Funciones Reales de Varias Variables: Cálculo Diferencial

A Calabia, Universidad de Alcala. (DOI:10.5281/zenodo.10256604)

December 4, 2023

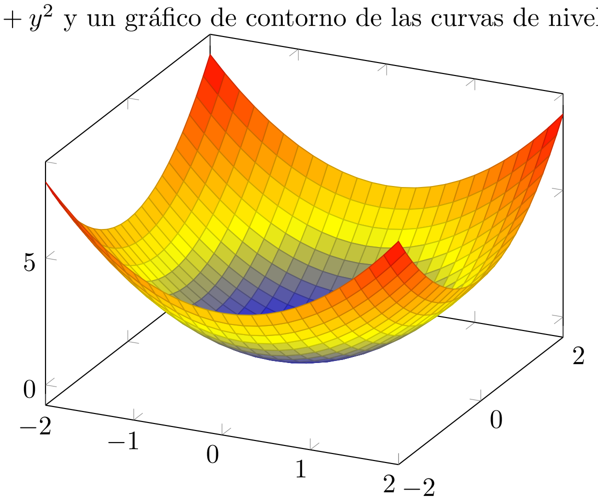
1 Definiciones básicas

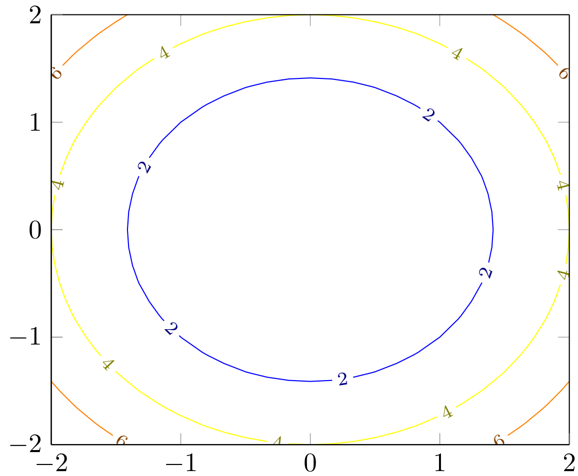
Las funciones de varias variables son funciones que toman varias entradas y producen una salida. Por ejemplo, la función $f(x, y) = x^2+y^2$ toma dos números x e y y produce su suma de cuadrados. El dominio de esta función es el conjunto de todos los pares de números reales (x, y), y la imagen es el conjunto de todos los números reales no negativos.

La gráfica de una función de dos variables es una superficie en el espacio tridimensional. Por ejemplo, la gráfica de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ es un paraboloide. Las curvas de nivel de esta función son círculos con centro en el origen. Estas curvas se pueden visualizar en un gráfico de contorno, donde cada curva de nivel se dibuja con una altura constante.

Las trazas de una función son las curvas que se obtienen al cortar la gráfica de la función con planos paralelos a los planos coordenados. Por ejemplo, las trazas de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ en el plano x-z son parábolas, y las trazas en el plano y-z también son parábolas.

Aquí hay un ejemplo de una gráfica tridimensional de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ y un gráfico de contorno de las curvas de nivel de la función:





2 Límites y continuidad

El límite de una función de varias variables cuando el punto de entrada se acerca a un cierto punto es el valor al que se acerca la función. Por ejemplo, el límite de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ cuando (x, y) se acerca a $(0, 0)$ es 0. Esto se puede escribir formalmente como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0.$$

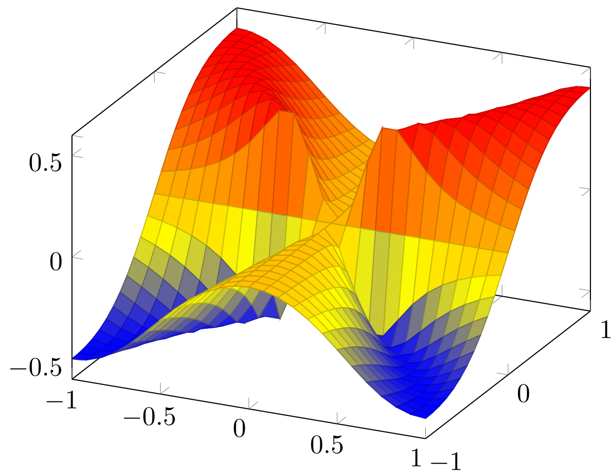
Una función es continua en un punto si el límite de la función en ese punto es igual al valor de la función en ese punto. Por ejemplo, la función $f(x, y) = x^2+y^2$ es continua en el punto $(0, 0)$ porque

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0.$$

En el apartodo anterior, la gráfica tridimensional de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ es suave y no tiene saltos ni agujeros, lo que indica que la función es continua. Sin embargo, por ejemplo, si consideremos la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Esta función es discontinua en el origen. Aunque $f(0, 0) = 0$, el límite de $f(x, y)$ cuando (x, y) se acerca a $(0, 0)$ no existe. Esto se debe a que el valor de $f(x, y)$ se acerca a diferentes números dependiendo de la dirección desde la cual (x, y) se acerca a $(0, 0)$.



3 Derivadas direccionales y parciales

La derivada direccional de una función en una dirección dada es la tasa de cambio de la función en esa dirección. Por ejemplo, la derivada direccional de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ en la dirección del vector unitario $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ en el punto $(1, 1)$ es 2. Esto se puede escribir formalmente como

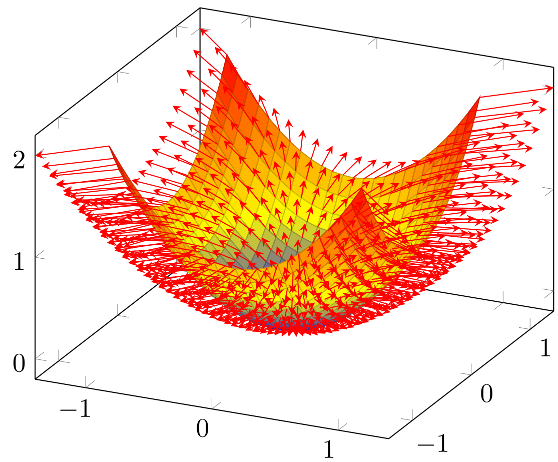
$$D_{\mathbf{u}} f(1, 1) = 2,$$

donde $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ es el vector unitario en la dirección dada.

Las derivadas parciales son las derivadas direccionales en las direcciones de los ejes coordenados. Por ejemplo, las derivadas parciales de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ en el punto $(1, 1)$ son 2 y 2. Esto se puede escribir formalmente como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 2.$$

Aquí hay un ejemplo de una gráfica tridimensional de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ en el intervalo $-1 \leq x, y \leq 1$, junto con un campo vectorial que representa las derivadas parciales de la función en cada punto.



4 Diferenciabilidad y gradiente

Una función es diferenciable en un punto si tiene todas las derivadas direccionales en ese punto y la función se puede aproximar bien por un plano tangente en ese punto. Por ejemplo, la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ es diferenciable en cualquier punto porque tiene todas las derivadas direccionales en cualquier punto.

El gradiente de una función es el vector que contiene todas las derivadas parciales de la función. Por ejemplo, el gradiente de la función $f(x, y) = x^2+y^2$ en el punto $(1, 1)$ es el vector $(2, 2)$. Esto se puede escribir formalmente como

$$\nabla f(1, 1) = (2, 2).$$

El ejemplo anterior de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$, muestra un campo vectorial que representa el gradiente de la función en cada punto.

5 Regla de la cadena

La regla de la cadena para funciones de varias variables es una fórmula que permite calcular la derivada de la composición de dos funciones. Por ejemplo, si $z = f(x, y)$ y $x = g(t)$, $y = h(t)$, entonces

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Para ilustrar esto con un ejemplo, consideremos la función $f(x, y) = x^2+y^2$, donde $x = \cos(t)$ y $y = \sin(t)$. Entonces, la derivada de f con respecto a t es

$$\frac{df}{dt} = 2x(-\sin(t)) + 2y\cos(t) = -2\cos(t)\sin(t) + 2\sin(t)\cos(t) = 0.$$

Esto significa que la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ es constante a lo largo de la trayectoria parametrizada por t.

6 Teoremas de la función inversa y de la función implícita

6.1 Teorema de la función inversa

El teorema de la función inversa proporciona condiciones bajo las cuales una función tiene una inversa que es diferenciable. Si una función $f : R^n \to R^n$ es continuamente diferenciable y su Jacobiano es invertible en un punto a, entonces existe un entorno de a en el que f tiene una inversa que es también diferenciable.

Por ejemplo, consideremos la función $f(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$. Esta función es invertible, y su inversa es $f^{-1}(u, v) = (\ln(\sqrt{u^2 + v^2}), \arctan(v/u))$, que es diferenciable.

6.2 Teorema de la función implícita

El teorema de la función implícita proporciona condiciones bajo las cuales una ecuación define implícitamente una función que es diferenciable. Si tenemos una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$ para algún punto (a, b) que satisface la ecuación, entonces existe un entorno de (a, b) en el que la ecuación define implícitamente una función $y = f(x)$ que es diferenciable.

Por ejemplo, consideremos la ecuación $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Esta ecuación define implícitamente una función $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, que es diferenciable para $-1 < x < 1$.

7 Polinomio de Taylor

El polinomio de Taylor de una función de varias variables es una aproximación polinómica de la función cerca de un punto dado. Si tenemos una función $f : R^n \to R$ que es k veces diferenciable, entonces el polinomio de Taylor de orden k de f en el punto a es

$$P_k(x) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a) + \frac{1}{2}(x - a)^T \nabla^2 f(a)(x - a) + \cdots ,$$

donde $\nabla f(a)$ es el gradiente de f en a y $\nabla^2 f(a)$ es la matriz hessiana de f en a.

Por ejemplo, consideremos la función $f(x, y) = e^{x+y}$. El polinomio de Taylor de orden 2 de f en el punto $(0, 0)$ es

$$P_2(x, y) = 1 + (x + y) + \frac{1}{2}(x + y)^2.$$

Este polinomio proporciona una buena aproximación de $f(x,y)$ para valores de x y y cerca de 0.

8 Matriz hessiana y clasificación de los puntos críticos

La matriz hessiana de una función es la matriz de todas las segundas derivadas parciales de la función. Si tenemos una función $f : R^n \to R$ que es dos veces diferenciable, entonces la matriz hessiana de f en el punto a es la matriz $n \times n$ dada por

$$Hf(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{bmatrix}.$$

Los puntos críticos de una función son los puntos donde el gradiente de la función es cero. La matriz hessiana se utiliza para clasificar los puntos críticos de la función. Si la matriz hessiana en un punto crítico es definida positiva, entonces el punto es un mínimo local. Si la matriz hessiana es definida negativa, entonces el punto es un máximo local. Si la matriz hessiana tiene eigenvalores positivos y negativos, entonces el punto es un punto de silla.

Por ejemplo, consideremos la función $f(x,y) = x^2 + y^2$. Los puntos críticos de esta función son los puntos donde $\nabla f(x,y) = (2x, 2y) = (0,0)$, es decir, el punto $(0,0)$. La matriz hessiana de f es

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

que es definida positiva. Por lo tanto, el punto $(0,0)$ es un mínimo local de la función.

9 Multiplicadores de Lagrange

Los multiplicadores de Lagrange son una técnica para encontrar los máximos y mínimos de una función sujeta a restricciones de igualdad. Si tenemos una función $f : R^n \to R$ y una restricción $g(x) = 0$, entonces los puntos críticos de f sujetos a la restricción $g(x) = 0$ son los puntos donde el gradiente de f es paralelo al gradiente de g. Esto se puede escribir formalmente como

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x),$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange.

Por ejemplo, consideremos el problema de maximizar la función $f(x,y) = x + y$ sujeto a la restricción $x^2 + y^2 = 1$. Los puntos críticos de f sujetos a esta restricción son los puntos donde $\nabla f(x, y) = (1, 1)$ es paralelo a $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$. Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 1 = \lambda 2x, \\ 1 = \lambda 2y, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

obtenemos que los puntos críticos son $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ y $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. Evaluando la función f en estos puntos, encontramos que el máximo de f sujeto a la restricción es $f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.