Funciones Reales de Una Variable: Cálculo Diferencial

A. Calabia, Universidad de Alcala. (DOI:10.5281/zenodo.10127589)

November 14, 2023

1 Revisión de conceptos básicos

Una función real de una variable es una regla que asigna a cada número x en un conjunto D un único número real $f(x)$. El conjunto D se llama el dominio de f.

1.1 Función

Una función es una relación que asigna a cada elemento de un conjunto (el dominio) exactamente un elemento de otro conjunto (el codominio).

1.2 Variable Independiente

La variable independiente, a menudo denotada por x, es la entrada de la función.

1.3 Variable Dependiente

La variable dependiente, a menudo denotada por y o $f(x)$, es la salida de la función.

1.4 Dominio

El dominio de una función es el conjunto de todos los valores posibles de la variable independiente donde la función está definida.

1.5 Codominio

El codominio de una función es el conjunto de todos los valores que la función puede tomar como salida.

1.6 Gráfica de una Función

La gráfica de una función es la representación visual de esta relación entre la variable independiente y la variable dependiente.

1.7 Continuidad

Una función es continua si no tiene huecos, saltos o asintotas en su dominio.

1.8 Derivada

La derivada de una función mide cómo cambia la salida de la función con respecto a un pequeño cambio en la entrada.

2 Dominio y formas de representación

El dominio de una función es el conjunto de todos los valores posibles de la variable independiente donde la función está definida. Las funciones se pueden representar de varias formas, como ecuaciones, gráficas, tablas, etc.

2.1 Dominio

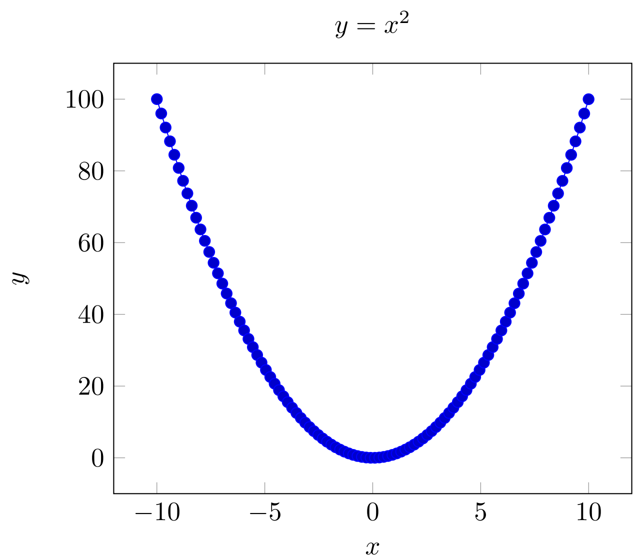
El dominio de una función $f(x)$ es el conjunto de todos los valores de x para los cuales la función está definida. Por ejemplo, el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x}$ es el conjunto de todos los números reales no negativos.

2.2 Formas de representación

Las funciones se pueden representar de varias formas. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ se puede representar como una ecuación, una tabla de valores, o una gráfica.

2.3 Gráficas

Las gráficas son una forma visual de representar una función. Por ejemplo, la gráfica de la función $f(x) = x^2$ es una parábola.

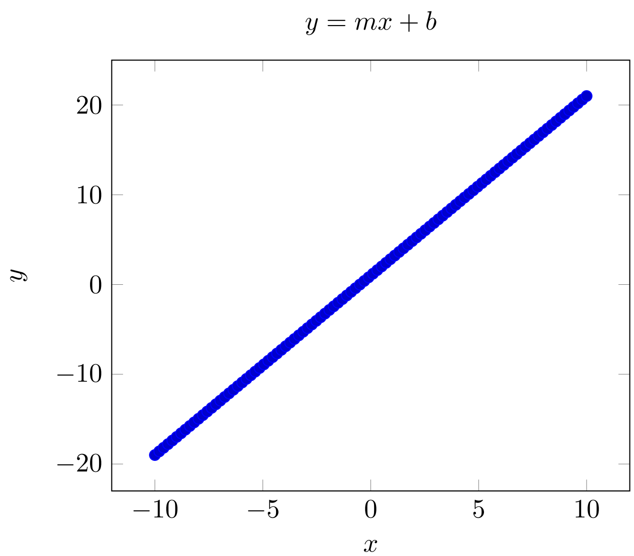


3 Tipos de gráficas

Las gráficas de las funciones pueden ser de varios tipos, como lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas, etc.

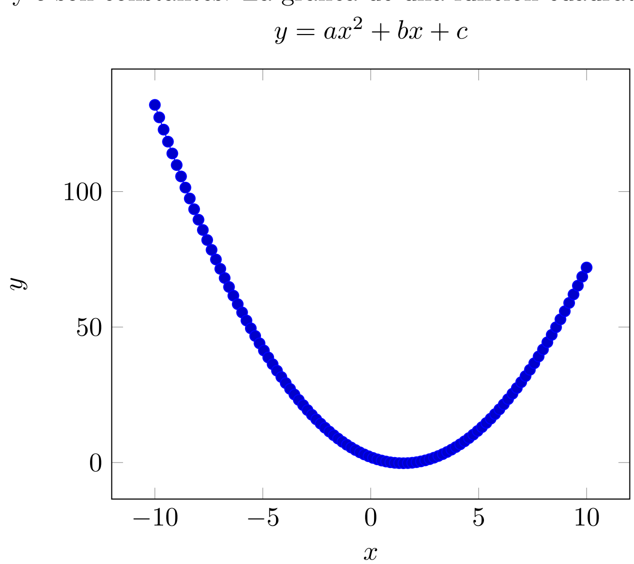
3.1 Función Lineal

Una función lineal es una función de la forma $f(x) = mx + b$, donde m es la pendiente y b es la intersección con el eje y. La gráfica de una función lineal es una línea recta.



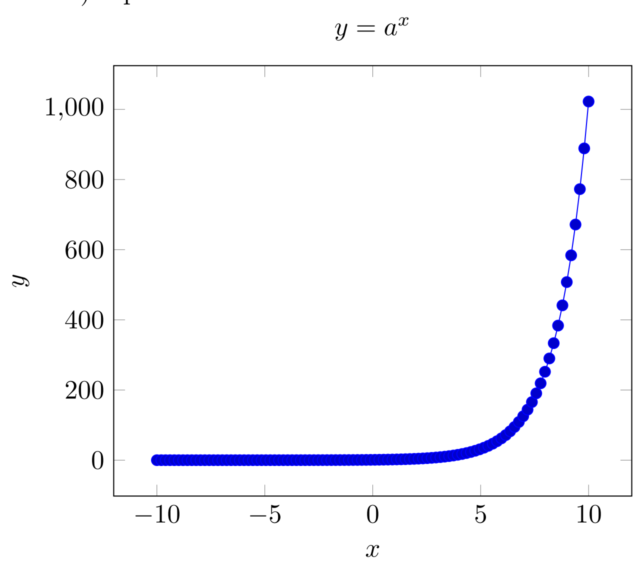
3.2 Función Cuadrática

Una función cuadrática es una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son constantes. La gráfica de una función cuadrática es una parábola.



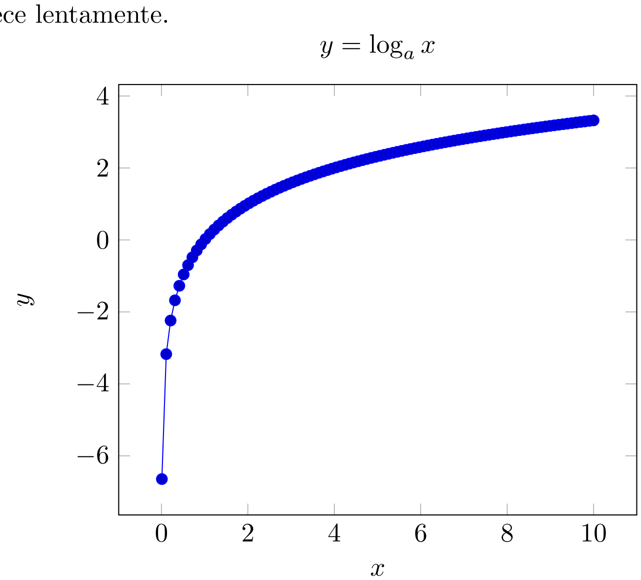
3.3 Función Exponencial

Una función exponencial es una función de la forma $f(x) = a^x$, donde a es una constante positiva. La gráfica de una función exponencial es una curva que crece (o decrece) rápidamente.



3.4 Función Logarítmica

Una función logarítmica es una función de la forma $f(x) = \log_a x$, donde a es una constante positiva. La gráfica de una función logarítmica es una curva que crece lentamente.



4 Límites y continuidad

El límite de una función en un punto es el valor al que se acerca la función cuando x se acerca a ese punto. Una función es continua en un punto si el límite de la función en ese punto es igual al valor de la función en ese punto.

4.1 Límites

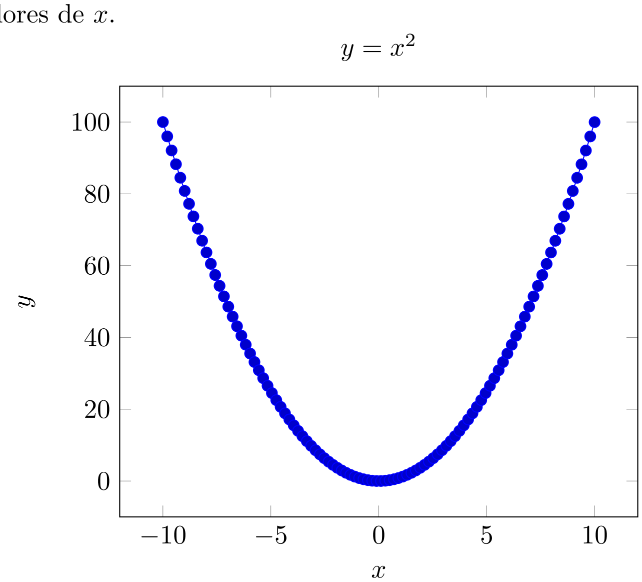
El límite de una función $f(x)$ cuando x se acerca a un valor a se denota como $\lim_{x\to a} f(x)$. Por ejemplo, $\lim_{x\to 2}(x^2 - 1) = 3$.

4.2 Continuidad

Una función $f(x)$ es continua en un punto a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Esto significa que la función no tiene huecos, saltos o asintotas en $x = a$.

4.3 Gráficas

Las gráficas son una forma visual de representar los límites y la continuidad de una función. Por ejemplo, la gráfica de la función $f(x) = x^2$ muestra que la función es continua en todos los puntos y que los límites existen para todos los valores de x.



5 El concepto de derivada

La derivada de una función en un punto es la tasa de cambio de la función en ese punto. Se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto.

5.1 Definición de la Derivada

La derivada de una función $f(x)$ en un punto a se define como el límite de la razón de cambio promedio de la función cuando x se acerca a a. Esto se puede escribir como:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (1)$$

5.2 Interpretación Geométrica

La derivada de una función en un punto se puede interpretar geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto.

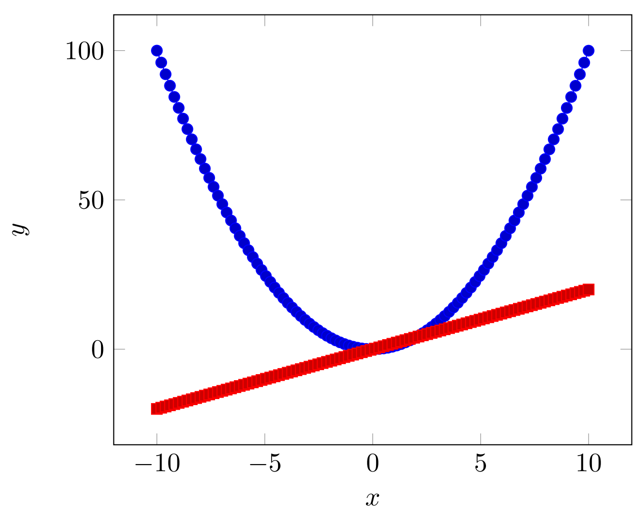
5.3 Cálculo de Derivadas

El cálculo de derivadas se puede realizar utilizando varias reglas, como la regla del producto, la regla del cociente, la regla de la cadena, etc.

5.4 Gráficas

Las gráficas son una forma visual de representar las derivadas de una función. Por ejemplo, la gráfica de la función $f(x) = x^2$ y su derivada $f'(x) = 2x$ se pueden dibujar de la siguiente manera:

$y = x^2$ y $y = 2x$



6 Interpretación geométrica

La derivada de una función en un punto se puede interpretar geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto.

6.1 Pendiente de la recta tangente

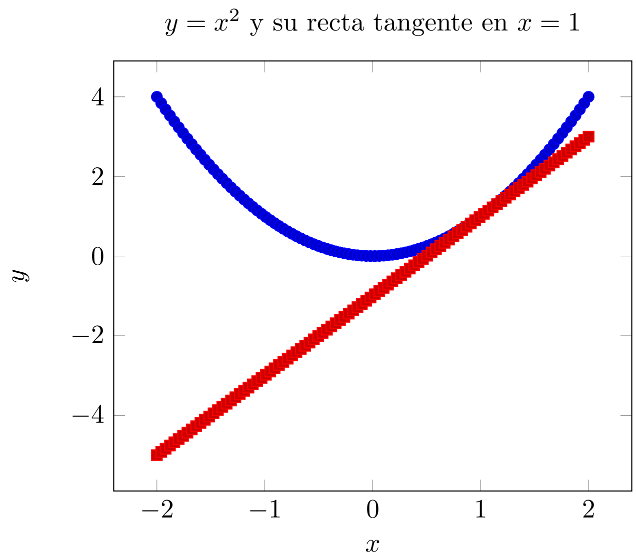
La pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función $f(x)$ en un punto a es igual a la derivada de la función en ese punto, es decir, $f'(a)$.

6.2 Ecuación de la recta tangente

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función $f(x)$ en un punto a es $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

6.3 Gráficas

Las gráficas son una forma visual de representar la interpretación geométrica de la derivada. Por ejemplo, la gráfica de la función $f(x) = x^2$ y su recta tangente en $x = 1$ se pueden dibujar de la siguiente manera:



7 Recta tangente y normal

La recta tangente a la gráfica de una función en un punto es la recta que pasa por ese punto y tiene la misma pendiente que la función en ese punto. La recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente.

7.1 Recta Tangente

La recta tangente a la gráfica de una función $f(x)$ en un punto a es la recta cuya pendiente es igual a la derivada de la función en ese punto y que pasa por el punto $(a, f(a))$. La ecuación de la recta tangente es:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) \tag{2}$$

Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, entonces la recta tangente en $x = 1$ es $y = 2(x - 1) + 1$.

7.2 Recta Normal

La recta normal a la gráfica de una función en un punto es la recta perpendicular a la recta tangente en ese punto. La pendiente de la recta normal es el negativo del recíproco de la pendiente de la recta tangente. La ecuación de la recta normal es:

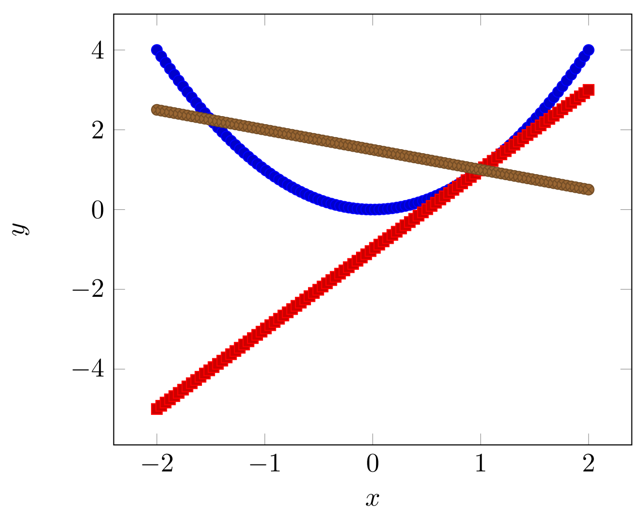
$$y = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) + f(a) \tag{3}$$

Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, entonces la recta normal en $x = 1$ es $y = -\frac{1}{2}(x - 1) + 1$.

7.3 Gráficas

Las gráficas son una forma visual de representar la recta tangente y la recta normal a una función en un punto. Por ejemplo, la gráfica de la función $f(x) = x^2$, su recta tangente y su recta normal en $x = 1$ se pueden dibujar de la siguiente manera:

$y = x^2$, su recta tangente y su recta normal en $x = 1$



8 Cálculo de derivadas

El cálculo de derivadas se puede realizar utilizando varias reglas, como la regla del producto, la regla del cociente, la regla de la cadena, etc.

8.1 Regla del Producto

La regla del producto dice que la derivada de un producto de dos funciones es la primera función multiplicada por la derivada de la segunda, más la segunda función multiplicada por la derivada de la primera. Esto se puede escribir como:

$$(fg)' = f'g + fg' \tag{4}$$

Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sin(x)$, entonces $(fg)' = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$.

8.2 Regla del Cociente

La regla del cociente dice que la derivada de un cociente de dos funciones es la derivada de la primera función multiplicada por la segunda función, menos la primera función multiplicada por la derivada de la segunda, todo dividido por el cuadrado de la segunda función. Esto se puede escribir como:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \tag{5}$$

Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sin(x)$, entonces $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{2x\sin(x) - x^2\cos(x)}{\sin^2(x)}$.

8.3 Regla de la Cadena

La regla de la cadena es una fórmula para calcular la derivada de la composición de dos funciones.

8.3.1 Regla de la cadena para una composición de dos funciones

Si tenemos dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, la regla de la cadena establece que la derivada de la composición de f y g es la derivada de f evaluada en $g(x)$ multiplicada por la derivada de g. Esto se puede escribir como:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{6}$$

Por ejemplo, si $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^2$, entonces $(f(g(x)))' = e^{x^2} \cdot 2x$.

8.3.2 Regla de la cadena para una composición de más de dos funciones

La regla de la cadena se puede extender a la composición de más de dos funciones. Si tenemos tres funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$, la regla de la cadena establece que la derivada de la composición de f, g y h es la derivada de f evaluada en $g(h(x))$ multiplicada por la derivada de g evaluada en $h(x)$ multiplicada por la derivada de h. Esto se puede escribir como:

$$(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x) \tag{7}$$

Por ejemplo, si $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = e^x$ y $h(x) = x^2$, entonces $(f(g(h(x))))' = \cos(e^{x^2}) \cdot e^{x^2} \cdot 2x$.

9 Aplicaciones al cálculo de extremos de funciones

Las derivadas se pueden utilizar para calcular los extremos de una función, es decir, los puntos donde la función alcanza un valor máximo o mínimo.

9.1 Extremos locales

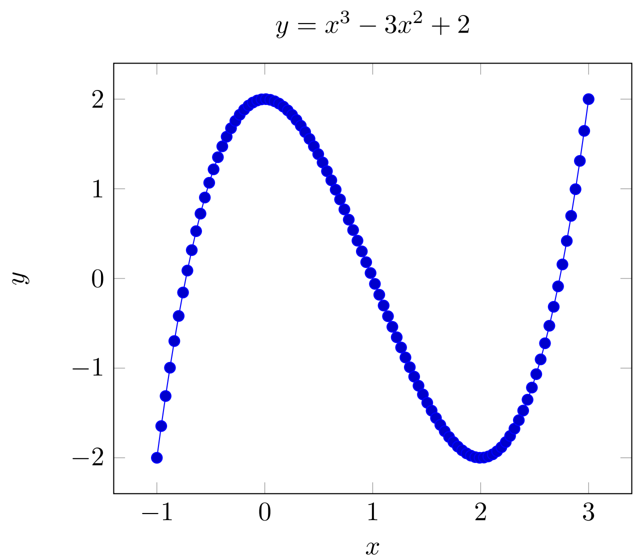
Un extremo local de una función es un punto donde la función alcanza un valor máximo o mínimo en su vecindario. Los extremos locales se pueden encontrar calculando los puntos críticos de la función, es decir, los puntos donde la derivada es cero o no está definida, y luego utilizando la prueba de la segunda derivada.

9.2 Extremos globales

Un extremo global de una función es un punto donde la función alcanza su valor máximo o mínimo en todo su dominio. Los extremos globales se pueden encontrar calculando los extremos locales y los valores de la función en los extremos de su dominio, y luego comparando estos valores.

9.3 Ejemplo

Consideremos la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Su derivada es $f'(x) = 3x^2 - 6x$, y los puntos críticos son $x = 0$ y $x = 2$. La segunda derivada es $f''(x) = 6x - 6$, y evaluando en los puntos críticos obtenemos $f''(0) = -6$ y $f''(2) = 6$. Por lo tanto, $x = 0$ es un máximo local y $x = 2$ es un mínimo local. Como la función es cúbica, no tiene extremos globales.



10 Optimización

La optimización es el proceso de encontrar el valor máximo o mínimo de una función. Las derivadas juegan un papel crucial en este proceso.

10.1 Problemas de optimización

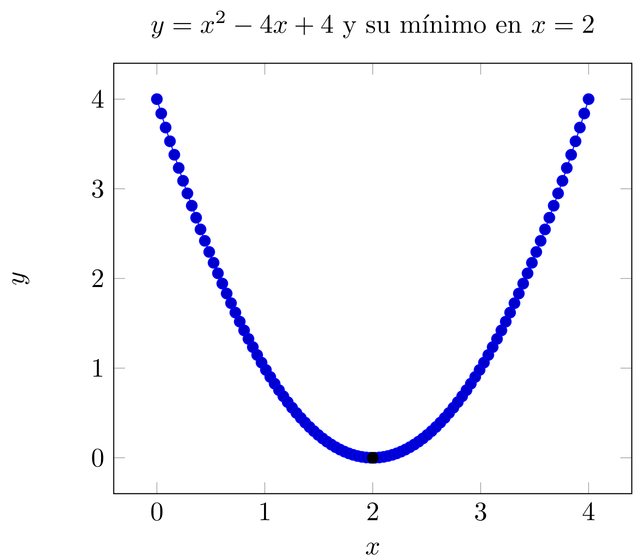
Los problemas de optimización implican encontrar el valor máximo o mínimo de una función. Esto se puede lograr calculando los puntos críticos de la función y determinando cuál de estos puntos produce el valor máximo o mínimo.

10.2 Ejemplo

Consideremos el problema de encontrar el mínimo de la función $f(x) = x^2 - 4x + 4$. Primero, calculamos la derivada de la función, que es $f'(x) = 2x - 4$. Luego, igualamos la derivada a cero para encontrar los puntos críticos, lo que nos da $x = 2$. Finalmente, evaluamos la función en $x = 2$ para obtener el valor mínimo, que es $f(2) = 0$.

10.3 Gráficas

Las gráficas son una forma visual de representar la solución a un problema de optimización. Por ejemplo, la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4x + 4$ y su mínimo en $x = 2$ se pueden dibujar de la siguiente manera:



$y = x^2 - 4x + 4$ y su mínimo en $x = 2$
4
3
2
1
0
y
0
1
2
3
4
x