Funciones Reales de Una Variable: Cálculo Integral

A Calabia, Universidad de Alcala. (DOI:10.5281/zenodo.10127628)

November 14, 2023

1 Definición de integral para funciones de una variable

La integral de una función $f(x)$ de una variable se define como el límite de una suma infinita de productos de la función y un diferencial infinitesimalmente pequeño dx. Esto se puede escribir como:

$$\int f(x)\, dx \tag{1}$$

Por ejemplo, consideremos la función $f(x) = x^2$. La integral de $f(x)$ desde 0 hasta 1 se puede calcular como:

$$\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \tag{2}$$

Esto significa que el área bajo la curva de la función $f(x) = x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$ es $\frac{1}{3}$.

2 Teoremas sobre integración

Existen varios teoremas importantes sobre la integración, como el teorema fundamental del cálculo, que establece que la integral de una función es una función cuya derivada es la función original.

2.1 Teorema Fundamental del Cálculo

El Teorema Fundamental del Cálculo establece que si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y F es una antiderivada de f en $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \tag{3}$$

Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ y $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, entonces $\int_0^1 x^2\,dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$.

2.2 Teorema del Valor Medio para Integrales

El Teorema del Valor Medio para Integrales dice que si f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces existe al menos un número c en el intervalo (a,b) tal que:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \tag{4}$$

Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0,1]$, entonces existe un número c en $(0,1)$ tal que $c^2 = \frac{1}{1-0}\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$.

3 Funciones integrables

Una función es integrable si es continua en el intervalo de integración. También existen funciones que son integrables a pesar de tener discontinuidades en su dominio.

3.1 Funciones continuas

Las funciones continuas son integrables. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ es continua en todos los números reales, por lo que es integrable en cualquier intervalo. La integral de $f(x)$ desde 0 hasta 1 se puede calcular como:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \tag{5}$$

3.2 Funciones con discontinuidades aisladas

Algunas funciones que tienen discontinuidades aisladas también son integrables. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \tag{6}$$

tiene una discontinuidad en $x = 0$, pero aún es integrable en el intervalo $[-1,1]$. La integral de $f(x)$ desde -1 hasta 1 se puede calcular como:

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \int_{-1}^0 x\,dx + \int_0^1 x\,dx = 0 \tag{7}$$

3.3 Funciones con discontinuidades infinitas

Algunas funciones con discontinuidades infinitas son integrables en el sentido de las integrales impropias. Por ejemplo, la función $f(x) = 1/x^2$ tiene una discontinuidad en $x = 0$, pero la integral de $f(x)$ desde 1 hasta ∞ converge:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = 1 \tag{8}$$

4 Métodos de cálculo de primitivas

El cálculo de primitivas o antiderivadas de una función se puede realizar utilizando varios métodos, como la integración por partes, la integración por sustitución, la integración de funciones racionales por fracciones parciales, entre otros.

4.1 Integración por partes

La integración por partes es un método que se utiliza para integrar el producto de dos funciones. Se basa en la regla del producto para la diferenciación. La fórmula de integración por partes es:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{9}$$

Por ejemplo, para calcular la integral $\int x\,e^x\,dx$, podemos tomar $u = x$ y $dv = e^x\,dx$, lo que nos da $du = dx$ y $v = e^x$. Entonces la integral se convierte en $xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$.

4.2 Integración por sustitución

La integración por sustitución es un método que se utiliza para simplificar la integración realizando un cambio de variable. Es el análogo a la regla de la cadena para la diferenciación.

Por ejemplo, para calcular la integral $\int 2x\,e^{x^2}\,dx$, podemos hacer la sustitución $u = x^2$, lo que nos da $du = 2x\,dx$. Entonces la integral se convierte en $\int e^u\,du = e^u + C = e^{x^2} + C$.

4.3 Integración de funciones racionales por fracciones parciales

La integración de funciones racionales por fracciones parciales es un método que se utiliza para integrar funciones racionales, es decir, funciones que son el cociente de dos polinomios. Consiste en descomponer la función racional en un sumatorio de fracciones más simples que se pueden integrar fácilmente.

Por ejemplo, para calcular la integral $\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$, podemos descomponer la función racional en fracciones parciales como $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$. Entonces la integral se convierte en $\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$.

5 Integrales definidas

Una integral definida es una integral que tiene límites de integración. Representa el área bajo la curva de la función entre los dos límites.

5.1 Definición de la integral definida

La integral definida de una función $f(x)$ desde un punto a hasta un punto b se define como el límite de una suma infinita de productos de la función y un diferencial infinitesimalmente pequeño dx, y se denota como:

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{10}$$

5.2 Propiedades de las integrales definidas

Las integrales definidas tienen varias propiedades importantes, como la propiedad aditiva, que dice que la integral de una función desde a hasta b más la integral de la función desde b hasta c es igual a la integral de la función desde a hasta c.

5.3 Ejemplo

Por ejemplo, consideremos la función $f(x) = x^2$. La integral definida de $f(x)$ desde 0 hasta 1 se puede calcular como:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \tag{11}$$

Esto significa que el área bajo la curva de la función $f(x) = x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$ es $\frac{1}{3}$.

6 Integrales impropias

Una integral impropia es una integral que tiene uno o ambos límites de integración infinitos, o la función es no acotada en el intervalo de integración.

6.1 Integrales impropias con límites infinitos

Si una función $f(x)$ es integrable en todos los intervalos $[a, b]$ con $b > a$ y a y b finitos, entonces la integral de $f(x)$ desde a hasta ∞ se define como el límite de la integral de $f(x)$ desde a hasta b cuando b tiende a ∞. Esto se puede escribir como:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx \tag{12}$$

Por ejemplo, la integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ es una integral impropia con límite superior infinito. Se puede calcular como:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{x}\bigg|_1^b = 1 \tag{13}$$

6.2 Integrales impropias con discontinuidades

Si una función $f(x)$ tiene una discontinuidad en un punto c en el intervalo de integración $[a, b]$, entonces la integral de $f(x)$ desde a hasta b se define como la suma de las integrales de $f(x)$ desde a hasta c y desde c hasta b. Esto se puede escribir como:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{14}$$

Por ejemplo, la integral $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$ es una integral impropia con una discontinuidad en $x = 0$. No está definida porque las dos integrales $\int_{-1}^0 \frac{1}{x}\,dx$ y $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ son divergentes.

7 Aplicaciones de la integración al cálculo de áreas, volúmenes y en cuerpos de revolución

La integración tiene muchas aplicaciones en el cálculo de áreas bajo curvas, volúmenes de sólidos de revolución, longitud de arcos, trabajo realizado por una fuerza, entre otros.

7.1 Cálculo de áreas

El área bajo la curva de una función $f(x)$ desde un punto a hasta un punto b se puede calcular como la integral definida de $f(x)$ desde a hasta b. Esto se puede escribir como:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \tag{15}$$

Por ejemplo, el área bajo la curva de la función $f(x) = x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$ es $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$.

7.2 Cálculo de volúmenes

El volumen de un sólido de revolución generado al rotar una función $f(x)$ alrededor del eje x desde un punto a hasta un punto b se puede calcular como la integral definida de $\pi[f(x)]^2$ desde a hasta b. Esto se puede escribir como:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx \tag{16}$$

Por ejemplo, el volumen del sólido generado al rotar la función $f(x) = x^2$ alrededor del eje x desde $x = 0$ hasta $x = 1$ es $\pi \int_0^1 (x^2)^2 \, dx = \frac{\pi}{5}$.

7.3 Cálculo de cuerpos de revolución

El área de la superficie de un cuerpo de revolución generado al rotar una función $f(x)$ alrededor del eje x desde un punto a hasta un punto b se puede calcular como la integral definida de $2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ desde a hasta b. Esto se puede escribir como:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx \tag{17}$$

Por ejemplo, el área de la superficie del cuerpo generado al rotar la función $f(x) = x^2$ alrededor del eje x desde $x = 0$ hasta $x = 1$ es $2\pi \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + (2x)^2} \, dx$.