Funciones Reales de Varias Variables: Cálculo Integral

A Calabia, Universidad de Alcala. (DOI:10.5281/zenodo.10256675)

December 4, 2023

1 Definición de integral doble y triple

La integral doble de una función de dos variables sobre una región en el plano se define como el límite de una suma infinita de productos de la función y un diferencial de área infinitesimalmente pequeño. Esto se puede escribir como:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy \tag{1}$$

Por ejemplo, si queremos calcular la integral doble de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ sobre la región rectangular $R = [a,b] \times [c,d]$, podemos dividir la región en pequeños rectángulos de área $dx\,dy$ y sumar los valores de la función en todos estos rectángulos.

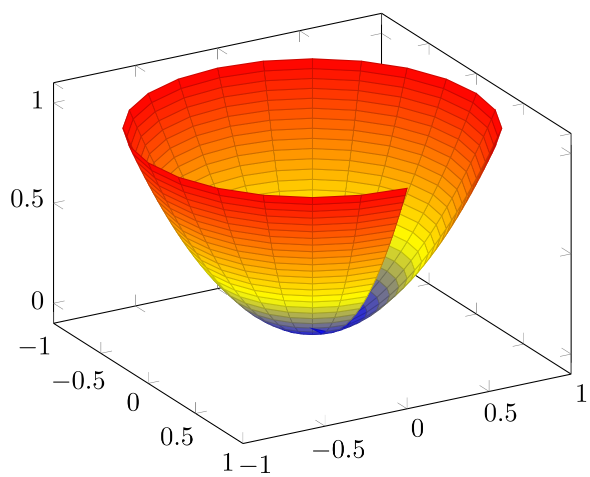

Figure 1: Gráfico de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

De manera similar, la integral triple de una función de tres variables sobre una región en el espacio se define como el límite de una suma infinita de productos de la función y un diferencial de volumen infinitesimalmente pequeño. Esto se puede escribir como:

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \tag{2}$$

Por ejemplo, si queremos calcular la integral triple de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sobre la región cúbica $V = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, podemos dividir la región en pequeños cubos de volumen $dx\, dy\, dz$ y sumar los valores de la función en todos estos cubos.

2 Propiedades

Las integrales dobles y triples tienen varias propiedades importantes. Aquí te presento algunas de ellas:

2.1 Propiedad aditiva

La propiedad aditiva dice que la integral de una función sobre la unión de dos regiones es la suma de las integrales de la función sobre cada región. Esto se puede escribir como:

$$\iint_{R_1 \cup R_2} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{R_1} f(x, y)\, dx\, dy + \iint_{R_2} f(x, y)\, dx\, dy \tag{3}$$

$$\iiint_{V_1 \cup V_2} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{V_1} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz + \iiint_{V_2} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \tag{4}$$

2.2 Propiedad lineal

La propiedad lineal dice que la integral de una combinación lineal de funciones es la combinación lineal de las integrales de las funciones. Esto se puede escribir como:

$$\iint_R [af(x, y) + bg(x, y)]\, dx\, dy = a \iint_R f(x, y)\, dx\, dy + b \iint_R g(x, y)\, dx\, dy \tag{5}$$

$$\iiint_V [af(x, y, z) + bg(x, y, z)]\, dx\, dy\, dz = a \iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz + b \iiint_V g(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \tag{6}$$

donde a y b son constantes.

3 Cálculo en rectángulos y regiones elementales

Las integrales dobles y triples se pueden calcular dividiendo la región de integración en rectángulos o regiones elementales, calculando la integral de la función sobre cada región elemental, y luego sumando todas estas integrales elementales.

3.1 Integral doble

Por ejemplo, si queremos calcular la integral doble de la función $f(x, y) = x^2+y^2$ sobre la región rectangular $R = [a, b] \times [c, d]$, podemos dividir la región en pequeños rectángulos de área $dx\,dy$ y sumar los valores de la función en todos estos rectángulos. Esto se puede escribir como:

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)\,dx\,dy \tag{7}$$

donde (x_i, y_j) son los puntos en el centro de los rectángulos elementales.

3.2 Integral triple

De manera similar, si queremos calcular la integral triple de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sobre la región cúbica $V = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, podemos dividir la región en pequeños cubos de volumen $dx\,dy\,dz$ y sumar los valores de la función en todos estos cubos. Esto se puede escribir como:

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} f(x_i, y_j, z_k)\,dx\,dy\,dz \tag{8}$$

donde (x_i, y_j, z_k) son los puntos en el centro de los cubos elementales.
Estos métodos son la base del cálculo numérico de integrales dobles y triples.

4 Aplicaciones

Las integrales dobles y triples tienen muchas aplicaciones en física, ingeniería y economía. Aquí te presento algunas de ellas:

4.1 Cálculo de áreas y volúmenes

Una de las aplicaciones más comunes de las integrales dobles es el cálculo de áreas. Por ejemplo, la integral doble de la función constante $f(x, y) = 1$ sobre una región R en el plano es igual al área de R.

$$\text{Área de } R = \iint_R dx\,dy \tag{9}$$

De manera similar, la integral triple de la función constante $f(x,y,z) = 1$ sobre una región V en el espacio es igual al volumen de V.

$$\text{Volumen de } V = \iiint_V dx\,dy\,dz \tag{10}$$

4.2 Cálculo de centros de masa y momentos de inercia

Las integrales dobles y triples también se utilizan para calcular los centros de masa y los momentos de inercia de objetos sólidos. Por ejemplo, el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de un objeto sólido con densidad $\rho(x,y,z)$ en una región V en el espacio se puede calcular como

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_V x\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \tag{11}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_V y\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \tag{12}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_V z\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \tag{13}$$

donde $M = \iiint_V \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ es la masa del objeto.

4.3 Cálculo de probabilidades en estadística

En estadística, las integrales dobles y triples se utilizan para calcular probabilidades. Por ejemplo, si tenemos una función de densidad de probabilidad conjunta $f(x,y)$ de dos variables aleatorias X e Y, la probabilidad de que X e Y caigan en una región R en el plano es igual a la integral doble de $f(x,y)$ sobre R.

$$P((X,Y) \in R) = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy \tag{14}$$

5 Cambios de variable

En algunas situaciones, puede ser útil realizar un cambio de variable para simplificar la integral. Esto se puede hacer utilizando el teorema del cambio de variable para integrales dobles y triples, que es una generalización del teorema del cambio de variable para integrales de una variable.

5.1 Cambio de variable en integrales dobles

Supongamos que tenemos una integral doble de una función $f(x,y)$ sobre una región R en el plano, y queremos hacer un cambio de variable $(x,y) = \Phi(u,v)$, donde Φ es una transformación biyectiva y diferenciable de una región S en el plano (u,v) a la región R. Entonces, la integral doble se transforma como sigue:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(\Phi(u,v))\,|\det(J_\Phi(u,v))|\,du\,dv \tag{15}$$

donde J_Φ es la matriz jacobiana de la transformación Φ.

5.2 Cambio de variable en integrales triples

De manera similar, si tenemos una integral triple de una función $f(x,y,z)$ sobre una región V en el espacio, y queremos hacer un cambio de variable $(x,y,z) = \Psi(u,v,w)$, donde Ψ es una transformación biyectiva y diferenciable de una región T en el espacio (u,v,w) a la región V. Entonces, la integral triple se transforma como sigue:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_T f(\Psi(u,v,w))\,|\det(J_\Psi(u,v,w))|\,du\,dv\,dw \tag{16}$$

donde J_Ψ es la matriz jacobiana de la transformación Ψ.

Estos cambios de variable son muy útiles para simplificar las integrales dobles y triples, especialmente cuando la región de integración tiene una forma complicada.