive površine

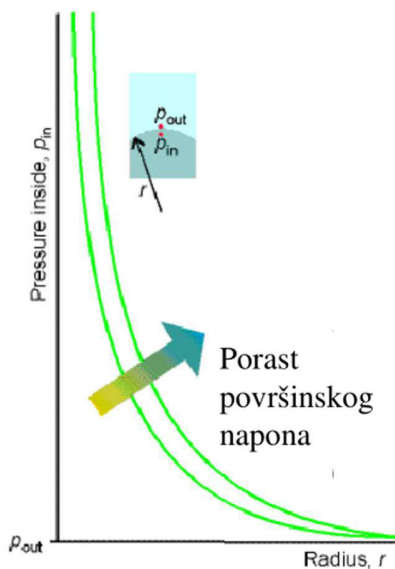
Površina za datu zapreminu tečnosti može biti smanjena formiranjem krive površine, kao kod mjehura. Posljedice zakrivljenosti površine su:

1. Napon pare tečnosti zavisi od zakrivljenosti površine
2. Pritisak ispod površine zavisi od njene zakrivljenosti-kapilarnost

Balon: oblast u kojoj je para zarobljena tankim filmom koji ima dvije površine.

Mjehur-šupljina: parom ispunjena šupljina u tečnosti-jedna površina.

Kapljica: mala zapremina tečnosti u ravnoteži sa okružujućom parom.



$$dG = (P_2 - P_1)d\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = 4\Delta P\pi r^2 dr$$

$$dG = \gamma d(4\pi r^2) = 8\gamma\pi r dr$$

$$8\gamma\pi r dr = 4\Delta P\pi r^2 dr$$

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{r} \quad \Delta P = \gamma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

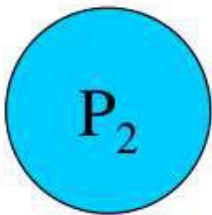
Laplasova jednačina (3.81)

Slika 3.46. Formiranjem krive površine (r) u zavisnosti od unutrašnjeg pritiska.

Površinski napon i razlika pritisaka je data **Laplasovom jednačinom**:

$$P_2 = P_1 + \frac{2\gamma}{r} \tag{3.82}$$

pritisak na konkavnoj strani dodirne površine P_2 veći je od pritiska sa konveksne strane P_1



Razlika u pritisku opada na nulu kada je radijus krivine beskonačan (ravna površina).

P_1

Unutar zakrivljenih površina malog radijusa krivine pritisak je veliki u odnosu na spoljašnji pritisak.

Slika 3.47. Unutar zakrivljenih površina u odnosu na spoljašnji pritisak.

Najmanja površina za datu zapreminu tečnosti je sfera.

Primjer: mjehur u vodi

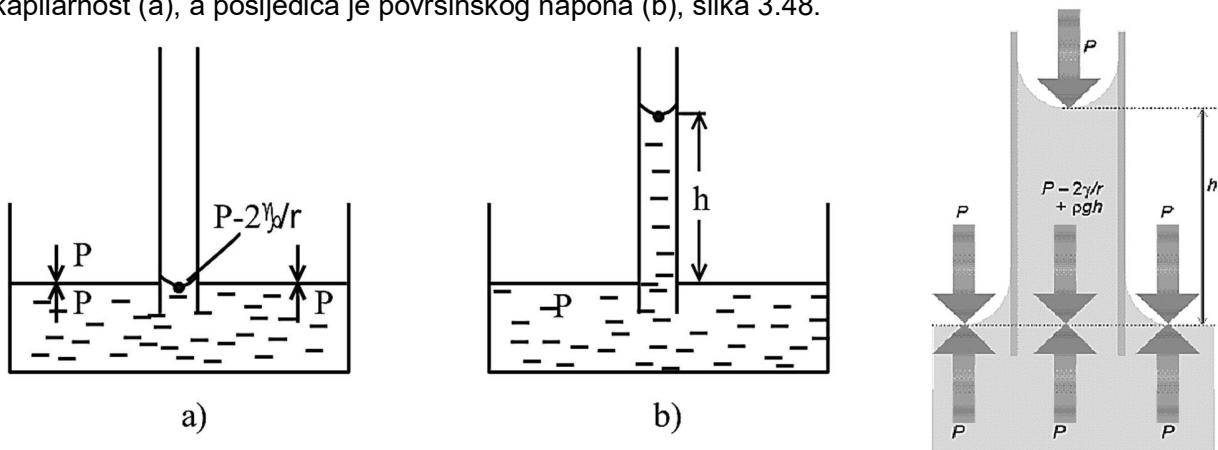
$T = 298 \text{ K}$, $\gamma = 72 \text{ mN/m}$

Tabela 3.6. Parametri za mjehur u vodi, radijus krivine i razlika u pritisku.

$2r / \mu\text{m}$	$\Delta P / \text{Pa}$	$\Delta P / \text{atm}$	Oblik	br. strana	zapremina (cm^3)	površina (cm^2)
1 000	288	0,00284	tetraedar	4	16,4	46,5
3,0	96 000	0,947	kocka	6	16,4	38,7
0,3	960 000	9,474	oktaedar	8	16,4	36,9
			dodekadear	12	16,4	34,3
			ikosaedar	20	16,4	33,2
			sfera		16,4	31,2

3.9.6 Kapilarnost tekućine

Uroni li se u vodu tanku staklenu cjevčicu (promjera nekoliko milimetara ili manje), primijeti će se da u njoj voda uzdiže iznad okolne površine tekućine. Ova pojava, koja se naziva kapilarnost primjećuje se uvijek kad se tekućina nalazi u uskom prostoru, bez obzira na njegov oblik. Radi se o ravnoteži sila adhezije i površinskog napona. Težnja tečnosti da se podiže u uskoj cijevi je kapilarnost (a), a posljedica je površinskog napona (b), slika 3.48.



Slika 3.48. Težnja tečnosti da se podiže u uskoj cijevi je kapilarnost (a), posljedica je površinskog napona (b), pritisci u tačkama tečnosti (c).

Tečnosti koje kvase čvrst zid kapilare teži će da nakvase unutrašnju stranu površine i time bi se stvorila velika slobodna površina tečnosti. Međutim, površinski napon tečnosti teži da ovu površinu svede na minimum uslijed čega će se tečnost u kapilari podizati iznad površine tečnosti u sudu. Tečnost će se u kapilari podizati dotle dok se sila površinskog napona ne izjednači sa silom težine samog stuba tečnosti u kapilari. Tečnosti koje ne kvase, spuštaju se ispod površine tečnosti u sudu.

Ako tečnost kvazi cijev, pritisak ispod površine tečnosti manji je od atmosferskog i zato se tečnost u cijevi podiže. Kada se uspostavi ravnoteža, pritisak je isti u svim tačkama na istom horizontalnom nivou u tečnost, slika 3.48 c:

$$P_1 = P_2 \quad (3.83)$$

Iznad površine tečnosti je atmosferski pritisak P_0 . Pritisak ispod zakrivljene površine:

$$P_3 = P_0 - \frac{2\gamma \cos \theta}{r} \quad (3.84)$$

Na dubini h ispod zakrivljene površine pritisak je:

$$P_1 = P_3 + \rho gh \quad (3.85)$$

Ako vrijednost iz jednačinu 3.56 stavimo u 3.57 dobivamo:

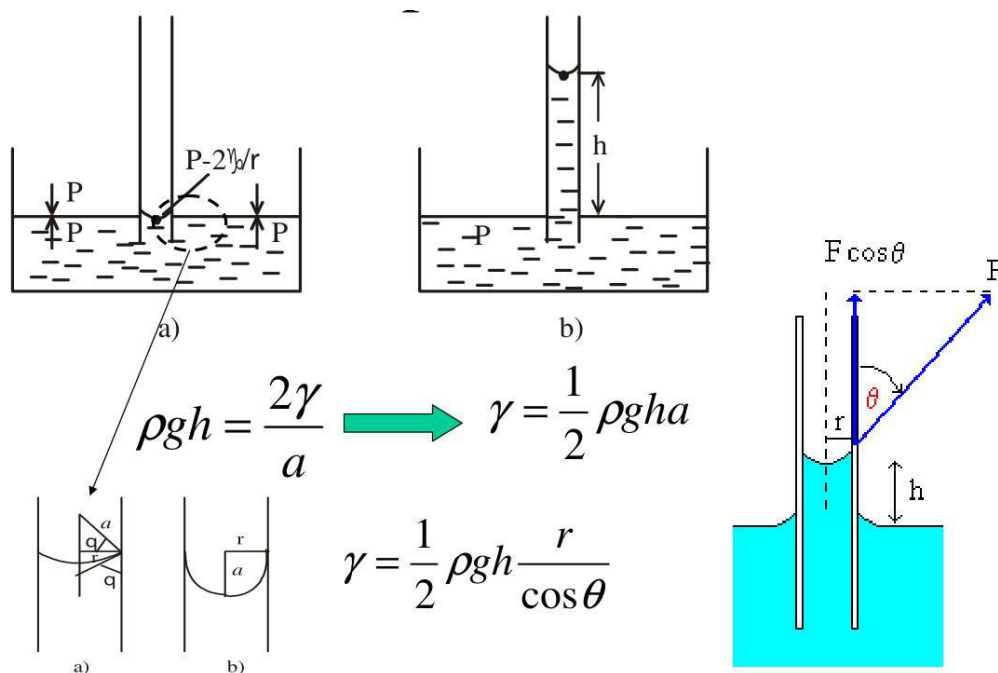
$$P_1 = P_0 - \frac{2\gamma \cos \theta}{r} + \rho gh \quad (3.86)$$

Kako je pritisak iznad površine tečnosti u sudu:

$$P_0 = P_2 \quad (3.87)$$

Slijedi da je:

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{r \rho g} \quad (3.88)$$



Slika 3.49. Kapilarnost tekućine, geometrijski modeli.

Visina podizanja tečnosti u kapilarnoj cijevi koju kvasi i dubina spuštanja tečnosti u cijevi koju ne kvasi određene su istom formulom. Visinska razlika površina tečnosti u cijevi i oko nje obrnuto je srazmerna unutrašnjem prečniku cijevi r . Kapilarne pojave u slučaju kvašenja i ne kvašenja mogu se predstaviti istom formulom. Ako tečnost kvasi cijev tada je $\cos\theta > 0$ i $h = 0$ tj. nivo tečnosti u cijevi je na većoj visini nego oko cijevi. Kada tečnost ne kvasi cijev $\cos\theta < 0$, nivo tečnosti u cijevi je ispod nivoa tečnosti oko cijevi.

3.9.6.1 Kapilarno podizanje

Pritisak stuba tečnosti gustine ρ je:

$$P = \rho g h \quad (3.89)$$

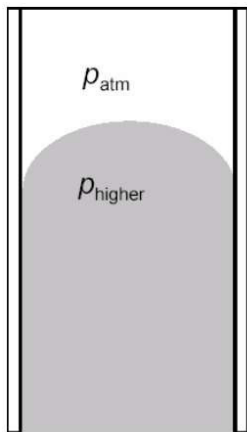
ovaj pritisak uravnotežava razliku pritiska $2\gamma/r$, pa je visina stuba tečnosti u kapilari:

$$h = \frac{2\gamma}{\rho g r} \quad (3.90)$$

Ako se voda na 25°C (gustine $0,9971 \text{ g/cm}^3$) podiže u cijevi radijusa $0,20 \text{ mm}$ za $7,36 \text{ cm}$ površinski napon vode je:

$$\gamma = \frac{\rho g h r}{2} = \frac{(997,1 \text{ kgm}^{-3}) \cdot (9,81 \text{ ms}^{-2}) \cdot (7,36 \cdot 10^{-2} \text{ m}) \cdot (2,0 \cdot 10^{-4} \text{ m})}{2} = 72 \text{ mNm}^{-1}$$

3.9.6.2 Kapilarno spuštanje



Ukoliko su adhezione sile između tečnosti i zida slabije od kohezivnih sila u tečnosti (pr. Hg i staklo), tečnost je odbijena od zida, formira se konveksna površina sa većim pritiskom sa konkavne strane (tj. u tečnosti) uslijed čega se tečnost u cevi spušta sve dok se ne kompenzuje povećan pritisak uslijed zakrivljenosti).

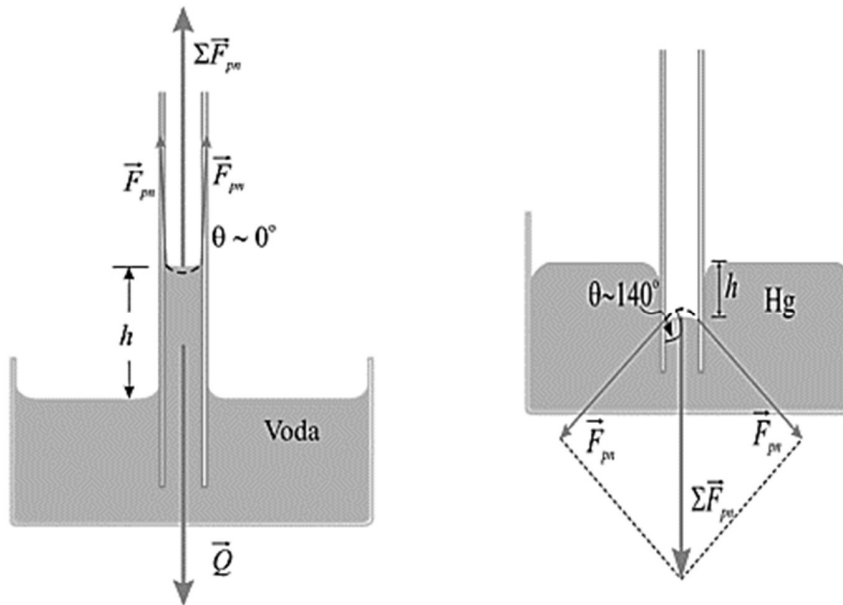
Slika 3.50. Živa u termometarskoj ili barometarskoj cijevi pokazuje kapilarnu depresiju.

3.10 Zakrivljena slobodna površina tečnosti – meniskus

Analizirajmo slučaj kada tečnost potpuno kvasi zid kapilare. Zakrivljena slobodna površina tečnosti u **kapilari naziva se meniskus** (slika 3.51). On je konkavan kada tečnost kvasi kapilar, a konveksan ako ne kvasi.

Kada se kapilara uroni u tečnost, adhezione sile odmah povlače molekule tečnosti uz zid, tako da se obrazuje konkavan meniskus. Ovaj meniskus teži da se skuplja pod dejstvom sila površinskog napona i stub tečnosti će se dizati u kapilari sve dok se rezultanta sila površinskog napona, koje dejstvuju po obimu presjeka meniskusa na najširem dijelu, ne izjednače po intenzitetu sa težinom stuba tečnosti iznad nivoa u kapilari:

$$\vec{F} = \vec{G} \quad (3.91)$$



Slika 3.51. Meniskus u vodi i živi.

Kako sila površinskog napona intenziteta F djeluje po obimu meniskusa uz kapilaru čiji je obim $2r\pi$. Ukupna sila koja dejstvuje duž celog obima je:

$$F = 2r\pi\gamma \quad (3.92)$$

Kako je masa $m = \rho V$, a zapremina $V = r^2 \pi h$ težina stuba tečnosti visine h u kapilari iznosi:

$$G = mg = \rho\pi hgr^2 \quad (3.93)$$

gdje je:

r - poluprečnik kapilare,

ρ - gustina tečnosti,

V - zapremina tečnog stuba u kapilari i

g - ubrzanje Zemljine teže.

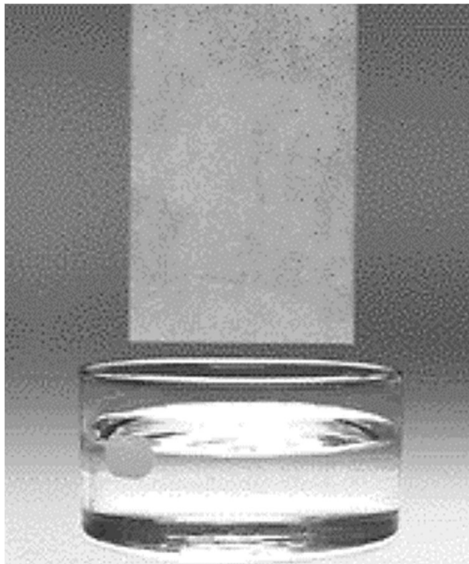
Na osnovu toga sledi da je konstanta površinskog napona srazmerna visini stuba h tečnosti u kapilari, poluprečniku kapilare r i gustini tečnosti ρ :

$$\gamma = \frac{1}{2} \rho h g r \quad (3.94)$$

Dati izraz može se koristiti za određivanje koeficijenta površinskog napona mjerenjem visine stuba tečnosti h kao i poluprečnika kapilare r . Relativno prost metod pomoću kojeg se može odrediti koeficijent površinskog napona je upravo kapilarni metod.

3.11 Značaj kapilarnih pojava i površinskog napona

Površinski napon kao i kapilarne pojave imaju veliki značaj u prirodi, tehnici. Biljke putem kapilara transportuju rastvor sa hranljivim materijama od korena prema listu. Kapljica ulja na vodi pod dejstvom sila površinskog napona može se razvući po površini vode često i do debljine monomolekularnog sloja ulja. Porozne materije u kojima je čitav splet kapilara, potpuno se mogu nakvasiti i ako nisu celom zapreminom u vodi. To se dešava kod sunđera, tkanine, drveta, poroznog građevinskog materijala što izaziva vlaženje zidova kod građevina, zemljišta. Podzemna voda izlazi kroz kapilarne pukotine na površinu i isparava, tako da bi se sačuvala vlaga u zemljištu, ti kapilari se rasturaju oranjem. Na osnovu pojave kapilarnosti dolazi do podizanja goriva u fitilju petrolejskih lampi i upaljača. Površinski napon ima veliki značaj i pri



tretiranju i lepljenju različitih površina o čemu moraju da vode računa tehnolozi pri proizvodnji lakova, farbi i lepkova. Njegova vrednost utiče na jačinu vezivanja sredstva za tretiranu površinu. Pri pripremi fotografske emulzije da bi se smanjio površinski napon između emulzije i podloge dodaju se sredstva za kvašenje (etilalkohol, saponin).

Kretanje vode naviše uz hromatografski papir zavisi od vodoničnih veza između H_2O i OH grupa celuloze.

Slika 3.52. Kohezione sile nasuprot gravitacionih
Kretanje vode naviše uz hromatografski papir.

Primjer biljnog soka u drveću

Da li se sok u drveću podiže usljed kapilarnosti i koliko?

Pretpostavimo da je sok uglavnom voda ($\rho = 10^3 \text{ kgm}^{-3}$),

kontaktni ugao je 0° , radijus kapilara je $2,5 \times 10^{-5} \text{ m}$.

Za vodu je $\gamma = 7,28 \times 10^{-2} \text{ Nm}^{-1}$

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g r} = \frac{2(7,28 \times 10^{-2} \text{ Nm}^{-1})(\cos 0)}{(10^3 \text{ kgm}^{-3})(9,81 \text{ ms}^{-2})(2,5 \times 10^{-5} \text{ m})} = 0,594 \text{ m}$$

Rastvorene supstance na površinski napon djeluju dvojako. Naročito se elektroliti nagomilavaju pri rastvaranju u dubini rastvora i povećavaju površinski napon, pošto sada na površinske molekule iz dubine tečnosti djeluju ne samo sile molekula rastvarača, nego i privlačne sile rastvorenih čestica. Površinski aktivne materije kao sapuni i deterdženti već pri malim koncentracijama dovode do znatnog sniženja površinskog napona vode. Izvjesne supstance u sebi sadrže radikale koji su ne rastvorljivi u vodi, znači hidrofobni su, nagomilavaju se na površini i snižavaju površinski napon. Površinski napon tečnosti čiji molekuli ne posjeduju dipole su relativno mali, a na primjer, vode čiji molekuli predstavljaju izrazite dipole (polarni molekuli) imaju relativno veliku vrijednost površinskog napona. Za molekule aktivnih materija karakteristična su dva djela:

- polarna grupa -COOH, -SO₃ Na, -OH (hidrofil)
- apolarni ugljovodonični radikal (hidrofob)

Molekuli površinski aktivne supstance posjeduju sposobnost da se adsorbuju na graničnoj površini između dvije faze tako da im se hidrofobni dio tj. ugljovodonični lanac orijentiše prema vazduhu, a polarna hidrofilna grupa prema vodi. Adsorpcija je proces povećanja koncentracije neke komponente na graničnoj površini dvije faze. Značajna uloga aktivne materije je da obezbjedi kvašenje, što predstavlja osnovu pri pranju, npr. veša. Molekul aktivne materije zalijepi hidrofobni dio za tkaninu ili za masnoću pri čemu stvara prelazni površinski sloj između dvije različite sredine. Putem prelaznog sloja oni smanjuju površinski napon između dvije reagujuće sredine. Dejstvo između tkanine ili masnoće i aktivne materije je mnogo veća nego dejstvo između tkanine i masnoće i na taj način dolazi do otklanjanja masnoće sa veša.

3.12 Napon pare sfernih kapljica - Kelvinov efekat

Poznato je da se napon pare čiste tečnosti povećava kada se na površinu tečnosti primeni mehanički pritisak ili kada se izloži pritisku inertnog gasa. U oba slučaja molekuli, uslijed dodatnog pritiska koji djeluje na površinu, bivaju istisnuti iz tečnosti i prelaze u paru tako da napon pare raste. Iako je uticaj dodatnog pritiska na napon pare mali, kod zakrivljenih površina tečnosti on dovodi do značajnih efekata.

Uticaj pritiska inertnog gasa na napon pare tečnosti može se izvesti na sledeći način. U stanju ravnoteže hemijski potencijali tečne i gasovite faze su jednaki $\mu(l) = \mu(g)$, pa svaka promena hemijskog potencijala tečne faze mora da se izjednači sa promjenom hemijskog potencijala gasovite faze, tj. $d\mu(l) = d\mu(g)$. Kada se pritisak P koji djeluje na tečnost poveća za dP , hemijski potencijal tečnosti se promjeni za:

$$d\mu(l) = V_m(l) dP \quad (3.95)$$

a hemijski potencijal pare tečnosti se promjeni za:

$$d\mu(g) = V_m(g) dp \quad (3.96)$$

Kada se desne strane jednačina (3.95) i (3.96) izjednače i uvede pretpostavka da se para ponaša kao idealan gas, dobija se:

$$RT \int_{p^*}^p \frac{dp}{p} = \int_{p^*}^{p^*+\Delta P} V_m(l) dP \quad (3.97)$$

gdje su granice integracije izabrane tako da kada nema dodatnog pritiska na tečnu fazu, pritisak koji djeluje na nju je zapravo napon pare tečnosti, p^* , a kada se spoljašnji pritisak poveća, npr. zbog prisustva inertne komponente za iznos ΔP , napon pare postiče novu vrijednost p . Uz pretpostavku da molarna zapremina tečne faze ne zavisi od pritiska, integracija poslednje jednačine daje:

$$p = p^* \cdot \exp\left(\frac{V_m(l)}{RT} \Delta P\right) \quad (3.98)$$

što pokazuje da napon pare eksponencijalno raste sa povećanjem pritiska koji deluje na površinu tečnosti.

Usljed postojanja površinskog napona, na zakrivljenoj površini tečnosti postoji razlika pritiska koja je data Laplasovom jednačinom (3.36). S druge strane, napon pare zavisi od spoljašnjeg pritiska. Na osnovu toga se može pretpostaviti da napon pare iznad zakrivljene površine tečnosti nije isti kao iznad ravne površine.

Ako je tečnost čiji je površinski napon γ dispergovana do kapljica poluprečnika r , onda iz jednačina (3.98) i (3.36) sledi da će njen napon pare biti:

$$p = p^* \cdot \exp\left(\frac{2\gamma V_m(l)}{RT r}\right) \quad (3.99)$$

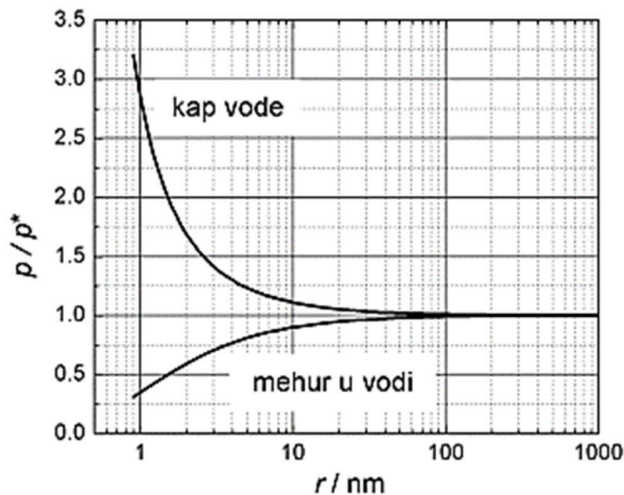
gde je p^* napon pare tečnosti iznad ravne površine.

Ova jednačina se naziva Kelvinova jednačina.

Za šupljinu, odnosno mjehurić u tečnosti važi ista jednačina, ali sa negativnom vrijednošću poluprečnika:

$$p = p^* \cdot \exp\left(-\frac{2\gamma V_m(l)}{RT r}\right) \quad (3.100)$$

što pokazuje da je napon pare unutar šupljine manji nego iznad ravne površine tečnosti. To je i očekivano, s obzirom da je pritisak u tečnosti manji od pritiska unutar šupljine. Isti efekat postoji i kod tečnosti u kapilarama, ukoliko je njihov menisk konkavan, odnosno ako kvase zid kapilare.



Kao i kod Laplasove jednačine i kod podizanja odnosno spuštanja nivoa tečnosti u kapilari, Kelvinova jednačina pokazuje da je efekat povećanja napon pare sa povećanjem disperzije tečnosti znan samo kod veoma malih kapljica. Na Slika 3.53. prikazan je efekat poluprečnika krivine na napon pare vode. Tako npr. za kapljice poluprečnika 10^{-3} mm i 10^{-6} mm na 25 o C odnos p/p^* iznosi 1,001 i 3,0, respektivno.

Slika 3.53. Zavisnost napona vode na 25° C od poluprečnika zakrivljenosti površine za kap i mjehur u tečnosti.

Ovu drugu vrijednost treba uzeti s rezervom, jer se radi o kapljici vode koju čine svega nekoliko desetina molekula i za koju je izračunavanje na osnovu Kelvinove jednačine nepouzdan zbog toga što vrednosti γ i V_m za sasvim male količine tečnosti ne moraju biti iste kao za makroskopske količine.

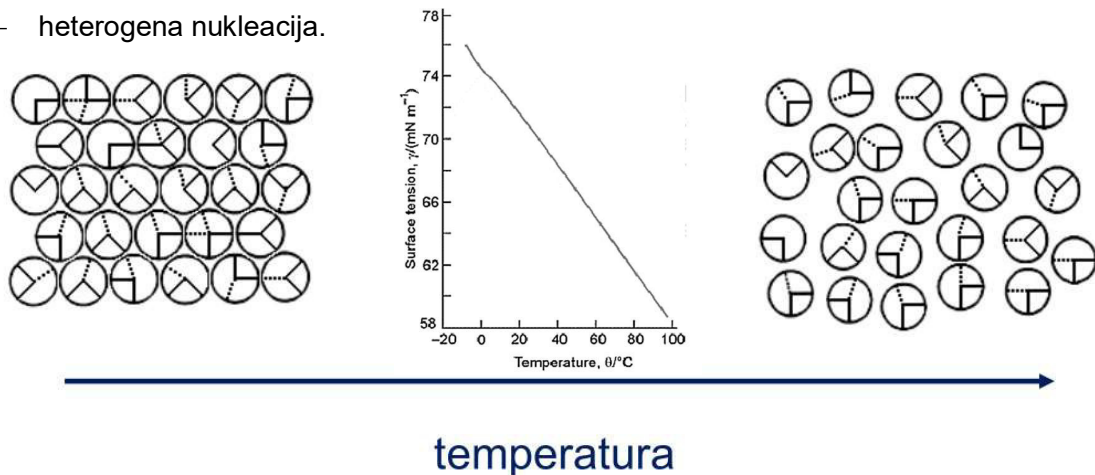
3.13 Posljedice Kelvinovog efekta na homogenu nukleaciju

Jedna od posljedica Kelvinovog efekta jeste otežana homogena nukleacija. Razmotri ćemo ovo na primjeru kondenzacije, odnosno formiranja tečne faze iz svoje pare, što se dešava u prirodi prilikom formiranja oblaka.

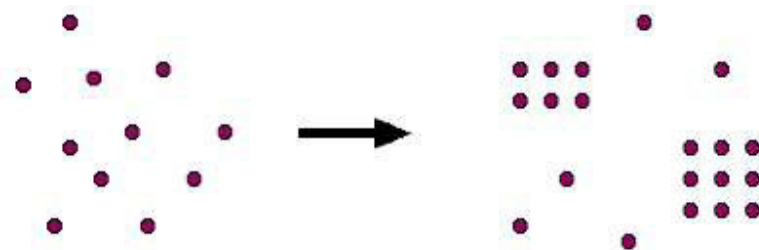
Kada se topao, vlažan vazduh podiže u hladnije gornje delove atmosfere, na nekoj visini temperatura će biti dovoljno niska da termodinamički tečnost postane stabilnija od pare. Tada bi trebalo očekivati da će se vodena para kondenzovati u oblak kapljica tečnosti.

Dva mehanizma formiranja oblaka:

- homogena nukleacija - mala vjerovatnoća da se ovo dogodi,
- heterogena nukleacija.



Slika 3.54. Viša temperatura → slabije među molekulske interakcije → manji γ .



Slika 3.55. Homogena nukleacija.

Može se zamisliti da je prvi stupanj tog procesa formiranje jednog agregata molekula vode koje se pretvara u kap (slika 3.55). Međutim, ta kap je jako mala i zbog toga je njen napon pare velik. Ukoliko je njen napon pare veći od pritiska okolne pare, ona će ispariti, umjesto da nastavi da raste. Tako Kelvinov efekat stabilizuje paru, jer je početna težnja za kondenzacijom prevladana povećanom težnjom ka isparavanju. Ovakva para je prezasićena, jer je termodinamički nestabilna, a kinetički efekti je sprečavaju da se kondenzuje.

Da bi došlo do homogene (spontane) nukleacije, kap mora porasti do sfere poluprečnika kome odgovara napon pare jednak okolnom pritisku. Vrijednost tog poluprečnika se dobija rješavanjem jednačine (3.99) po r:

$$r = \frac{2\gamma V_m(l)}{RT \ln \frac{p}{p^*}} \quad (3.101)$$

i naziva se kritični poluprečnik .

To je najmanji poluprečnik nukleusa koji može da nastavi spontano da raste.

Postoje dva načina da se formiraju nukleusi čiji je poluprečnik jednak kritičnoj vrijednosti. Jedan je da se odnos pritiska p/p^* , koji se naziva stepen prezasićenja , jako poveća tako da kritični poluprečnik nukleusa postane veoma mali, čime se povećava vjerovatnoća za njegovo formiranje. To znači da su za mehanizam homogene nukleacije potrebne jako niske temperature (smanjenje p^*). U laboratorijskim uslovima je moguće i komprimovanje pare (povećanje p). Zato je vjerovatnije da se u prirodi kondenzovanje pare odigra po mehanizmu heterogene nukleacije gdje čestica prašine ili neko drugo čvrsto strano tijelo posluži kao centar nukleacije na kojem će se vezati dovoljan broj molekula vode da se dostigne kritični poluprečnik. Slično razmatranje važi i za kristalizaciju iz tečne ili gasovite faze. U svim ovim slučajevima nukleusi čiji je poluprečnik manji od kritičnog se spontano razgrađuju, dok oni sa poluprečnikom većim od kritičnog mogu dalje da rastu i obrazuju novu fazu.

Kao što para može biti prezasićena zbog povećanog napona pare veoma malih kapljica tečnosti, tako tečnost može biti pregrijana zbog smanjenog napona pare unutar mjehurića koji se u njoj nalaze. Da bi tečnost ključala u njoj moraju da se formiraju stabilni mehurovi. Za to su također potrebni centri nukleacije, jer mali mehurovi zbog malog napona pare imaju težnju da iščeznu. Snažno mješanje potpomaže formiranje velikih mjehurova, a samim tim i ključanje. Istu ulogu imaju i komadići porculana koji se dodaju u laboratoriji da bi olakšali ključanje, jer se oko njih formiraju veliki mehurovi.

Proces kondenzacije po mehanizmu homogene nukleacije se može analizirati i na sledeći način. Kada su tečnost i njena para u ravnoteži, njihovi hemijski potencijali moraju biti jednaki:

$$\mu(g) = \mu(l) \quad (3.102)$$

odnosno promena Gibsove energije za kondenzaciju iz pare u svom ravnotežnom stanju za datu temperaturu je jednaka nuli:

$$\Delta G_{g/l} = n [\mu(l) - \mu(g)] = 0 \quad (3.103)$$

Hemijski potencijal pare u stanju ravnoteže je:

$$\mu(g) = \mu^{\theta}(g) + R T \ln \frac{p^*}{p^{\theta}} \quad (3.104)$$

gdje je p^* napon pare na datoj temperaturi.

Međutim, da bi kondenzacija tekla spontano, promena Gibsove energije mora biti bar malo negativna. To će se postići ako hemijski potencijal pare bude veći od ravnotežnog, odnosno ako para bude prezasićena:

$$\mu(g) = \mu^{\theta}(g) + R T \ln \frac{p}{p^{\theta}} \quad (3.105)$$

gdje je $p > p^*$. To znači da je promjena Gibsove energije za kondenzaciju iz prezasićene pare:

$$\Delta G_{g/l} = n \left[\mu^{\theta}(g) + R T \ln \frac{p^*}{p^{\theta}} - \mu^{\theta}(g) - R T \ln \frac{p}{p^{\theta}} \right] \quad (3.106)$$

Odnosno:

$$\Delta G_{g/l} = - n R T \ln \frac{p}{p^*} \quad (3.107)$$

Pošto kondenzacija predstavlja stvaranje nove faze, mora se uzeti u obzir i promjena Gibsove površinske energije. Ukoliko su nukleusi nove faze oblika sfere poluprečnika r , a površinski napon tečnosti γ , promjena Gibsove površinske energije iznosi:

$$\Delta G_S = 4 \pi r^2 \gamma \quad (3.108)$$

Ukupna promena Gibsove energije pri kondenzaciji se dobija sabiranjem jednačina (3.107) i (3.108). Da bi to moglo da se uradi, treba izraziti količinu supstance koja prelazi iz gasovite u tečnu fazu, n , sa poluprečnikom nukleusa, r :

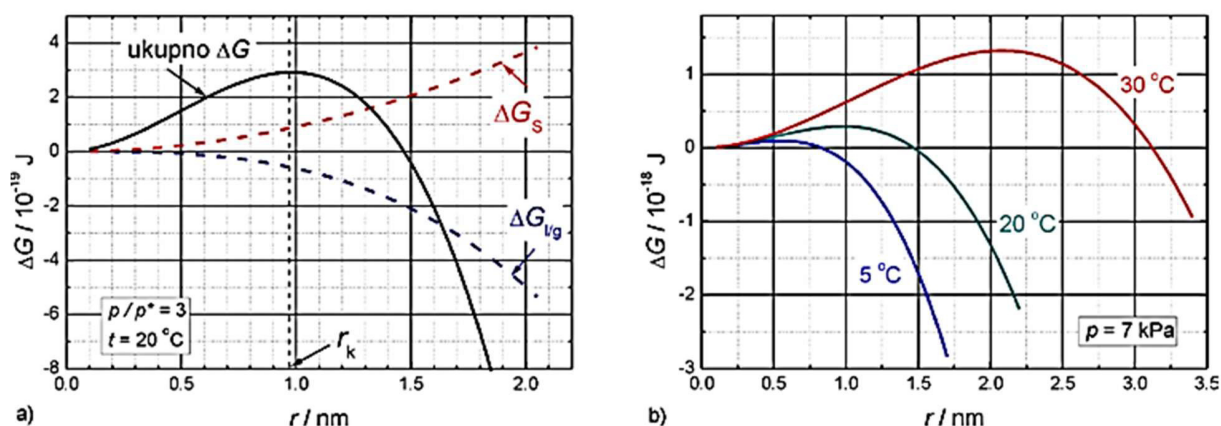
$$n = \frac{m}{M} = \frac{\rho(l) V}{M} = \frac{4 \pi r^3 \rho(l)}{3 M} \quad (3.109)$$

odakle sledi da je ukupna promjena Gibsove energije pri formiranju nukleusa tečnosti iz

$$\Delta G = \underbrace{- \frac{4 \pi r^3 \rho(l) R T}{3 M} \ln \frac{p}{p^*}}_{\Delta G_{g/l}} + \underbrace{4 \pi r^2 \gamma}_{\Delta G_S} \quad \text{presićene pare:}$$

(3.110)

Za razliku od formiranja tečne faze iz prezasićene pare koja je spontan proces ($\Delta G_{g/l} < 0$), formiranje nove površine nije spontano ($\Delta G_s > 0$). Obe vrijednosti promjene Gibsove energije zavise od poluprečnika nukleusa r , pa s obzirom da jedna raste, a druga opada sa povećanjem r , treba očekivati da zavisnost ΔG od r ima maksimum.



Slika 3.56. a) Promjena Gibsove energije za nastajanje nukleusa kondenzacije vode kao zbir promjene Gibsove energije za formiranje tečne faze polazeći od prezasićene pare i promjene Gibsove energije za formiranje nove površine (Vrijednosti ΔG_s i $\Delta G_{l/g}$ su podjeljene sa 10 radi preglednosti slike) i b) promjena Gibsove energije za nastajanja nukleusa kondenzacije na različitim temperaturama.

Na Slika 3.56 a, prikazane su zavisnosti sve tri promjene Gibsove energije od poluprečnika nukleusa pri konstantnoj temperaturi. Vrijednost poluprečnika nukleusa pri kojoj ukupna promjena Gibsove energije postiže maksimum i počinje da opada predstavlja kritični poluprečnik, jer se počev od te vrijednosti nukleacija odigrava spontano. Njegova vrijednost se može izračunati diferenciranjem jednačine (3.110) i izjednačavanjem prvog izvoda sa nulom:

$$r_k = \frac{2\gamma M}{\rho(l)RT \ln \frac{p}{p^*}} \quad (3.111)$$

što je istovetno vrijednosti dobijenoj iz Kelvinove jednačine. Na 3.56 b, prikazane su krive ukupne promjene Gibsove energije za nekoliko različitih temperatura pri konstantnom pritisku prezasićene pare. Što je temperatura niža, napon pare tečnosti je manji, a stepen prezasićenja veći, pa je stoga i kritični poluprečnik manji.

LITERATURA

- Agroskin, I. I., Dmitrijev, G. T., Pikalov, F. I. Hidraulika, Tehnička knjiga, Zagreb 1973.
- Bollrich, G. Technische Hydromechanik Band 1, Verlag Bauwesen, Berlin 2000.
- Shaughnessy, E. J. Jr., Katz, I. M., Scaffer, J. P. Introduction to fluid mechanics, Oxford University Press, New York 2005.
- Jović, V. Osnove hidromehanike, Element, Zagreb 2006.
- Tavoularis, S. Measurement in fluid mechanics, Cambridge University Press, Cambridge UK 2005.
- Chow, V.T. Open-Channel Hydraulics, McGraw-Hill, Singapore 1986.
- Čavlek, E. Hidraulika, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu 1975.
- Fancev, M. Mehanika Fluida, Tehnička Enciklopedija, Svezak 8, Jugoslavenski Leksikografski zavod, Zagreb, str. 67-173, 1982.
- Pečornik, M. Tehnička mehanika fluida, Školska knjiga, Zagreb, 1985.
- Pečornik, M. Zbirka zadataka iz mehanike fluida, Školska knjiga, Zagreb, 1995.
- Tanguy, J.-M., ed. Environmental Hydraulics, Vol. 1, Wiley, Hoboken, USA, 2010.
- P.W. Atkins, Physical Chemistry, Oxford University Press, Oxford, 1990.
- R.J. Silbey, R.A. Alberty, Physical Chemistry, J. Wiley & Sons, Inc., New York, 2001.
- Đorđević, V. Dražić, Fizička hemija, Tehnološko-metalurški fakultet, Beograd, 2000.
- Lj. Vračar i ostali, Eksperimentalna fizička hemija, Tehnološko-metalurški fakultet, Beograd, 2004.
- W.J. Moore, Physical Chemistry, Longman, London, 1972.
- A.W. Adamson, A Textbook of Physical Chemistry, Academic Press, New York, 1973.
- W.H. Hamill, R.R. Williams, C. MacKay, Principles of Physical Chemistry, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1966.
- D. Myers, Surfaces, Interfaces, and Colloids, Wiley-VCH, New York, 1999.
- A.W. Adamson, A.P. Gast, Physical Chemistry of Surfaces, J. Wiley and Sons, New York, 1997.
- D.J. Shaw, Introduction to Colloid and Surface Chemistry, Butterworth-Heinemann, Oxford, 1992.
- G.T. Barnes, I.R. Gentle, Interfacial Science, Oxford University Press, Oxford, 2005.
- G. Attard, C. Barnes, Surfaces, Oxford University Press, 1998.
- Handbook of Applied Surface and Colloid Chemistry, Vol.2, Ed. K. Holmberg, J. Wiley and Sons, Chichester, 2002.
- Lj. Đaković, Koloidna hemija, Tehnološki fakultet, Novi Sad, 1990.