

Sobre a equivalência entre as leis de Kepler e a lei da gravitação de Newton

On the equivalence between Kepler's laws and Newton's law of gravitation

Allan Kenedy Santos Silva  *1

¹Universidade Federal de Alagoas, Maceió, AL, Brasil.

Resumo: Johannes Kepler, por meio das observações feitas por Tycho Brahe, elaborou três leis que regem o movimento dos planetas em torno do Sol. Anos mais tarde, Isaac Newton formulou a lei da gravitação universal e, a partir dela, derivou as leis de Kepler. Neste texto mostramos como se pode inferir a lei da gravitação a partir das leis de Kepler, e como estas são consequências dela. Em outras palavras, mostraremos que as leis de Kepler e a lei da gravitação de Newton são matematicamente equivalentes.

Palavras-chave: leis de Kepler; lei da gravitação universal; coordenadas polares.

Abstract: *Johannes Kepler, through the observations made by Tycho Brahe, developed three laws that govern the movement of planets around the Sun. Years later, Isaac Newton formulated the law of universal gravitation and, from it, derived Kepler's laws. In this text we show how the law of gravitation can be inferred from Kepler's laws, and how these are consequences of it. In other words, we will show that Kepler's laws and Newton's law of gravitation are mathematically equivalent.*

Keywords: *Kepler's laws; law of universal gravitation; polar coordinates.*

1 Introdução

No século IV a.C., Platão propôs o seguinte problema: "Quais são os movimentos uniformes e ordenados cuja existência é preciso supor para explicar os movimentos aparentes dos planetas?" [1, p. 188]. A ideia de Platão era que o universo poderia (ou deveria) ser explicado em termos de formas geométricas perfeitas, como círculos e esferas, e através de movimentos uniformes (lineares ou angulares). Esta viria a ser uma tarefa complicada, pois os planetas, vistos da Terra, executavam trajetórias estranhas, com movimentos de vai-e-vém e velocidades irregulares.

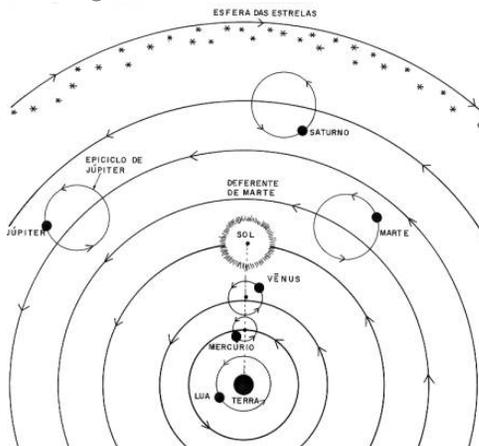
Eudoxo, discípulo de Platão, imaginou um sistema intrincado de esferas celestes, cada uma associada a um planeta e ao Sol, concêntricas girando entre si por meio de diversos eixos e com velocidades diferentes.

No século II a.C., Hiparco de Rodas elaborou um modelo que foi melhorado por Cláudio Ptolomeu, século II d.C., no qual os planetas se moviam através de dois círculos, chamados epiciclos e deferentes, com os centros dos epiciclos percorrendo as deferentes, ambos em movimentos uniformes, que explicava as variações de brilho, devido aos afastamentos e aproximações dos planetas com a Terra (Figura 1).

Nicolau Copérnico (1473-1543), com base em décadas de observações, propôs um modelo heliocêntrico do sistema solar em seu tratado *De revolutionibus orbium coelestium* publicado no ano de sua morte. Nesse tratado, Copérnico procurou um modelo mais simples do sistema solar, posicionando o Sol como

*Endereço de correspondência: allan.santos@im.ufal.br

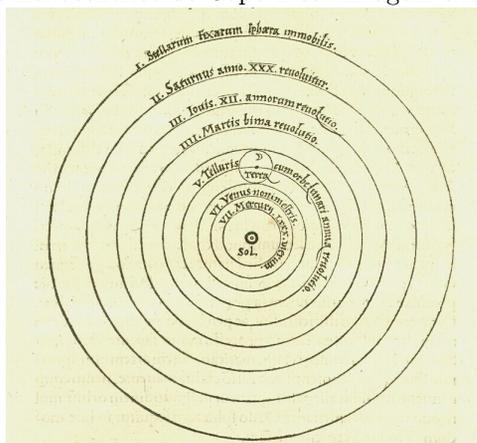
Figura 1: Modelo de Ptolomeu.



Fonte: Google Imagens.

o centro do sistema e os demais planetas – inclusive a Terra – orbitando-o com movimentos circulares uniformes (Figura 2). Nesse modelo ele pôde explicar os equinócios e as estações do ano, coisa que era falha nos outros modelos. Infelizmente este livro foi proibido pela Igreja.

Figura 2: Modelo heliocêntrico de Copérnico. Imagem extraída de seu livro.



Fonte: <https://www.infoescola.com/astronomia/heliocentrismo/>. Acesso em: 15 out. 2019.

Com apoio do rei Frederico II, o astrônomo dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601) montou o maior observatório de sua época, conseguindo precisão de até duas vezes superior às melhores observações até então. Depois de toda uma vida de dedicação às observações, ele propôs um novo modelo do sistema solar, que era um intermediário entre os modelos de Copérnico e Ptolomeu, onde todos os planetas se movem ao redor do Sol e este ao redor da Terra. Após sua morte, seu assistente, Johannes Kepler (1571-1630) deu continuidade ao seu trabalho.

Kepler observou que o modelo de Copérnico ainda tinha algumas discrepâncias em relação aos dados coletados das observações de Tycho. Após quatro anos de trabalho conseguiu mostrar que, retirando o Sol da posição central do sistema, o modelo concordava bem com os dados, mas que havia ainda algumas discrepâncias com a órbita de Marte.

Kepler descobriu que a órbita de Marte era na verdade uma elipse, e que o mesmo era verdade para todos os outros planetas. Foi então de Kepler elaborou sua primeira lei (chamada *lei das órbitas*): "As órbitas dos planetas ao redor do Sol são elipses, como o Sol ocupando um dos focos."

Ele também percebeu que Marte não descreve um movimento uniforme. Estudando as velocidades

de Marte e dos outros planetas obteve sua segunda lei (*lei das áreas*): "O raio vetor que liga um planeta ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais."

Kepler publicou seus resultados em seu livro *Astronomia nova* (1609). Só anos mais tarde, em 1618, após inúmeras tentativas, descobriu a relação entre os períodos de revolução dos planetas com suas distâncias ao Sol, enunciando sua terceira lei (*lei dos períodos*): "Os quadrados dos períodos de revolução de dois planetas quaisquer estão entre si para os cubos de suas distâncias médias ao Sol." Matematicamente:

$$\frac{T^2}{a^3} = K$$

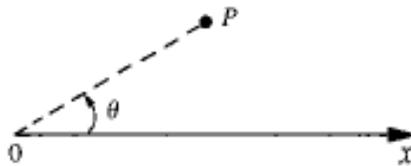
onde T é o período de revolução do planeta, a é a distância média ao Sol e K é uma constante do sistema, chamada *constante de Kepler*. Na verdade, como será mostrado neste texto, o correto é que a deve ser a medida do semi-eixo maior da elipse.

2 Coordenadas polares

2.1 Conceitos básicos

Faremos uma breve revisão sobre coordenadas polares. O sistema de coordenadas polares consiste de uma semi-reta orientada Ox e de um ângulo orientado $\theta = x\hat{O}P$.

Figura 3: Sistema de coordenadas polares.



Fonte: [2].

Dessa forma um ponto P tem as coordenadas polares (r, θ) , com $r \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e estas se relacionam com as coordenadas cartesianas (x, y) por

$$x = r \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \sin \theta. \quad (1)$$

Temos também as relações inversas

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}, \quad (2)$$

em que convencionamos $\theta = \frac{\pi}{2}$ se $x = 0$ e $y \neq 0$.

Considere uma função contínua

$$r = f(\theta).$$

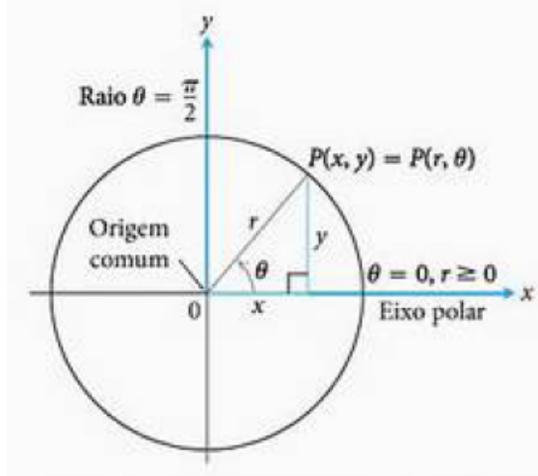
A área da região

$$R = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq \theta \leq \beta, 0 \leq r \leq f(\theta)\}$$

é calculada por [2]

$$A(R) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta. \quad (3)$$

Figura 4: Relação entre coordenadas cartesianas e polares.



Fonte: [3].

2.2 Cônicas em coordenadas polares

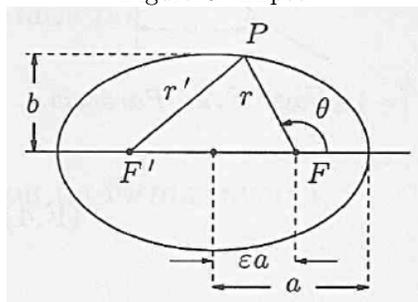
2.2.1 Elipse

Uma *elipse* é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos (chamados *focos*) é constante. Se F e F' são os focos, então o ponto P pertence a elipse se

$$r + r' = 2a, \quad (4)$$

em que a é o semi-eixo maior da elipse, r é a distância de P a F e r' é a distância de P a F' .

Figura 5: Elipse.



Fonte: [4].

Seja c a semi-distância focal, isto é, a distância de um dos focos ao centro da elipse. Então os semi-eixos maior e menor a e b , respectivamente, estão relacionados com c pelo teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2. \quad (5)$$

Outra maneira de relacioná-los é por meio da *excentricidade*, a qual é definida por

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad (6)$$

em que $0 < \varepsilon < 1$. Assim, a relação entre os semi-eixos pode ser escrita como

$$b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}. \quad (7)$$

A excentricidade é uma medida do achatamento da elipse: quanto mais próximo de 1, mais achatada é a elipse; e quanto mais próximo de 0, mais arredondada a elipse é.

Posicionamos a elipse de forma que o foco F seja a origem do sistema de coordenadas e que o eixo maior esteja alinhado com o eixo x conforme a Figura 5. Então pela lei dos cossenos

$$r'^2 = r^2 + (2\epsilon a)^2 - 2 \cdot r \cdot 2\epsilon a \cdot \cos(\pi - \theta),$$

isto é,

$$r'^2 = r^2 + 4\epsilon^2 a^2 + 4r\epsilon a \cos \theta. \quad (8)$$

Da equação (4) obtemos

$$r'^2 = r^2 - 4ar + 4a^2. \quad (9)$$

Eliminando r' de (8) e de (9) encontramos

$$r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \theta}. \quad (10)$$

Esta é a equação da elipse em coordenadas polares. Em virtude da fórmula (3), a área da elipse é

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \theta} \right]^2 d\theta = \frac{a^2}{2} (1 - \epsilon^2)^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2}.$$

Com um pouco de trabalho calculamos

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} = \frac{2\pi}{(1 - \epsilon^2)^{3/2}}. \quad (11)$$

Assim

$$A = \frac{a^2}{2} (1 - \epsilon^2)^2 \cdot \frac{2\pi}{(1 - \epsilon^2)^{3/2}} = \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}.$$

Usando a relação (7) encontramos a área da elipse como sendo

$$A = \pi ab. \quad (12)$$

2.2.2 Hipérbole

Uma *hipérbole* é o lugar geométrico dos pontos do plano cujas diferenças das distâncias a dois pontos fixos (os focos) é, em módulo, constante. Se F e F' são os focos, então o ponto P pertence a hipérbole se

$$|r - r'| = 2a, \quad (13)$$

onde r é a distância de P a F e r' é a distância de P a F' e a é a semi-distância entre os vértices da hipérbole. Como $|x|$ pode ser x ou $-x$, a curva gerada e dividida em dois ramos.

Novamente, a excentricidade é definida por

$$\epsilon = \frac{c}{a}, \quad (14)$$

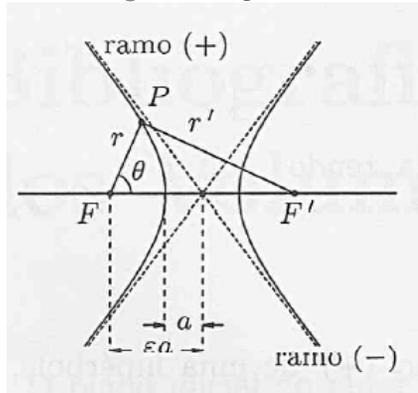
em que c é a semi-distância focal, isto é, a metade da distância entre os focos. Note que $\epsilon > 1$.

De forma análoga ao que foi feito para a elipse, a equação polar da hipérbole com um dos focos na origem e o eixo alinhado com o eixo x é

$$r = \frac{a(\epsilon^2 - 1)}{\epsilon \cos \theta \pm 1}, \quad (15)$$

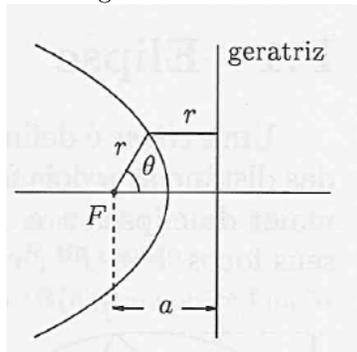
onde cada sinal \pm corresponde a um dos ramos da hipérbole.

Figura 6: Hipérbole.



Fonte: [4].

Figura 7: Parábola.



Fonte: [4].

2.2.3 Parábola

Uma *parábola* é o lugar geométrico dos pontos do plano cujas distâncias a um ponto fixo (foco) e a uma reta fixa (*geratriz*) são iguais.

Posicionando o foco na origem e o eixo da parábola alinhado ao eixo x obtemos

$$r + r \cos \theta = \text{const}$$

Mas no vértice, essa soma é igual a distância do foco à geratriz, que chamamos a , logo

$$\begin{aligned} r + r \cos \theta &= a \\ \therefore r &= \frac{a}{1 + \cos \theta} \end{aligned} \quad (16)$$

Perceba que as equações (10), (15) e (16) podem ser unificadas na equação

$$r = \frac{a}{1 + \beta \cos \theta} \quad (17)$$

que representa uma elipse se $\beta < 1$, uma parábola se $\beta = 1$ e um ramo de hipérbole se $\beta > 1$. Isto será importante mais adiante.

2.3 Movimento em coordenadas polares

Considere uma partícula se movendo em uma trajetória no plano parametrizada por

$$f(t) = (x(t), y(t)) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad (18)$$

onde t é o tempo. Queremos descrever tal movimento em coordenadas polares

$$f(t) = (r(t), \theta(t)) = r(t)\vec{u}_r + \theta(t)\vec{u}_\theta \quad (19)$$

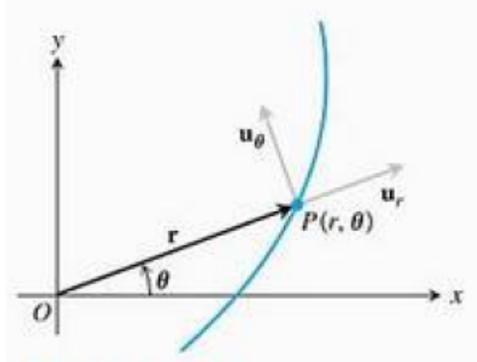
por meio de vetores \vec{u}_r e \vec{u}_θ adequados. Estes vetores devem ser

1. normais, isto é, $u_r = u_\theta = 1$;¹
2. ortogonais, isto é, $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\theta = 0$;
3. orientados positivamente, isto é, $\vec{u}_r \times \vec{u}_\theta = \mathbf{k}$ e;
4. o vetor \vec{u}_r deve estar alinhado com o vetor posição $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$.

Os candidatos mais naturais (na verdade os únicos) são

$$\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \quad \text{e} \quad \vec{u}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}. \quad (20)$$

Figura 8: Vetores normais unitários u_r e u_θ .



Fonte: [3].

Derivando as equações (20) obtemos

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta \quad \text{e} \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_r. \quad (21)$$

A velocidade da partícula é

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{u}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt},$$

isto é,

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta. \quad (22)$$

A aceleração da partícula é, após derivar (22) em t e aplicar (21):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right] \vec{u}_r + \left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} \right) \vec{u}_\theta \quad (23)$$

¹O módulo de um vetor \vec{v} será denotado (por simplicidade) por v .

3 Dedução da lei da gravitação de Newton

Nesta seção mostramos como se pode inferir a lei da gravitação universal a partir das leis de Kepler. Claro, está não é exatamente a dedução de Newton mas vamos seguir o seu espírito.

A área varrida pelo raio vetor \vec{r} do instante $t = 0$ a t é (aplicando (3))

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^t r^2 \frac{d\theta}{dt} dt.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}. \quad (24)$$

A segunda lei de Kepler afirma que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const.}$$

Então

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = r \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \frac{r}{2} \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0 \Rightarrow r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0$$

e assim de (23) temos

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \vec{u}_r. \quad (25)$$

Esta expressão mostra que a aceleração é radial. Isto nos permite concluir que um planeta cuja órbita atende à segunda lei de Kepler deve estar sujeito a uma força cuja direção é aquela que liga o centro do planeta ao centro do Sol.

A primeira lei de Kepler afirma que a trajetória do planeta é uma elipse, cuja equação polar é, como vimos,

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \theta}.$$

Então

$$\frac{dr}{dt} = \frac{a\varepsilon(1 - \varepsilon^2) \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\varepsilon \sin \theta}{a(1 - \varepsilon^2)} \cdot r^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

Como $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ é constante, derivando mais uma vez teremos

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\varepsilon \sin \theta}{a(1 - \varepsilon^2)} \right] r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{\varepsilon \cos \theta}{a(1 - \varepsilon^2)} r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2.$$

Assim, denotando $\vec{u}_r = \hat{r}$ (versor de r),

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \left[\frac{\varepsilon \cos \theta}{a(1 - \varepsilon^2)} r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \hat{r} \\ &= r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \left[\frac{\varepsilon \cos \theta}{a(1 - \varepsilon^2)} - \frac{1}{r} \right] \hat{r} \\ &= \frac{-1}{a(1 - \varepsilon^2)} r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \hat{r} \\ &= -\frac{C}{r^2} \hat{r}, \end{aligned}$$

em que

$$C = \frac{D^2}{a(1 - \varepsilon^2)} \quad \text{e} \quad D = r^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

Se T é o período de revolução, a segunda lei de Kepler diz que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\pi ab}{T},$$

em que πab é a área da elipse. Então

$$\frac{D}{2} = \frac{\pi ab}{T} \Rightarrow D^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2} = \frac{4\pi^2 a^4 (1 - \varepsilon^2)}{T^2},$$

onde usamos a relação (7). Assim

$$C = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{C},$$

mas a terceira lei de Kepler afirma que a relação T^2/a^3 é constante e igual para todos os planetas. Chamando de K essa constante teremos $C = 4\pi^2/K$ e assim

$$\vec{a} = -\frac{4\pi^2}{K} \frac{1}{r^2} \hat{r}.$$

Portanto, a força que o Sol exerce sobre um planeta de massa m é

$$\vec{F} = -\frac{4\pi^2}{K} \frac{m}{r^2} \hat{r} \quad (26)$$

Esta expressão nos diz que a força de interação do Sol com um planeta orbitando-o é central, atrativa, proporcional à massa do planeta e inversamente proporcional ao quadrado da distância do planeta ao Sol.

Faremos agora uma afirmação forte: **as leis de Kepler permanecem válidas se alterarmos a origem do sistema de coordenadas para o centro de massa do planeta.** Se denotarmos por r' e θ' as coordenadas com origem no planeta, então elas estão relacionadas pela transformação

$$r' \leftrightarrow r \quad \text{e} \quad \theta' \leftrightarrow \pi + \theta,$$

de modo que a equação da trajetória do Sol neste sistema de coordenadas é

$$r' = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos(\pi + \theta)},$$

que é uma equação de elipse com um dos focos no planeta. A 1ª lei é válida.

A taxa de variação da área será

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r'^2 \frac{d(\pi + \theta)}{dt} = \frac{1}{2} r'^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const},$$

logo a 2ª lei permanece. Obviamente, a 3ª lei ainda permanece válida.

Como as leis de Kepler são válidas com o sistema de coordenadas centrado no planeta, executando os cálculos como os realizados anteriormente obteremos

$$\vec{F}' = \frac{4\pi^2}{K'} \frac{M}{r'^2} \hat{r}. \quad (27)$$

Pela 3ª lei de Newton $\vec{F} = -\vec{F}'$, logo

$$\frac{4\pi^2}{K} \frac{m}{r^2} \hat{r} = \frac{4\pi^2}{K'} \frac{M}{r'^2} \hat{r}.$$

Dai

$$KM = K'm.$$

A terceira lei de Kepler afirma que a constante K independe da massa do planeta. Desta forma, o produto KM deve ser uma função apenas de M , isto é, $KM = f(M)$. Da mesma forma, $K'm = g(m)$ deve ser uma função apenas de m . Com temos uma igualdade de funções $f(M) = g(m)$ nas variáveis

independentes M e m , então elas devem ser funções constantes, isto é, $KM = K'm = \text{const.}$ Denotando essa constante por $4\pi^2/G$ obtemos

$$K = \frac{4\pi^2}{GM} \quad \text{e} \quad K' = \frac{4\pi^2}{Gm}.$$

Portanto

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}, \quad (28)$$

onde G é uma constante independente de M , m e r ; uma constante universal. Newton postulou então que dois corpos massivos quaisquer interagem por uma força atrativa com magnitude GMm/r^2 .

Alguns autores erroneamente atribuem ao físico inglês Lord Cavendish a primeira determinação do valor da constante de gravitação universal G . Na verdade, ele realizou experimentos para determinar o valor da densidade da Terra utilizando uma balança de torção extremamente sensível [5]. O valor aceito atualmente para essa constante é $G = 6.6739 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$.

4 Dedução das leis de Kepler

Veremos nesta seção como as leis de Kepler sobre o movimento planetário são consequências da lei da gravitação universal de Newton.

4.1 Segunda lei de Kepler

O momento angular de uma partícula de massa m em relação à origem do sistema de referência é

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}. \quad (29)$$

Então

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a}.$$

Como $\vec{v} \times m\vec{v} = \vec{0}$ e $m\vec{a} = \vec{F}$ temos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{-GMm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = \vec{0},$$

isto é,

$$\vec{L} = \text{const.} \quad (30)$$

Só que \vec{L} é ortogonal a \vec{r} para qualquer \vec{r} , logo todos os \vec{r} pertencem ao plano ortogonal a \vec{L} . Portanto a órbita de um planeta em torno do Sol (na verdade a órbita de qualquer corpo em relação a outro devido apenas à interação gravitacional entre eles) está contida em um plano fixo, o qual contém o centro de massa do Sol (ou do corpo que faz o papel do Sol). Por outro lado, aplicando (22) teremos

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = r\vec{u}_r \times m \left(\frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta \right) = mr^2\frac{d\theta}{dt}\mathbf{k},$$

o que implica que $r^2\frac{d\theta}{dt}$ é constante. Tendo em vista (24) obtemos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \text{const.},$$

o que demonstra a segunda lei de Kepler.

4.2 Primeira lei de Kepler

Vimos logo acima que

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$$

é uma constante. Vamos reescrever esta equação de um modo mais conveniente:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m}. \quad (31)$$

A energia cinética de um corpo é

$$T = \frac{1}{2}mv^2.$$

Aplicando as equações (22) e (31) obtemos

$$T = \frac{1}{2}m \left| \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta \right|^2 = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (32)$$

A *energia potencial* de um corpo é definida como o negativo do trabalho realizado pelo campo de forças \vec{F} para levar o corpo do ponto de potencial nulo até o ponto final. Matematicamente:

$$V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{\rho}) d\vec{\rho} \quad (33)$$

onde \vec{r}_0 é um ponto tal que $V(\vec{r}_0) = 0$. A integral acima é calculada sobre uma curva de extremidades \vec{r}_0 e \vec{r} .

Como a interação gravitacional é do tipo

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r) \frac{\vec{r}}{r}, \quad (34)$$

isto é, é uma força central, então

$$V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} F(\rho) \frac{\vec{\rho}}{\rho} d\vec{\rho} = - \int_{t_0}^t F(\rho) \frac{\vec{\rho}}{\rho} \cdot \gamma'(t) dt$$

onde γ é uma curva de classe C^1 de extremidades \vec{r}_0 e \vec{r} .

Como

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{\rho} \cdot \vec{\rho})^{1/2} = \frac{1}{2} (\vec{\rho} \cdot \vec{\rho})^{-1/2} \frac{d}{dt} (\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}) = \frac{1}{2\rho} \left(2\vec{\rho} \cdot \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right) = \frac{\vec{\rho}}{\rho} \cdot \gamma'(t),$$

então

$$V(\vec{r}) = - \int_{t_0}^t F(\rho) \frac{d\rho}{dt} dt = - \int_{r_0}^r F(\rho) d\rho,$$

isto é, o potencial depende somente da distância do corpo à origem do sistema e não da direção, muito menos da trajetória do corpo. Podemos assim escrever

$$V(\vec{r}) = V(r) = - \int_{r_0}^r F(\rho) d\rho. \quad (35)$$

A energia mecânica será, em virtude de (32),

$$E = T + V = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r). \quad (36)$$

Note que uma força central é um campo conservativo, isto é, a energia mecânica é conservada (E é constante, ou, $\frac{dE}{dt} = 0$).

²Para verificar basta calcular essa derivada e usar a igualdade (41).

Chamando o *potencial efetivo*

$$V_{ef}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad (37)$$

teremos

$$E = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + V_{ef}(r). \quad (38)$$

Observe que

$$E - V_{ef}(r) = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \geq 0, \quad (39)$$

o que dá

$$E \geq V_{ef}(r). \quad (40)$$

Esta é uma condição necessária para a existência do movimento.

Pela segunda lei de Newton, a componente radial da força é, de acordo com (25) e (31),

$$F(r) = m \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = m \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{L^2}{mr^3}. \quad (41)$$

Fazendo $r = 1/u$ teremos

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -r^2 \frac{d\theta}{dt} \frac{du}{d\theta} = -\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta}$$

e

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{L}{m} \frac{d^2u}{d\theta^2} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{L}{m} \frac{L}{mr^2} \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{L^2}{m^2} u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2},$$

logo

$$F \left(\frac{1}{u} \right) = m \left(-\frac{L^2}{m^2} u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} \right) - \frac{L^2}{m} u^3.$$

Portanto

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2 u^2} F \left(\frac{1}{u} \right). \quad (42)$$

Esta é a equação diferencial da trajetória de um corpo sujeito a uma força central. Daí, substituindo F por $-GMm/r^2$, teremos a equação da trajetória de um corpo sujeito à atração gravitacional.

No que segue, para simplificar um pouco as contas, escreveremos $k = GMm$.

A energia potencial gravitacional é definida como nula no infinito (isto porque em um ponto muito distante do centro da força, esta é praticamente nula). Então

$$V(r) = -\int_{\infty}^r F(r) dr = -\int_{\infty}^r -\frac{k}{r^2} dr = -\frac{k}{r},$$

e o seu potencial efetivo é

$$V_{ef} = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (43)$$

Aplicando a condição de movimento (40) encontramos

$$\frac{1}{r^2} - \frac{2mk}{L^2} \frac{1}{r} - \frac{2mE}{L^2} \leq 0.$$

Se $E < 0$, o conjunto-solução desta inequação é

$$\{r \in \mathbb{R}; r_1 \leq r \leq r_2\},$$

em que

$$\frac{1}{r_1} = \frac{mk}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{mk}{L^2} \right)^2 + \frac{2mE}{L^2}} \quad (44)$$

e

$$\frac{1}{r_2} = \frac{mk}{L^2} - \sqrt{\left(\frac{mk}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}. \quad (45)$$

Caso $E \geq 0$, o conjunto solução será $\{r \in \mathbb{R}; r \geq r_1\}$. Observe que devemos ter $E \geq -\frac{mk^2}{2L^2}$, pois, do contrário, os radicandos serão negativos e o nosso problema ficará sem solução.

Temos assim três casos:

1. $E = -\frac{mk^2}{2L^2}$: temos que $r_1 = r_2 = \frac{L^2}{mk}$, isto é, a trajetória é circular. Da relação (31) obtemos que $\frac{d\theta}{dt}$ é constante. Portanto o movimento é circular e uniforme;
2. $-\frac{mk^2}{2L^2} < E < 0$: a trajetória está confinada na região $r_1 \leq r \leq r_2$. Da relação (39) temos que $\frac{dr}{dt} = 0$ nos instantes onde $r = r_1$ e $r = r_2$, isto é, a velocidade radial é nula nestes pontos;
3. $E \geq 0$: a trajetória se situa fora do círculo de raio $r = r_1$.

Agora vamos resolver a equação (42). Para isto vamos estabelecer o sistema de coordenadas. Posicionamos o eixo polar de forma que o centro seja o centro de força gravitacional e que o eixo esteja orientado na direção de maior aproximação. Com isto as condições iniciais do problema são

$$u(0) = \frac{1}{r_1} \quad \text{e} \quad \frac{du}{d\theta}(0) = 0. \quad (46)$$

Para a força gravitacional a equação (42) fica

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2u^2}(-ku^2) = \frac{mk}{L^2}, \quad (47)$$

cujas solução é³

$$u(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta + \frac{mk}{L^2}. \quad (48)$$

Aplicando as condições iniciais (46) obtemos os coeficientes A e B como

$$A = \frac{mk}{L^2} \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{mk^2}} \quad \text{e} \quad B = 0.$$

Portanto

$$u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)} = \frac{mk}{L^2} + \frac{mk}{L^2} \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{mk^2}} \cos \theta,$$

isto é,

$$r(\theta) = \frac{\frac{L^2}{mk}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{mk^2}} \cos \theta}. \quad (49)$$

Lembrando da Equação (17) teremos os seguintes casos:

1. $E = -\frac{mk^2}{2L^2}$: a trajetória é circular de raio $r = \frac{L^2}{mk}$ e velocidade angular $\frac{d\theta}{dt} = \frac{L^2}{mr^2} = \frac{mk^2}{L^3}$ constante (um movimento circular uniforme);
2. $-\frac{mk^2}{2L^2} < E < 0$: a trajetória é uma elipse de excentricidade $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{mk^2}}$, semi-eixo maior $a = -\frac{k}{2E}$ e um dos focos na origem;
3. $E = 0$: a trajetória é uma parábola com $a = \frac{L^2}{mk}$ e foco na origem;

³Existe um teorema [6, p. 89] que afirma que a solução geral de uma equação da forma $y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$ é dada pela soma de uma solução particular dela com a solução geral da equação homogênea $y'' + a_1y' + a_2y = 0$. Neste caso, uma solução particular de $u'' + u = mk/L^2$ é $u = mk/L^2$, e a solução geral de $u'' + u = 0$ é $u = A \cos \theta + B \sin \theta$.

4. $E > 0$: a trajetória é um ramo de hipérbole com foco na origem, excentricidade $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{mk^2}}$ e $a = \frac{k}{2E}$.

Disto concluímos que, se a energia satisfaz a desigualdade $-\frac{mk^2}{2L^2} < E < 0$, a trajetória do planeta é uma elipse em que um dos focos é o centro de massa do Sol, e isto é exatamente o que diz a primeira lei de Kepler!

4.3 Terceira lei de Kepler

Das equações (24) e (31) temos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}.$$

Assim, da segunda lei,

$$A = \frac{L}{2m}T,$$

onde T é o período de órbita do corpo e A é a área da elipse. Como $A = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}$, $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{mk^2}}$ e $a = -\frac{k}{2E}$, então

$$\begin{aligned} \frac{L}{2m}T &= \pi a^2 \sqrt{-\frac{2EL^2}{mk^2}} = \pi a^2 \sqrt{\frac{2(-E)}{k}} \cdot \frac{L^2}{mk} = \pi a^2 \sqrt{\frac{L^2}{mka}} \Rightarrow \\ \frac{L^2}{4m^2}T^2 &= \pi^2 a^4 \frac{L^2}{mka} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{m}{k}, \end{aligned}$$

e como $k = GMm$ temos finalmente

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}, \quad (50)$$

que é a terceira lei de Kepler.

5 Conclusão

Ao longo dos séculos vários astrônomos desenvolveram modelos para explicar as órbitas dos planetas em nosso sistema solar, o que culminou com o modelo de Kepler (que é um aprimoramento do modelo heliocêntrico de Copérnico). O seu modelo é regido por três leis de movimento (três axiomas, em linguagem matemática). A partir desses três axiomas deduzimos uma expressão para a força de interação gravitacional entre corpos celestes orbitando o Sol. Claro, ao final da Seção 3 invocamos a terceira lei de Newton, de modo que devemos adicioná-la como o 4º axioma. Desta forma, o conjunto de axiomas {3 leis de Kepler, lei da ação e reação} implica na Equação (28). Reciprocamente, assumindo a validade de (28) pudemos reobter as leis de Kepler. Aqui não consideramos $\vec{F} = m\vec{a}$ como um axioma, pois, do ponto de vista matemático, é uma mera definição. Isto nos permite concluir que, assumindo a lei da ação e reação, as leis de Kepler equivalem a (28).

Este tipo de resultado nos permite traçar um paralelo entre a Física e a Matemática: uma teoria está para a Física assim como um teorema está para a Matemática. Partimos de um conjunto de hipóteses (axiomas) e, por meio de uma sequência de argumentos lógicos, chegamos a uma teoria (teorema). O que difere uma teoria de um teorema é que a teoria precisa ser testada para ser comprovada e deve ser falseável. Já um teorema não; ele tem sua validade comprovada em qualquer lugar e em qualquer tempo, e não pode ser falseado, uma vez que já foi demonstrado matematicamente.

Referências

- [1] H. Moysés Nussenzveig. *Curso de Física básica*. 4ª ed. Vol. 1. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.
 [2] Hamilton Luiz Guidorizzi. *Um curso de cálculo*. 5ª ed. Vol. 1. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

- [3] George B. Thomas et al. *Cálculo*. Vol. 2. São Paulo: Addison Wesley, 2009.
- [4] Kazunori Watari. *Mecânica clássica*. Vol. 2. São Paulo: Livraria da Física, 2003.
- [5] Henry Cavendish. “Experiments to Determine the Density of the Earth”. Em: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 88 (1798), pp. 469–526. ISSN: 02610523. URL: <http://www.jstor.org/stable/106988>.
- [6] N. Piskounov. *Cálculo diferencial e integral*. 11^a. Vol. 2. Porto: Edições Lopes da Silva, 1997.
- [7] Geraldo Ávila. *Cálculo. Funções de uma variável*. 3^a ed. Vol. 2. Rio de Janeiro: LTC, 1982.