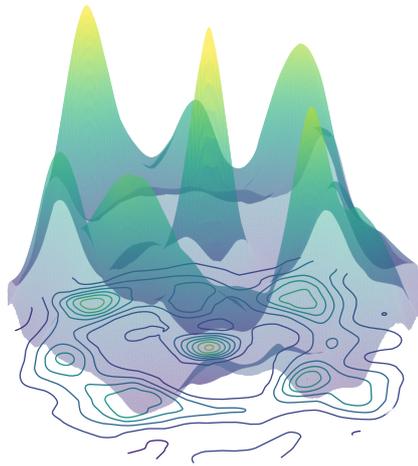


# Electromagnetismo Aplicado

Tomás Alberto Cassanelli



Última revisión: 2 de noviembre de 2023



# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>11</b>
<b>1. Análisis vectorial</b>	<b>13</b>
1.1. Cálculo vectorial	13
1.1.1. Operaciones vectoriales	13
1.1.2. Productos triple	14
1.1.3. Posición, desplazamiento y vector de separación	14
1.1.4. Campos vectoriales	15
1.1.5. Integrales	16
1.1.6. Campos vectoriales e identidades en operaciones	18
1.2. Teoremas fundamentales	18
1.2.1. Campos vectoriales conservativos	18
1.2.2. Teorema fundamental del cálculo	18
1.2.3. Teorema de la divergencia	19
1.2.4. Teorema del rotor	19
1.2.5. Teorema de Helmholtz	19
1.3. Coordenadas	19
1.3.1. Coordenadas polares	20
1.3.2. Coordenadas esféricas	20
1.4. Distribución Delta Dirac	21
1.5. Números complejos en ciencia e ingeniería	22
<b>2. Campos electromagnéticos cuasi-estáticos y sus propiedades en materiales</b>	<b>25</b>
2.1. Principios de teoría electromagnética	25
2.1.1. Campos eléctricos y magnéticos	25
2.1.2. Leyes fundamentales	27
2.1.3. Resumen de electrostática y magnetostática	30
2.2. Ecuaciones de Maxwell	30
2.2.1. Corrientes	32
2.2.2. Continuidad	33
2.2.3. Polarización y magnetización macroscópica	34
2.2.4. Ecuaciones de Maxwell en materiales	35
2.2.5. Propiedades constitutivas del medio	37
2.2.6. Condiciones de frontera	40
2.2.7. Vector de Poynting	42
2.3. Materiales sus propiedades e importancia	43
2.3.1. Materiales conductores	43
2.3.2. Materiales dieléctricos	47
2.3.3. Materiales magnéticos	49
2.4. Funciones potenciales	50
2.4.1. Campos armónicos	50
2.4.2. Campos armónicos y Poynting	51
2.4.3. Ecuaciones de Maxwell en campos armónicos	52
2.4.4. Potenciales escalar y vectorial	53
2.5. Métodos de resolución de las ecuaciones de Poisson y Laplace	54
2.5.1. Integración directa	55
2.5.2. Método de imágenes	56
2.5.3. Separación de variables	57
2.5.4. Método de momentos	59
2.5.5. Diferencias finitas	60

<b>3. Radiación: ondas planas</b>	<b>65</b>
3.1. Ecuación de onda para campos eléctrico y magnético . . . . .	65
3.1.1. Onda mecánica . . . . .	65
3.1.2. Onda electromagnética . . . . .	66
3.2. Propagación de ondas planas . . . . .	67
3.2.1. Medio sin pérdidas . . . . .	69
3.2.2. Medio con pérdidas . . . . .	70
3.2.3. Energía de una onda electromagnética . . . . .	70
3.2.4. Conductores y dieléctricos . . . . .	71
3.2.5. Profundidad de penetración . . . . .	73
3.3. Incidencia normal . . . . .	73
3.4. Incidencia oblicua . . . . .	75
3.4.1. Ley de Snell . . . . .	76
3.4.2. Ángulo de reflexión total . . . . .	77
3.5. Polarización . . . . .	77
<b>4. Radiación: ondas confinadas</b>	<b>81</b>
4.1. Ondas TEM en líneas de transmisión sin pérdidas . . . . .	81
4.2. Excitaciones sinusoidales en estado estable en líneas sin pérdidas . . . . .	86
4.3. Acoplamiento de impedancias . . . . .	87
4.4. Calculadora gráfica de impedancias: carta de Smith . . . . .	88
4.5. Líneas de transmisión con pérdidas . . . . .	90
4.6. Introducción a guías de ondas . . . . .	93
4.7. Ecuación de onda para guías de onda . . . . .	93
4.8. Propagación en guías de ondas rectangulares . . . . .	95
4.8.1. Modo de propagación TM . . . . .	96
4.8.2. Modo de propagación TE . . . . .	99
4.8.3. Flujo de energía en una guía de ondas . . . . .	100
<b>5. Introducción a conceptos de antenas</b>	<b>101</b>
5.1. Breve historia del desarrollo de antenas . . . . .	101
5.2. Una breve historia de la radio astronomía . . . . .	102
5.3. Antenas elementales . . . . .	104
5.4. Antena de dipolo ideal . . . . .	105
5.4.1. Propiedades de antenas . . . . .	108
5.4.2. Radiómetros . . . . .	110
5.5. Antena de apertura . . . . .	111
5.5.1. Geometría de antenas . . . . .	111
5.5.2. Ganancia de una radio antena . . . . .	112
5.5.3. Patrón de potencia para antenas de apertura . . . . .	113
5.5.4. Distribución de apertura . . . . .	116
5.6. Ondas planas y rangos de radiación . . . . .	117
5.7. Digitalización . . . . .	118
5.8. Arreglo de antenas . . . . .	119
5.8.1. El interferómetro de dos elementos . . . . .	119
5.8.2. Teorema de Wiener-Khinchin . . . . .	120
5.8.3. Correlador . . . . .	121
5.8.4. Interferometría a gran escala . . . . .	122
<b>A. Constantes, convenciones y unidades</b>	<b>123</b>
A.1. Constantes . . . . .	123
A.2. Constantes numéricas . . . . .	123
A.3. Constantes físicas . . . . .	123
A.4. Constantes astronómicas . . . . .	123
A.5. Convenciones . . . . .	124

<b>B. Carta de Smith</b>	<b>125</b>
B.1. Introducción . . . . .	125
B.2. Diagrama . . . . .	125
<b>C. Siglas</b>	<b>127</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>131</b>



# Índice de figuras

1.1. Representación gráfica de un vector . . . . .	14
1.2. Proyección de vector en plano cartesiano . . . . .	14
1.3. Posición, desplazamiento y vector separación . . . . .	15
1.4. Divergencia de forma gráfica . . . . .	16
1.5. Rotor de forma gráfica . . . . .	16
1.6. Elemento diferencial de coordenadas cilíndricas . . . . .	20
1.7. Elemento diferencial de coordenadas esféricas . . . . .	21
1.8. Delta Dirac . . . . .	22
1.9. Representación de un fasor en el plano complejo . . . . .	23
2.1. Ejemplo de un campo eléctrico estático generado por dos cargas . . . . .	26
2.2. Flujo electromagnético atravesando una superficie . . . . .	27
2.3. Ejemplo de esfera gaussiana . . . . .	27
2.4. Experimento de Faraday . . . . .	29
2.5. Condiciones de frontera y campos paralelos . . . . .	41
2.6. Condiciones de frontera y campos perpendiculares . . . . .	41
2.7. Conductor expuesto a campo eléctrico externo . . . . .	43
2.8. Aproximación clásica de flujo de electrones dentro de un conductor . . . . .	45
2.9. Resistividad en función de temperatura . . . . .	46
2.10. Capacitor esférico o cilíndrico en su <i>cross-section</i> . . . . .	47
2.11. Dipolo eléctrico . . . . .	49
2.12. Curva de histéresis . . . . .	50
2.13. Método clásico de imágenes . . . . .	56
2.14. Método clásico de imágenes (equivalente) . . . . .	56
2.15. Variables separables en coordenadas cartesianas . . . . .	57
2.16. Solución potencial en variables separables cartesianas . . . . .	59
2.17. Estimación de la derivada de una función $y = f(x)$ . . . . .	60
2.18. Cálculo de potencial para una malla simple . . . . .	61
2.19. Cálculo de potencial para una malla simple y dos medios . . . . .	62
2.20. Finite Difference Method aplicado a un material rectangular . . . . .	62
2.21. Mallado de material rectangular . . . . .	63
2.22. Error total para finite difference method . . . . .	64
3.1. Tensión en una cuerda propagando una onda . . . . .	66
3.2. Espectro electromagnético . . . . .	67
3.3. Onda electromagnética en algún tiempo $t$ . . . . .	69
3.4. Profundidad de penetración material conductor . . . . .	73
3.5. Coordenadas en propagación de ondas oblicuas . . . . .	75
3.6. Ley de Snell (reflexión y refracción) . . . . .	77
3.7. Onda electromagnética no polarizada . . . . .	78
3.8. Onda electromagnética polarizada linealmente . . . . .	78
3.9. Onda electromagnética polarizada circularmente . . . . .	79
3.10. Elipse de polarización . . . . .	79
4.1. Línea de transmisión por unidad de longitud sin pérdidas . . . . .	82
4.2. Línea de transmisión terminada en una resistencia . . . . .	84
4.3. <i>Lattice diagram</i> . . . . .	86
4.4. Línea de transmisión con fuente sinusoidal . . . . .	87
4.5. Carta de Smith básica. . . . .	89
4.6. Impedancia de entrada en carta de Smith . . . . .	90

## Índice de figuras

4.7. Línea de transmisión por unidad de longitud con pérdidas . . . . .	91
4.8. Representación de guía de onda rectangular . . . . .	96
4.9. Propagación de onda electromagnética en una guía de ondas . . . . .	97
4.10. Impedancia intrínseca para modos TE y TM . . . . .	98
5.1. Breve historia de la tecnología de antenas . . . . .	102
5.2. Opacidad atmosférica en frecuencias de radio ondas . . . . .	104
5.3. Dos tipos de antenas . . . . .	105
5.4. Antena de dipolo simple . . . . .	107
5.5. Patrón de radiación de un dipolo ideal . . . . .	107
5.6. Muestreo y teorema de Nyquist-Shannon . . . . .	110
5.7. Diagrama telescopio de 100-m Effelsberg . . . . .	112
5.8. Frente de ondas incidente en una rendija de ancho finito y largo infinito . . . . .	115
5.9. Patrón de potencia apertura unidimensional . . . . .	115
5.10. Patrón de potencia en coordenadas polares . . . . .	116
5.11. Descripción gráfica de la relación entre el plano de apertura el observable de antena . . . . .	117
5.12. Patrón de radiación desenfocado y enfocado de Effelsberg . . . . .	118
5.13. Interferómetro de dos elementos . . . . .	120
5.14. Cálculo de power spectral density . . . . .	121
B.1. Carta de Smith . . . . .	126

# Índice de cuadros

2.1. Lista de variables ecuaciones de Maxwell estáticos y variables en el tiempo. . . . .	30
2.2. Lista de densidades de carga y de corriente. . . . .	33
2.3. Lista de resistividades en materiales . . . . .	44
2.4. Lista de variables relevantes y relacionadas con la ley de Ohm. . . . .	47
2.5. Susceptibilidad magnética de materiales . . . . .	50
2.6. Comparación en el nivel de error $\delta$ del calculo de finite difference method . . . . .	63
3.1. Lista de variables relevantes en propagación de onda . . . . .	71
4.1. Lista de variables relevantes en líneas de transmisión . . . . .	93
4.2. Lista de variables relevantes en guías de ondas . . . . .	100
5.1. Constantes geométricas del telescopio Effelsberg . . . . .	112
5.2. Definiciones de regiones radiativas en una antena de apertura . . . . .	118



# Prefacio

## Versión en español

Los siguientes apuntes del curso de electromagnetismo aplicado son una recopilación de mi material de clases, inspirado en ideas de diferentes libros de electrodinámica, y ejercicios preparados en conjunto con mis ayudantes del curso: Erik Sáez, Sebastián Manosalva, y Fernando San Martín. Quise realizar esta recopilación para dar a conocer a los y las estudiantes los tópicos de forma concisa y ordenada del curso además de presentar conceptos más modernos, con bibliografía actualizada y a nuestra realidad local de Latinoamérica y Chile. Los apuntes fueron pensados para futuros ingenieros, físicos y en particular para radio astrónomos.

El electromagnetismo aplicado es una ciencia que empezó con el telégrafo, radio antenas, aplicaciones de sistemas eléctricos en el hogar y un sin fin de instrumentos nuevos. El dominio y campo de esta ciencia ha estado limitado el electromagnetismo desarrollado por Maxwell y Heaviside, pero ahora este impulso es dado por la tecnología de materiales en materia condensada y superconductores, y otras aplicaciones como en satélites y arreglos de antenas, que en conjunto son los grandes desarrollos en tecnología liderados por ingenieros y astrónomos.

Este curso parte desde una sólida base en fenómenos eléctricos (ley de Coulomb y Gauss) y magnéticos (ley de Biot-Savart), y con una noción de las ecuaciones de Maxwell-Heaviside. Aquí ahondaremos en fenómenos variables en el tiempo y en el uso de la notación fasorial para campos armónicos. Por último visitaremos las aplicaciones de propagación de onda, tanto confinadas como libres, y la aplicación de antenas.

Los apuntes están estructurados en 5 capítulos: herramientas matemáticas en capítulo 1 campos y materiales en capítulo 2, ondas electromagnéticas planas y uniformes libres en capítulo 3, ondas electromagnéticas confinadas en capítulo 4, y antenas en capítulo 5.

*Tomás Cassanelli*

## Versión en inglés

The following lecture notes (only available in spanish), applied electromagnetism, are a collection of my own developed material, inspired from different electrodynamic books ideas, and exercises done alongside my teaching assistants: Erik Sáez, Sebastián Manosalva, and Fernando San Martín. I wanted to make this compilation to give the students a concise and ordered view of the topics of the course, and to introduce modern concepts, with updated bibliography and related to our local reality of Latin America and Chile. The notes were thought for future engineers, physicists and in particular for radio astronomers.

Applied electromagnetism is a science that started with telegraph, radio antennas, applications of electrical systems and a myriad of new instruments. This science domain has been limited to the electromagnetism developed by Maxwell and Heaviside, but now this impulse is given by the new technology of materials in condensed matter physics and superconductors, as well as other applications such as relativity in satellite telecommunications and antenna arrays at intercontinental scales (very long baselines), which together are great developments in technology led by engineers and astronomers.

This course starts from a solid base of electrostatic phenomena (Coulomb's law and Gauss's law) and magnetostatic phenomena (Biot-Savart's law), and with a basic notion of Maxwell-Heaviside equations. In this course we will delve into time-varying quantities, with emphasis in the use of phasor notation for harmonic fields. Finally, we will visit the applications of wave propagation in various media and interactions, both confined and in free space, and the application of antennas for the radiation/reception of electromagnetic waves. The course is divided in 5 chapters: mathematical tools, fields and materials, plane waves, confined waves, and antennas.

*Tomás Cassanelli*



# 1. Análisis vectorial

Los apuntes del curso electromagnetismo aplicado comienza desde una solida base en la electrostática, y familiaridad con las ecuaciones fundamentales en electromagnetismo y electrodinámica, las ecuaciones de Maxwell (apartado 2.2; descritas como las estructuró Oliver Heaviside). El objetivo de este primer capítulo, es hacer una revisión general de cálculo vectorial, herramienta fundamental de esta rama de la ciencia, y un breve resumen de definiciones y ecuaciones de Maxwell (vea Griffiths 2017, capítulo 1).

## 1.1. Cálculo vectorial

Existen cantidades escalares<sup>1</sup> y vectoriales. Cantidades vectoriales<sup>2</sup>, además de magnitud, poseen dirección y están asociadas a una representación gráfica. Figura 1.1 muestra una representación gráfica de vectores.

Cantidades vectoriales poseen dos o más dimensiones, las cuales podrán ser descritas de la siguiente manera para un vector  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z) = (A_x, A_y, A_z) = \hat{\mathbf{x}}A_x + \hat{\mathbf{y}}A_y + \hat{\mathbf{z}}A_z. \quad (1.1)$$

La representación en ecuación (1.1) solo aplica en coordenadas cartesianas, viz.,  $(x, y, z)$ , y su módulo es:  $\|\mathbf{A}\| = A$ ,

$$\|\mathbf{A}\| = A = \sqrt{|A_x|^2 + |A_y|^2 + |A_z|^2}.$$

Vectores unitarios, están definidos con norma unitaria:  $\|\hat{\mathbf{n}}\| = n = 1$ <sup>3</sup>. En figura 1.2 un vector tridimensional en plano cartesiano es graficado. El plano cartesiano posee los vectores unitarios  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$ , los cuales siguen los ejes coordenados, este no será el caso en otras coordenadas, apartado 1.3. Nótese que vectores son independientes de el punto coordenado y son libres de permanecer en cualquier posición.

### 1.1.1. Operaciones vectoriales

Existen múltiples tipos de operaciones vectoriales, estas son:

1. Adición. Al igual que un escalar, sigue las mismas reglas, i.e.,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \mathbf{B} + \mathbf{A}, \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} &= \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}), \\ \mathbf{A} - \mathbf{B} &= \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \end{aligned}$$

2. Multiplicación por un escalar

$$a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a\mathbf{A} + a\mathbf{B}$$

3. Producto punto o producto interno (*inner product*) de dos vectores

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}^\top \mathbf{B} \equiv AB \cos \theta, \quad (1.2)$$

donde  $\theta$  es el ángulo del comienzo de cada vector y  $\mathbf{A}^\top$  la operación transpuesta de  $\mathbf{A}$ . El producto punto es conmutativo, i.e.,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ . A esta cantidad también se le asocia a la proyección, es decir el vector  $\mathbf{A}$  proyectado en el vector  $\mathbf{B}$ . El producto interno también puede ser denotado como  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$  (particularmente en mecánica cuántica).

<sup>1</sup>Cantidades escalares pueden ser *signed-scalar quantities*, i.e., cantidades escalares con signo. Por ejemplo: la carga eléctrica:  $\pm q$ , o la corriente eléctrica  $\mathbf{I}$

<sup>2</sup>Vectores serán descritos por letras en negrita, viz.,  $\mathbf{A}$ , y escalares por letras,  $A$  ó  $a$ . Para evitar confusión y aliviar la notación, la flecha  $\vec{A}$  no será usada.

<sup>3</sup>Un vector unitario en tres dimensiones que siga la diagonal el hiperespacio donde se encuentra será:  $\hat{\mathbf{n}} = (1, 1, 1) \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

## 1. Análisis vectorial

Figura 1.1: Representación gráfica de un vector,  $\mathbf{A}$ . El largo del vector  $\mathbf{A}$  es proporcional a su magnitud y la flecha indica el sentido.

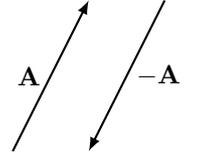
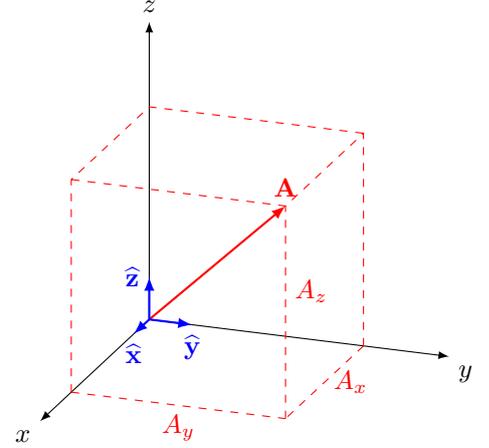


Figura 1.2: Proyección de vector en plano cartesiano. Vector  $\mathbf{A}$  sale desde el origen con coordenadas  $(A_x, A_y, A_z)$ . Los vectores unitarios están denotados por la base ortonormal  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$ . Acá no usaremos la descripción  $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ , usualmente usada en ciencias matemáticas.



### 4. Producto cruz de dos vectores

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \equiv AB \sin \theta \hat{\mathbf{n}}, \quad (1.3)$$

donde  $\hat{\mathbf{n}}$ ,  $n = \|\hat{\mathbf{n}}\| = 1$  vector unitario, corresponde a el vector perpendicular a  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ . Ídem en  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$ ,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{x}}(A_y B_z - A_z B_y) + \hat{\mathbf{y}}(A_z B_x - A_x B_z) + \hat{\mathbf{z}}(A_x B_y - A_y B_x). \quad (1.4)$$

El lector quizá también esté familiarizado con la representación tensorial de vectores y matrices, las cuales hacen el desarrollo de estos cálculos particularmente simples. Una buena introducción a tensores puede ser encontrada en capítulo 16 de [Arfken & Weber \(1967\)](#), otras fuentes más avanzadas son [Schouten & Corson \(1952\)](#); [Walker \(1949\)](#).

### 1.1.2. Productos triple

Identidades vectoriales importantes son:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (1.5)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (1.6)$$

### 1.1.3. Posición, desplazamiento y vector de separación

Las cantidades vectoriales descritas como posición, desplazamiento y separación son siempre usadas en definiciones diferenciales e integrales en electrodinámica.

Cantidades primadas, con símbolo  $\prime$ , son referenciadas en la posición de campo vectorial, por otra parte, cantidades no primadas corresponde al generador de ese campo vectorial (e.g., una carga eléctrica). En general, nos referiremos a estas cantidades vectoriales como: vector fuente (*source vector*)  $\mathbf{r}$ , vector de campo (*field vector*)  $\mathbf{r}'$ , y vector separación  $\hat{\mathbf{s}}$ .

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} \quad (1.7)$$

$$\mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{x}} + y'\hat{\mathbf{y}} + z'\hat{\mathbf{z}} \quad (1.8)$$

$$\mathbf{s} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}', \quad \Rightarrow \hat{\mathbf{s}} \equiv \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \quad (1.9)$$

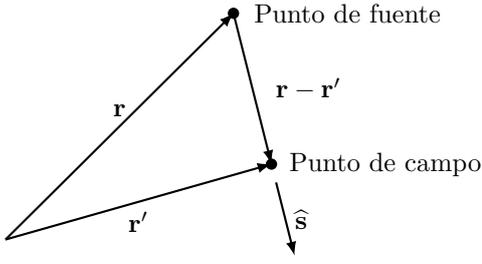


Figura 1.3: Posición, desplazamiento y vector separación. El diagrama además muestra los puntos: punto fuente (donde se ubica por ejemplo una carga eléctrica) y punto de campo que es donde deseamos medir el campo vectorial. El vector separación está ilustrado como la diferencia:  $\mathbf{s} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ .

Figura 1.3 muestra la asociación de estos vectores en forma gráfica. Nótese que el vector separación es una forma compacta de escribir seis números y sus operaciones,

$$\mathbf{s} = (x - x') \hat{\mathbf{x}} + (y - y') \hat{\mathbf{y}} + (z - z') \hat{\mathbf{z}}, \quad (1.10)$$

$$s = \|\mathbf{s}\| = \sqrt{|x - x'|^2 + |y - y'|^2 + |z - z'|^2}, \quad (1.11)$$

$$\hat{\mathbf{s}} = \frac{\mathbf{s}}{s} = \frac{(x - x') \hat{\mathbf{x}} + (y - y') \hat{\mathbf{y}} + (z - z') \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{|x - x'|^2 + |y - y'|^2 + |z - z'|^2}}. \quad (1.12)$$

### 1.1.4. Campos vectoriales

Los campos vectoriales son de fundamental importancia para comprender electromagnetismo. En particular describen el set de ecuaciones de Maxwell de forma compacta y eficaz, reduciendo así la notación y como acceder a sus variables. El caso más relevante de estas operaciones será visto al resolver las *partial differential equation* (PDE) de Laplace y Poisson, apartado 2.5.

#### Gradiente

El gradiente es una operación diferencial aplicada a un campo escalar (e.g., temperatura), es decir, donde la cantidad a evaluar no posee propiedades vectoriales (i.e., no es un campo vectorial). El gradiente puede ser expresado como  $\text{grad}(T)$  ó  $\nabla T$  y en coordenadas cartesianas es:

$$\nabla T \equiv \frac{\partial T}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}. \quad (1.13)$$

El gradiente  $\nabla T$  apunta en la dirección de máximo crecimiento del campo escalar  $T$  y su magnitud del vector  $\|\nabla T\|$  entrega la pendiente del máximo crecimiento. En general podemos expresar un diferencial como:

$$dT = \nabla T \cdot d\mathbf{l} = \|\nabla T\| \|d\mathbf{l}\| \cos \theta. \quad (1.14)$$

Hablamos de “operador nabla” a la cantidad:

$$\nabla \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}, \quad (1.15)$$

y cuando calculamos  $\nabla T$  es correcto decir el operador actúa en  $T$ , y **no** multiplica.

#### Ejemplo 1.1

Encontrar el gradiente de  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  (magnitud del vector posición). Solución:  $\nabla r = \hat{\mathbf{r}}$ .

#### Divergencia

Por definición corresponde al operador nabla pero ahora “operando” sobre un campo vectorial, e.g.,  $\mathbf{v}$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \left( \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (v_x \hat{\mathbf{x}} + v_y \hat{\mathbf{y}} + v_z \hat{\mathbf{z}}), \quad (1.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (1.17)$$

## 1. Análisis vectorial

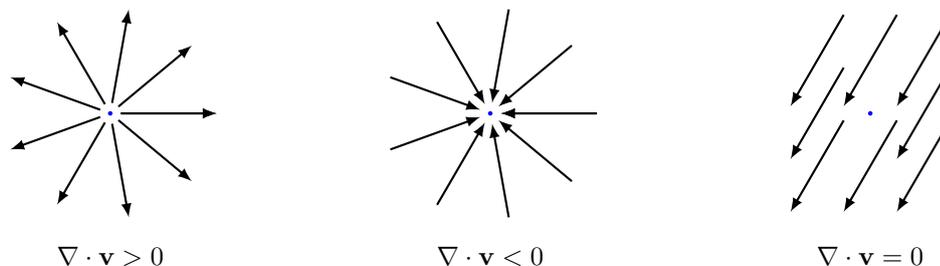
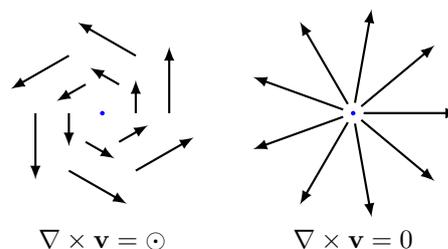


Figura 1.4.: Divergencia de forma gráfica. La divergencia,  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  cuantifica el grado de “divergencia” o cantidad en que líneas divergen en un punto en cuestión.

Figura 1.5: Rotor de forma gráfica. El rotor,  $\nabla \times \mathbf{v}$  cuantifica la cantidad de rotación de  $\mathbf{v}$  en un punto del espacio. El símbolo  $\odot$  sale del plano en forma perpendicular y representa al vector  $\nabla \times \mathbf{v}$  que rota en sentido antihorario (*counterclockwise*). En caso contrario, rotación horaria (*clockwise*) sería el símbolo  $\otimes$ .



Nótese que la forma de escribirlo es  $\nabla \cdot \mathbf{v}$ . La divergencia de un campo vectorial es un escalar y la divergencia de un campo escalar no tiene sentido (y quizá el lector se refiere a el operador gradiente). La forma gráfica de entender la divergencia está dada por la figura 1.4 donde dependiendo del signo de la operación  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  las líneas de campo tendrán una geometría característica.

### Rotor

El rotor o *curl*, es definido por la operación matemática  $\nabla \times \mathbf{v}$ ,

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{x}} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{y}} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \hat{\mathbf{z}} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \quad (1.18)$$

donde nuevamente las componentes del campo vectorial  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ . El operador rotor solo se puede aplicar a cantidades vectoriales, y el rotor de un escalar no tiene sentido. De forma gráfica significa la “medida de cuanto gira el vector  $\mathbf{v}$  en un punto en cuestión”. La figura figura 1.5 muestra una versión gráfica de su comportamiento.

### 1.1.5. Integrales

Integrales de línea, superficie, y volumen, son muy importantes para definir el cálculo vectorial y algebraico que realizan las ecuaciones de Maxwell, capítulo 2. Mencionaremos línea  $\mathcal{C}$ , superficie  $\mathcal{S}$  y volumen  $\mathcal{V}$ , en las integrales, para indicar integrales de línea, superficie, y volumen.

#### Integral del línea

La integral de línea de un punto  $a$  a un punto  $b$  (donde la línea misma es denotada  $\mathcal{C}$ ) está definida por el elemento diferencial  $d\mathbf{l}$  y sobre un campo vectorial  $\mathbf{v}$  (aunque también puede ser un campo escalar), entonces:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_b^a \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.19)$$

Muchas formulas simples en física utilizan esta definición, por ejemplo el trabajo,  $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{l}$ , el cual se define como la cantidad de trabajo realizado por el campo vectorial  $\mathbf{F}$  en un trayecto  $\mathbf{l}$ . En caso de que  $a = b$  hablamos de una integral cerrada y es expresada como:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.20)$$

Esta forma es particularmente importante ya que comprende un *loop*, o línea cerrada que se comentará mucho en cálculos de corriente, por ejemplo. Campos vectoriales independientes del camino que tomen son llamados **campos conservativos**. Campos que dependan del camino son no conservativos.

### Integral de superficie

La integral de superficie o de área está dada por un campo vectorial  $\mathbf{v}$  y un parche de área infinitesimal  $da$  y con un vector normal a la superficie  $\hat{\mathbf{n}}$  (donde la superficie total es llamada  $\mathcal{S}$ ), es decir  $d\mathbf{a} = \hat{\mathbf{n}} da$ . La integral aplicada a un campo vectorial es:

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} \equiv \iint (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}) da. \quad (1.21)$$

El diferencial de área,  $da$ , tomará distintos valores dependiendo de la parametrización o sistema coordenado que utilicemos, apartado 1.3. En general, para calcular el área de una superficie solo necesitamos  $\int da$  que puede ser fácilmente parametrizada con dos variables auxiliares  $(s, t)$ ,

$$a = \int da = \iint \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right\| ds dt, \quad (1.22)$$

con  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Por último, el signo del vector normal a la superficie  $\hat{\mathbf{n}}$ , por convención, se asumirá positivo y saliente de una superficie cerrada (con la excepción de superficies complejas como la banda de Möbius). Integrales de superficies cerradas serán denotadas con  $\oint$  (ya que el diferencial es el que denota el número de integrales) y nuevamente existirán campos vectoriales que pueden ser independientes de la superficie.

### Integral de volumen

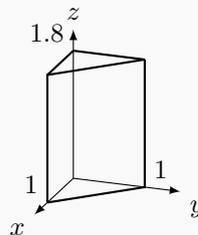
La integral de volumen es similar al caso anterior pero ahora el diferencial es siempre escalar,  $d\tau$  con volumen total  $\mathcal{V}$ , y como sabemos dependerá del sistema coordenado que utilicemos. En general, puede ser aplicado tanto a un campo escalar como vectorial. Al ser aplicado a un campo escalar,  $T = T(x, y, z)$  es expresada como:

$$\int_{\mathcal{V}} T d\tau \equiv \iiint T(x, y, z) dx dy dz, \quad (1.23)$$

con  $T$  expresado en coordenadas cartesianas.

#### Ejemplo 1.2

Calcular la integral de volumen  $T = xyz^2$  sobre el prisma como se muestra en la figura.



Solución:  $\int_{\mathcal{V}} (xyz^2) d\tau = \iiint (xyz^2) dx dy dz = \int_0^{1.8} z^2 \left\{ \int_0^1 y \left[ \int_0^{1-y} x dx \right] dy \right\} dz.$

### 1.1.6. Campos vectoriales e identidades en operaciones

#### Reglas de productos

$$\nabla (fg) = f (\nabla g) + g (\nabla f) \quad (1.24)$$

$$\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} \quad (1.25)$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f) \quad (1.26)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (1.27)$$

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = f (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f) \quad (1.28)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (1.29)$$

#### Segundas derivadas

Las segundas derivadas en física y en varias variables son solo tres tipos: el Laplaciano (de importancia fundamental para la electrodinámica), el gradiente de la divergencia, y el rotor del rotor. Estas son:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (1.30)$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \quad (1.31)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (1.32)$$

Derivadas más altas no tienen cabida en fenómenos físicos. Nótese la importancia de este set de ecuaciones (1.30) a (1.32), donde cantidades físicas pueden ser cero sin evaluarlas y solo dadas por definiciones matemáticas (siempre y cuando no sean cantidades indefinidas).

## 1.2. Teoremas fundamentales

Una buena fuente para revisar teoremas de cálculo vectorial son los libros: [Arfken et al. \(1999\)](#), y [Valenzuela \(2008\)](#). Matemática más avanzada y aplicada a la física del electromagnetismo puede ser encontrada en [Byron et al. \(1971\)](#).

### 1.2.1. Campos vectoriales conservativos

Sea  $\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial continuo sobre  $A$  conjunto abierto y convexo. Entonces es equivalente a:

1.  $\mathbf{F}$  es conservativo.
2. La integral de línea de  $\mathbf{F}$  es independiente del camino, es decir, sp;p depende del punto inicial y del punto final, pero es independiente del camino.
3. La integral del línea de  $\mathbf{F}$  a lo largo de cualquier camino cerrado (y regular) a trozos contenido en  $A$  vale cero.

Un campo vectorial  $\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  (con  $A$  un conjunto abierto) se dice que es conservativo si existe algún campo escalar diferenciable  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in A. \quad (1.33)$$

El campo escalar  $f$  es llamado potencial de  $\mathbf{F}$  y se dice que el campo vectorial  $\mathbf{F}$  deriva de un potencial  $f$ .

### 1.2.2. Teorema fundamental del cálculo

Sea  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  campo escalar de clase  $\zeta^1$  sobre un conjunto abierto convexo  $A$ . Sea  $\mathbf{F} = \nabla f$ , y sea  $\mathcal{C} : [a, b] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n$  cualquier curva de clase  $\zeta^1$  en secciones que une  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  en  $A$ . Es decir  $\mathcal{C}(a) = \mathbf{r}_1$ ,  $\mathcal{C}(b) = \mathbf{r}_2$ , entonces:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} = \int_{\mathcal{C}} \nabla f = f(\mathbf{r}_2) - f(\mathbf{r}_1). \quad (1.34)$$

Lo que es una generalización a integral de línea del teorema fundamental del cálculo, que para funciones integrables  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (1.35)$$

donde  $F$  es llamada la función primitiva de  $f$ . Este resultado establece que la integral de línea entre los puntos  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  del dominio de un campo vectorial  $\mathbf{F}$  es independiente de la trayectoria,  $\mathcal{C}$ , utilizada y que uno esos puntos, siempre y cuando  $\mathbf{F}$  sea un campo gradiente.

### 1.2.3. Teorema de la divergencia

Sea  $\mathcal{V}$  una región del espacio cerrada y orientada con frontera  $\mathcal{S}$ ,  $\mathbf{F}$  un campo vectorial de clase  $\zeta^1$  definido sobre  $\mathcal{S}$ , entonces:

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \mathbf{F}) d\tau. \quad (1.36)$$

Este es el teorema de la divergencia o teorema de Gauss (Johann Carl Friedrich Gauss matemático alemán 1777–1855) y que relaciona el flujo de un campo a través de la superficie de un volumen. El flujo a través de la superficie puede considerarse como el número de líneas de campo que atraviesa la superficie. El teorema de la divergencia juega un papel fundamental en el electromagnetismo, apartado 2.1.2, y nos permite calcular de forma rápida el campo eléctrico cuando la distribución de cargas posee simetría y además es una de las ecuaciones de Maxwell (apartado 2.2). Si la divergencia de un campo es cero,  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ , entonces el campo es llamado **incompresible** o **solenoidal**.

### 1.2.4. Teorema del rotor

Sea  $\mathcal{S}$  una superficie definida por una función de clase  $\zeta^2$ ,  $z = f(x, y)$ , con  $(x, y) \in D$ . Sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial de clase  $\zeta^1$  sobre  $\mathcal{S}$ . Si  $\partial\mathcal{S}$  es la frontera orientada de  $\mathcal{S}$  (que corresponde a una línea  $\mathcal{C}$ ), entonces:

$$\int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a} = \int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.37)$$

Este es el teorema del rotor o teorema de Stokes (George Stokes matemático inglés 1819–1903) y que relaciona la integral de superficie con la integral de línea. Nótese que la superficie  $\mathcal{S}$  no es cerrada. La operación  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$  significa que la superficie o fluido no tiene rotación en ese punto, y el campo  $\mathbf{F}$  es llamado **irrotacional**.

#### Ejemplo 1.3

Verificar el teorema de Stokes para un campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, x^2y, xy^2)$  sobre el cuadrado  $[0, 2] \times [0, 2]$  en el plano  $xy$ .

### 1.2.5. Teorema de Helmholtz

La formulación de las ecuaciones de Maxwell trae consigo una pregunta de definición matemática: ¿podemos definir un campo vectorial en términos de la divergencia y el rotor? La respuesta es sí, y el teorema de Helmholtz (Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz físico y matemático alemán 1821–1894) nos dice que un campo vectorial  $\mathbf{F}$  es completamente determinado por su divergencia y rotor, siempre y cuando el campo vectorial se anule en el infinito. Es decir, si conocemos  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  y  $\nabla \times \mathbf{F}$  en todo el espacio, entonces podemos determinar  $\mathbf{F}$  en todo el espacio (siempre y cuando contemos con las condiciones de frontera adecuadas). El teorema de Helmholtz es de gran importancia en electromagnetismo ya que nos permite determinar el campo eléctrico y magnético y su unicidad en todo el espacio (vea Griffiths 2017, apéndice B).

## 1.3. Coordenadas

Nos referimos a coordenadas a un sistema que utiliza vectores unitarios de modo que sean independientes entre sí y normalizados, es decir, una base ortonormal (vea Goldstein et al. 2002; Greiner 2004, capítulo 1). El más natural es un sistema de coordenado cartesiano donde, como sabemos, posee vectores unitarios  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$ . Las coordenadas son fundamentales en electromagnetismo (y la mecánica en particular), ya que una buena elección

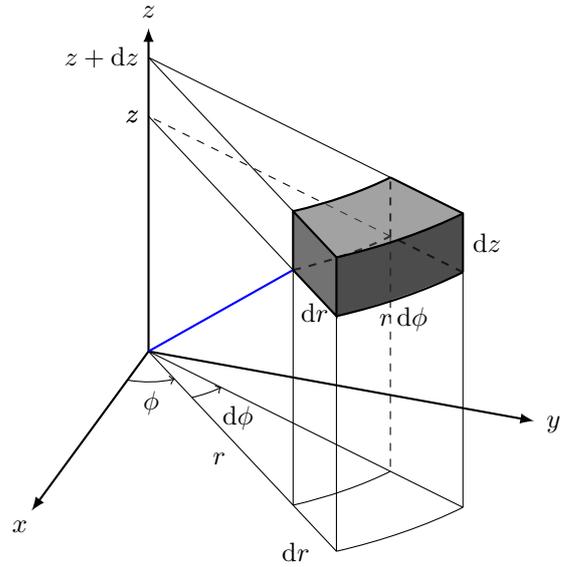


Figura 1.6: Elemento diferencial de coordenadas cilíndricas. Nótese que para el ángulo azimutal (de *azimuth*) usamos  $\phi$ , al igual que en coordenadas esféricas apartado 1.3.2.

de base permite realizar problemas de forma mucho más expedita. De forma adicional existirán muchas otras operaciones fundamentales, que quedarán de ejercicio para el lector, i.e., calcular gradientes, divergencias, y rotor (apartado 1.1.4); de estas coordenadas, las cuales deben ser utilizadas de forma constante en este curso.

### 1.3.1. Coordenadas polares

Coordenadas polares o cilíndricas,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(r, \phi, z)$ , se componen de dos transformaciones circulares y una constante, que por lo general es en el eje  $z$ . El elemento diferencial de coordenadas cilíndricas se muestra en figura 1.6. El nombre de sus componentes son distancia al eje  $z$  o componente radial  $r$ , ángulo polar  $\phi$  y la altura  $z$ , y en términos de coordenadas cartesianas es:

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \hat{\mathbf{y}}, \quad \hat{\phi} = -\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}}, \quad \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}}. \quad (1.38)$$

Diferenciales y operadores en coordenadas cilíndricas son descritos ahora. Nótese que la superficie infinitesimal dependerá de su orientación y por ende el par coordenado diferencial que se necesite (razón por la cual no aparece en la siguiente lista).

$$\text{Diferencial:} \quad d\mathbf{l} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\phi \hat{\phi} + dz \hat{\mathbf{z}}, \quad d\tau = r dr d\phi dz \quad (1.39)$$

$$\text{Gradiente:} \quad \nabla t = \frac{\partial t}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial t}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \quad (1.40)$$

$$\text{Divergencia:} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (1.41)$$

$$\text{Rotor:} \quad \nabla \times \mathbf{v} = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[ \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] \hat{\phi} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (rv_\phi) - \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{z}} \quad (1.42)$$

$$\text{Laplaciano:} \quad \nabla^2 t = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}. \quad (1.43)$$

### 1.3.2. Coordenadas esféricas

Coordenadas esféricas o esférico polares poseen radio  $r$ , ángulo polar  $\phi$ , y ángulo azimutal  $\theta$ , estas están relacionadas con coordenadas cartesianas como:

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}} \quad (1.44)$$

$$\hat{\theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta \hat{\mathbf{z}} \quad (1.45)$$

$$\hat{\phi} = -\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}} \quad (1.46)$$

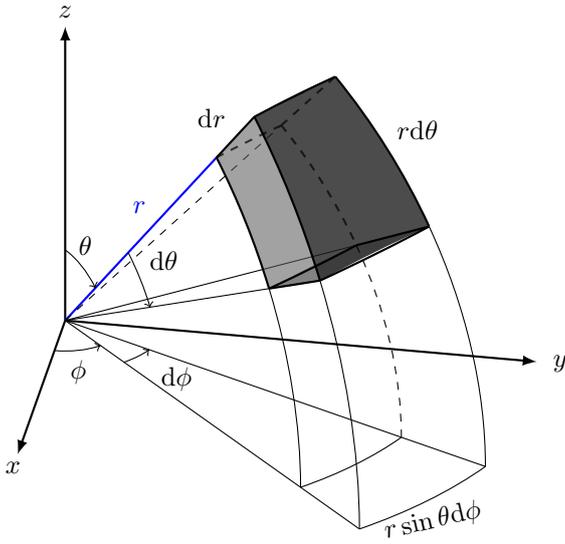


Figura 1.7: Elemento diferencial de coordenadas esféricas. La coordenada azimutal está dada por  $\phi$  y el ángulo de elevación dado por  $\theta$ .

### Atención

Coordenadas esféricas pueden ser definidas con ángulos polar y azimutal distinto (distintas ramas de la ingeniería, astronomía, y física), es decir siempre fijarse cuál es  $\theta$  y cuál es  $\phi$ . Siempre tener presente cual es el caso, ya que de caso contrario el diferencial de volumen y operadores tendrán una configuración distinta.

En electromagnetismo la simetría esférica nos ayudarán a resolver problemas de forma expedita, y en algunos casos no es necesario el desarrollo completo en coordenadas esféricas (pero ambos caminos llegan al mismo resultado). El elemento diferencial en coordenadas esféricas está en figura 1.7.

Diferenciales y operadores en coordenadas esféricas continúan:

$$\text{Diferencial:} \quad d\mathbf{l} = dr\hat{\mathbf{r}} + r d\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin\theta d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad d\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \quad (1.47)$$

$$\text{Gradiente:} \quad \nabla t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial t}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (1.48)$$

$$\text{Divergencia:} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned} \text{Rotor:} \quad \nabla \times \mathbf{v} &= \frac{1}{r} \frac{1}{r \sin\theta} \left[ \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta v_\phi - \frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} \right) \right] \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &+ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (1.50)$$

$$\text{Laplaciano:} \quad \nabla^2 t = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 t}{\partial\phi^2}. \quad (1.51)$$

También nos referiremos al diferencial de ángulo sólido como  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$  medido con unidad de sr, es decir:  $d\tau = r^2 dr d\Omega$ .

## 1.4. Distribución Delta Dirac

La distribución (y no función) Delta Dirac, es una herramienta matemática que describe una distribución de un pico infinito de área bajo la curva igual a uno (Byron et al. 1971; Bracewell 1986), figura 1.8. Desarrollada por el físico y Nobel Lauret Paul Dirac (que entre sus logros desarrolló la relatividad cuántica y predijo la existencia del positrón<sup>4</sup>), para resolver el problema de la divergencia igual a cero. Por ejemplo, consideremos

<sup>4</sup>El positrón predicho por la ecuación de Dirac fue luego observado experimentalmente por Carl David Anderson en 1932 (Anderson 1933).

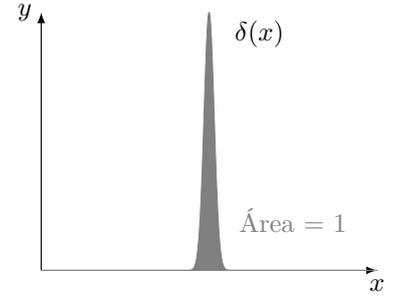


Figura 1.8: Delta Dirac  $\delta(x)$ . El área ha sido incluida de forma exagerada y es sólo una representación. El área bajo la curva de una delta de Dirac es 1, ecuación (1.53). Delta de Dirac es una función que no es continua (o mejor llamada distribución), pero que es infinitamente grande en  $x = 0$  y cero en cualquier otro punto.

la divergencia del vector  $\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla v \cdot (\hat{\mathbf{r}}/r^2) = 0$ , pero aplicando el teorema de la divergencia (apartado 1.2) se tiene que:

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = \int \left( \frac{1}{R} \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot \left( R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}} \right) = 4\pi. \quad (1.52)$$

Con  $R$  el radio de una esfera. Para solucionar esta incongruencia se define la Delta Dirac, un elemento físico-matemático desde el cual toda la divergencia viene desde un solo punto,  $r = 0$ , y  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  en cualquier otro punto del espacio. Existen muchas propiedades de la Delta Dirac, algunas de ellas son:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \neq 0, \\ \infty & \text{if } x = 0. \end{cases} \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (1.53)$$

Para una función continua  $f(x)$ , se tiene que:

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x), \quad f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a) dx = f(a). \quad (1.54)$$

Otras propiedades son discutidas en ejemplo 1.4.

#### Ejemplo 1.4

Pruebe que:

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|} \delta(x), \quad (1.55)$$

donde  $k$  es una constante ( $\neq 0$ ), en particular  $\delta(-x) = \delta(x)$ .

## 1.5. Números complejos en ciencia e ingeniería

Sistemas físicos que presentan patrones sinusoidales es posible expresarlos a través de la formula de Euler,  $e^{j\phi} = \cos \phi + j \sin \phi$ . Es decir, en vez de trabajar con expresiones matemáticas de seno y coseno, es posible trabajar simplemente con dos números, real e imaginario, y que en conjunto es un número complejo. En el caso particular de electromagnetismo, dichos números de expresiones sinusoidales,  $A \cos(\omega t + \phi)$ , son llamados campos armónicos (apartado 2.4.1).

Sea  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}$ , entonces podemos expresarlo como:

$$\mathcal{A} = A_r + jA_i, \quad \text{con} \quad A_r \equiv \text{Re}[\mathcal{A}], \quad A_i \equiv \text{Im}[\mathcal{A}], \quad (1.56)$$

entonces podemos demostrar que:

$$A \cos(\omega t + \phi) = \text{Re} \left[ A e^{j(\omega t + \phi)} \right] = \text{Re} \left[ A e^{j\phi} e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[ \mathcal{A} e^{j\omega t} \right] = A_r \cos \omega t - A_i \sin \omega t, \quad (1.57)$$

$$\text{con} \quad \mathcal{A} = A e^{j\phi} = A \cos \phi + j A \sin \phi = A_r + j A_i. \quad (1.58)$$

La cual es llamada notación fasorial (de *phasor*; Dorf 1993).

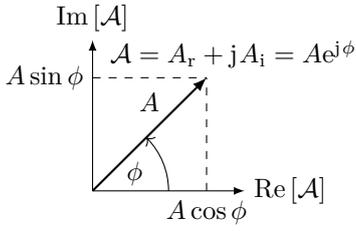


Figura 1.9: Representación de un fasor en el plano complejo. El número complejo es descrito como  $\mathcal{A}$ , su parte real e imaginaria son  $A_r$  y  $A_i$ , la amplitud y fase son  $A$  y  $\phi$ , respectivamente.

**Atención**

En libros de física/astronomía e ingeniería eléctrica la definición de número complejo varía (Staelin 2011). La onda sinusoidal está definida como:

$$A \cos(\omega t + \phi) = \text{Re} \left[ A e^{-i(\omega t + \phi)} \right], \quad \text{y} \quad A_i \equiv -A \sin \phi \quad (1.59)$$

con lo que la rotación de  $\phi$  se ve invertida. Para transformar de notación simplemente  $j \rightarrow -i$ .

También la representación de números complejos se puede realizar en términos de su magnitud de fasor  $A = \|\mathcal{A}\|$  y su fase. En general, también se cumplirán las propiedades:

$$A = \sqrt{A_r^2 + A_i^2} \quad \phi = \arctan \left( \frac{A_i}{A_r} \right) \quad (1.60)$$

El complejo conjugado será definido como una línea horizontal sobre la variable,

$$A_r = \frac{1}{2} (\mathcal{A} + \bar{\mathcal{A}}), \quad A_i = \frac{1}{2} (\mathcal{A} - \bar{\mathcal{A}}), \quad \bar{\mathcal{A}} = A_r - jA_i = A e^{-j\phi}. \quad (1.61)$$

La figura 1.9 muestra una simple representación gráfica del plano complejo en el cual se ha dibujado cada uno de los componentes imaginarios y reales. Esta representación es particularmente importante para el trabajo de impedancias (vea apartado 4.2) y su representación gráfica en la Carta de Smith (*Smith Chart*), apartado 4.4.

Otra notación usualmente usada en ingeniería es la siguiente:

$$\mathcal{A} = A_r + jA_i = A \underline{\phi} \quad (1.62)$$

donde denotamos de forma compacta la amplitud y fase del número complejo. Más aún, esta propiedad nos deja calcular raíces de números complejos mucho más rápido (algo comúnmente usado en cálculos de impedancia),

$$\sqrt{\mathcal{A}} = \pm \sqrt{A} \underline{\frac{\phi}{2} \pm n\pi} \quad (1.63)$$

donde el ángulo o fase medido en radianes (rad) puede oscilar respecto a un entero  $n \in \mathbb{Z}_0$ .



## 2. Campos electromagnéticos cuasi-estáticos y sus propiedades en materiales

La física de que gobierna el comportamiento de campos eléctricos y magnéticos variables o estáticos en el tiempo,  $t$ , están descritas por leyes empíricas (descubiertas a fines de 1800s), las que fueron relacionadas y re-definidas por James Clerk Maxwell (físico escocés 1831–1879) y ahora usadas en la notación contemporánea de Oliver Heaviside (físico y matemático inglés 1850–1925). En el siguiente capítulo estudiaremos dichas leyes y como se relacionan con materiales y sus aplicaciones (capítulos 3 a 5). Cabe destacar que la aplicación de estas ecuaciones no solo se rige a materiales sino que a todo el Universo donde su forma variará, pero las leyes quedan intactas (desde el punto de vista clásico y relativista).

El presente capítulo toma como base un primer curso en electromagnetismo ya sea como el clásico libro Griffiths (2017) o Cordero (2015)<sup>1</sup>, recomendamos al lector revisar brevemente estos conceptos antes de continuar.

### 2.1. Principios de teoría electromagnética

La base de la teoría eléctrica y magnética se basan en un conjunto de leyes empíricas (Tong 2015) recopiladas durante cientos de años. En su mayoría las leyes son aplicables en casi todos los casos incluso con variaciones en el tiempo, pero solo al unificarlas en un solo set, apartado 2.2, se desprende su naturaleza innata de las ecuaciones.

#### 2.1.1. Campos eléctricos y magnéticos

Los campos vectoriales, eléctricos estáticos y magnéticos estáticos (i.e., independientes del tiempo) serán descritos usando las letras  $E$  y  $B$ , respectivamente. Sus unidades son  $\text{V m}^{-1}$  ó  $\text{N C}^{-1}$  y  $\text{T}$  ó  $\text{Wb m}^{-2}$ . Ambos campos están descritos por coordenadas espaciales, i.e.,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(x, y, z)$  (o equivalentemente  $\mathbf{E}(r, \theta, \phi)$ ). Cuando existe una variación en el tiempo (que puede ser armónica o no, apartado 2.4.1), usaremos la notación:  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbf{r}, t)$ <sup>2</sup>.

La fuerza magnética de Lorentz (derivada por Hendrik Lorentz en 1895) describe la relación de campo magnético con una carga puntual en movimiento y como la fuerza  $\mathbf{F}_{\text{mag}}$  es generada:

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.1)$$

donde  $q$  es la carga y  $\mathbf{v}$  es la velocidad de la carga. En presencia de ambos campos eléctricos y magnéticos se tiene que:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{mag}} + q\mathbf{E} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q\mathbf{f}. \quad (2.2)$$

La fuerza en el International System of Units (SI) se mide en N, la carga en C y la velocidad en  $\text{m s}^{-1}$ . La ecuación (2.2) no es posible derivar (por lo menos con las herramientas expuestas aquí), es un hecho empírico y un axioma de la teoría del electromagnetismo (o también es usada como la definición de los campos eléctrico y magnético). También, es común en electromagnetismo hablar de la fuerza por unidad de carga,  $\mathbf{f}$ , y se mide en  $\text{N C}^{-1}$ .

En general, las cantidades medidas en laboratorio no son, directamente,  $\mathbf{E}$  ni  $\mathbf{B}$ , sino que el desplazamiento eléctrico (o campo eléctrico auxiliar)  $\mathbf{D}$  e intensidad magnética (o campo magnético auxiliar)  $\mathbf{H}$  (cuadro 2.1), que para el caso del vacío (o espacio libre) son:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (2.4)$$

<sup>1</sup>Electromagnetismo por Patricio Cordero: [https://www.cec.uchile.cl/cinetica/pcordero/todos/EM\\_E.pdf](https://www.cec.uchile.cl/cinetica/pcordero/todos/EM_E.pdf)

<sup>2</sup>Nótese que solo en ciertas ocasiones es posible descomponer los campos eléctricos y magnéticos en una multiplicación de campos dependiente de la posición y dependientes del tiempo. A esto se le llama campos armónicos.

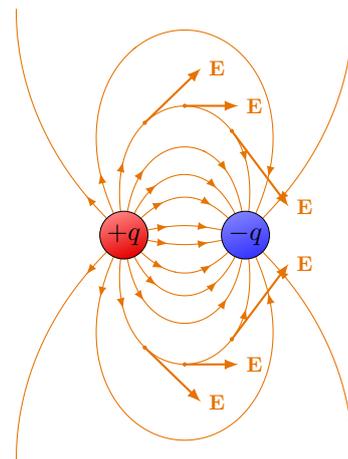


Figura 2.1: Ejemplo de un campo eléctrico estático,  $\mathbf{E}$ , generado por dos cargas  $+q$  y  $-q$ . El campo eléctrico instantáneo en algún tiempo  $t$  es siempre tangencial a las líneas de campo y su intensidad varía respecto a la densidad de líneas (viz., una línea genera un campo distinto en cada punto de su posición). Nótese que las líneas de campo solo tocan en un punto al vector de campo eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  y este siempre es tangencial a la línea.

Donde el sufijo “0” representa el espacio libre (es decir sin un medio material) y  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{M}$  la polarización y magnetización de un medio o material (apartado 2.2.3). Las constantes en frente de los campos son la permeabilidad magnética del vacío  $\mu_0$  y la permitividad eléctrica del vacío  $\epsilon_0$ <sup>3</sup>. Entendemos estas constantes como la facilidad que poseen el campo magnético y eléctrico al fluir por el vacío (o qué tan permeables son los campos), respectivamente para  $\mu_0$  y  $\epsilon_0$ . Ya que medir en laboratorio, inevitablemente, agregará polarización y magnetización, el campo eléctrico y magnético es expresado en términos de  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{H}$  (apartado 2.2.4). Constantes utilizadas a lo largo de este documento se encuentran en apéndice A.

### Líneas de campo y flujo

Una carga puntual situada en el origen de coordenadas genera un campo eléctrico de la forma<sup>4</sup>:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.5)$$

El campo vectorial generado por la carga posee líneas de campo, las cuales decrecen  $\propto r^{-2}$  a medida que nos alejamos de la carga<sup>5</sup>. Gráficamente la magnitud del campo vectorial (ya sea  $\mathbf{E}$  o  $\mathbf{B}$ ) está dada por la densidad de líneas de campo: es más fuerte cuando las líneas están más juntas. Un ejemplo de dos cargas puntuales  $+q$  y  $-q$  está en la figura 2.1, donde líneas de campo entran y salen desde la carga positiva a la carga negativa (por convención). Líneas de campo nunca se cruzan y nunca terminan en algún punto y ¡siempre van de una fuente positiva a una negativa! (aunque como ya sabemos este dependerá de la convención utilizada, i.e., flujo de corriente con movimiento de electrones en un conductor). En el caso magnético también usaremos líneas de campo y siempre saldrán del polo Sur para entrar al polo Norte.

El flujo,  $\Phi_E$ , está definido como la cantidad de líneas que atraviesan una superficie  $\mathcal{S}$ . Luego el flujo de un campo eléctrico es:

$$\Phi_E \equiv \int_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}, \quad (2.6)$$

con  $d\mathbf{a}$  el elemento diferencial de área con  $\hat{\mathbf{n}}$  perpendicular a la superficie, como se aprecia en figura 2.2. En esencia, el flujo del campo eléctrico es proporcional al número de líneas que atraviesan la porción infinitesimal de área  $d\mathbf{a}$ .

<sup>3</sup>En el vacío estas constantes son:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 4\pi \times 1 \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}, \\ \epsilon_0 &= \frac{1}{36\pi} \times 1 \times 10^{-9} \text{ F m}^{-1}. \end{aligned}$$

La permeabilidad magnética y permitividad eléctrica están directamente relacionadas con la velocidad de la luz (apartado 3.2):  $\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = \frac{1}{c}$  (Tiesinga et al. 2019).

<sup>4</sup>Donde la ecuación (2.5) ha sido derivada de forma empírica de la ley de Coulomb:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{s^2} \hat{\mathbf{s}},$$

con  $\hat{\mathbf{s}}$  el vector de separación de ambas cargas  $q_1$  y  $q_2$ .

<sup>5</sup>Lo que es llamada la radiación de algún elemento dipolar de cargas. Esta dependencia cuadrática a la menos dos no siempre aplica para sistemas reales; vea apartado 5.4.

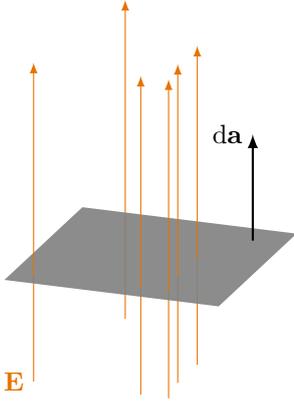


Figura 2.2: Flujo electromagnético  $\Phi_E$  del campo  $\mathbf{E}$ , atravesando una superficie con diferencial de área  $d\mathbf{a} = \hat{\mathbf{n}} da$ . Las líneas de campo no necesariamente atraviesan la superficie de forma perpendicular (a menos que sea el caso particular de un conductor apartado 2.3.1).

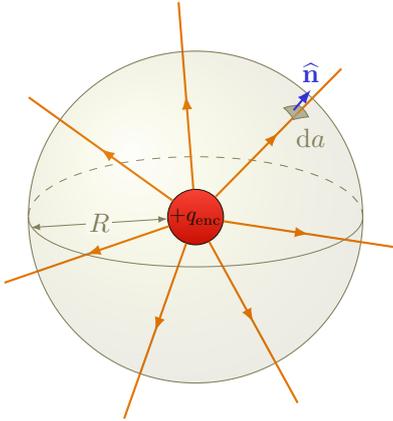


Figura 2.3: Ejemplo de esfera gaussiana de radio  $R$ . La carga  $+q_{\text{enc}}$  emite un campo constante a través de la superficie esférica de vector normal  $\hat{\mathbf{n}}$  y elemento diferencial de área  $d\mathbf{a} = \hat{\mathbf{n}} da$ . La integral del campo eléctrico está definida por la ecuación (2.8), la ley de Gauss.

## 2.1.2. Leyes fundamentales

### Ley de Gauss

Retomando las definiciones de línea de campo y flujo apartado 2.1.1, imaginemos una carga puntual  $q$  al centro de coordenadas. Luego el flujo generado por el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  a una distancia  $r$  esférica es:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot (r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}}) = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (2.7)$$

Lo que es un resultado ¡independiente de  $r$ ! Lo importante del teorema, es que no importan ni la forma ni el tamaño del volumen que engloba a la carga. Luego, el flujo a través de cualquier superficie cerrada que encierran una carga es  $\frac{q}{\epsilon_0}$ . Esto es, por supuesto, independiente de que la carga se encuentre al centro de coordenadas o de que sea la única carga en el espacio<sup>6</sup>. Luego, para cualquier superficie cerrada tenemos que:

$$\boxed{\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{enc}},} \quad (2.8)$$

con  $q_{\text{enc}}$  la carga encerrada (o *enclosed*) dentro de la superficie o “esfera gaussiana”. La figura 2.3 muestra el escenario de una carga total encerrada en una esfera gaussiana.

Nótese que la carga total puede ser descrita en términos de la densidad de carga  $\rho$ , i.e.,

$$q_{\text{enc}} = \int_V \rho d\tau, \quad (2.9)$$

<sup>6</sup>Esto es debido al principio de superposición, que al igual al vector fuerza  $\mathbf{F}$ , aplica para el campo eléctrico:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i.$$

## 2. Campos electromagnéticos cuasi-estáticos y sus propiedades en materiales

con lo que podemos expresar la ley de Gauss, ecuación (2.8), como:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \mathbf{E}) d\tau = \int_{\mathcal{V}} \left( \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) d\tau, \quad (2.10)$$

y como la relación es independiente del volumen  $\mathcal{V}$ , los integrandos deben ser iguales:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad (2.11)$$

Ecuaciones (2.8) y (2.11) son llamadas leyes de Gauss integral y diferencial. La forma diferencial tiene la ventaja de ser más compacta, pero la forma integral puede ser utilizada más naturalmente al momento de lidiar con cargas puntuales, líneas, superficies y volúmenes.

Ahora calculemos la divergencia de  $\mathbf{E}$ . Generalizando la ecuación de campo eléctrico, ecuación (2.5) (de partículas puntuales a un volumen), se obtiene la siguiente fórmula de campo eléctrico:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{s^2} \hat{\mathbf{s}} d\tau'. \quad (2.12)$$

Nótese que la dependencia de  $\mathbf{r}$  está contenida en  $\mathbf{s} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ . Por consiguiente,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int 4\pi\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d\tau' = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}). \quad (2.13)$$

Por lo que recuperamos la ley de Gauss en forma diferencial, ecuación (2.11) (también vea apartado 1.4).

Ecuación (2.11) además tiene una consecuencia importante, establece que la divergencia del campo eléctrico o equivalentemente el campo eléctrico que existe en una superficie cerrada es generado por una densidad de carga y que el origen de cargas son generadas por un monopolo eléctrico, a diferencia de ecuación (2.28).

### Ley de Biot-Savart

Recordemos la ley de Biot-Savart (solo de magnetostática, para el caso contrario se debe usar la ecuación de Jefimenko), que establece:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{s}}}{s^2} d\tau', \quad (2.14)$$

donde se destaca la relación que existe entre el campo magnético por una distribución de densidades de corriente. Si aplicamos la divergencia en la ecuación (2.14), la llamada “ley magnética de Gauss” (aunque prefiero llamar a esta ecuación sin nombre) aparece:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.15)$$

Evidentemente la divergencia de un campo magnético es cero, ecuación (2.15).

### Ley de Ampère

Nuevamente de la ecuación (2.14), es posible demostrar que el rotor del campo magnético es:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (2.16)$$

la ley de Ampère en forma diferencial. Como ya es sabido, aplicando los teoremas del cálculo (en este caso Stokes, apartado 1.2),

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.17)$$

<sup>7</sup>Queda al lector demostrar la divergencia de la cantidad  $\frac{\hat{\mathbf{s}}}{s^2}$ :

$$\nabla \cdot \left( \frac{\hat{\mathbf{s}}}{s^2} \right) = 4\pi\delta^3(\hat{\mathbf{s}}).$$

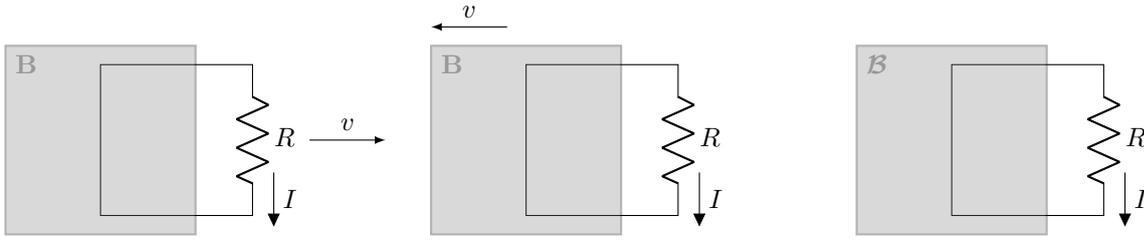


Figura 2.4.: Experimento de Faraday, de izquierda a derecha: un *loop* de alambre se mueve sobre un  $\mathbf{B}$  y genera un corriente  $I$ ; un imán con  $\mathbf{B}$  se mueve y genera una corriente  $I$  en el *loop* de alambre, finalmente un campo variable en el tiempo  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(t)$  también genera una corriente  $I$ . El concepto de resistencia será visto en apartado 2.3.1.

Nótese que la cantidad  $\int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$ , corresponde a la corriente total pasando a través de la superficie, y se le llama corriente encerrada,  $I_{\text{enc}}$ , del *amperian loop*. Luego,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \quad (2.18)$$

### Ley de Faraday

Un campo magnético que varía en el tiempo genera un campo vectorial eléctrico, viz.,

$$\oint_C \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathcal{B} \cdot d\mathbf{a}, \quad (2.19)$$

$$\oint_C \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot d\mathbf{a} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathcal{B} \cdot d\mathbf{a}, \quad (2.20)$$

$$\Rightarrow \nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = - \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \quad (2.21)$$

Donde en el paso ecuación (2.20), hemos usado el teorema de Stokes, apartado 1.2. La dependencia temporal ha sido explícitamente denotada con  $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbf{r}, t)$  (cuadro 2.1).

La ley de Faraday fué derivada por hechos empíricos por Faraday en 1831 y que han sido resumidos en la figura 2.4 (derivada de forma independiente por Michael Faraday en 1831 y Joseph Henry en 1832). De estos experimentos se obtuvo la regla para relacionar el flujo magnético,  $\Phi_B$ , y la fuerza electromagnética<sup>8</sup>. Los experimentos son listados de izquierda a derecha según figura 2.4:

- **Experimento 1:** Se Mueve un alambre (con velocidad  $v$ ) que pasa sobre un campo magnético  $\mathbf{B}$  (que en este caso es perpendicular a la hoja de libro). Luego una corriente  $I$  es generada.
- **Experimento 2:** Similar al caso anterior pero ahora el imán o el generador de campo  $\mathbf{B}$  es movido. Nuevamente una corriente  $I$  es generada.
- **Experimento 3:** En este caso no hay movimiento ni del circuito cerrado, ni del generador de campo  $\mathbf{B}$ . Un campo variable en el tiempo  $\mathcal{B}$ , nuevamente genera una corriente  $I$  en el circuito.

De este ejemplo podemos expresarlo en término de la regla de flujo.,

$$- \frac{d\Phi_B}{dt} \equiv \oint_C \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathcal{B} \cdot d\mathbf{a}. \quad (2.22)$$

Siempre que un flujo magnético atraviese un *loop* de alambre una fuerza electromagnética aparecerá.

<sup>8</sup>En otras palabras, solo importa el movimiento relativo, especialmente en términos de la relatividad especial debe ser así. Pero en los tiempos de Faraday no existía esa teoría aún, lo que conllevó a utilizar la corriente en el estudio de la física y fenómenos electromagnéticos.

## 2. Campos electromagnéticos cuasi-estáticos y sus propiedades en materiales

Nombre	Name	Variable $t$	Estático	Unidad SI
Campo eléctrico	<i>Electric field intensity</i>	$\mathcal{E}(x, y, z, t)$	$\mathbf{E}(x, y, z)$	$\text{V m}^{-1}$
Campo eléctrico auxiliar	<i>Electric flux density</i>	$\mathcal{D}(x, y, z, t)$	$\mathbf{D}(x, y, z)$	$\text{C m}^{-2}$
Campo magnético	<i>Magnetic field intensity</i>	$\mathcal{B}(x, y, z, t)$	$\mathbf{B}(x, y, z)$	T or $\text{Wb m}^{-2}$
Campo magnético auxiliar	<i>Magnetic flux density</i>	$\mathcal{H}(x, y, z, t)$	$\mathbf{H}(x, y, z)$	$\text{A m}^{-1}$
Densidad de corriente	<i>Current density</i>	$\mathcal{J}(x, y, z, t)$	$\mathbf{J}(x, y, z)$	$\text{A m}^{-2}$
Densidad de carga	<i>Volume charge density</i>	$\rho(x, y, z, t)$	$\rho(x, y, z)$	$\text{C m}^{-3}$

Cuadro 2.1.: Lista de variables ecuaciones de Maxwell estáticos y variables en el tiempo.

Es importante destacar este movimiento relativo en electrodinámica, que para los dos primeros casos de la figura 2.4 son equivalentes. La física de electricidad y magnetismo siguieron por muchos años los conceptos de la mecánica de Newton y no fue hasta la teoría de la relatividad general (Schutz 2009) de Albert Einstein (físico alemán y americano) que se pudo obtener una generalización para distintos observadores, tiempos, y movimiento relativos (Rosser 2013). La física aplicada vista en este curso no utiliza conceptos relativistas, pero estos conceptos no son ajenos en particular en telecomunicaciones y antenas capítulo 5.

### 2.1.3. Resumen de electrostática y magnetostática

Una distribución de carga estática o de una densidad de cargas puede solo construir un vector  $\mathbf{E}$  (o si estamos en presencia de un material también  $\mathbf{D}$ ). Además, cargas en movimiento, con un flujo constante  $\mathbf{J}$  producirán solo un campo  $\mathbf{B}$  (que nuevamente si existe un material entonces también un campo  $\mathbf{H}$ ). Las ecuaciones que gobiernan estos dos tipos de comportamiento están dadas por el resumen, ecuación (2.23).

$$\text{Vacío (diferencial):} \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \end{cases} \quad \text{Vacío (integral):} \begin{cases} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho \, d\tau \\ \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \\ \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \\ \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \end{cases} \quad (2.23)$$

Nótese que el set de ecuaciones tiene sus campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  (y en su efecto  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{H}$ ) como variables independientes. Es decir, cada una de las ecuaciones puede ser resuelta de forma independiente. Para campos variables en el tiempo, cuadro 2.1, veremos (apartado 2.2) que los campos electromagnéticos estarán siempre ligados (*coupled*) uno al otro (y más aún en presencia de materiales con cierto tipo de conducción,  $\sigma$ ; apartado 2.3.1).

Lista de variables de interés en electrostática y electrodinámica con sus respectivos nombre y unidades se encuentra en cuadro 2.1.

## 2.2. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell no fueron derivadas completamente de forma independiente por James Clerk Maxwell, pero se le atribuye el mérito de unificar las leyes de Gauss, Ampère y Faraday en un solo set de ecuaciones (apartado 2.1.2). Al set de ecuaciones que se definirá en esta sección se le atribuye a Oliver Heaviside, y fue él quien las escribió en su forma de cálculo vectorial moderno, i.e., razón por la cual son también llamadas las ecuaciones de **Maxwell-Heaviside**. Adicionalmente, Maxwell no solo realizó contribuciones en electrodinámica sino que también en termodinámica y mecánica estadística, como por ejemplo la distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann (Reif & Scott 1998).

Las ecuaciones de Maxwell son un resumen de las tres leyes fundamentales, descritas en apartado 2.1.2, pero que además incluyen una cuarta ley, llamada ley de Gauss magnética o simplemente sin nombre. El set aplica tanto para casos estáticos como en movimiento (electrodinámica) y dependientes del tiempo. Maxwell unificó la leyes al proponer la llamada corrección a la ley de Ampère (apartado 2.1.2; Feynman 1964),

$$\nabla \cdot \mathcal{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \nabla \cdot \mathcal{E}) = -\nabla \cdot \left( \epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right) \quad (2.24)$$

que por ese tiempo también involucraban al famoso concepto de éter (Bork 1963). Luego esta corrección queda clara en el segundo término de la ley de Ampère (corrigiendo ecuación 2.16 para un campo variable en el

tiempo):

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathcal{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}. \quad (2.25)$$

Esta corrección es también llamada la “corriente desplazada” (*displacement current*), pero cuidado que en esta definición  $\mathcal{E}$  no tiene nada que ver con la corriente  $\mathcal{J}$ . Esta corriente desplazada es definida como:

$$\mathcal{J}_d \equiv \epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}. \quad (2.26)$$

Ahora podemos reunir todas las leyes (apartado 2.1.2) en un set de ecuaciones fundamentales conocido como las ecuaciones de Maxwell. Estas leyes son ecuaciones (2.11), (2.15) y (2.21), incluyendo ecuación (2.16) más la corrección de Maxwell ecuación (2.24), entonces tenemos que:

$$(i) \quad \nabla \cdot \mathcal{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (\text{Ley de Gauss}) \quad (2.27)$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Sin nombre}) \quad (2.28)$$

$$(iii) \quad \nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Ley de Faraday}) \quad (2.29)$$

$$(iv) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathcal{J} + \mathcal{J}_d) \quad (\text{Ley de Ampère + corrección de Maxwell}) \quad (2.30)$$

A este set de ecuaciones (2.27) a (2.30) se le otorga el nombre de ecuaciones de Maxwell (de forma diferencial) ya que fue él quien unificó todas las ecuaciones en un mismo lugar, conectando eventos eléctricos y magnéticos que previamente eran considerados separados. Más aún, la llamada corrección de Maxwell en ecuación (2.30) es la prueba de genialidad más grande de Maxwell, ya que solo con argumentos teóricos (y luego demostrada de forma empírica en 1888 por Hertz) es posible llegar a una ley mas general de la electrodinámica (vea capítulo 5 Paul & Nasar 1998; capítulo 6 Jackson 1998; capítulo 7 Griffiths 2017). Sin embargo, la realización más grande de Maxwell fue describir la luz en términos de este set de ecuaciones para dar con la llamada ecuación de onda que hasta ese entonces solo se asociaba a la luz con propiedades de partícula, capítulo 3.

En palabras las ecuaciones (i), (ii), (iii) y (iv) son: (i) flujo de campo eléctrico sobre una superficie cerrada es igual a la densidad de carga encerrada, (ii) el flujo del campo magnético sobre una superficie cerrada es siempre cero (iii) la integral de línea que el campo eléctrico genera en un *loop* es igual a la variación en el tiempo del campo magnético que pasa por ese mismo *loop*, y (iv) la integral de línea que el campo magnético genera en un *loop* es igual a la corriente que atraviesa el *loop*, más la variación en el tiempo del campo eléctrico que pasa por ese mismo *loop*.

De particular importancia es la ley sin nombre ecuación (2.28). Donde el flujo magnético siempre es cero en una superficie cerrada, lo que no quiere decir que el campo magnético sea cero, al contrario, existe campo magnético pero el mismo numero de líneas de campo entra y deja la superficie siempre. Esto es una consecuencia directa de la no existencia de una fuente magnética o de monopolos magnéticos. Interpretado de otra forma es que no existe un imán de solo Norte o de solo Sur magnéticos.

En algunos libros (e.g., Feynman 1964), la relación de Ampère modificada, ecuación (2.30), también puede ser representada de la forma:

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathcal{J}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}, \quad (2.31)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. Nótese que en esta notación de ecuaciones (2.27) a (2.30) hemos dejado en claro que un campo eléctrico puede ser producido tanto por una carga ( $\rho$ ) como una variación del campo magnético en el tiempo ( $\partial \mathbf{B} / \partial t$ ), y que campos magnéticos pueden ser producidos tanto por una corriente ( $\mathcal{J}$ ) como una variación del campo eléctrico en el tiempo ( $\partial \mathcal{E} / \partial t$ ).

Dependiendo del problema a solucionar, el set de ecuaciones (2.27) a (2.30) puede o no ser indicado para resolver cierto tipo de problemas. En ciertos casos es más fácil resolver desde un punto de vista integral, para

esto aplicamos al mismo set los teoremas del cálculo (apartado 1.2), es decir:

$$(i) \quad \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, d\tau \quad (2.32)$$

$$(ii) \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (2.33)$$

$$(iii) \quad \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (2.34)$$

$$(iv) \quad \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left( \int_S \mathcal{J} \cdot d\mathbf{a} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \right) \quad (2.35)$$

donde el set de ecuaciones (2.32) a (2.35) es conocido como las ecuaciones de Maxwell de forma integral. Además de estos dos sets de ecuaciones, ecuaciones (2.27) a (2.30) y ecuaciones (2.32) a (2.35), el lector puede encontrarse con otro set adicional de ecuaciones (sin contar el set de ecuaciones en materiales, apartado 2.2.4), y en particular pueden confundir en su uso. Estas son en “unidades Gaussianas”. Las ecuaciones de Maxwell en unidades Gaussianas se basan en que las conocidas constantes de la electrodinámica  $\epsilon_0, \mu_0$ , son absorbidas dentro de las mismas ecuaciones de Maxwell. La unidad más clásica de medida de las unidades Gaussianas es la de campo magnético (que hasta el día de hoy se utiliza en ramas de la física que estudian el campo magnético terrestre), y cumple con la equivalencia de 1 G a  $1 \times 10^{-4}$  T.

### Atención

En electrodinámica (pero principalmente en teoría) las ecuaciones de Maxwell pueden ser escritas en unidades Gaussianas, que **no son SI**. El lector debe tener en cuenta que uso de estas ecuaciones va a afectar las unidades. En algunos casos su uso particular reduce el número y uso de constantes físicas lo que las hace particularmente atractivas.

El set de ecuaciones de Maxwell en unidades Gaussianas son:

$$(i) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (2.36)$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.37)$$

$$(iii) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.38)$$

$$(iv) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \left( 4\pi\mathcal{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \quad (2.39)$$

### 2.2.1. Corrientes

La corriente está definida por cargas en movimiento por cierta unidad de tiempo que van desde un punto a otro. Por definición, cargas negativas que se mueven hacia la izquierda cuentan como una carga positiva que se mueva hacia la derecha. La corriente se mide en amperes  $1 \text{ A} \equiv 1 \text{ C s}^{-1}$ . Una densidad lineal de carga la llamaremos  $\lambda$ , entonces en un alambre que transporta corriente a una velocidad  $v$ ,

$$\mathbf{I} = \lambda \mathbf{v}, \quad (2.40)$$

donde la corriente  $\mathbf{I}$  es un vector. Por lo general, en una dimensión, no es usual describir la corriente de forma vectorial (ya que es más que nada un escalar con signo), pero en condiciones de más dimensiones como  $\mathbf{J}$  si debemos describir la corriente como vector. Nosotros solo usaremos  $I$  para describir a la corriente de una dimensión.

Un análisis importante es la fuerza magnética de un segmento que transporta corriente es:

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) dq = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \lambda dl = \int (\mathbf{I} \times \mathbf{B}) dl = I \int (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}), \quad (2.41)$$

Nombre	Name	Símbolo	Unidad SI
Carga eléctrica	<i>Electric charge</i>	$q$	C
Densidad de carga lineal	<i>Linear charge density</i>	$\lambda$	$\text{C m}^{-1}$
Densidad de carga superficial	<i>Surface charge density</i>	$\sigma$	$\text{C m}^{-2}$
Densidad de carga (volumétrica)	<i>Charge density</i>	$\rho$	$\text{C m}^{-3}$
Corriente (eléctrica)	<i>Electric current</i>	$I$ ó $\mathbf{I}$	A
Densidad de corriente superficial	<i>Surface current density</i>	$\boldsymbol{\kappa}$	$\text{A m}^{-1}$
Densidad de corriente (volumétrica)	<i>Current density</i>	$\mathbf{J}$	$\text{A m}^{-2}$

Cuadro 2.2.: Lista de densidades de carga y de corriente.

que en el último paso asumimos que la corriente es constante a lo largo del segmento (lo que es bien común en el caso ingenieril).

Cuando la corriente fluye sobre una superficie la podemos describir en términos de la densidad de corriente superficial  $\boldsymbol{\kappa}$ . Consideremos una cinta de ancho infinitesimal  $dl_{\perp}$  que recorre la superficie en el mismo sentido que el flujo de corriente. La corriente en la cinta posee una densidad de corriente superficial de la forma:

$$\boldsymbol{\kappa} \equiv \frac{d\mathbf{I}}{dl_{\perp}}, \quad (2.42)$$

lo que en otras palabras es que  $\boldsymbol{\kappa}$  es la corriente por unidad de longitud perpendicular al flujo. En particular, si la densidad de carga superficial es conocida, entonces:

$$\boldsymbol{\kappa} = \sigma \mathbf{v}, \quad (2.43)$$

aunque  $\boldsymbol{\kappa}$  variará de punto a punto en una superficie, y que se verá reflejado en la densidad de carga superficial  $\sigma$ . De forma similar ahora podemos calcular la fuerza magnética:

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \sigma da = \int (\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{B}) da. \quad (2.44)$$

Finalmente en el caso tridimensional describimos la densidad de corriente volumétrica (o simplemente densidad de corriente)  $\mathbf{J}$ . Consideremos un tubo de área de *cross-section*  $da_{\perp}$  que recorre un volumen y que es paralelo al flujo de corriente. Si la corriente en el tubo es  $d\mathbf{I}$ , entonces:

$$\mathbf{J} \equiv \frac{d\mathbf{I}}{da_{\perp}}. \quad (2.45)$$

Donde  $\mathbf{J}$  también puede ser descrito como la corriente por unidad de área perpendicular al flujo. Si la densidad de carga es conocida,  $\rho$ , entonces:

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}. \quad (2.46)$$

En este caso la fuerza magnética es:

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rho d\tau = \int (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) d\tau. \quad (2.47)$$

Hemos definido varias nuevas variables, para recordar fácilmente usemos la siguiente relación:

$$\sum_i (\dots) q_i \mathbf{v}_i \sim \int (\dots) \mathbf{I} dl \sim \int (\dots) \boldsymbol{\kappa} da \sim \int (\dots) \mathbf{J} d\tau, \quad (2.48)$$

lo que análogamente es:  $q \sim \lambda dl \sim \sigma da \sim \rho d\tau$  para los varios tipos de distribución de carga las cuales generan las ecuaciones (2.41), (2.44) y (2.47) de la ley de Lorentz original, ecuación (2.1) (vea Griffiths 2017, capítulo 5). Un resumen de todas estas variables se encuentra en cuadro 2.2.

### 2.2.2. Continuidad

Desde la ecuación (2.45) podemos escribir la corriente cruzando una superficie  $\mathcal{S}$  como:

$$I = \int_{\mathcal{S}} J da_{\perp} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}. \quad (2.49)$$

## 2. Campos electromagnéticos cuasi-estáticos y sus propiedades en materiales

Más aún, la carga total por unidad de tiempo que deja un volumen  $\mathcal{V}$  es

$$\oint_S \mathcal{J} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \mathcal{J}) d\tau. \quad (2.50)$$

Donde hemos agregado la dependencia temporal en la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  (cuadro 2.1). Ya que la densidad de carga se conserva, cualquier flujo que exista en la superficie debe estar conectado al volumen interior,

$$\int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \mathcal{J}) d\tau = - \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho d\tau = - \int_{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau, \quad (2.51)$$

con el signo menos indicando que un flujo hacia afuera disminuye la cantidad de carga en  $\mathcal{V}$ . Dado que esto aplica para cualquier volumen, entonces se tiene que:

$$\nabla \cdot \mathcal{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.52)$$

Lo cual corresponde a la expresión matemática exacta de conservación de la carga, el flujo de corriente sobre una superficie cerrada es igual a la variación en el tiempo de la carga encerrada, y es llamada la ecuación de continuidad. Adicionalmente, la ecuación de continuidad, puede ser obtenida naturalmente del set de ecuaciones (2.27) a (2.30). Simplemente aplicando la divergencia en ecuación (2.30) se puede llegar a ecuación (2.52).

### 2.2.3. Polarización y magnetización macroscópica

Entiéndase por polarización y magnetización macroscópica como el efecto que le sucede a un material o medio al ser expuesto a campos eléctricos y/o magnéticos (que por ahora consideraremos en el caso estático). Este comportamiento tiene sus orígenes en la teoría atómica de la materia, pero que puede ser aproximado a cantidades macroscópicas (que se comportan relativamente bien para materiales comunes). La mayoría de los materiales con los cuales interactuamos día a día (en una muy buena aproximación) son de uno de los dos tipos: **conductores** o aislantes (o **dieléctricos**), apartado 2.3. Un conductor es aquel que posee una fuente ilimitada de cargas que pueden moverse libremente en el material. Por otro lado, un dieléctrico no posee cargas libres, es decir todas sus cargas están fuertemente ligadas a átomos o moléculas.

#### Polarización

¿Qué pasa cuando un material dieléctrico es expuesto a un campo eléctrico? Si el material está compuesto de átomos o moléculas neutras, el campo eléctrico inducirá un pequeño momento dipolar que apunta en la misma dirección del campo eléctrico aplicado (efecto llamado en inglés *polarizability*). Ahora, si el material está compuesto de moléculas bipolares (e.g., como la molécula de agua), entonces las moléculas del material experimentarán un torque o momento que tenderá a alinearlas con el campo eléctrico aplicado. Nótese que a temperaturas elevadas, donde existen mucho movimiento aleatorio (*random thermal motions*), un campo externo aplicado tendrá que competir con este movimiento aleatorio y su alineamiento nunca será completo.

#### Atención

El concepto de “polarización” también puede ser referido en temas de antenas (apartado 5.4.1) y en polarización de la luz (apartado 3.5). Esto hace referencia a la propiedad de la luz de vibrar en un plano determinado. Lo que discutimos aquí es solo en materiales, la polarización de un dieléctrico, y como sus cargas se reordenan en presencia de un campo eléctrico externo.

Entonces tenemos que ambos mecanismos producen un efecto similar: muchos pequeños dipolos apuntando en la dirección del campo externo aplicado, es decir, el material se polariza. Definimos entonces:

$$\mathbf{P} \equiv \text{momento dipolar por unidad de volumen}$$

la cantidad vectorial llamada polarización. Por ahora, el lector no debe preocuparse como es que esta polarización se formó. En general,  $\mathbf{P}$  es la combinación macroscópica de todos los dipolos eléctricos,  $\mathbf{p}$  (apartado 2.3.2), del material. Usamos la definición de potencial escalar (apartado 2.4.4) de un dipolo como:

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{p}}{s^2}, \quad (2.53)$$

entonces para la polarización se tiene que:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{s^2} d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\mathcal{S}} \frac{\sigma_b}{s} da' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho_b}{s} d\tau', \quad (2.54)$$

donde hemos expandido la cantidad solo aplicando reglas matemáticas del gradiente y gradiente primado ( $\nabla'$ ). Ecuación (2.54) implica que el potencial (o equivalentemente el campo eléctrico) de un objeto polarizado es el mismo producido por una densidad de carga  $\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}$  más la densidad de carga superficial  $\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$  (con  $\hat{\mathbf{n}}$  el vector unitario perpendicular a la superficie del material). La letra  $b$  hace referencia a la carga atrapada o *bound* (o en efecto que no es libre) y que no es generada por un efecto adicional al material.

### Magnetización

Similarmente al caso de polarización, un material puede ser representado, macroscópicamente, por la suma total de pequeños dipolos magnéticos. Aquí existirán distintos tipos de comportamiento que serán analizados en apartado 2.3.3. De cualquier origen que tenga la magnetización del material esta será cuantificada como una cantidad macroscópica como:

$$\mathbf{M} \equiv \text{momento magnético dipolar por unidad de volumen} \quad (2.55)$$

Donde  $\mathbf{M}$  es llamada la magnetización. En general,  $\mathbf{M}$  es una combinación macroscópica de todos los dipolos magnéticos,  $\mathbf{m}$ , del material. Usamos la definición de potencial vectorial de un dipolo como:

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{s}}}{s^2}. \quad (2.56)$$

Entonces para la magnetización se tiene que:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{s}}}{s^2} d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{J}_b(\mathbf{r}')}{s} d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{S}} \frac{\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}')}{s} da'. \quad (2.57)$$

Lo que significa que el potencial vectorial de un objeto magnetizado es igual a lo producido por una corriente  $\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M}$  en el material más la corriente superficial  $\boldsymbol{\kappa}_b = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$  en la frontera (del mismo material).

Nótese que tanto la polarización como la magnetización del material pueden depender del tiempo, es decir serán variables del tipo:  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{M}$ , respectivamente. Estos casos de electrostática y magnetostática son descritos en detalle en Griffiths (2017), capítulos 4 y 6.

### 2.2.4. Ecuaciones de Maxwell en materiales

Hasta ahora hemos visto las ecuaciones de Maxwell, ecuaciones (2.27) a (2.30), solo en el vacío, esto es cuando las propiedades del medio cumplen exactamente con  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$ ; y que son aplicables correctamente en cualquier tipo de situación (situaciones clásicas, es decir, problemas del día a día; con excepción de efectos relativistas y/o cuánticos). Sin embargo, al trabajar con materiales, que están sujetos a efectos de campos eléctricos y magnéticos (y por ende sufren polarización eléctrica y magnética; apartado 2.2.3) existe una forma más conveniente de expresar a las ecuaciones de Maxwell. Esto es debido a que existen cantidades en las cuales no podemos ejercer control en laboratorio, por ejemplo cargas atrapadas o *bound* de un material polarizado. Hay un caso que hasta ahora no hemos considerado, que el cambio en el tiempo de la polarización eléctrica ( $\mathbf{P} \rightarrow \mathcal{P}$ ) generará un nuevo flujo de carga, es decir una corriente de origen de polarización,  $\mathcal{J}_p$ . Entonces tenemos que:

$$\mathcal{J}_p = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t}. \quad (2.58)$$

Nótese que esta densidad de corriente no es la corriente atrapada,  $\mathcal{J}_b$  (la cual se origina en la magnetización del material). Considerando ahora la expansión propuesta en apartado 2.2.3,

$$\nabla \cdot \mathcal{J}_p = \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathcal{P}) = -\frac{\partial \rho_b}{\partial t}, \quad (2.59)$$

además,

$$\rho = \rho_f + \rho_b = \rho_b - \nabla \cdot \mathcal{P}, \quad (2.60)$$

## 2. Campos electromagnéticos cuasi-estáticos y sus propiedades en materiales

y expresamos la densidad de corriente en sus tres componentes:

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_f + \mathcal{J}_b + \mathcal{J}_p = \mathcal{J}_f + \nabla \times \mathcal{M} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t}. \quad (2.61)$$

Donde hemos agregado la magnetización  $\mathbf{M}$  pero ahora dependiente del tiempo  $\mathcal{M}$ . También podemos escribir la ley de Gauss para materiales (brevemente vista en apartado 2.1.1), como:

$$\nabla \cdot \mathcal{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot \mathcal{P}), \quad (2.62)$$

o

$$\nabla \cdot \mathcal{D} = \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathcal{E} + \mathcal{P}) = \rho_f. \quad (2.63)$$

donde hemos definido

$$\mathcal{D} \equiv (\epsilon_0 \mathcal{E} + \mathcal{P}). \quad (2.64)$$

Por otro lado, la ecuación de Maxwell (iv), ecuación (2.30), la describimos como:

$$\nabla \times \mathcal{B} = \mu_0 \left( \mathcal{J}_f + \nabla \times \mathcal{M} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} \right) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \quad (2.65)$$

o

$$\nabla \times \mathcal{H} = \mathcal{J}_f + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}, \quad (2.66)$$

donde hemos usado la definición:

$$\mathcal{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathcal{B} - \mathcal{M}. \quad (2.67)$$

La ley de Faraday y la ley sin nombre, ecuaciones (2.28) y (2.29), no son afectadas por esta separación de partes libres y atrapadas (*free* y *bound*) que involucran a las densidades  $\rho$  y  $\mathcal{J}$ .

Entonces podemos escribir las ecuaciones de Maxwell, en materiales, y en términos de cargas y corrientes libres como:

$$(i) \quad \nabla \cdot \mathcal{D} = \rho_f \quad (\text{Ley de Gauss}) \quad (2.68)$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \mathcal{B} = 0 \quad (\text{Sin nombre}) \quad (2.69)$$

$$(iii) \quad \nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \quad (\text{Ley de Faraday}) \quad (2.70)$$

$$(iv) \quad \nabla \times \mathcal{H} = \mathcal{J}_f + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \quad (\text{Ley de Ampère + corrección de Maxwell}) \quad (2.71)$$

Nótese que el set de ecuaciones de Maxwell ecuaciones (2.68) a (2.71), físicamente, representa exactamente al mismo set de las ecuaciones (2.27) a (2.30) y **no** es más general que el ya mostrado anteriormente. Además este nuevo set trae la desventaja de que contiene cuatro variables de campo a encontrar  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{H}$  en términos de  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{B}$ , los cuales a su vez dependerán de la naturaleza del material. Finalmente, las ecuaciones (2.68) a (2.71)

pueden ser expresadas en términos de integrales:

$$(i) \quad \oint_S \mathcal{D} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \rho_f d\tau \quad (2.72)$$

$$(ii) \quad \oint_S \mathcal{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (2.73)$$

$$(iii) \quad \oint_C \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathcal{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (2.74)$$

$$(iv) \quad \oint_C \mathcal{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathcal{J}_f \cdot d\mathbf{a} + \frac{d}{dt} \int_S \mathcal{D} \cdot d\mathbf{a} \quad (2.75)$$

Nuevamente el set, ecuaciones (2.72) a (2.75), es físicamente el mismo al mostrado en ecuaciones (2.32) a (2.35), pero escrito de forma más conveniente para su uso en materiales.

### 2.2.5. Propiedades constitutivas del medio

En el set de ecuaciones (2.68) a (2.71) contienen 12 elementos a encontrar, e.g., cada componente de los campos  $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z$ , por lo que para poder resolver el sistema necesitamos información adicional. A esta información extra se le conoce como ecuaciones constitutivas del medio, y tienen la forma de:

$$\mathcal{D} = f_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}), \quad (2.76)$$

$$\mathcal{B} = f_{\mathcal{B}}(\mathcal{H}). \quad (2.77)$$

Donde cada una de estas ecuaciones dará 6 ecuaciones extra. Las funciones  $f_{\mathcal{D}}$  y  $f_{\mathcal{B}}$  están determinadas por el medio. Si también consideramos la corriente como un parámetro adicional, entonces tendremos otras 3 incógnitas más a resolver ( $\mathcal{I} = f_{\mathcal{I}}(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ ). Todo el análisis subsiguiente que relacione las ecuaciones constitutivas será considerando un medio del tipo **lineal**, **homogéneo** e **isotrópico**, esto es:

$$\mathcal{D} = \epsilon \mathcal{E}, \quad (2.78)$$

$$\mathcal{B} = \mu \mathcal{H}, \quad (2.79)$$

$$\mathcal{J} = \sigma \mathcal{E}. \quad (2.80)$$

Aquí consideraremos las variables  $\epsilon$  (permitividad),  $\mu$  (permeabilidad), y  $\sigma$  (conductividad; será visto en apartado 2.3.1) como constantes. Aunque su comportamiento, por lo general variará al cambiar varias magnitudes de frecuencia  $\nu$  (por ejemplo de una onda magnética), e.g.,  $\epsilon = \epsilon(\nu)$ .

Un medio lineal (*linear media*) es el cual cumple con que sus campos o variables crecen de forma proporcional entre ellos, como ecuación (2.78), donde solo existe una constante de proporcionalidad  $\epsilon$  entre ambos valores. En la caso no lineal (*nonlinear media*), existirá una ley que no cumpla con esto (i.e., cuadrática, cúbica, u otra), viz., la curva de histéresis de materiales ferromagnéticos (apartado 2.3.3). Uno de los casos más estudiados no lineal corresponde a *nonlinear optics* (Sorokin 2022; Shabad & Usov 2011; Peres 1961; Landau & Lifshitz 1960), el estudio de la polarización  $\mathcal{P}$  y su relación no lineal con  $\mathcal{E}$ . La no linealidad es típicamente observada cuando la intensidad del campo eléctrico es alta,  $\sim 1 \times 10^{11} \text{ V m}^{-1}$  (comparable a la energía de un núcleo atómico). Efectos no lineales son modelados, por ejemplo en un dieléctrico, a través de una expansión de Taylor:

$$\mathcal{P}(t) = \epsilon_0 \left( \chi_e^{(1)} \mathcal{E}(t) + \chi_e^{(2)} \mathcal{E}^2(t) + \chi_e^{(3)} \mathcal{E}^3(t) + \dots \right), \quad (2.81)$$

donde los coeficientes  $\chi_e^{(i)}$  son la susceptibilidad del medio factor  $i$ -ésimo.

Un medio isotrópico (*isotropic media*) es el cual cuenta con que los campos  $\mathcal{D}$  es paralelo a  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{B}$  es paralelo a  $\mathcal{H}$ , y  $\mathcal{I}$  es paralelo a  $\mathcal{E}$ . Un medio anisotrópico (*anisotropic media*) tendría cada uno de sus componentes,

## 2. Campos electromagnéticos cuasi-estáticos y sus propiedades en materiales

por ejemplo, de  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{E}$  relacionado con una matriz de  $[\epsilon]_{3 \times 3}$ , y relacionada  $\mathcal{D} = [\epsilon] \mathcal{E}$ , expandiendo:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{D}_x \\ \mathcal{D}_y \\ \mathcal{D}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{bmatrix}. \quad (2.82)$$

Un medio homogéneo (*homogeneous media*) es el cual posee las mismas propiedades punto a punto. Un medio inhomogéneo (*inhomogeneous media*), tendrá propiedades distintas en puntos distintos, es decir las constantes  $\epsilon, \mu, \sigma$  dependerán de  $(x, y, z)$ , e.g.,  $\epsilon = \epsilon(x, y, z)$ . El medio no solo puede ser caracterizado a través de la permitividad y permeabilidad sino también a través de las definiciones ecuaciones (2.64) y (2.67).

Para caracterizar el medio en el que estamos trabajando utilizamos las constantes  $\epsilon, \mu$ , pero además de ellas también lo podemos hacer respecto a las variables de polarización y magnetización:

$$\mathcal{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathcal{E}, \quad (2.83)$$

$$\mathcal{M} = \chi_m \mathcal{H}. \quad (2.84)$$

Con las constantes  $\chi_e$  y  $\chi_m$  la susceptibilidad eléctrica y magnética, respectivamente, que están nuevamente relacionadas con la permitividad y permeabilidad del material,

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e) = \epsilon_0 \epsilon_r, \quad (2.85)$$

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) = \mu_0 \mu_r. \quad (2.86)$$

Similar es el caso al comportamiento anisotrópico en donde las cantidades  $[\chi_e]$  y  $[\chi_m]$  pueden ser matrices, e.g., para el caso de ecuación (2.83),

$$\mathcal{P}_x = \epsilon_0 \left( \chi_{e_{xx}} \mathcal{E}_x + \chi_{e_{xy}} \mathcal{E}_y + \chi_{e_{xz}} \mathcal{E}_z \right) \quad (2.87)$$

$$\mathcal{P}_y = \epsilon_0 \left( \chi_{e_{yx}} \mathcal{E}_x + \chi_{e_{yy}} \mathcal{E}_y + \chi_{e_{yz}} \mathcal{E}_z \right) \quad (2.88)$$

$$\mathcal{P}_z = \epsilon_0 \left( \chi_{e_{zx}} \mathcal{E}_x + \chi_{e_{zy}} \mathcal{E}_y + \chi_{e_{zz}} \mathcal{E}_z \right). \quad (2.89)$$

Las cantidades con el subíndice  $r$  son llamadas relativas y no es nada más que el ratio respecto a la constante del material y del vacío. Estas cantidades serán vistas en apartados 2.3.2 y 2.3.3.

Ejemplos de propiedades de materiales son: un material es lineal si sus susceptibilidades  $\chi_e$  y  $\chi_m$ , son independientes de los campos aplicados; un material es isotrópico si  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{E}$ , y  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{B}$ , poseen la misma dirección; y un material es homogéneo si sus propiedades son independientes de la posición en el espacio, i.e.,  $\chi_e$  y  $\chi_m$  son independientes de la posición.

Finalmente podemos escribir la forma final de las ecuaciones de Maxwell, para un medio **lineal, homogéneo** e **isotrópico** (que serán la mayoría de las aplicaciones durante este curso), luego tenemos en forma diferencial:

$$(i) \quad \nabla \cdot \mathcal{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon} \quad (\text{Ley de Gauss}) \quad (2.90)$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \mathcal{H} = 0 \quad (\text{Sin nombre}) \quad (2.91)$$

$$(iii) \quad \nabla \times \mathcal{E} = -\mu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \quad (\text{Ley de Faraday}) \quad (2.92)$$

$$(iv) \quad \nabla \times \mathcal{H} = \sigma \mathcal{E} + \epsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \quad (\text{Ley de Ampère + corrección de Maxwell}) \quad (2.93)$$

y en forma integral:

$$(i) \quad \oint_S \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon} \int_V \rho_f d\tau \quad (2.94)$$

$$(ii) \quad \oint_S \boldsymbol{\mathcal{H}} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (2.95)$$

$$(iii) \quad \oint_C \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot d\mathbf{l} = -\mu \frac{d}{dt} \int_S \boldsymbol{\mathcal{H}} \cdot d\mathbf{a} \quad (2.96)$$

$$(iv) \quad \oint_C \boldsymbol{\mathcal{H}} \cdot d\mathbf{l} = \sigma \int_S \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot d\mathbf{a} + \epsilon \frac{d}{dt} \int_S \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot d\mathbf{a} \quad (2.97)$$

Ambas secciones, ecuaciones (2.90) a (2.93) y ecuaciones (2.94) a (2.97), solo están expresada en términos de dos de los cuatro campos originales,  $\boldsymbol{\mathcal{E}}$  y  $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ , con los cuales es posible determinar por completo el sistema. En general, expresaremos soluciones a problemas con solo estos dos campos, asumiendo condiciones de linealidad, homogeneidad e isotropía, el sistema queda representado completamente con solo el campo eléctrico y el campo magnético auxiliar. Sin embargo, en algunos casos, es más conveniente trabajar con los campos  $\boldsymbol{\mathcal{D}}$  y  $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ , por ejemplo, cuando se trabaja con materiales dieléctricos y magnéticos, respectivamente. De particular interés será el uso de ecuaciones (2.90) a (2.93) en propagación de ondas electromagnéticas (tanto para ondas confinadas como para libres o en le espacio) ya que son ambos campos con los cuales la onda queda completamente representada, capítulo 3.

### Ejemplo 2.1

Pruebe que el siguiente set de campos cumple con las ecuaciones de Maxwell, considerando que los campos se encuentra en el espacio libre. (Adaptado de Paul & Nasar 1998; *Example 5.4*).

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= E_0 \cos(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{x}} \\ \mathcal{H} &= \frac{E_0}{\eta} \cos(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{y}}.\end{aligned}$$

Solución: Cuando la condición de espacio libre es explícitamente señalada entonces se tiene que:  $\mu = \mu_0$ ,  $\epsilon = \epsilon_0$  y  $\sigma = \rho = \mathcal{J} = 0$ . De la ley de Faraday, ecuación (2.92), se tiene

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathcal{E} &= \mu_0 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} \hat{\mathbf{y}} &= \mu_0 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \\ \beta E_0 \sin(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{y}} &= \frac{\omega \mu_0 E_0}{\eta} \sin(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{y}}.\end{aligned}$$

Entonces las constantes deben cumplir con la condición:

$$\beta = \frac{\omega \mu_0}{\eta}.$$

Continuamos con la ley de Ampère, ecuación (2.93),

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathcal{H} &= \mathcal{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \\ -\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z} \hat{\mathbf{x}} &= \epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \\ -\frac{\beta E_0}{\eta} \sin(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{x}} &= -\omega \epsilon_0 E_0 \sin(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{x}},\end{aligned}$$

por lo que nuevamente las constantes deben estar en una igualdad,

$$\beta = \omega \epsilon_0 \eta, \Rightarrow \eta = \pm \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}},$$

y consecuentemente  $\beta = \pm \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ . Para las últimas dos leyes, ecuaciones (2.94) y (2.95), dependen de la divergencia, operando sobre derivadas espaciales y nuestros campos  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(t)$  y  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t)$ , dependen exclusivamente de la variable tiempo, por lo que se cumplen todas las ecuaciones de Maxwell, siempre y cuando  $\eta = \pm \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ .

### 2.2.6. Condiciones de frontera

El comportamiento de campos al estar en contacto con un medio distinto, es en práctica, similar a lo que ocurre en el caso de electro- y magnetostática. Para esto usemos la figura 2.5, donde tenemos dos medios, 1 y 2. Aplicamos entonces la ley de Faraday de forma integral, ecuación (2.74),

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathcal{B} \cdot d\mathbf{a},$$

donde hemos dibujado un *loop*  $\mathcal{C}$  (parte en el medio 1 y 2) que posee dimensiones de largo y alto,  $\Delta l$  y  $\Delta h$ , respectivamente.

Si hacemos que el alto tienda a cero,  $\Delta h \rightarrow 0$ , entonces la superficie se vuelve cero,

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} \rightarrow 0, \quad (2.98)$$

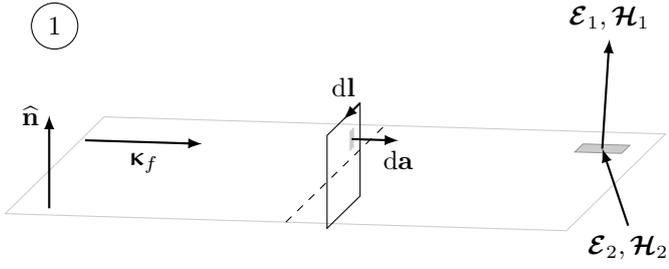


Figura 2.5: Ilustración de condiciones de frontera para los componentes tangenciales o paralelos a la superficie de interfaz entre los medios 1 y 2.

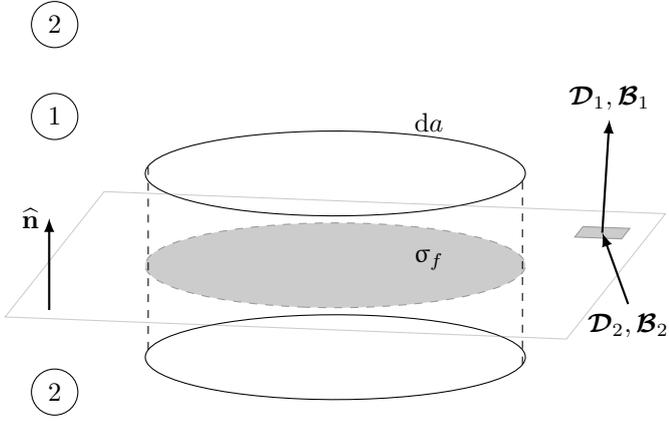


Figura 2.6: Ilustración de condiciones de frontera para los componentes normales o perpendiculares a la superficie de interfaz entre los medios 1 y 2.

lo cual se vuelve idéntico al caso electrostático. Consecuentemente tenemos que:

$$\mathcal{E}_1^{\parallel} - \mathcal{E}_2^{\parallel} = 0$$

donde  $\parallel$  representa la componente del campo eléctrico paralela a la interfaz entre ambos medios. Similarmente, si aplicamos ahora la ley de Ampère, ecuación (2.75),

$$\oint_C \mathcal{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathcal{J} \cdot d\mathbf{a} + \frac{d}{dt} \int_S \mathcal{D} \cdot d\mathbf{a}.$$

Aplicando el mismo límite,

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathcal{D} \cdot d\mathbf{a} \rightarrow 0, \quad (2.99)$$

entonces se tiene el caso exacto a la magnetostática,

$$\mathcal{H}_1^{\parallel} - \mathcal{H}_2^{\parallel} = \kappa_f \times \hat{\mathbf{n}}. \quad (2.100)$$

Donde nuevamente el campo es la descomposición paralela a la superficie de interfaz. Dependiendo de como sea definido el vector  $\hat{\mathbf{n}}$ , la resta puede variar. Por último, las condiciones restantes de la ley de Gauss y la ley sin nombre, ecuaciones (2.72) y (2.73), no cambian al igual que el caso estático. Las condiciones normales a la superficie de interfaz están en figura 2.6.

Entonces tenemos que las condiciones de frontera para un medio lineal, isotrópico y homogéneo son:

$$(i) \quad \epsilon_1 \mathcal{E}_1^{\perp} - \epsilon_2 \mathcal{E}_2^{\perp} = \sigma_f \quad (2.101)$$

$$(ii) \quad \mathcal{H}_1^{\perp} - \mathcal{H}_2^{\perp} = 0 \quad (2.102)$$

$$(iii) \quad \mathcal{E}_1^{\parallel} - \mathcal{E}_2^{\parallel} = 0 \quad (2.103)$$

$$(iv) \quad \mathcal{H}_1^{\parallel} - \mathcal{H}_2^{\parallel} = \kappa_f \times \hat{\mathbf{n}} \quad (2.104)$$

Nótese que nuevamente hemos dejado explícita la dependencia solo en  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{H}$ .

### Condiciones de frontera para conductores perfectos

Un caso particular de interés es el de un conductor perfecto, el cual es un medio con  $\sigma = \infty$ . La permeabilidad y la permitividad poseen valores finitos del material,  $\epsilon$  y  $\mu$ . Usaremos el término conductor perfecto para referirnos a su conductividad y **no** a conductores que a muy bajas temperaturas pierden resistividad, llamados superconductores (Tinkham & Wheatley 1976). Para un campo variable en el tiempo  $\mathcal{E}$  dentro de un conductor perfecto,  $\mathcal{E} = 0$ . Entonces  $\sigma = \mathcal{I}/\mathcal{E} \rightarrow \infty$ . Si  $\mathcal{I}$  es infinito entonces significaría que la carga se mueve infinitamente rápido, lo cual es imposible. Considerando la ley de Faraday, ecuación (2.69), se tiene que  $\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = 0$ , es decir un campo magnético variable en el tiempo dentro de un conductor perfecto es cero. Un conductor perfecto es un medio en el cual los campos eléctrico y magnético son cero,  $\mathcal{E} = \mathcal{H} = 0$ . Por lo tanto dentro de un conductor perfecto, todos los campos variables en el tiempo son cero, y el campo eléctrico estático también es cero. Supongamos ahora que existen dos medios diferentes y el medio 1 corresponde a un conductor perfecto ( $\sigma_1 = \infty$ ), entonces las condiciones de frontera, ecuaciones (2.101) a (2.104), se reducen a:

$$\epsilon_2 \mathcal{E}_2^\perp = \sigma_f, \quad \mathcal{H}_2^\perp = 0, \quad \mathcal{E}_2^\parallel = 0, \quad \mathcal{H}_2^\parallel = \kappa_f \times \hat{\mathbf{n}}. \quad (2.105)$$

### Condiciones de frontera para otros medios

Supongamos ahora que tenemos dos medios y que ambos poseen una conductividad finita. En este caso la corriente no podrá solo existir en un medio y atravesará de un medio al otro. Las condiciones de frontera entonces serán, ecuaciones (2.101) a (2.104), para medios de conductividad finita  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ :

$$\epsilon_1 \mathcal{E}_1^\perp - \epsilon_2 \mathcal{E}_2^\perp = \sigma_f, \quad \mathcal{H}_1^\perp = \mathcal{H}_2^\perp, \quad \mathcal{E}_1^\parallel = \mathcal{E}_2^\parallel, \quad \mathcal{H}_1^\parallel = \mathcal{H}_2^\parallel. \quad (2.106)$$

Nótese que en el caso de que tengamos dos materiales dieléctricos perfectos, i.e.,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ , no existirá una corriente superficial  $\sigma_f$ , con lo que la condición (i) del campo eléctrico será:

$$\mathcal{E}_1^\perp = \mathcal{E}_2^\perp, \quad \text{con } \sigma_1 = \sigma_2 = 0. \quad (2.107)$$

### 2.2.7. Vector de Poynting

La pregunta natural que nos podemos hacer es ¿Cuál es la energía almacenada en campos eléctrico y magnético? Si vemos los campos directamente desde el punto de vista de sus unidades, cuadro 2.1,  $EH$  posee unidades de  $V m^{-1} \times A m^{-1} = W m^{-2}$ , lo que es potencia distribuida en una superficie. Entonces aquí tenemos dos posibles casos, producto cruz o producto punto (apartado 1.1.1), como el producto cruz conserva la dirección entonces definimos:

$$\mathcal{S} = \mathcal{E} \times \mathcal{H}, \quad (2.108)$$

medido en  $W m^{-2}$ . El vector  $\mathcal{S}$  es llamado vector de Poynting en honor al físico inglés John H. Poynting (que derivó el vector en 1884). La dirección del flujo de energía es de interés, entonces su gradiente también lo será:

$$\nabla \cdot \mathcal{S} = \nabla \cdot (\mathcal{E} \times \mathcal{H}) \quad (2.109)$$

$$= \mathcal{H} \cdot (\nabla \times \mathcal{E}) - \mathcal{E} \cdot (\nabla \times \mathcal{H}) \quad (2.110)$$

$$= -\mathcal{H} \cdot \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} - \mathcal{E} \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} - \mathcal{E} \cdot \mathcal{J} \quad (2.111)$$

$$-\nabla \cdot \mathcal{S} = \mathcal{E} \cdot \mathcal{J} + \left( \mathcal{E} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \mathcal{H} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \right), \quad (2.112)$$

donde en hemos usado ecuaciones (2.70) y (2.71). Ecuación (2.112) es conocida como el teorema de Poynting, y nos dice que la energía almacenada en un volumen es igual a la energía que entra menos la que sale, más la energía que se pierde por disipación. La forma integral está dada por:

$$-\oint_S \mathcal{S} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \mathcal{E} \cdot \mathcal{J} d\tau + \int_V \left( \mathcal{E} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \mathcal{H} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \right) d\tau, \quad (2.113)$$

la cual, a diferencia de ecuación (2.108), se encuentra en unidades de W. La ecuación (2.113) es conocida como la forma integral del teorema de Poynting. El término de disipación de energía es:

$$P_{\text{dis}} = \int_V \mathcal{E} \cdot \mathcal{J} d\tau. \quad (2.114)$$

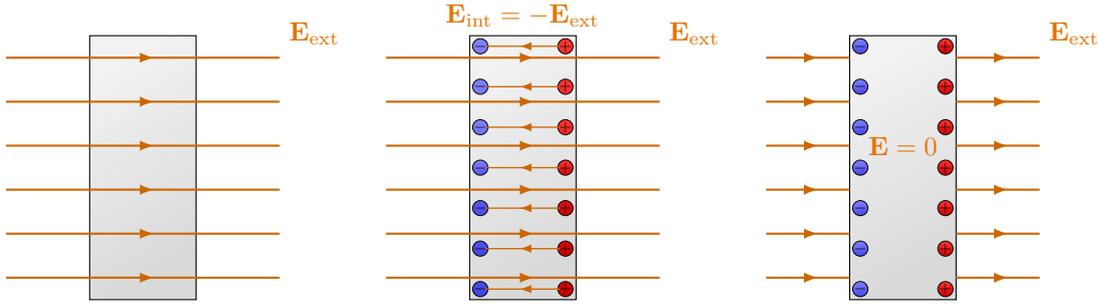


Figura 2.7.: Conductor expuesto a campo eléctrico externo,  $E_{\text{ext}}$  (color naranja). El campo eléctrico de un conductor es siempre cero ya que experimentará un campo eléctrico igual al externo  $\mathbf{E}_{\text{ext}} = -\mathbf{E}_{\text{ext}}$  pero con signo opuesto. El tiempo que toma a las cargas en el conductor ajustarse a este campo eléctrico externo es del orden de  $\sim 1 \times 10^{-19}$  s (llamado tiempo de relajación; apartado 2.3.1)

Más interesante es el caso en el que solo existe conducción de corriente, i.e.,  $\mathcal{J} = \sigma \mathcal{E}$  (explicado en apartado 2.3.1), entonces:

$$P_{\text{dis}} = \sigma \int_V \|\mathcal{E}\|^2 d\tau. \quad (2.115)$$

lo cual indica pérdida Óhmica del sistema.

Hasta este punto hemos visto el formalismo de las ecuaciones de Maxwell completo aplicado a materiales, que en su mayoría cumplen con las propiedades del medio. Aunque las ecuaciones de Maxwell fueron desarrolladas a fines de los años 1890s, su aplicabilidad permanece intacta hasta el día de hoy (al igual que la mecánica de Newton). Generalizaciones posteriores de este set de ecuaciones han sido desarrolladas, en particular desde la teoría clásica de relatividad general o *general relativity* (GR) y aplicada a teorías de lo microscópico (Griffiths & Schroeter 2018), como lo son *quantum field theory* (QFT) y *quantum electrodynamics* (QED) (Feynman 2006).

## 2.3. Materiales sus propiedades e importancia

En esta sección veremos los materiales conductores (apartado 2.3.1), materiales dieléctricos (apartado 2.3.2) y materiales magnéticos (apartado 2.3.3), y cómo es que estos se relacionan con las ecuaciones de Maxwell, en particular para el set de ecuaciones (2.90) a (2.93). Solo estudiaremos modelos clásicos de la microestructura de estos materiales, pero si se discutirá de forma general que es lo que ocurre cuando tenemos herramientas físico-matemáticas mejores.

### 2.3.1. Materiales conductores

Conductores son materiales que poseen una estructura atómica con uno o más electrones en su último nivel energético libres. Estos electrones, en condiciones normales, están libres de moverse en cualquier dirección, pero al ser sometidos a una fuerza electromagnética fluyen dentro del material. Este flujo de cargas será medido en términos de la conductividad de un material, apartado 2.3.1. Una lista de variables útiles se encuentra al final de este apartado 2.3.1, cuadro 2.4.

Un material conductor (ideal) cumple con las siguientes propiedades:

1.  $\mathbf{E} = 0$  dentro de un conductor
2.  $\rho = 0$  dentro de un conductor
3. Toda carga solo reside en la superficie del material conductor
4. Un conductor es equipotencial
5.  $\mathbf{E}$  es perpendicular a la superficie justo fuera del conductor

El primer punto,  $\mathbf{E} = 0$ , es de particular importancia y se puede expresar en la siguiente figura 2.7.

## 2. Campos electromagnéticos cuasi-estáticos y sus propiedades en materiales

Conductores	$\rho \ \Omega \text{ m}$	Semi-conductores	$\rho \ \Omega \text{ m}$	Aislantes	$\rho \ \Omega \text{ m}$
Plata	$1.59 \times 10^{-8}$	Agua salada (saturada)	$4.4 \times 10^{-2}$	Agua	$2.5 \times 10^5$
Cobre	$1.68 \times 10^{-8}$	Germanium	$4.6 \times 10^{-1}$	Madera	$1 \times 10^8 - 1 \times 10^{11}$
Oro	$2.21 \times 10^{-8}$	Diamante	2.7	Vidrio	$1 \times 10^{10} - 1 \times 10^{14}$
Aluminio	$2.65 \times 10^{-8}$	Silicon	$2.5 \times 10^3$	Cuarzo	$\sim 1 \times 10^{16}$

Cuadro 2.3.: Lista de resistividades ( $\rho$ ) en  $\Omega \text{ m}$ . Todos los valores fueron medidos a 101 325 Pa y 20 °C (Haynes 2014).

### Ley de Ohm

Para generar un flujo de corriente (o *current flow*) se debe “empujar” cargas a través de un medio. Que tan rápido estas cargas se muevan dependerá de la naturaleza del material (manteniendo este empuje constante de cargas). Para la mayoría de los materiales, la corriente es proporcional a la fuerza por unidad de carga, ecuación (2.2):

$$\mathcal{J} = \sigma \mathbf{f}. \quad (2.116)$$

La constante de proporcionalidad, el factor  $\sigma$  (no confundir con la densidad superficial de carga  $\sigma$ ), presentado inicialmente como una ecuación constitutiva de la materia, ecuación (2.80), es una constante empírica y propiedad del material. La constante es llamada conductividad (*conductivity*) del medio. Su recíproco es conocido como la resistividad  $\rho = 1/\sigma$  (no confundir con la densidad de carga  $\rho$ ; lamentablemente no hay muchas más letras que utilizar). Materiales aislantes también son conductores, obviamente muy malos, pero el orden de magnitud de diferencia entre un conductor y un aislante es muy alto,  $\sim 1 \times 10^{22}$ . De hecho, en práctica, es usual decir que materiales conductores poseen un  $\sigma = \infty$ .

Este flujo de corriente es movido por una fuerza, que en principio, puede ser de origen químico, gravitacional, u algún otro; en nuestro caso esto corresponde a la fuerza electromagnética, ecuación (2.2), luego:

$$\mathcal{J} = \sigma (\mathcal{E} + \mathbf{v} \times \mathcal{B}). \quad (2.117)$$

Para conductores, la velocidad de las cargas es casi nula, por lo que podemos desprejiciar su efecto (aunque en otras condiciones como física de plasma la contribución de la velocidad no es desprejiciable). Entonces tenemos que:

$$\mathcal{J} = \sigma \mathcal{E}. \quad (2.118)$$

Lo que es lo mismo a la ecuación constitutiva en ecuación (2.80). Una lista de materiales y su resistividad está en cuadro 2.3.

En general, supongamos que tenemos un cable o alambre sólido de un buen conductor, e.g., cobre, con una sección transversal de área  $A$  y con un largo  $L$ . Entonces tendremos que la corriente es:

$$I = JA = \sigma EA = \frac{\sigma A}{L} \Delta V, \quad (2.119)$$

con  $\Delta V$  la diferencia de potencial entre los extremos del cable. Esto es en otras palabras el flujo de corriente de un electrodo al otro, es decir:

$$V = IR. \quad (2.120)$$

Ecuación (2.120) corresponde a la versión más familiar de la ley de Ohm. La variable  $R$  es llamada la resistencia (y **no** resistividad), y está en función de la geometría del sistema proporcional a la resistividad  $\rho$  (o equivalentemente conductividad  $\sigma$ ). La resistencia es medida en  $1 \ \Omega \equiv 1 \ \text{V A}^{-1}$ .

Nuevamente la conductividad (y resistividad) serán una constante del sistema que puede o no depender de cierta dirección dentro del material, es decir:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}; \quad [\rho] = \begin{bmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} & \rho_{xz} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} & \rho_{yz} \\ \rho_{zx} & \rho_{zy} & \rho_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.121)$$

Con  $[\sigma]$  y  $[\rho]$  la matriz de conductividad y resistividad, respectivamente. El par  $(\sigma, \rho)$  dependerán de la composición, estructura atómica/molecular, temperatura, presión y otros factores. Luego:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{J}_x \\ \mathcal{J}_y \\ \mathcal{J}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{bmatrix}, \quad (2.122)$$

y en su forma compacta matricial lo escribiremos como  $\mathcal{J} = [\sigma] \mathcal{E}$ .

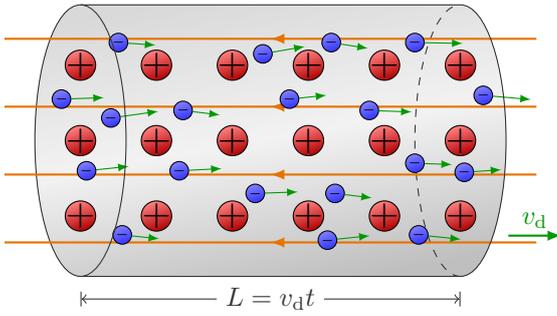


Figura 2.8: Bosquejo de aproximación clásica de flujo de electrones dentro de un conductor de largo  $L$  que mueve carga eléctrica a una velocidad  $v_d$  (en un tiempo  $t$ ).

### La corriente y su transporte

Por convención la corriente fluye siempre en sentido contrario al flujo de electrones, pero nótese que la corriente puede ser generada por iones o partículas con carga positiva (o en el caso de un plasma con ambas partículas a la vez). Definimos la velocidad de desplazamiento, inverso al sentido de la corriente, como  $v_d$ , luego:

$$J = \frac{qN}{At} = \frac{qnVv_d}{AL} = qnv_d \quad (2.123)$$

$$J = \sigma E \quad (2.124)$$

$$\sigma = \frac{qnv_d}{E} = qn\mu, \quad (2.125)$$

donde definimos  $\mu$  como la movilidad eléctrica, siguiendo figura 2.8.  $N$  corresponde al número total de cargas y  $n = N/V$ , con  $V$  el volumen. Pensemos en que la movilidad eléctrica es el camino que una partícula cargada puede avanzar, en promedio, a lo largo de un conductor (en mecánica llamado el *mean free path*).

Desde un punto de vista clásico podemos describir la movilidad eléctrica como una suma de fuerzas:

$$qE - F_r = m^* \frac{dv}{dt} \quad (2.126)$$

$$eE - \frac{m^*}{\tau}v = m^* \frac{dv}{dt} \quad (2.127)$$

$$v = \frac{q\tau E}{m^*} \left( 1 - \exp \left[ -\frac{t}{\tau} \right] \right), \quad (2.128)$$

donde hemos representado la pérdida de energía a través de una fuerza de roce  $F_r$ , y que está relacionada con la masa  $m^*$ , el tiempo promedio entre colisiones  $\tau$ , y su velocidad  $v$ . Por último esta velocidad límite es la velocidad real (o una buena aproximación) a la velocidad de la corriente  $v_d$ ,

$$v_d = \frac{q\tau E}{m^*} \Rightarrow \mu = \frac{q\tau}{m^*} = \frac{q\ell}{m^*v_d}. \quad (2.129)$$

Nótese que  $m^* \neq m_e$  y corresponde a la masa efectiva de la partícula en el medio. Esta es la masa que una partícula interactúa con partículas idénticas. Por ejemplo, en un medio cristalino, los electrones interactúan con los iones del cristal, y por lo tanto la masa efectiva es mayor que la masa en reposo del electrón.

### Resistividad

Atómicamente la resistividad es lo que limita al flujo de electrones, estos pueden ser de origen mecánico (e.g., impurezas del material), o de condiciones de temperatura y presión. A presiones constantes, la resistividad sigue la siguiente forma empírica:

$$\rho(T) = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)], \quad (2.130)$$

con  $T$  la temperatura del medio,  $T_0$  la temperatura inicial, y  $\alpha$  el coeficiente de temperatura de resistividad, figura 2.9. La constante  $\rho_0$ , por lo general, está relacionada con el tipo de impurezas o imperfecciones del material y  $\rho(T)$  es una función lineal con la temperatura. La llamada “regla de Mathessen” describe la resistividad que posee un material en función de su movilidad eléctrica:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_{\text{impurities}}} + \frac{1}{\mu_{\text{lattice}}} + \frac{1}{\mu_{\text{defects}}} + \dots \quad (2.131)$$

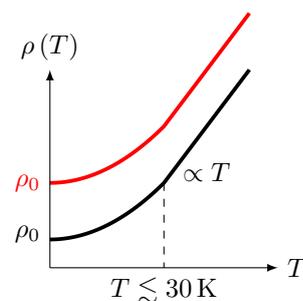


Figura 2.9: Bosquejo resistividad de materiales en función de la temperatura  $T$  para dos materiales  $\rho_0$  y  $\rho_0$ . La resistividad y temperatura son una función lineal para la mayoría de los materiales. Por lo general el punto de discontinuidad seguirá otra ley, como la ley de Mathessien.

Donde la suma total de la movilidad eléctrica dependerá de las impurezas del material (*impurities*), la estructura cristalina (*lattice*) y defectos en la estructura (*defects*), más otros efectos de segundo orden.

En particular, los efectos por estructura cristalina o de *lattice* están organizados en estructuras cuantizadas o paquetes de onda llamados fonones, similar a como el fotón es la estructura cuantizada de una onda electromagnética. Un fonón es una colección elástica de átomos o moléculas (en física de materia condensada). Al igual que un electrón, un fonón puede ser considerado como una partícula y este interactúa contra el flujo de electrones libres en el mismo medio.

### Tiempo de relajación

El tiempo de relajación para un material, ya sea conductor o no, es el tiempo en el que el campo eléctrico alcanza una magnitud  $E \approx 0 \text{ V m}^{-1}$  en su interior. Para obtener una relación cuantitativa usamos la ley de Ohm y la ley de Gauss,

$$\nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{y} \quad \nabla \cdot \mathcal{D} = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho = 0 \quad (2.132)$$

que para el caso de un conductor lineal, isotrópico y homogéneo se reduce a:

$$\rho = \rho_0 e^{-\sigma/\epsilon t}, \quad \Rightarrow \quad \tau_r \equiv \frac{\epsilon}{\sigma}. \quad (2.133)$$

Donde  $\tau_r$  es el tiempo de relajación, y decae a cero en  $t \rightarrow \infty$ . Entonces para materiales conductores esta reacción es casi instantánea,  $\sim 1 \times 10^{-19} \text{ s}$ , pero para otros materiales, e.g., el cuarzo puede tardar varios días en alcanzar este estado.

### Condensador eléctrico

Un condensador eléctrico o del anglicismo *capacitor* se compone de dos placas paralelas (comunmente), de igual carga y que poseen distinto signo. Esto generará un campo eléctrico entre ambas placas y de una densidad de campo y magnitud constante (lo que es ideal para estudios en laboratorio). Dado que poseemos dos cargas iguales (de signo opuesto) y constantes en el tiempo, podemos hablar de una diferencia de potencial entre placas,  $\Delta V$  (con esta la cantidad conocida en laboratorio),

$$\Delta V = V_+ - V_- = - \int_{(-)}^{(+)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.134)$$

La carga total del capacitor es  $Q = CV$ , donde  $C$  es la capacidad del capacitor y  $V$  es la diferencia de potencial entre las placas. La capacitancia es medida en Faradios,  $1 \text{ F} \equiv 1 \text{ C V}^{-1}$  y solo dependerá de la **geometría del condensador** (varios problemas simples con distintas geometrías en *Sears et al. 2005*).

Otros tipos de capacitores son los cilíndricos o esféricos, compuestos de dos placas conductoras de radio  $r_a$  y  $r_b$  y separadas por una distancia, figura 2.10.

#### Ejemplo 2.2

Calcular la capacitancia de dos esferas concéntricas hechas de metal con radios  $r_a$  y  $r_b$ . Como lo indica la *cross-section* de la figura 2.10. La carga positiva  $+Q$  está al interior y la carga negativa  $-Q$  al exterior. El grosor de la cáscara metálica es despreciable. Solución:  $C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_b}{r_b - r_a}$ .

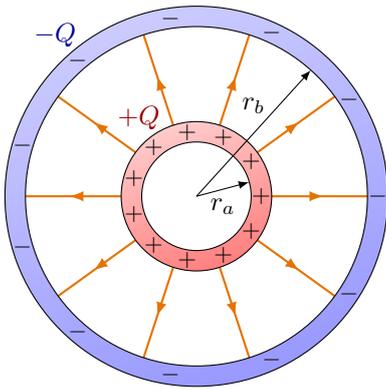


Figura 2.10: Capacitor esférico o cilíndrico en su *cross-section*. La distancia entre placas está dada por la diferencia de radios  $r_b - r_a$ . Por lo general capacitores cilíndricos son fáciles de construir y son muy utilizados en la industria.

Nombre	Name	Símbolo	Unidad SI
Conductividad eléctrica	<i>Electrical conductivity</i>	$\sigma$	$\text{S m}^{-1}$
Resistividad eléctrica	<i>Electrical resistivity</i>	$\rho$	$\Omega \text{ m}$
Fuerza por unidad de carga	<i>Force per unit charge</i>	$\mathbf{f}$	$\text{N C}^{-1}$
Movilidad eléctrica	<i>Electric mean free path</i>	$\mu$	$\text{m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$
Tiempo de relajación	<i>Relaxation time</i>	$\tau_r$	s
Resistencia eléctrica	<i>Electrical resistance</i>	$R$	$\Omega$
Potencial eléctrico	<i>Electric potential</i>	$V$	V

Cuadro 2.4.: Lista de variables relevantes y relacionadas con la ley de Ohm.

### Conductores comunes y sus aleaciones

Elección de materiales conductores dependerá de muchas variables, entre ellas: el peso (densidad), resistencia mecánica, resistencia a la corrosión, precio, su compatibilidad con otros materiales, etc. Por lo general, una de las mejores soluciones es el uso de aleaciones, que disminuyen el costo del producto llegando a tolerancias deseadas. Por ejemplo, el cobre es un excelente conductor, pero es muy blando y se oxida fácilmente. Por lo que se suele utilizar aleaciones de cobre con otros metales como el estaño, aluminio, níquel. Nótese que la resistividad no es aditiva, i.e.,  $\rho_{\text{total}} \neq \rho_A + \rho_B$  y en algunos casos existen relaciones lineales:  $\rho_{\text{total}} = A_1\rho_A + A_2\rho_B + A_3$  con  $A_i$   $i = 1, 2, 3$  constantes. Los tipos de aleaciones más comunes son: completamente miscibles (muy similar a la mezcla de dos o más líquidos), intermetálicos (creación de estructuras cristalinas), y completamente inmiscibles (donde existen regiones o dominios dentro del material).

### 2.3.2. Materiales dieléctricos

Materiales dieléctricos son materiales **no** conductores que al estar expuestos a un campo eléctrico pueden ser polarizados. Un material dieléctrico perfecto es el cual cuenta con una conductividad eléctrica igual a cero,  $\sigma = 0 \text{ S m}^{-1}$ .

La palabra dieléctrico viene del latín, “a través de” y eléctrico, “de campo eléctrico”. El efecto de “ruptura del dieléctrico” es cuando el material es sometido a un campo eléctrico lo suficientemente alto y se producirá una ionización parcial que permita la conducción a través del dieléctrico. La llamada resistencia dieléctrica es el máximo campo eléctrico que el material dieléctrico puede soportar antes de alcanzar la ruptura del dieléctrico.

En general, un material conductor es el cual genera una barrera contra un campo eléctrico externo, mientras que un material dieléctrico permite el paso del campo eléctrico externo. Todos los materiales dieléctricos son aislantes, pero no todos los aislantes son dieléctricos (por ejemplo, el vidrio es un dieléctrico, pero el diamante no lo es). El uso de dieléctricos más generalizado es el de los capacitores, apartado 2.3.1. Un capacitor al poseer un material dieléctrico entre sus placas tendrá un comportamiento distinto, y en general, aumentará su capacitancia o la cantidad de energía almacenada respecto del vacío.

Definimos la constante dieléctrica como:

$$\epsilon_r = \frac{C}{C_0}, \tag{2.135}$$

con el subíndice la capacitancia del sistema original en el vacío. Asumimos que en el capacitor la carga superficial

## 2. Campos electromagnéticos cuasi-estáticos y sus propiedades en materiales

de las placas es constante, entonces con y sin dieléctrico tendremos que el campo es:

$$E_0 = \frac{\sigma_f}{\epsilon_0} \quad \text{y} \quad E = \frac{\sigma_f - \sigma_b}{\epsilon_0}. \quad (2.136)$$

Y la densidad de carga superficial inducida:

$$\sigma_b = \sigma \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right). \quad (2.137)$$

Con  $b$  y  $f$  las densidades de carga atrapada y libre, respectivamente.

Conceptos básicos de capacitancia son las expresiones equivalentes en serie y en paralelo:

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (2.138)$$

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots = \sum_{i=1}^n C_i, \quad (2.139)$$

respectivamente. La energía almacenada es:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QV. \quad (2.140)$$

### Ejemplo 2.3

El espacio entre placas de un capacitor de placas paralelas está ocupado por dos placas de dieléctrico, uno con constante  $\epsilon_{r1}$  y otro con constante  $\epsilon_{r2}$ . El espesor de cada placa de dieléctrico es de  $d/2$ , donde  $d$  es la separación entre las placas del capacitor. Demuestre que la capacitancia es:  $C = \frac{2\epsilon_0 A}{d} \left( \frac{\epsilon_{r1}\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \right)$ .

### Ejemplo 2.4

El cilindro interior de un capacitor cilíndrico largo tiene un radio  $r_a$  y una densidad de carga lineal  $+\lambda$ . Está rodeado de una coraza conductora cilíndrica coaxial con un radio interior  $r_b$  y una densidad de carga lineal  $-\lambda$ .

- (1) ¿Cuál es la densidad de energía en la región comprendida entre los conductores a una distancia  $r$  del eje?
- (2) Integre la densidad de energía calculada en el inciso (1) con respecto al volumen de los conductores, en una longitud  $L$  del capacitor, para obtener la energía total del campo eléctrico por unidad de longitud.

### Dipolo eléctrico

Para poder entender propiedades de polarización de un material dieléctrico primero veamos cuales son las propiedades de un dipolo eléctrico, ecuación (2.53). Consideremos dos cargas de signo opuesto,  $q$ , las cuales se encuentran a una distancia  $d/2$  del origen del sistema coordenado y puestas en  $\hat{z}$ , figura 2.11.

A una distancia  $P$  medimos el potencial generado por estas dos cargas,

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right). \quad (2.141)$$

Ahora supongamos que el punto  $P$  está mucho más alejado,  $r \gg d$ , lo que en este caso las líneas que conectan  $r_+$  y  $r_-$  en  $P$  serán casi paralelas (figura 2.11). Entonces,

$$r_+ = r - \frac{d}{2} \cos \theta, \quad r_- = r + \frac{d}{2} \cos \theta. \quad (2.142)$$

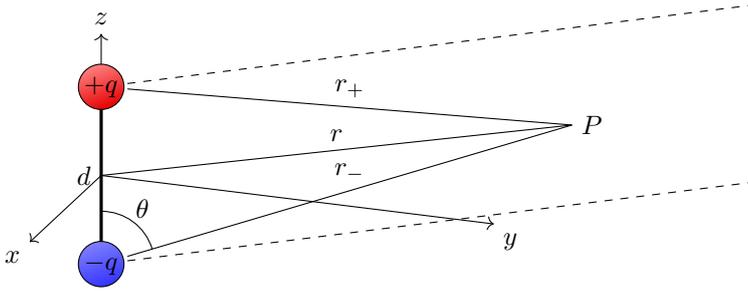


Figura 2.11: Dipolo eléctrico. Dos cargas de signo opuesto  $q$  separadas por una distancia  $d$  en el eje- $z$ . El punto  $P$  se encuentra alejado del dipolo eléctrico y cuando  $r \gg d$  las líneas que conectan  $r_+$  y  $r_-$  en  $P$  son casi paralelas. El campo eléctrico del dipolo eléctrico es descrito en figura 2.1.

Con lo que resulta que el potencial en  $P$  es:

$$V_P \approx \frac{qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (2.143)$$

Para el campo eléctrico usamos la expresión del gradiente pero en coordenadas esféricas (apartado 1.3.2),

$$\mathbf{E} = -\nabla V_P = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}). \quad (2.144)$$

Es decir, el campo eléctrico de un dipolo eléctrico varía como  $1/r^3$  y es proporcional a la distancia  $d$  entre las cargas. El momento dipolar eléctrico es:

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d}. \quad (2.145)$$

El cual también fue definido en ecuación (2.53). Nótese que entre mayor sea la carga almacenada y mayor sea la distancia a la cual nuestras cargas están separadas el momento dipolar aumentará, consecuentemente más fuerza de rotación.

### Tipos de polarización

En comparación con materiales conductores, materiales dieléctricos (dieléctrico perfecto) no poseen electrones o cargas libres. Las cargas en un buen dieléctrico por lo general están muy bien acopladas a átomos o moléculas del material. Aún cuando un material dieléctrico esté en total equilibrio eléctrico, este al ser expuesto a un campo  $E_{\text{ext}}$ , experimentará separaciones macrosópicas de sus cargas positivas y negativas. Estas separaciones son del orden atómico, pero debido a la cantidad de dipolos presente en un material pueden hacer que el efecto no sea despreciable. Este efecto es llamado polarización de un dieléctrico. La polarización de un dieléctrico mediante un campo eléctrico externo puede generar tres tipos de polarización: polarización electrónica, polarización iónica y polarización de orientación (u orientacional). También existen materiales en los cuales ya hay una polarización intrínseca, i.e., el agua, y que no necesitan de un campo eléctrico externo para polarizarse. En general, la polarización de un material ocurren los tres tipos de polarización de forma simultánea.

### 2.3.3. Materiales magnéticos

Materiales magnéticos son los cuales poseen propiedades de magnetización al ser expuestos o no a un campo magnético relativamente intenso. Existen dos clases de estos materiales: paramagnéticos y diamagnéticos (cuadro 2.5). Los materiales paramagnéticos como el aluminio, oxígeno, titanio, óxido de hierro, son magnetizados en la misma dirección y sentido de un campo magnético externo  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ . En cambio, materiales diamagnéticos como el mercurio y plomo, son magnetizados en la misma dirección que  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ , pero distinto sentido. Los materiales paramagnéticos y diamagnéticos cumplen en condiciones estrictas con la ecuación (2.84), y no siempre su condición lineal es válida. Más aún es el caso de materiales ferromagnéticos, como lo son el cobalto, hierro y níquel; ya que no son lineales y poseen propiedades de magnetización permanente.

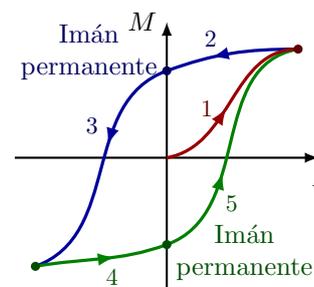
#### Material ferromagnético

Un material ferromagnético es el cual posee un comportamiento no lineal al ser expuesto a un campo magnético externo,  $B_{\text{ext}}$ . En general, la magnetización de un material ferromagnético es mucho mayor que la magnetización de un material paramagnético o diamagnético. La magnetización de un material ferromagnético es la suma

Diamagnético	$\chi_m$	Paramagnético	$\chi_m$
Bismuto	$-1.6 \times 10^{-4}$	Oxígeno	$1.9 \times 10^{-6}$
Oro	$-3.4 \times 10^{-5}$	Sodio	$8.5 \times 10^{-6}$
Plata	$-2.4 \times 10^{-5}$	Aluminio	$2.1 \times 10^{-5}$
Cobre	$-9.7 \times 10^{-6}$	Tungsteno	$7.8 \times 10^{-5}$
Agua	$-9 \times 10^{-6}$	Platino	$2.8 \times 10^{-4}$
Dióxido de carbono	$-1.2 \times 10^{-8}$	Oxígeno líquido ( $-200^\circ\text{C}$ )	$3.9 \times 10^{-3}$
Hidrógeno	$-2.2 \times 10^{-9}$	Gadolinio	$4.8 \times 10^{-1}$

Cuadro 2.5.: Susceptibilidad magnética de materiales a 101 325 Pa y  $20^\circ\text{C}$  (Haynes 2014).

Figura 2.12: Curva de histéresis  $M$  contra  $I$ . La curva se manifiesta al aplicar un campo magnético a un material ferromagnético, como el hierro, de tal modo que los dipolos magnéticos del material se alinean con el campo externo aplicado. Una vez que el material ha sido magnetizado permanecerá en este estado a menos que se le aplique un campo magnético en sentido contrario o hasta que el material alcance cierto umbral de temperatura (llamado punto de Curie).



de la magnetización inducida por el campo magnético externo y la magnetización intrínseca del material. En un material ferromagnético la alineación de dipolos ocurre en parches llamados dominios magnéticos y que cada dominio contiene  $1 \times 10^9$  dipolos magnéticos simples, ecuación (2.56). Un material ferromagnético al ser expuesto a un campo magnético intenso puede experimentar de forma permanente una alineación de sus dominios magnéticos. De forma macroscópica esto se ve mediante  $\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ , el torque ejercido por el campo eléctrico en los dipolos magnéticos. Esta relación entre campo magnético externo y magnetización del material es altamente no lineal ( $\mathbf{B} \propto \mathbf{M}$ ) y sigue la llamada curva de histéresis, figura 2.12, y por ende las ecuaciones de Maxwell lineales no funcionarán para este tipo de medio. La curva relaciona el campo magnético externo con la magnetización del material, o equivalentemente la magnetización con una corriente aplicada.

Para desmagnetizar a un material ferromagnético solo basta con aplicar un campo magnético en sentido contrario al inicialmente aplicado (para así alinear los dipolos magnéticos en sentido contrario). Esto eventualmente puede remagnetizar el material nuevamente pero en sentido contrario. Otro método es aplicar un aumento de temperatura al material hasta alcanzar cierto valor umbral. Este cambio de temperatura no es un proceso de debilitamiento gradual, es una transición rápida y brusca, que en física es llamada “transición de fase”. Para materiales ferromagnéticos a esta temperatura se le conoce como el punto de Curie y al alcanzar  $770^\circ\text{C}$  el material se vuelve paramagnético. Otro tipo de transición de fase ocurre en los materiales superconductores o *superconductors*<sup>9</sup> (no confundir con un conductor perfecto) que al ser expuestos a temperaturas cerca del cero absoluto adquieren propiedades de resistividad casi nula (*Meissner effect*). La teoría que estudia estas transiciones de fase es a través de los pares de Cooper (o *Cooper pair*) es Bardeen-Cooper-Schrieffer (Bardeen 1973; Fossheim et al. 2005).

## 2.4. Funciones potenciales

### 2.4.1. Campos armónicos

Los campos armónicos son de una importancia fundamental para la ciencia y tecnología. Gracias a su simple representación de fenómenos en electrodinámica podemos desarrollar la teoría aplicada a la tecnología de forma compacta, en muchos casos con solución analítica, y expresable en pocas variables.

Campos armónicos son los cuales es posible descomponerlos en una sección temporal y otra de posición. La sección temporal es llamada “fasor” o *phasor* y contiene una función sinusoidal  $\cos(\omega t + \theta)$ , expresada por lo general, como una exponencial compleja (el término fasor puede ser utilizado para cualquier otra decomposición angular). Para el caso de una onda plana (y uniforme) más sencilla, que se propaga con una única frecuencia,

<sup>9</sup> [Are room temperature superconductors impossible?](#), PBS Space Time.

es decir una onda monocromática, se tiene que para una solución armónica:

$$\underbrace{E_x e^{-i\omega t}}_{\text{física}} = \underbrace{E_x e^{j\omega t}}_{\text{ingeniería}}. \quad (2.146)$$

Donde  $E_x$  es la amplitud del campo eléctrico,  $E_x(\mathbf{r}) \equiv \|E_x\| e^{i(k_x x)}$ ,  $k_x$  es la componente  $x$  del vector de onda (o vector número de onda  $\mathbf{k}$ ),  $\omega$  es la frecuencia angular, y  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  es el vector de posición. También  $E_x$  puede o no depender de la posición (y equivalente para las demás coordenadas espaciales). La frecuencia angular la expresaremos como:  $\omega = 2\pi\nu$ , con  $\nu$  la frecuencia monocromática. Nótese que  $\mathbf{E}e^{j\omega t} \in \mathbb{C}$ , por lo que siempre solo nos importará su parte real. Podemos escribir una componente fasorial:

$$E_x e^{j\omega t} = \|E_x\| e^{j\omega t} \angle \theta_x = \text{Re} \left[ E_x e^{j\omega t} \right] + j \text{Im} \left[ E_x e^{j\omega t} \right] = \|E_x\| \cos(\omega t + \theta_x) + j \|E_x\| \sin(\omega t + \theta_x) \quad (2.147)$$

y expandiendo en varias variables,

$$\mathbf{E}e^{j\omega t} = \text{Re} \left[ \mathbf{E}e^{j\omega t} \right] + j \text{Im} \left[ \mathbf{E}e^{j\omega t} \right] \quad (2.148)$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) \equiv \text{Re} \left[ \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \right] \quad (2.149)$$

Además el lector debe estar familiarizado con los distintos tipos de notación tanto en ciencias como en ingeniería donde la unidad compleja  $i$  y  $j$  cambiarán (apartado 1.5).

Tomemos el caso del campo eléctrico y sus diferentes componentes:

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_x(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{x}} + \mathcal{E}_y(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{y}} + \mathcal{E}_z(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{z}}, \quad (2.150)$$

y considerando una variación sinusoidal, podemos expresar el campo eléctrico en términos de la frecuencia angular y sus amplitudes más una constante de fase,

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \|E_x\| \cos(\omega t + \theta_x) + \|E_y\| \cos(\omega t + \theta_y) + \|E_z\| \cos(\omega t + \theta_z). \quad (2.151)$$

Donde  $(E_x, E_y, E_z) = (\|E_x\| \angle \theta_x, \|E_y\| \angle \theta_y, \|E_z\| \angle \theta_z)$  son amplitudes del campo eléctrico y los ángulos de fase  $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$  son independientes del tiempo pero pueden poseer alguna dependencia en la posición  $\mathbf{r}$ .

Para las aplicaciones de este tipo de ondas armónicas, comunmente, no se usa la representación de física,  $\mathbf{k}$  (un vector), en cambio utilizamos la constante de propagación  $\gamma$  (brevemente descrita en ejemplo 2.1 y definida en apartado 3.2).

### 2.4.2. Campos armónicos y Poynting

Similar al caso estático ahora podemos determinar una expresión promedio para el vector de Poynting utilizando campos armónicos. Para ello, primero usamos la siguiente igualdad de números complejos:

$$\mathcal{E} = \text{Re} \left[ \mathbf{E}e^{j\omega t} \right] = \frac{1}{2} \left( \mathbf{E}e^{j\omega t} + \bar{\mathbf{E}}e^{-j\omega t} \right), \quad \mathcal{H} = \text{Re} \left[ \mathbf{H}e^{j\omega t} \right] = \frac{1}{2} \left( \mathbf{H}e^{j\omega t} + \bar{\mathbf{H}}e^{-j\omega t} \right), \quad (2.152)$$

y luego expandimos:

$$\mathcal{S} = \mathcal{E} \times \mathcal{H} = \text{Re} \left[ \mathbf{E}e^{j\omega t} \right] \times \text{Re} \left[ \mathbf{H}e^{j\omega t} \right] \quad (2.153)$$

$$= \frac{1}{4} \left( \mathbf{E}e^{j\omega t} + \bar{\mathbf{E}}e^{-j\omega t} \right) \times \left( \mathbf{H}e^{j\omega t} + \bar{\mathbf{H}}e^{-j\omega t} \right) \quad (2.154)$$

$$= \frac{1}{4} \left( \mathbf{E} \times \mathbf{H}e^{2j\omega t} + \mathbf{E} \times \bar{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H} + \bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}e^{-2j\omega t} \right) \quad (2.155)$$

$$= \frac{1}{4} \left( \mathbf{E} \times \bar{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H} \right) + \frac{1}{4} \left( \mathbf{E} \times \mathbf{H}e^{2j\omega t} + \bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}e^{-2j\omega t} \right). \quad (2.156)$$

Donde para poder visualizar hacemos uso de variables auxiliares  $\mathbf{m} = \mathbf{E} \times \bar{\mathbf{H}}$  y  $\mathbf{n} = \bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}$ , entonces el resultado lo podemos escribir como:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} (\mathbf{m} + \bar{\mathbf{m}}) + \frac{1}{4} \left( \mathbf{n}e^{2j\omega t} + \bar{\mathbf{n}}e^{-2j\omega t} \right) = \frac{1}{2} \text{Re} [\mathbf{m}] + \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \mathbf{n}e^{2j\omega t} \right]. \quad (2.157)$$

## 2. Campos electromagnéticos cuasi-estáticos y sus propiedades en materiales

Como ya es sabido, solo nos interesa conocer el valor promedio del vector de Poynting,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S} dt, \quad (2.158)$$

donde  $T$  es algún periodo de tiempo y  $\langle \mathbf{S} \rangle$  es el valor promedio o *average* del resultado. Entonces si evaluamos directamente ecuación (2.157) en la integral de tiempo, obtenemos:

$$\frac{1}{2} \text{Re} \left[ \mathbf{n} e^{j2\omega t} \right] = \frac{1}{2} \left\{ \|n_x\| \cos(2\omega t + \theta_x) \hat{\mathbf{x}} + \|n_y\| \cos(2\omega t + \theta_y) \hat{\mathbf{y}} + \|n_z\| \cos(2\omega t + \theta_z) \hat{\mathbf{z}} \right\}, \quad (2.159)$$

lo que es igual a cero. Finalmente obtenemos la relación para el vector de Poynting en campos armónicos:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} [\mathbf{S}] = \frac{1}{2} \text{Re} [\mathbf{E} \times \bar{\mathbf{H}}] = \frac{1}{2} \text{Re} [\bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}] \quad (2.160)$$

para mayor detalle vea capítulo 5, Paul & Nasar (1998). Nótese que toda dependencia temporal, para efectos prácticos, ha sido removida, es decir el vector de Poynting promedio es una constante del sistema y no depende del tiempo.

### 2.4.3. Ecuaciones de Maxwell en campos armónicos

El último set de ecuaciones de Maxwell, el más específico, está dado al evaluar las ecuaciones de Maxwell en términos de soluciones fasoriales (Dorf 1993). No será demostrado aquí pero, si una sola de las variables  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{B}$ , o  $\mathcal{H}$ , posee componentes armónicas entonces todas las variables también lo son (replicando ecuación 2.149),

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}] \quad \mathcal{D}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [\mathbf{D}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}] \quad \mathcal{J}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [\mathbf{J}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}] \quad (2.161)$$

$$\mathcal{B}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [\mathbf{B}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}] \quad \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [\mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}] \quad \rho(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [\rho(\mathbf{r}) e^{j\omega t}]. \quad (2.162)$$

La variable  $\rho$  no cambia su notación. Lo mejor de esta notación, es que nos deja expresar el set de Maxwell de forma mucho más simplificada y muy similar al caso electro- y magneto-estático, esto es reemplazando variables armónicas en el set ecuaciones (2.68) a (2.71):

$$\nabla \cdot \mathcal{D} = \rho \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \nabla \cdot \mathcal{B} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.163)$$

$$\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad \nabla \times \mathcal{H} = \mathcal{J} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \mathbf{D}. \quad (2.164)$$

Para variables armónicas entenderemos que derivadas en el tiempo son  $\partial/\partial t \rightarrow j\omega$ . La ecuación de continuidad, ecuación (2.52), también puede ser reescrita como:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega \rho. \quad (2.165)$$

Entonces reorganizando el set de ecuaciones de Maxwell en formato armónico tenemos:

$$(i) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho \quad (\text{Ley de Gauss}) \quad (2.166)$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (\text{Sin nombre}) \quad (2.167)$$

$$(iii) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -j\mu\omega \mathbf{H} \quad (\text{Ley de Faraday}) \quad (2.168)$$

$$(iv) \quad \nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\epsilon\omega) \mathbf{E} \quad (\text{Ley de Ampère + corrección de Maxwell}) \quad (2.169)$$

Donde la principal diferencia es que las ecuaciones poseen el número imaginario  $j$ , y además los campos vectoriales ahora pueden ser complejos.

**Atención**

Las ecuaciones de Maxwell en campos armónicos son muy similares a las ecuaciones de Maxwell en campos estáticos, apartado 2.1.3, pero con la diferencia que ahora los campos vectoriales pueden o no ser complejos. Aquí usaremos la misma notación, e.g.,  $\mathbf{E}$  para un campo independiente del tiempo en electrostática y para un campo armónico en electrodinámica (principalmente para aliviar la notación e introducir menos variables).

**2.4.4. Potenciales escalar y vectorial**

Ahora nos preguntamos como es que densidades de carga y de corriente generan campos eléctricos y magnéticos. Esto es, intentamos expresar una solución general para las ecuaciones de Maxwell, ecuaciones (2.27) a (2.30), en términos de densidades de carga y de corriente,  $\rho(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathcal{J}(\mathbf{r}, t)$  (que como sabemos para el caso estático es resultado a través de la ley de Coulomb y Biot-Svart, apartado 2.1.2). Buscamos ahora una generalización campos variables en el tiempo. En electrodinámica  $\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} \neq 0$ , pero  $\boldsymbol{\mathcal{B}}$  aún posee una divergencia cero, entonces:

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \nabla \times \boldsymbol{\mathcal{A}}, \quad (2.170)$$

igual al caso en magnetostática. Usando la ley de Faraday ecuación (2.29),

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{A}}) = \nabla \times \left( \boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{A}}}{\partial t} \right) = 0. \quad (2.171)$$

Lo que nos lleva a la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{A}}}{\partial t}. \quad (2.172)$$

Si reemplazamos en la ley de Gauss ecuación (2.27),

$$\nabla^2 V = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (2.173)$$

Similarmente podemos usar las ecuaciones (2.170) y (2.172) en la ecuación (2.30) y usando la propiedad del rotor  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ ,

$$\left( \nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{A}} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{A}}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left( \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \boldsymbol{\mathcal{J}}. \quad (2.174)$$

Donde las expresiones ecuaciones (2.173) y (2.174) contienen toda la información del set completo de las ecuaciones de Maxwell, viz., equivalente a ecuaciones (2.27) a (2.30). Este formalismo será desarrollado y estudiado en apartado 5.4.

Ecuaciones (2.173) y (2.174) pueden parecer largas y complejas, pero en realidad lo que se ha hecho es reducir el número de variables de forma radical, solo quedando con una escalar  $V$  y 3 componentes vectoriales de  $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ .

**Transformaciones de Gauge**

El lector pudo darse cuenta que al definir cierto tipo de potenciales escalares o vectoriales, al agregar una variable escalar no afectarán el valor del potencial mismo, i.e.,

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}' = \boldsymbol{\mathcal{A}} + \nabla \lambda, \quad V' = V - \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \quad (2.175)$$

donde  $\lambda$  es una función arbitraria. Esta transformación es llamada *gauge transformation*. Dependiendo como se defina los campos escalares o vectoriales se debe fijar, arbitrariamente, el valor de la divergencia. En magnetostática es  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , pero en electrodinámica no es tan claro. No ahondaremos en este tema, pero es importante tenerlo en cuenta, y que existen dos condiciones: el gauge de Coulomb y el gauge the Lorentz (ver Griffiths 2017, capítulo 10). Usaremos de ahora en adelante solo la condición de Lorentz, esto es:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.176)$$

## 2. Campos electromagnéticos cuasi-estáticos y sus propiedades en materiales

Con esta condición, ecuación (2.176), podemos reescribir ecuaciones (2.173) y (2.174),

$$\nabla^2 \mathcal{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathcal{J} \quad (2.177)$$

$$\nabla^2 V - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad (2.178)$$

La condición Lortenz además deja ambos potenciales en términos de un operador común, y que lo llamaremos el operador d'Alambertiano (también llamado operador de onda; en honor al matemático francés Jean le Rond d'Alembert):

$$\square^2 \equiv \nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (2.179)$$

Con lo que finalmente podemos reescribir ecuaciones (2.177) y (2.178),

$$\square^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad \square^2 \mathcal{A} = -\mu_0 \mathcal{J}. \quad (2.180)$$

Lo descrito en ecuación (2.180) puede ser generalizado como el operador Laplaciano pero en cuatro dimensiones, es decir ambas son una ecuación de Poisson en cuatro dimensiones. El *gauge* de Lorentz entonces satisface una ecuación inhomogénea de propagación de onda, donde la fuente es la densidad de carga y de corriente.

## 2.5. Métodos de resolución de las ecuaciones de Poisson y Laplace

En electrostática nos interesa poder calcular de forma rápida el campo eléctrico dada una distribución de cargas estacionaria. Como sabemos esto puede ser rápidamente calculado usando la ley de Coulomb, ecuación (2.5):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\hat{\mathbf{s}}}{s^2} \rho(\mathbf{r}') d\tau'. \quad (2.181)$$

Dependiendo de la distribución la integral será más fácil o no. De forma adicional, y usando simetría del sistema podemos usar la ley de Gauss (apartado 2.1.2), pero comunmente lo más general es calcular de forma directa el potencial:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{s} \rho(\mathbf{r}') d\tau'. \quad (2.182)$$

Aunque, nuevamente, dependiendo del caso la integral puede resultar compleja, además de la necesidad de conocer bien la distribución de carga  $\rho$ . Entonces lo que resulta más conveniente es resolver la ecuación de Poisson, ecuación (2.183), o la ecuación de Laplace, ecuación (2.184), para el potencial  $V(\mathbf{r})$ :

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (2.183)$$

$$\nabla^2 V = 0. \quad (2.184)$$

Lo que corresponde al caso estático desarrollado en apartado 2.4.4, ecuaciones (2.177) y (2.178).

La ecuación de Laplace en coordenadas curvilíneas, i.e., cualquier tipo de coordenadas estará dada por la métrica del espacio:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left( \sqrt{|g|} g^{ij} \right) \frac{\partial f}{\partial \xi^j} = 0, \quad g = \det(g_{ij}) \quad (2.185)$$

con  $g_{ij}$  el tensor métrico Euclidiano (Walker 1949). Esta es su forma más general. Algunos libros también hacen referencia al operador Laplaceano con  $\Delta$  (particularmente en mecánica de sólidos).

La ecuación de Laplace escrita en coordenadas cartesianas es:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad (2.186)$$

La ecuación de Laplace es fundamental en el estudio del electromagnetismo, y en particular de electrostática (casi toda la electrostática se basa solo en resolver esta ecuación), además de otras ramas de la física como

lo son la teoría de gravitación, transporte de calor, entre otras. Las soluciones a la ecuación de Laplace son llamadas soluciones armónicas (sí, con componentes armónicos apartado 2.4.1).

Para resolver la ecuación de Laplace y Poisson veremos cuatro tipos de soluciones, tres analíticas y dos numéricas, descritas en apartados 2.5.1 a 2.5.5. Además en estos mismos apartados mostraremos las propiedades más importantes del potencial, que son:

1. El potencial posee solo una solución y es única.
2. El potencial no tolera mínimos ni máximos locales, y el valor en cierto punto del espacio es el promedio de los valores en la frontera.
3. La solución es una función armónica.
4. La ecuación cumple con la condición de linealidad.

### 2.5.1. Integración directa

Integración directa es el caso más sencillo, y que por lo general, no nos encontraremos casi nunca. Este caso nos ayudará a caracterizar el tipo de solución que buscamos y el potencial  $V$  mismo. En una sola dimensión el potencial es:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0, \quad \Rightarrow V(x) = mx + b. \quad (2.187)$$

Con la solución una línea recta. De esta solución podemos generalizar dos condiciones con las cuales el potencial debe cumplir, y que quizá sean obvias pero fundamentales. Estas son:

1. El potencial promedio entre  $V(x + x_1)$  y  $V(x - x_1)$  es simplemente el promedio para cualquier valor de  $x_1$ :

$$V(x) = \frac{1}{2} [V(x + x_1) + V(x - x_1)]. \quad (2.188)$$

2. La solución a la ecuación de Laplace no tolera valores de mínimos y máximos locales. Lo cual es una consecuencia de la primera condición.

Acá no hemos usado ningún tratamiento matemático riguroso para asegurar estos puntos, pero el lector está invitado a demostrarlos.

Adicionalmente, ¿cómo sabemos entonces que la solución es única? e.g., como sabemos que ecuación (2.187) posee solo una solución. Para esto hacemos uso del teorema de unicidad. La solución de la ecuación de Laplace en algún volumen  $\mathcal{V}$  es unicamente determinado si  $V$  está especificado en la frontera  $\mathcal{S}$ . Esto es, si conocemos el potencial en la frontera, entonces la solución es única.

Para probar esto supongamos que cierto volumen  $\mathcal{V}$  posee dos soluciones a la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 V_1 = 0, \quad \nabla^2 V_2 = 0,$$

ambos asumen cierto valor en la superficie  $\mathcal{S}$ . Para probar que estas cantidades son iguales usamos su diferencia, que debe ser cero,

$$V_3 \equiv V_1 - V_2.$$

Entonces, usando la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 V_3 = \nabla^2 V_1 - \nabla^2 V_2 = 0,$$

con lo que se llega a un valor cero en toda su frontera. Pero nótese que la solución de Laplace no puede poseer mínimos ni máximos locales, todo valor extremo debe ocurrir en la frontera, por lo que el máximo y mínimo de  $V_3$  es solo cero. Por lo tanto  $V_3$  debe ser cero en todo el Universo. Con lo que se prueba que  $V_1 = V_2$ .

Existen formas más correctas de probar este formalismo, pero para lo que queremos decir aquí es suficiente. La solución a la ecuación de Laplace es única (fundamental para probar el uso de método de imágenes apartado 2.5.2).

Figura 2.13: Método clásico de imágenes. Lo que se desea saber es la distribución del potencial  $V(x, y, z)$  para el siguiente Universo. La carga  $+q$  está a una distancia  $d$  de la superficie conductora puesta a tierra. Por simplicidad ponemos la carga en la posición  $(0, 0, d)$ .

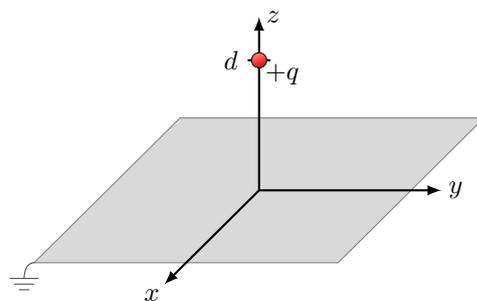
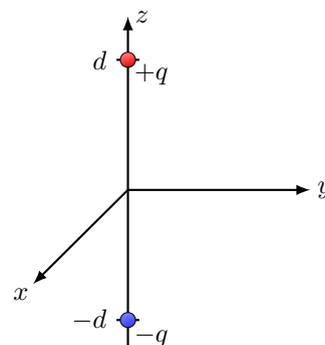


Figura 2.14: Método clásico de imágenes (equivalente). Lo que se desea saber es la distribución del potencial  $V(x, y, z)$  para el siguiente Universo. La carga  $+q$  está a una distancia  $d$  y una carga imaginaria  $-q$  está ahora a una distancia  $-d$ . El sistema es simétrico respecto del origen y equivale al mismo sistema expuesto en figura 2.13.



### 2.5.2. Método de imágenes

El método de las imágenes es un “truco” que nos deja expresar de forma rápida la solución a la ecuación de Laplace, siempre y cuando sea posible expresar el problema con una carga o distribución de cargas imaginaria o de imagen. La solución final es real y cumple con las propiedades de la ecuación de Laplace según lo descrito en apartado 2.5.1. La solución queda entonces expresada de forma analítica y no numérica, lo que es una gran ventaja. La aplicación de este método es bastante limitada y solo en ciertos casos es posible utilizarla.

El problema clásico de imágenes dice lo siguiente. Supongamos que tenemos una carga puntual  $q$  en el espacio libre, y que además existe una superficie conductora y conectada a tierra a una distancia  $d$  ( $d > z > 0$ ) de la carga. La pregunta es, ¿cuál es el potencial en la superficie conductora? Vea figura 2.13.

Matemáticamente debemos resolver la ecuación de Poisson para  $z > 0$  con una carga  $+q$  ubicada en  $(0, 0, d)$ , y que está sujeta a las siguientes condiciones de frontera:

1.  $V(z = 0) = 0$  ya que la placa conductora está puesta a tierra, i.e., el potencial siempre será cero en ella.
2.  $V \rightarrow 0$  cuando estemos alejados al infinito de la carga  $+q$ , esto es  $x^2 + y^2 + z^2 \gg d^2$ .

Entonces, según el teorema de unicidad de la ecuación de Laplace, solo existe una función que cumple con este problema, y si por alguna manera encontramos un atajo para resolver el problema y la solución cumple con la ecuación de Laplace, entonces la solución es correcta.

El truco está en olvidarnos del problema del plano y realizar un problema similar. Supongamos que existe una carga  $+q$  y  $-q$  en la posición  $(0, 0, d)$  y  $(0, 0, -d)$ , respectivamente, simétrica respecto del origen (figura 2.14). Entonces si calculamos el potencial de este sistema tenemos que, simplemente usando ecuación (2.182),

$$V(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}} \right].$$

Si nos fijamos en este resultado  $V(x, y, z)$  cumple exactamente con las condiciones de frontera del problema original y además es válida para  $z > 0$ . Por lo tanto, la solución al problema original es simplemente la solución del problema de las cargas  $+q$  y  $-q$  en el espacio libre.

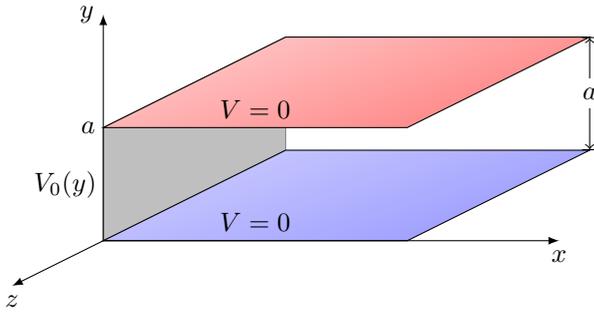


Figura 2.15: Variables separables en coordenadas cartesianas. Placas metálicas paralelas al plano  $xz$ . La placa superior está a una distancia  $a$  de la placa inferior. La sección cerrada en  $x = 0$  mantiene un potencial  $V_0(y)$ . Se desea conocer la distribución del potencial entre las dos placas.

**Ejemplo 2.5**

Una carga puntual  $q$ , situada a una distancia  $a$  del centro de una esfera conductora conectada a tierra, con radio  $R$ . Hallar el potencial fuera de la esfera. Solución:

$$V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (ra/R)^2 - 2ra \cos \theta}} \right].$$

**2.5.3. Separación de variables**

El método de separación de variables es un método analítico que nos permite resolver la ecuación de Laplace en cualquier tipo de coordenadas. Efectivamente, el método transforma una PDE a un set de tres o menos de ordinary differential equation (ODE). El método consiste en **asumir** que la solución a la ecuación de Laplace es un producto de funciones de una sola variable, e.g., en coordenadas cartesianas

$$V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z), \tag{2.189}$$

con  $X, Y$ , y  $Z$  funciones de variables  $x, y$ , y  $z$ , respectivamente. Por lo general es aplicable en situaciones donde se nos pide el potencial  $V$  pero la densidad de carga  $\sigma$  es conocida en la frontera. Dependiendo del tipo de coordenadas usado cartesianas, cilíndricas, o esféricas (apartado 1.3), el problema llegará a soluciones con un set de constantes mediante sumas de Fourier, funciones de Bessel, o funciones de Legendre, respectivamente (vea Griffiths 2017, capítulo 3). Es recomendable que el lector sepa como llegar a estas soluciones y luego, simplemente, aplicarla a las condiciones de borde del sistema y tratar de no repetir derivaciones complejas.

**Coordenadas cartesianas**

Seguiremos el mismo ejemplo listado en Griffiths (2017) (Example 3.3). Supongamos que tenemos dos placas de metal conductor, conectadas a tierra, y paralelas al plano  $xz$ , una en  $y = 0$  y otra en  $y = a$ . Del lado izquierdo, en  $x = 0$ , se tiene una sección cerrada con algún material aislado de las dos placas y que mantiene un potencial de la forma  $V_0(y)$ . Halle el potencial dentro de las placas, vea figura 2.15.

Entonces debemos resolver la ecuación de Laplace en dos dimensiones, ya que la figura es independiente de la coordenada  $z$  (y su largo en  $-z$  irrelevante). Entonces la ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas es:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Antes de reemplazar la solución de variables separadas,  $V(x, y) = X(x)Y(y)$ , encontramos las condiciones de frontera del problema. Estas son:

- (i)  $V(y = 0) = 0$
- (ii)  $V(y = a) = 0$
- (iii)  $V(x = 0) = V_0(y)$
- (iv)  $V \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$

## 2. Campos electromagnéticos cuasi-estáticos y sus propiedades en materiales

Entonces reemplazamos:

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{dY}{dy} = 0 \quad (2.190)$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{dY}{dy} = 0, \quad (2.191)$$

el método se basa en aislar las variables comunes en distintos factores y luego igualarlas a constantes:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{dY}{dy} = k^2. \quad (2.192)$$

Donde, obviamente  $k - k = 0$ . Nótese que hemos transformado una PDE en una ODE con solo unos simples pasos. No explicaremos como es que llegamos a estas soluciones, pero el lector deberá saber que son:

$$X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}, \quad Y(y) = C \sin(ky) + D \cos(ky). \quad (2.193)$$

Usando la condición de frontera (iv) eliminamos la constante  $A$ , y  $B$  es absorbida por las constante  $C$  y  $D$ ,

$$V(x, y) = e^{-kx} (C \sin(ky) + D \cos(ky)).$$

Ahora usando la condición (i) anulamos  $D$  y usando la condición (ii), llegamos a  $ka = 0$ , pero para los valores evaluados en una función seno tenemos:

$$k = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Esta última condición nos ha entregado un set infinito de soluciones para la ecuación de Laplace, pero ninguna de ellas satisface por completo la última condición de frontera. Como es usual en una ODE, la solución más general estará dada por la combinación lineal de todas las posibles soluciones, esto es: sea  $V_1, V_2, V_3, \dots$  soluciones a la ecuación de Laplace, entonces su combinación lineal  $V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 + \dots$ , es la solución, ya que:

$$\nabla^2 V = \alpha_1 \nabla^2 V_1 + \alpha_2 \nabla^2 V_2 + \alpha_3 \nabla^2 V_3 + \dots = 0.$$

Usando este hecho entonces construimos nuestra solución más general:

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n\pi \frac{x}{a}} \sin\left(n\pi \frac{y}{a}\right). \quad (2.194)$$

Esta solución cumple con las condiciones (i), (ii), y (iv), y también con (iii) pero usando otro truco matemático, llamado series de Fourier. Para esto multiplicamos ecuación (2.194) por  $\sin\left(n'\pi \frac{y}{a}\right)$  (con  $n'$  un entero positivo) e integramos desde 0 hasta  $a$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^a \sin\left(n\pi \frac{y}{a}\right) \sin\left(n'\pi \frac{y}{a}\right) dy = \int_0^a V_0(y) \sin\left(n'\pi \frac{y}{a}\right) dy.$$

Esta integral tiene como resultado:

$$\int_0^a \sin\left(n\pi \frac{y}{a}\right) \sin\left(n'\pi \frac{y}{a}\right) dy = \begin{cases} 0, & n \neq n' \\ \frac{a}{2}, & n = n' \end{cases}$$

Con lo que podemos llegar al valor de las constantes  $C_n$ :

$$C_n = \frac{2}{a} \int_0^a V_0(y) \sin\left(n\pi \frac{y}{a}\right) dy.$$

Para el caso en que  $V_0(y) = V_0$  sea una constante entonces tendremos simplemente:

$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n\pi \frac{x}{a}} \sin\left(n\pi \frac{y}{a}\right). \quad (2.195)$$

Con este resultado analítico podemos hacemos uso de todas las condiciones que nos impone el potencial, en particular, no existe ningún valor extremo en el interior del sistema, hemos usado una solución armónica y combinación lineal, y además es única. La figura 2.16 representa la ecuación (2.195).

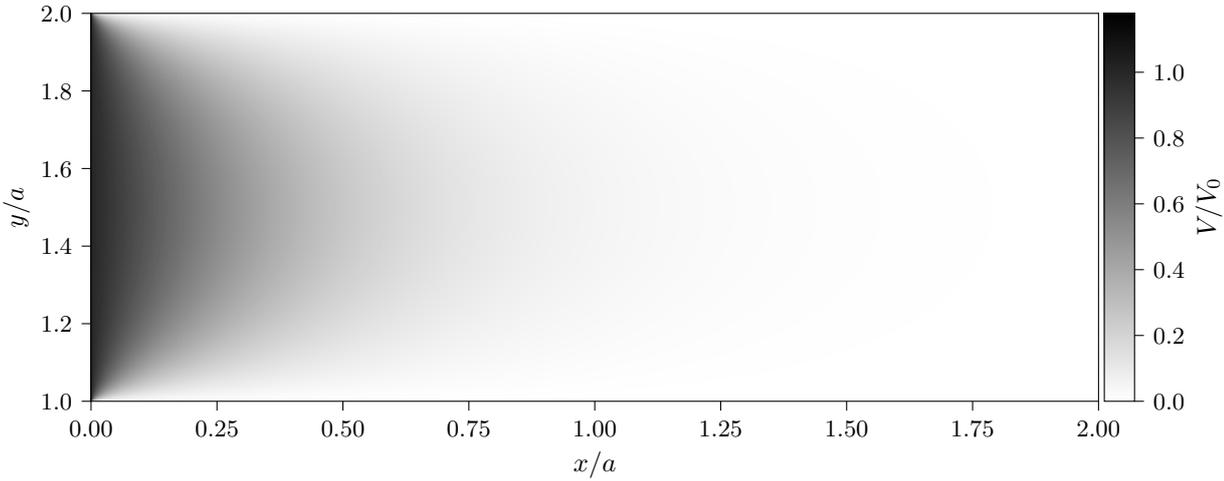


Figura 2.16.: Solución potencial en variables separables cartesianas. La solución corresponde a la ecuación (2.195), al asumir una constante para  $V_0(y) = V_0$ . La solución es tridimensional pero graficada de forma bidimensional o con curvas de nivel en colores.

### 2.5.4. Método de momentos

El método de los momentos es un método numérico<sup>10</sup> que nos deja resolver la ecuación de Laplace, por lo general en forma integral, en términos de una discretización de la densidad de carga. Para una revisión completa ver Paul & Nasar (1998) capítulo 10. Para esto simplemente hacemos uso de ecuación (2.182) y la subdividimos en secciones más pequeñas, i.e.,

$$\rho(x, y, z) = \alpha_1 \rho_1(x, y, z) + \alpha_2 \rho_2(x, y, z) + \alpha_3 \rho_3(x, y, z) + \dots + \alpha_N \rho_N(x, y, z) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i(x, y, z).$$

Donde las funciones  $\rho_i(x, y, z)$  son funciones conocidas, o preseleccionadas, y  $\alpha_i$  un set de constantes a determinar. Podemos entonces describir el potencial en términos de estas mismas variables discretas, simplemente usando la definición integral del potencial y la densidad de carga, ecuación (2.182), i.e.,

$$V_j = V(x_j, y_j, z_j) = \sum_{i=1}^N K_{ji} \alpha_i \quad (2.196)$$

donde la variable  $K_{ji}$  es

$$K_{ji} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_i}{s_{ji}} d\tau'.$$

El valor del potencial debe ser conocido en cierto punto  $V_j$ , además las cantidades  $K_{ji}$  también son conocidas ya que  $\rho_i$  lo son. Entonces el problema se reduce a resolver un set de ecuaciones lineales para las constantes  $\alpha_i$  (cantidades desconocidas),

$$\begin{aligned} V_1 &= K_{11}\alpha_1 + K_{12}\alpha_2 + \dots + K_{1N}\alpha_N \\ V_2 &= K_{21}\alpha_1 + K_{22}\alpha_2 + \dots + K_{2N}\alpha_N \\ &\vdots \\ V_N &= K_{N1}\alpha_1 + K_{N2}\alpha_2 + \dots + K_{NN}\alpha_N \end{aligned}$$

Efectivamente hemos transformado un problema complejo integral a un set de ecuaciones lineales que puede ser resuelto mediante muchos métodos, desde algebra lineal a métodos iterativos.

En general, el método de los momentos discretiza la densidad de carga de algún sistema, pero necesitamos información adicional de como es que se distribuye esta densidad. Sin esta información el problema pierde solución. El problema más clásico es el análisis de la distribución de carga, no homogénea, para el caso de un capacitor de placas paralelas (en la que anteriormente asumimos es constante).

<sup>10</sup>Ejemplo de open source software: <https://www.nec2.org>.

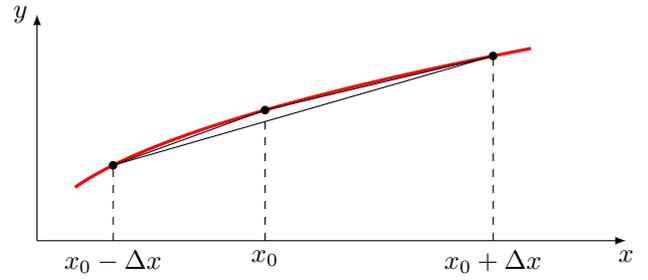


Figura 2.17: Estimación de la derivada de una función  $y = f(x)$  en el punto  $x_0$ .

### 2.5.5. Diferencias finitas

El método de diferencias finitas o *finite difference method* (FDM) es el método fundamental y base de cualquier otro método numérico para resolver las ecuaciones de Laplace y Poisson. El método consiste en discretizar el espacio en una malla de puntos, que llamaremos nodos, y luego aproximar las derivadas parciales por una serie de diferencias finitas. Similar a lo que ocurre en el clásico método *finite element method* (FEM) (Hughes 2000), donde propiedades mecánicas son usadas para resolver la PDE, pero ahora usamos propiedades de las corrientes, densidades y fuentes. El método de diferencias finitas es la base de cualquier software *computer-aided design* (CAD) que luego se le realiza un mallado o *mesh grid* para resolver el problema de una distribución altamente compleja.

#### Principio matemático

El FDM se basa en la aproximación de las derivadas parciales por diferencias finitas. Para esto usaremos la expansión de Taylor de una función  $f(x)$  alrededor de un punto  $x_0$ . Aproximamos la pendiente de una curva en cierto punto  $P$ , para eso podemos usar lo siguiente: *forward-difference*, *backward-difference*, *central-difference*, o incluso segundas derivadas (figura 2.17),

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (2.197)$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \quad (2.198)$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (2.199)$$

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad (2.200)$$

Cualquier aproximación de este tipo es llamada una diferencia finita.

Expandiendo en torno a  $x_0$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + \frac{1}{2!} (\Delta x)^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!} (\Delta x)^3 f'''(x) + \dots \quad (2.201)$$

$$f(x_0 - \Delta x) = f(x_0) - \Delta x f'(x_0) + \frac{1}{2!} (\Delta x)^2 f''(x_0) - \frac{1}{3!} (\Delta x)^3 f'''(x) + \dots \quad (2.202)$$

Sumando ambas expansiones ecuaciones (2.201) y (2.202),

$$f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) = 2f(x_0) + (\Delta x)^2 f''(x_0) + \mathcal{O}(\Delta x)^4 \quad (2.203)$$

Con  $\mathcal{O}(\Delta x)^4$  el error que hemos agregado en la serie al momento de truncar su valor. Luego podemos obtener que (asumiendo  $\mathcal{O}(\Delta x)^4 \approx 0$ ):

$$f''(x_0) \approx \frac{1}{(\Delta x)^2} [f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)] \quad (2.204)$$

Lo que corresponde a la ecuación (2.200).

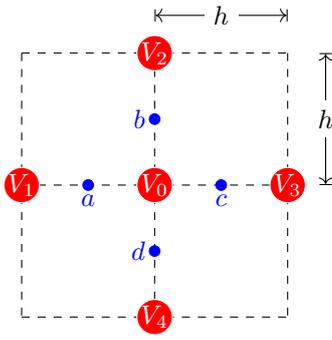


Figura 2.18: Cálculo de potencial en cada punto de la malla usando valores de puntos cercanos. Los puntos  $a, b, c, d$  son puntos medios entre los valores conocidos de potencial  $V_i$ , con  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ . La cantidad  $h$  es el tamaño de la malla y por lo general es igual para ambas dimensiones. Los potenciales siempre se miden en los nodos de la malla.

### Malla básica

Supongamos que deseamos calcular el valor de un potencial en cierto lugar del espacio, pero solo conocemos el valor del potencial en los extremos del problema (lo que normalmente ocurre en laboratorio). Para esto tenemos una malla como en la figura 2.18, donde nos interesa encontrar el valor del potencial en un punto central  $V_0$ , pero al mismo tiempo conocemos los valores del potencial a los extremos del problema (viz., conocemos  $V_1, V_2, V_3$ , y  $V_4$ ). Realizamos un mallado de tal forma que usmos un tamaño de elemento (o elemento finito)  $h$ . Nótese que el valor de  $h$  nos entregará más o menos precisión, pero dependiendo del problema a calcular su elección es fundamental.

Para encontrar el valor de este potencial  $V_0$  calculamos las derivadas con sus respectivas diferencias finitas. Primero calculamos las derivadas numéricas del potencial respecto a las coordenadas  $x$  en el punto medio  $a$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=a} \approx \left. \frac{\Delta V}{\Delta x} \right|_{x=a} = \frac{V_0 - V_1}{x_0 - x_1} = \frac{1}{h} (V_0 - V_1). \quad (2.205)$$

Similarmente calculamos en  $c$ :

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=c} \approx \frac{1}{h} (V_3 - V_0). \quad (2.206)$$

Con los valores en  $a$  y  $c$ , podemos entonces calcular la segunda derivada en el punto  $x = 0$

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_{x=0} \approx \frac{1}{h^2} [(V_3 - V_0) - (V_0 - V_1)]. \quad (2.207)$$

Eso en la dirección  $x$ , en  $y$  repetimos la misma mecánica

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right|_{y=0} \approx \frac{1}{h^2} [(V_4 - V_0) - (V_0 - V_2)], \quad (2.208)$$

luego en el caso de la ecuación de Laplace, el valor de  $V_0$  es:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2} (V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0) = 0 \quad (2.209)$$

$$V_0 \approx \frac{1}{4} (V_1 + V_2 + V_3 + V_4) \quad (2.210)$$

Obviamente la solución varía con el tipo de malla utilizada, pero la solución esta dentro de cierta tolerancia Ecuación (2.210) es llamada: *five-point equal arm difference*, y es la base para cualquier problema de FDM. Nótese que si las dimensiones de  $h$  son distintas en  $x, y$  entonces la solución depende del elemento elegido (o equivalentemente el cociente de estos elementos).

### Malla básica con dos materiales

Similarmente al caso anterior, ahora usaremos la misma ecuación (2.210), pero teniendo en cuenta la unión de dos materiales. Supongamos nuevamente la misma configuración pero ahora dos materiales dieléctricos con

Figura 2.19: Cálculo de potencial en cada punto de la malla usando valores de puntos cercanos. La parte gris es un material de constante  $\epsilon_2$  y la parte blanca de una constante  $\epsilon_1$ . Prácticamente es el mismo problema a le mostrado en figura 2.18, y nuevamente deseamos conocer  $V_0$ , y que conocemos  $V_1, V_2, V_3$ , y  $V_4$ . La solución general está expresada en ecuación (2.215).

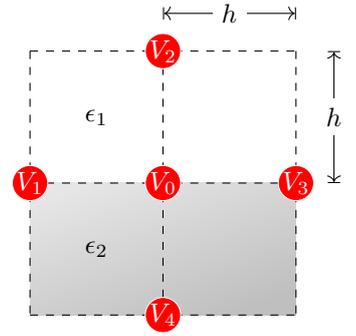
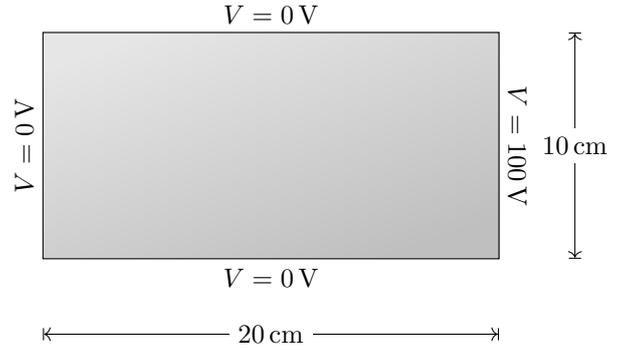


Figura 2.20: FDM aplicado a un material rectangular de lados 10 cm  $\times$  20 cm. Valores en los extremos del material son conocidos y por lo general manejados en laboratorio.



constantes  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ , figura 2.19. Para llegar a una expresión similar a la ecuación (2.210) partimos de la ley de Gauss en materiales, ecuación (2.72):

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \oint_C \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (2.211)$$

y es cero ya que no existe carga encerrada, luego  $E = -\nabla V$ ,

$$\oint_C \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \epsilon \nabla V \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \epsilon \frac{\partial V}{\partial n} dl = 0 \quad (2.212)$$

$$= \frac{V_1 - V_0}{h} \left( \epsilon_1 \frac{h}{2} + \epsilon_2 \frac{h}{2} \right) + \frac{V_2 - V_0}{h} \epsilon_1 h + \frac{V_3 - V_0}{h} \left( \epsilon_1 \frac{h}{2} + \epsilon_2 \frac{h}{2} \right) + \frac{V_4 - V_0}{h} \epsilon_2 h \approx 0 \quad (2.213)$$

$$= \epsilon_1 V_1 + \epsilon_1 V_2 + (\epsilon_1 + \epsilon_2) V_3 + \epsilon_2 V_4 - 2(\epsilon_1 + \epsilon_2) V_0 \approx 0 \quad (2.214)$$

luego,

$$\Rightarrow V_0 \approx \frac{1}{2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} [\epsilon_1 V_1 + \epsilon_1 V_2 + (\epsilon_1 + \epsilon_2) V_3 + \epsilon_2 V_4]. \quad (2.215)$$

Con lo que hemos llegado a una expresión similar a ecuación (2.210). Más aún, si  $\epsilon_1 = \epsilon_2$  ecuación (2.215) se reduce a ecuación (2.210).

### Malla compleja

Considere una región rectangular como se muestra en la figura 2.20. Utilice FDM para determinar el potencial y su distribución dentro de la región.

Para realizar el problema primero hacemos una malla regular de  $h = 5$  cm, es decir,  $2 \times 4 = 8$  elementos. Esto implica que tendremos tres nodos al interior del material, que los llamaremos  $V_1, V_2$ , y  $V_3$  (figura 2.21).

Reemplazamos en la ecuación (2.210) para cada uno de los nodos 1, 2 y 3. Ahora reescribimos el problema de forma matricial,

$$4V_1 - V_2 = 0 \quad (2.216)$$

$$V_1 - 4V_2 + V_3 = 0 \quad (2.217)$$

$$V_2 - 4V_3 = -100 \quad (2.218)$$

$$(2.219)$$

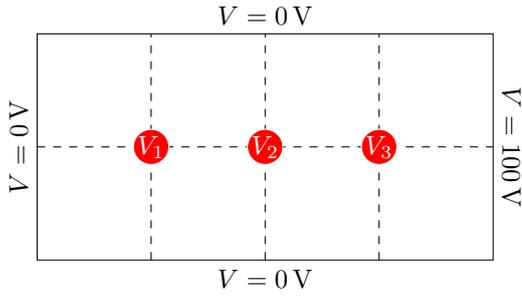


Figura 2.21: Nuevo mallado de figura 2.20. Los nodos  $V_1, V_2,$  y  $V_3$  son los nodos interiores del material y los que deseamos calcular. Nodos exteriores están dados por los potenciales escritos.

	<b>FDM</b> $h = 5$ cm	$\delta(h = 5$ cm)	<b>FDM</b> $h = 2.5$ cm	$\delta(h = 2.5$ cm)	<b>Resultado analítico</b>
$V_9$	1.786 V	63 %	1.289 V	17.8 %	1.094 V
$V_{11}$	7.143 V	30 %	6.019 V	9.7 %	5.489 V
$V_{13}$	26.786 V	2.7 %	26.289 V	0.75 %	26.094 V

Cuadro 2.6.: Comparación en el nivel de error  $\delta$  del calculo de **FDM**. Se analizaron tres muestras de potencial  $V_9, V_{11},$  y  $V_{13}$ , (donde si no existe en la malla de menor resolución se usa el nodo mas cercano).

Es decir:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{bmatrix} \tag{2.220}$$

$$[\mathbf{A}] \mathbf{V} = \mathbf{B} \tag{2.221}$$

Con  $[\mathbf{A}]$  una matriz y  $\mathbf{V}, \mathbf{B}$  vectores. Lo que se ha transformado en un problema de álgebra lineal y el cual existen múltiples métodos para resolverlo (i.e., valore propios),  $\mathbf{V} = [\mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}$ . Evaluando encontramos que la solución es:

$$V_1 = 1.79 \text{ V}, \quad V_2 = 7.14 \text{ V}, \quad V_3 = 26.79 \text{ V}. \tag{2.222}$$

Estudiando este mismo material podemos ahora hacer el cálculo para tipo de elemento más pequeño, por ejemplo  $h = 2.5$  cm, lo que generará dentro 25 elementos. Podemos replicar el análisis y calcular nuevamente la  $[\mathbf{A}]^{-1}$  de valores propios, i.e.,

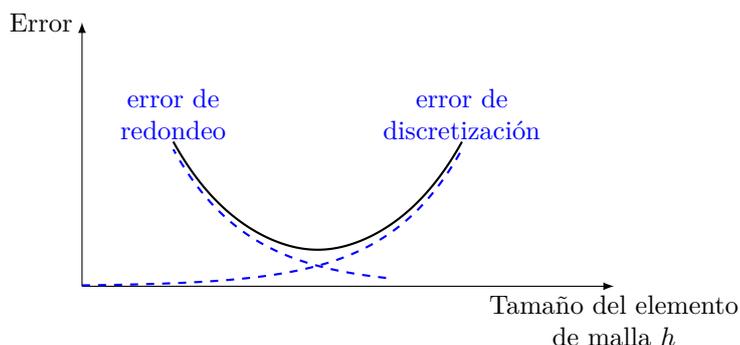
$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Lo que ya no es práctico de resolver en un papel. El vector  $\mathbf{V}$  posee 21 componentes desde  $V_1$  a  $V_{21}$ .

**Exactitud, precisión y estabilidad de la solución**

La pregunta ahora es, ¿qué tanto ganamos con incrementar el número de elementos? Esta cálculo queda expuesto en la cuadro 2.6.

Figura 2.22: Error total en el cálculo de la solución de un problema de FDM. El error total es la suma del error de discretización y el error de redondeo. La columna con resultado analítico fue realizada mediante otro método de solución de PDE y es la solución verdadera.



Existen dos grandes errores al generar una malla de FDM, errores de redondeo y error en discretización. El primero corresponde al error intrínseco de la aproximación de la derivada usada, y que al aumentar el tamaño del elemento usado disminuyen. Por otro lado, errores de discretización se ven altamente afectados al aumentar el tamaño del elemento (ya que la aproximación de la derivada es menos precisa), pero al mismo tiempo el error de redondeo disminuye. En la figura 2.22 se muestra el error total de la solución, donde se ve que existe un mínimo en el error total, y que este mínimo se encuentra en un tamaño de elemento  $h$ . Dependiendo del problema existirá una solución específica. Nótese que las curvas de error total calculada en figura 2.22 corresponde a la suma en propagación de errores y **no** la suma directa.

Por lo general, aumentar el número de elementos, o equivalentemente disminuir su tamaño respecto al objeto a modelar nos entrega una solución más exacta, pero la precisión solo se verá afectada en como definamos nuestra ecuación (2.210). Una función más precisa llegará a un resultado estable más rápido, pero el número de cálculos asociados aumentará (comúnmente). En general, **precisión no es lo mismo que la exactitud**, exactitud es el nivel de dispersión de nuestro resultado y la precisión es qué tan cerca estamos del resultado verdadero.

### Ejemplo 2.6

Una región rectangular de  $6\text{ m} \times 8\text{ m}$  con potencial exactamente igual a cero en sus cuatro fronteras,  $V = 0$ . La distribución de carga, sin embargo, está dada por  $\rho = 2\epsilon_0$ . Entonces, resuelva numéricamente la ecuación de Poisson y determine la distribución del potencial en la región rectangular. *Hint*: similar a los casos anteriores pero ahora debemos modificar la ecuación (2.210),

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -2.$$

### Más allá del método

FDM posee muchas aplicaciones en ingeniería, en particular su uso mixto con FEM. Existe mucho software, incluso libre, que trabaja de forma directa resolviendo estos sets de ecuaciones lineales. En particular recomendamos al lector revisar **Gmsh** (Geuzaine & Remacle 2009), **freefem++** (Hecht 2012) y **luamesh**<sup>11</sup> (una extensión de L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X para dibujar mallas de forma profesional).

<sup>11</sup><https://plmlab.math.cnrs.fr/mchupin/luamesh>

## 3. Radiación: ondas planas

En este capítulo veremos como las ondas electromagnéticas son derivadas desde las ecuaciones de Maxwell (partiendo por la ecuación de onda mecánica), apartado 2.2, su definición para ondas monocromáticas y planas, propagación a través de distintos medios con distinta incidencia, apartados 3.3 y 3.4, y finalmente propiedades de polarización de la luz. La propagación de ondas se verá solo desde un punto de vista clásico de la electrodinámica, y no se considerará la naturaleza cuántica de la luz (Tolstoy 1973). Problemas clásicos pueden describir la propagación desde radio hasta longitudes de onda más pequeñas que el óptico, pero una vez que las energías y campos eléctricos y magnéticos son muy grandes ya no es posible realizar este tipo de aproximaciones. De todas formas, al igual que la mecánica de Newton, válida hasta el día de hoy y aplicable a nuestra cotidianidad, el electromagnetismo de Maxwell describe por completo estos problemas.

### 3.1. Ecuación de onda para campos eléctrico y magnético

#### 3.1.1. Onda mecánica

Antes de estudiar qué es una onda electromagnética comenzaremos por definir una onda, en términos generales, y como se han estudiado muchos años antes de la ecuación de onda electromagnética. Una onda es una perturbación que se propaga en el espacio y en el tiempo. En el caso de una onda mecánica, esta perturbación se propaga en un medio material, por ejemplo, una cuerda, un resorte, etc., donde su propagación puede ser transversal o longitudinal. En el caso de una onda electromagnética, esta perturbación se propaga en el vacío.

Una onda mecánica es una perturbación de un medio continuo que se propaga en el espacio y en el tiempo con una forma definida y velocidad constante. En presencia de ciertos materiales esta perturbación disminuirá su tamaño (pero no su forma), y si el medio es “dispersivo” frecuencias distintas se propagarán a distintas velocidades. Supongamos ahora que generamos una onda en una cuerda, con  $f(z, t)$ , la función de onda con  $z$  la posición de desplazamiento y  $t$  el tiempo. El desplazamiento de la onda está dado por  $ut$ , con  $u$  la velocidad de propagación, entonces podemos escribir la función de onda como:

$$f(z, t) = f(z - ut, 0). \quad (3.1)$$

Lo que nos dice que la función  $f(z, t)$  depende con  $z$  y  $t$  en algún tiempo pasado. Entonces cualquier tipo de función que cumpla con la estructura anterior es una onda mecánica (y por ende solución a la ecuación de onda).

Consideremos ahora una cuerda con cierta tensión, en donde la dirección de la fuerza de tensión con respecto a la horizontal da ángulos  $\theta$  y  $\theta'$  del principio y final de la sección de la cuerda, como se aprecia en figura 3.1. Entonces podemos calcular la fuerza neta que experimenta un trozo de cuerda  $\Delta z$ ,

$$\sum F = T \sin \theta' - T \sin \theta \approx T (\tan \theta' - \tan \theta) = T \left( \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{z+\Delta z} - \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_z \right) \Delta z \approx T \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \Delta z. \quad (3.2)$$

Evidentemente, podemos hacer aproximaciones de lo pequeño, e.g.,  $\sin \theta \approx \frac{df}{dz} \approx \tan \theta$ .

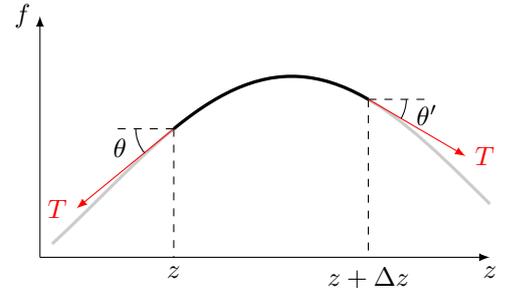
Si tomamos la masa por unidad de longitud como  $\mu_0$ , entonces la segunda ley de Newton es:

$$\sum F = \mu \Delta z \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \quad \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \quad (3.3)$$

Donde hemos definido la velocidad de propagación como  $v = \sqrt{T/\mu}$ . Finalmente podemos escribir la ecuación de onda para una una mecánica:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \quad (3.4)$$

Figura 3.1: Tensión en una cuerda propagando una onda mecánica (donde la curva es una sinusoidal). El valor de la fuerza de tensión está dado por  $T$  y el ángulo entre la horizontal y la tensión es  $\theta$  y  $\theta'$  en el principio y final de la sección de la cuerda. Hemos seleccionado un pequeño diferencial de longitud  $\Delta z$  para analizar la tensión en la cuerda.



El lector puede comprobar que esta ecuación solo admite ecuaciones de la forma  $f(z, t) = f(z - vt)$ . Una revisión más completa de lo aquí expuesto se encuentra en capítulo 9 de Griffiths (2017). Otro punto que el lector puede comprobar es que la ecuación de onda es **lineal**, es decir la suma de dos soluciones también son solución de la ecuación de onda (similar al caso de Laplace apartado 2.4.4). Es evidente que funciones del tipo sinusoidales cumplen con esta característica, hace sentido físico que la suma de dos ondas sea otra onda. En particular, aquí también usaremos la notación fasorial (apartado 2.4.1) y la expresión de ondas con términos complejos (apartado 1.5).

### 3.1.2. Onda electromagnética

Consideremos ahora las ecuaciones de Maxwell para medios lineal, isotrópico y homogéneo, ecuaciones (2.90) a (2.93). Asumimos también que no existe carga libre en la región  $\rho$  y que las corrientes son solo del tipo conductivas (i.e.,  $\mathcal{J} = \sigma \mathcal{E}$ ). Este tipos de regiones, tanto en el espacio libre ( $\sigma = 0$ ) como en materiales conductores o dieléctricos son muy comunes, y las ecuaciones de Maxwell quedan expresadas como:

$$(i) \quad \nabla \cdot \mathcal{E} = 0 \quad (3.5)$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \mathcal{H} = 0 \quad (3.6)$$

$$(iii) \quad \nabla \times \mathcal{E} = -\mu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \quad (3.7)$$

$$(iv) \quad \nabla \times \mathcal{H} = \sigma \mathcal{E} + \epsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \quad (3.8)$$

Si aplicamos el rotor de ecuación (2.92) y lo reemplazamos en ecuación (2.93),

$$\nabla \times \nabla \times \mathcal{E} = -\mu\sigma \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2}. \quad (3.9)$$

Similarmente podemos hacer el proceso inverso, operar el rotor en ecuación (2.93) y reemplazar en ecuación (2.93),

$$\nabla \times \nabla \times \mathcal{H} = -\mu\sigma \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2}. \quad (3.10)$$

Utilizando ecuación (1.32), apartado 1.1.6, ambos términos forman el ya conocido operador Laplaciano:

$$\nabla^2 \mathcal{E} = \mu\sigma \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} \quad (3.11)$$

$$\nabla^2 \mathcal{H} = \mu\sigma \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} \quad (3.12)$$

donde también sabemos que  $\nabla \cdot \mathcal{E} = \nabla \cdot \mathcal{H} = 0$ . Comparando con ecuación (3.4) llegamos a una forma similar a la ecuación de onda mecánica, ecuación (3.4), pero ahora existen términos de una derivada parcial extra. Ecuaciones (3.11) y (3.12), es conocida como la ecuación de onda electromagnética o la ecuación de Helmholtz. Para nuestro análisis, nos centraremos en condiciones que ocurren en materiales en condiciones ordinarias, es decir soluciones armónicas. Podemos entonces reescribir el set ecuaciones (3.11) y (3.12) como:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = j\omega\mu (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E} \quad (3.13)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = j\omega\mu (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{H} \quad (3.14)$$

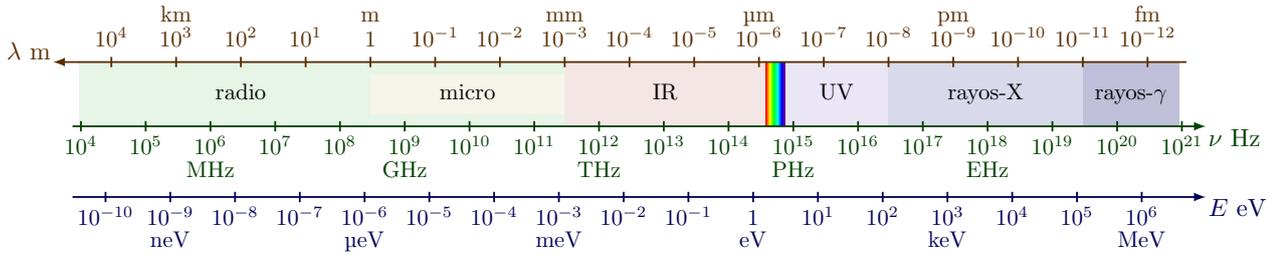


Figura 3.2.: Espectro electromagnético y clasificación de sus distintos tipos de onda. Clasificamos el espectro en ondas de radio, microondas, infrarrojo, visible, ultravioleta, rayos-X y rayos- $\gamma$ . La radiación óptica está en el rango de  $\sim 400\text{--}700\text{ nm}$ .

Definimos una nueva constante compleja:

$$\gamma^2 \equiv j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon) \quad (3.15)$$

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} = \alpha + j\beta \quad (3.16)$$

como la **constante de propagación**. Como hemos definido  $\gamma$  como una constante entonces podemos siempre describirla en términos de  $\gamma = \alpha + j\beta$ . Entonces tenemos el set de ecuaciones de onda electromagnética para un medio lineal, isotrópico y homogéneo

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \gamma^2 \mathbf{E} \quad (3.17)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \gamma^2 \mathbf{H} \quad (3.18)$$

las cuales son un set de seis ecuaciones. Existe una definición más general de lo aquí expuesto, pero para los siguientes capítulos solo consideraremos el set ecuaciones (3.17) a (3.18).

Esta definición moderan y más ingenieril de una onda electromagnética fue vista desde un punto de vista físico por James Clerk Maxwell (aunque la notación que comúnmente usamos hoy en día es de Oliver Heaviside), y fue él quien desde la teoría confirmó la propiedades de onda de la luz o radiación electromagnética, según sus propias palabras:

*The agreement of the results seems to show that light and magnetism are affections of the same substance, and that light is an electromagnetic disturbance propagated through the field according to electromagnetic laws (Clerk Maxwell 1865).*

En concordancia con los resultados, parece ser que los fenómenos de la luz y el magnetismo son efectos de una misma substancia, y que la luz es un fenómeno electromagnético que se propaga a través de un campo vectorial siguiendo las leyes del electromagnetismo (traducido por el autor).

Las ondas electromagnéticas se clasifican en ondas de radio, microondas, infrarrojo, visible, ultravioleta, rayos-X y rayos- $\gamma$ . La clasificación se puede ver en figura 3.2. La clasificación de las ondas electromagnéticas se basa en la frecuencia, energía, o longitud de onda de la onda. La energía de una onda electromagnética está dada por (una expresión fuera de la física clásica; vea Leighton 1959 capítulo 2):

$$E = h\nu, \quad (3.19)$$

con  $h$  la constante de Planck (apéndice A; Beiser 2002). Hemos expresado la energía en electron-volt eV, que es la energía que adquiere un electrón al ser acelerado por una diferencia de potencial de un volt (unidad muy usada en rayos-X y rayos- $\gamma$ ).

Para nuestro interés en la Tierra, telecomunicaciones y radio astronomía se generan en ondas de radio de microondas y ondas de radio largas, donde la atmósfera es semi-permeable a estas frecuencias (desde los 100 MHz a varios THz).

## 3.2. Propagación de ondas planas

La propagación de ondas **planas** hace referencia a que cada punto en el espacio para  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{H}$  caen en un plano (entiéndase como una superficie del plano coordenado, e.g., plano  $xy$ ). Además veremos ondas planas **uniformes**, donde uniforme se refiere a que podemos describir la onda en términos fasoriales y que la amplitud

### 3. Radiación: ondas planas

y fase de la onda son independientes de la posición. Para describir ondas, por lo general orientaremos su propagación en la dirección  $z$  (lo que no pierde generalidad de nuestra solución), por lo que definiremos las componentes como:

$$\mathbf{E} = E_x(z) \hat{\mathbf{x}} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{H} = H_y(z) \hat{\mathbf{y}} = -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z} \hat{\mathbf{y}}. \quad (3.21)$$

Donde en el segundo término hemos usado la ley de Faraday. El lector también puede comprobar que las componentes de  $E_x$  y  $H_y$  son independientes de  $x$  y  $y$ , lo que implica que  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  son siempre ortogonales. Nótese que el simple cálculo del vector de Poynting, ecuación (2.160), va en la misma dirección de propagación  $\mathcal{E} \times \mathcal{H}$ ,  $\hat{\mathbf{z}}$ .

Si vemos el caso más simple para ecuaciones (3.17) a (3.18), donde  $E_y = E_z = 0$  y  $H_x = H_z = 0$ , solo nos quedarán las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} = \gamma^2 E_x \quad (3.22)$$

$$\frac{d^2 H_y}{dz^2} = \gamma^2 H_y, \quad (3.23)$$

como ya es sabido, este set de ODE se puede resolver mediante una *ansatz* de la forma:

$$E_x = E^+ e^{-\gamma z} + E^- e^{\gamma z} = E^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + E^- e^{\alpha z} e^{j\beta z} \quad (3.24)$$

$$H_y = H^+ e^{-\gamma z} + H^- e^{\gamma z} = H^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + H^- e^{\alpha z} e^{j\beta z} \quad (3.25)$$

donde hemos usado un de constantes  $E^+$ ,  $E^-$ ,  $H^+$ , y  $H^-$ , aún no definidas y que debemos encontrar (y que pueden o no ser un número complejo). Substituyendo en ecuación (3.22) o ecuación (3.23), podemos llegar a la relación:

$$-\gamma E^+ e^{-\gamma z} + \gamma E^- e^{\gamma z} = j\omega\mu (H^+ e^{-\gamma z} + H^- e^{\gamma z}), \quad (3.26)$$

podemos entonces llegar a una razón o *ratio* de nuestra solución *ansatz*,

$$+\eta \equiv \frac{E^+}{H^+} = +\frac{j\omega\mu}{\gamma} \quad (3.27)$$

$$-\eta \equiv \frac{E^-}{H^-} = -\frac{j\omega\mu}{\gamma}. \quad (3.28)$$

La cantidad definida como  $\eta$  posee unidades de  $\Omega$  y es justamente la razón de las intensidades que poseen unidades  $\text{V m}^{-1}$  y  $\text{A m}^{-1}$ , y la llamaremos **impedancia intrínseca del medio**, que también se puede escribir como (apartado 1.5):

$$\eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \|\eta\| \angle\theta_\eta \quad (3.29)$$

Similarmente podemos expresar los campos en la misma notación:

$$E^+ = \|E^+\| \angle\theta^+ = \|E^+\| e^{j\theta^+}, \quad (3.30)$$

$$E^- = \|E^-\| \angle\theta^- = \|E^-\| e^{j\theta^-}. \quad (3.31)$$

$$(3.32)$$

Recordemos que los números  $\|E^+\|$  y  $\|E^-\|$  es la norma del número complejo (apartado 1.5) y son números reales. Finalmente podemos reunir los términos para las soluciones de  $E_x$  y  $H_y$ ,

$$E_x = \|E^+\| e^{-\alpha z} e^{j\beta z} e^{j\theta^+} + \|E^-\| e^{\alpha z} e^{j\beta z} e^{j\theta^-} \quad (3.33)$$

$$H_y = \frac{\|E^+\|}{\|\eta\|} e^{-\alpha z} e^{j\beta z} e^{j\theta^+} e^{-j\theta_\eta} + \frac{\|E^-\|}{\|\eta\|} e^{\alpha z} e^{j\beta z} e^{j\theta^-} e^{-j\theta_\eta}. \quad (3.34)$$

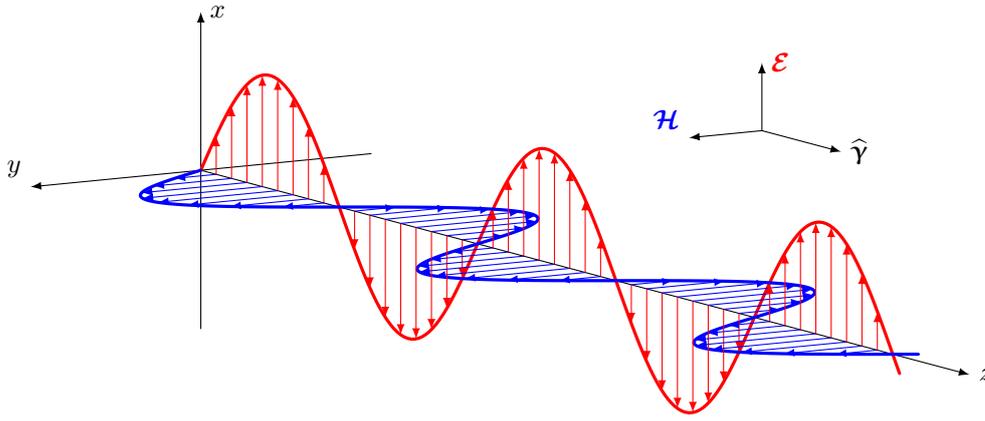


Figura 3.3.: Onda electromagnética en algún tiempo  $t$ . La onda plana y uniforme se propaga a través del medio con una dirección  $\hat{\mathbf{y}}$ , que será definido en apartado 3.4. La onda se encuentra congelada en algún momento  $t$  por lo que la amplitud de los campos  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{H}$  cambiará en el tiempo.

Pero cuidado, recordemos que esto es solo la forma armónica de nuestros campos, por lo que para obtener los campos  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{H}$  debemos calcular la parte real, ecuación (2.149),

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_x \hat{\mathbf{x}} = \text{Re} \left[ E_x e^{j\omega t} \right] = \|E^+\| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta^+) + \|E^-\| e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \theta^-) \hat{\mathbf{x}} \quad (3.35)$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_y \hat{\mathbf{y}} = \text{Re} \left[ H_y e^{j\omega t} \right] = \frac{\|E^+\|}{\|\eta\|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta^+ - \theta_\eta) - \frac{\|E^-\|}{\|\eta\|} e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \theta^- - \theta_\eta) \hat{\mathbf{y}}. \quad (3.36)$$

Las cuales son la solución general en el caso de que  $E_y = E_z = 0$  y  $H_x = H_z = 0$ .

Existen dos casos de interés en los cuales podemos aplicar ecuaciones (3.35) y (3.36): medio sin pérdidas (*lossless media*; apartado 3.2.1; apartado 3.2.2)  $\sigma = 0$ , medio con pérdidas  $\sigma \neq 0$ . La representación clásica de una onda electromagnética, plana e uniforme<sup>1</sup>, está en figura 3.3.

### 3.2.1. Medio sin pérdidas

Para el medio sin pérdidas tenemos que la constante de propagación es:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(j\omega\epsilon)} = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}, \quad \sigma = 0. \quad (3.37)$$

por lo que implica que  $\gamma = j\beta$  ya que  $\alpha = 0$ , y la impedancia intrínseca del medio se vuelve,

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, \quad \sigma = 0. \quad (3.38)$$

Con lo que la cantidad  $\eta$  se vuelve puramente real ( $\theta_\eta = 0$ , viz.,  $\eta = \|\eta\|$ ). La impedancia intrínseca del vacío es denotada  $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi \Omega$  (apéndice A.3). Es decir ecuaciones (3.35) y (3.36) son:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_x \hat{\mathbf{x}} = [\mathcal{E}_x^+ + \mathcal{E}_x^-] \hat{\mathbf{x}} = \left[ \|E^+\| \cos(\omega t - \beta z + \theta^+) + \|E^-\| \cos(\omega t + \beta z + \theta^-) \right] \hat{\mathbf{x}}, \quad (3.39)$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_y \hat{\mathbf{y}} = [\mathcal{H}_y^+ + \mathcal{H}_y^-] \hat{\mathbf{y}} = \left[ \frac{\|E^+\|}{\eta} \cos(\omega t - \beta z + \theta^+) - \frac{\|E^-\|}{\eta} \cos(\omega t + \beta z + \theta^-) \right] \hat{\mathbf{y}}. \quad (3.40)$$

Entiéndase por ecuación (3.39) que su propagación de onda es hacia  $+z$ , y la propagación de ecuación (3.40) es en igual dirección pero sentido opuesto  $-z$ ; es decir existen ondas propagándose hacia ambos sentidos. Otro concepto que desprende del set ecuaciones (3.39) a (3.40), es la **velocidad**  $u$ :

$$u \equiv \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}, \quad (3.41)$$

<sup>1</sup> Uniform plane waves: A 3D journey to the simplest electromagnetic wave propagation, TheSIGuy.

### 3. Radiación: ondas planas

donde la propagación de la luz en el vacío es  $c \equiv u_0 = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$  (por lo general solo usaremos la notación  $u$  para describir la velocidad de propagación de onda). La cantidad  $\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$ , la llamaremos **constante de fase** (de onda plana), tiene unidades de  $\text{rad m}^{-1}$  (cambio en la fase por unidad de distancia), y se relaciona con la longitud de onda como:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (3.42)$$

igual a la constante física número de onda,  $k$ , pero que ahora utilizaremos solo como  $\beta$  (la cual puede variar dependiendo del tipo de onda). Entonces para un medio sin pérdidas,  $\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$  y  $u = (\mu \epsilon)^{-1/2}$ , se tiene que

$$\beta = \frac{\omega}{u}, \quad \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{u}{\nu}. \quad (3.43)$$

Con  $\nu$  la frecuencia de la onda. Al aumentar la frecuencia de una onda electromagnética disminuimos la longitud de onda. Nótese que la longitud de onda es una función de las propiedades del medio y para materiales comunes,  $\mu > \mu_0$  y  $\epsilon > \epsilon_0$ , la velocidad de propagación es menor que en el vacío ( $u < c$ ).

Finalmente, las cantidades de permeabilidad y permitividad relativa (apartado 2.2.5) también pueden ser expresadas en términos de  $u, \eta, \beta$ , y  $\lambda$ ,

$$u = \frac{u_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}, \quad \eta = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}, \quad \beta = \beta_0 \sqrt{\mu_r \epsilon_r}, \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}. \quad (3.44)$$

#### 3.2.2. Medio con pérdidas

Ahora con pérdidas nos damos cuenta que la constante de propagación, ecuación (3.16), si posee una sección real,  $\alpha \neq 0$ . Esto en efecto agrega el término exponencial  $e^{+\alpha z}$  y  $e^{-\alpha z}$  al mismo set en ecuación (3.39),

$$\mathcal{E}_x^+ = \|E^+\| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta^+), \quad (3.45)$$

$$\mathcal{E}_x^- = \|E^-\| e^{+\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \theta^-) \quad (3.46)$$

Nuevamente la onda representada por el campo vectorial  $\mathcal{E}$  se mueve hacia la izquierda y la derecha pero su amplitud posee un término de amortiguación o *damping* que hace que, dependiendo de la posición, disminuirá su amplitud. La constante  $\alpha$ , la parte real de la constante de propagación  $\gamma$ , tiene unidades de  $\text{Np m}^{-1}$  y se le llama **constante de atenuación** (*attenuation constant*). Es importante recalcar que la constante de fase para un medio con pérdidas no es igual a la constante de fase para un medio sin pérdidas,  $\beta \neq \text{Im}[\gamma] \neq \omega \sqrt{\mu \epsilon}$ . Similar es el caso de la impedancia intrínseca del medio, que ahora posee un valor:

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \|\eta\| \angle \theta_\eta, \quad (3.47)$$

es decir,  $\eta \neq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$  y  $\theta_\eta \neq 0$ . Para el caso sin pérdidas observamos una la misma fase  $\theta_\eta$  para  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{H}$ , pero para el caso con pérdidas los campos estarán fuera de fase. Finalmente para confirmar, los valores de la velocidad  $u$ , longitud de onda  $\lambda$  son iguales para un medio con pérdidas,

$$u = \frac{\omega}{\beta}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{u}{\nu}. \quad (3.48)$$

Las principales variables usadas en la apartado 3.2 se encuentran en cuadro 3.1.

#### 3.2.3. Energía de una onda electromagnética

Nuevamente usamos el formalismo de Poynting (apartado 2.2.7) para describir la energía que transporta una onda electromagnética. Para esto usamos las ecuaciones que contienen la forma más general de la solución a la ecuación de onda, con una onda hacia la izquierda y otra hacia la derecha, ecuaciones (3.35) y (3.36). Entonces para nuestro set de campos podemos describirlos como  $\mathcal{E}_x^+ \hat{\mathbf{x}} \times \mathcal{H}_y^+ \hat{\mathbf{y}} = \mathcal{E}_x^+ \mathcal{H}_y^+ \hat{\mathbf{z}}$  (flujo de la energía en la dirección  $+\hat{\mathbf{z}}$ ) y que aplica similarmente para las amplitudes hacia  $-\hat{\mathbf{z}}$ , entonces el promedio del vector de Poynting, ecuación (2.160), es:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} [\mathbf{E} \times \overline{\mathbf{H}}] = \frac{1}{2} \text{Re} [E_x \hat{\mathbf{x}} \times H_y \hat{\mathbf{y}}] = \frac{1}{2} \text{Re} [E_x \overline{H_y}] \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.49)$$

Nombre	Name	Símbolo	Unidad SI
Constante de propagación	<i>Propagation constant</i>	$\gamma$	–
Impedancia intrínseca	<i>Intrinsic impedance</i>	$\eta$	$\Omega$
Constante de atenuación	<i>Attenuation constant</i>	$\alpha$	$\text{Np m}^{-1}$
Constante de fase	<i>Phase constant</i>	$\beta$	$\text{rad m}^{-1}$
Longitud de onda	<i>Wavelength</i>	$\lambda$	m
Frecuencia	<i>Frequency</i>	$\nu$	Hz
Frecuencia angular	<i>Angular frequency</i>	$\omega$	$\text{rad s}^{-1}$
Velocidad de propagación	<i>Velocity of propagation</i>	$u$	$\text{m s}^{-1}$
Velocidad de propagación en el vacío	<i>Velocity of propagation in vacuum</i>	$u_0$ ó $c$	$\text{m s}^{-1}$

Cuadro 3.1.: Lista de variables relevantes en propagación de onda. Este set de constantes también será usado en capítulo 4, vea cuadro 4.1.

Como sabemos las amplitudes dependientes del tiempo poseen términos en oscilatorios armónicos, y al integrar en el tiempo un periodo  $T$  sus promedios de dependencia temporal irán a  $\rightarrow 1$  (apartado 2.4.2). Entonces se tendrá que:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \langle \mathbf{S}^+ \rangle + \langle \mathbf{S}^- \rangle, \quad \langle \mathbf{S}^+ \rangle = \frac{1}{2} \frac{\|E^+\|^2}{\|\eta\|} e^{-2\alpha z} \cos \theta_\eta \hat{\mathbf{z}}, \quad \langle \mathbf{S}^- \rangle = -\frac{1}{2} \frac{\|E^-\|^2}{\|\eta\|} e^{2\alpha z} \cos \theta_\eta \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.50)$$

Nótese que ecuación (3.50) posee ambas ondas para la solución de la ecuación de onda y además posee pérdida de la energía. Al reemplazar por un medio sin pérdidas,  $\sigma = 0$ , la ecuación (3.50) también se vuelve sin pérdidas (como debe ser).

### 3.2.4. Conductores y dieléctricos

Ahora veremos las condiciones en que ondas electromagnéticas se propagan en materia, en particular en los casos de materiales conductores (apartado 2.3.1) y dieléctricos (apartado 2.3.2). Veremos dos casos de interés los cuales son un “buen dieléctrico” y un “buen conductor”.

Si recordamos la ley de Ampère armónica, ecuación (2.169):

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E} = j\omega\epsilon \left( 1 - j \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right) \mathbf{E} = j\omega\hat{\epsilon} \mathbf{E}, \quad \sigma \neq 0 \quad (3.51)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon \mathbf{E}, \quad \sigma = 0. \quad (3.52)$$

y definimos una nueva constante de permitividad compleja,  $\hat{\epsilon}$

$$\hat{\epsilon} \equiv \epsilon \left( 1 - j \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right), \quad (3.53)$$

viz., entonces podemos describir el set de ecuaciones de forma similar y llegar a una conclusión similar para ambas no importando el valor de  $\sigma$ . La cantidad  $\sigma/\omega\epsilon$  en ecuación (3.53) es también conocida como la “pérdida de tangente” o *loss tangent* del material las cuales han sido tabuladas para muchos materiales (y que es dependiente de la frecuencia). La cantidad es llamada tangente porque es la razón entre las corrientes, si escribimos ecuación (2.30) en forma armónica tenemos que:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = \underbrace{\mathbf{J}_f}_{=\mathbf{J}_c} + \mathbf{J}_d, \quad (3.54)$$

donde tenemos que la corriente total es la suma de la corriente libre (que en el caso de un material será corriente de conducción) y la corriente desplazada, ecuación (2.26),

$$\tan \phi = \frac{\|\mathbf{J}_c\|}{\|\mathbf{J}_d\|}. \quad (3.55)$$

La cantidad de pérdida de tangente puede medirse experimentalmente y es un muy buen indicador del tipo de material que estamos usando, i.e., podemos diferenciar entre un dieléctrico y un conductor. En general,

### 3. Radiación: ondas planas

haremos la distinción:

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1, \quad \text{buen dieléctrico} \quad (3.56)$$

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1, \quad \text{buen conductor.} \quad (3.57)$$

En los siguientes apartados veremos las condiciones de propagación específicas para cada caso.

#### Buen dieléctrico

Para el caso ecuación (3.56), podemos describir la constante de propagación como:

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (3.58)$$

$$\approx j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \left( 1 - j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon} + \frac{\sigma^2}{8\omega^2\epsilon^2} \right) \quad (3.59)$$

$$\approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} + j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \left( 1 + \frac{\sigma^2}{8\omega^2\epsilon^2} \right). \quad (3.60)$$

Invitamos al lector a realizar esta derivación. Nótese que hemos aproximado también para  $\alpha$  y  $\beta$ . La velocidad de propagación, ecuación (3.41), queda como:

$$u = \frac{\omega}{\beta} \approx \left\{ \sqrt{\mu\epsilon} \left( 1 + \frac{\sigma^2}{8\omega^2\epsilon^2} \right) \right\}^{-1}, \quad (3.61)$$

lo que implica solo una reducción pequeña comparado con la velocidad en el vacío. Finalmente vemos la impedancia intrínseca del medio, definida en ecuación (3.29):

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left( 1 + j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon} - \frac{3}{8} \frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2} \right). \quad (3.62)$$

El lector también puede comprobar que este cambio en el set de ecuaciones para un buen dieléctrico es más bien solo una reducción pequeña de los valores para el caso sin pérdidas, apartado 3.2.1, por lo que, en general, la solución de un buen dieléctrico puede ser aproximada con ecuación (3.44).

#### Buen conductor

Para el caso ecuación (3.57) tenemos que:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} = \sqrt{j\omega\mu\sigma \left( 1 + j\frac{\omega\epsilon}{\sigma} \right)} \approx \sqrt{j\omega\mu\sigma} = \sqrt{\omega\mu\sigma} \angle 45^\circ \quad (3.63)$$

por lo que se tiene que la constante de atenuación y de fase son iguales:

$$\alpha = \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}. \quad (3.64)$$

Para la velocidad de propagación tenemos que, ecuación (3.41):

$$u = \frac{\omega}{\beta} \approx \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}. \quad (3.65)$$

Por último tenemos que la impedancia intrínseca del medio es, definida en ecuación (3.29):

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu/\sigma}{1 + j\omega\epsilon/\sigma}} \approx \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} \angle 45^\circ. \quad (3.66)$$

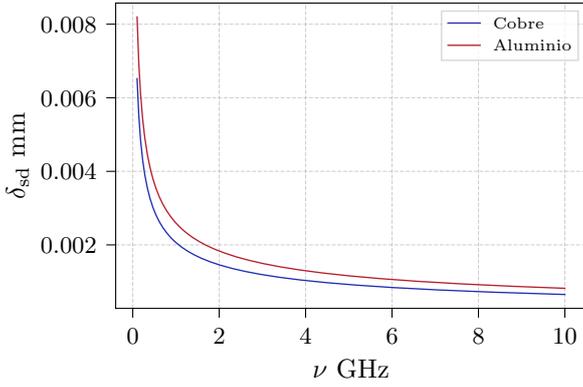


Figura 3.4: Profundidad de penetración material conductor. Dos materiales conductores han sido graficados, aluminio y cobre. Se puede ver que a medida que la frecuencia aumenta la profundidad ( $\delta_{sd}$ ) de penetración disminuye. Por ejemplo 100 MHz el Cobre posee una profundidad de penetración de 0.0066 mm. Ambos materiales se encuentran a 20 °C.

### 3.2.5. Profundidad de penetración

Consideremos ahora un material que posee pérdidas en conducción de ondas electromagnéticas, y que posee constantes  $\epsilon$ ,  $\mu$ , y  $\sigma$ . Entonces, como sabemos, podemos escribir el campo eléctrico como:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}\hat{\mathbf{x}} = \|E^+\| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{x}}. \quad (3.67)$$

Donde  $E^+$  es la amplitud, e.g.,  $E^+ = \|E^+\| \angle -\beta z$ . A medida que la onda atraviesa el material es atenuada por el factor de *damping*  $e^{-\alpha z}$  sobre una distancia:

$$\delta_{sd} = \frac{1}{\alpha}, \quad (3.68)$$

la cual es llamada profundidad de penetración (*skin depth*) del material. La profundidad de penetración es una medida de la distancia a la cual la onda se ha atenuado en un factor de  $1/e$  ó 37%. Para un buen conductor, ecuación (3.57), la profundidad de penetración es:

$$\delta_{sd} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu\mu\sigma}}. \quad (3.69)$$

Como podemos ver en ecuación (3.69),  $\delta_{sd} \propto \nu^{-1/2}$ , por lo que decae rápidamente a medida que la frecuencia aumenta. Materiales aluminio y cobre están graficados en figura 3.4. Por lo general, cuando se desea realizar una superficie que aisle ondas electromagnéticas (que son dispositivos electrónicos frágiles) utilizamos un espesor de varias veces  $\delta_{sd}$  del material.

Las llamadas ecuaciones de difusión (*diffusion equations*) son una aproximación a la ecuación de onda, ecuaciones (3.17) y (3.18), para el caso de un buen conductor, en términos de ecuación (3.69),

$$\nabla^2 \mathbf{E} = j\omega\mu\sigma \mathbf{E} = j \frac{2}{\delta_{sd}^2} \mathbf{E} \quad \sigma \gg \omega\epsilon \quad (3.70)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = j\omega\mu\sigma \mathbf{H} = j \frac{2}{\delta_{sd}^2} \mathbf{H} \quad \sigma \gg \omega\epsilon \quad (3.71)$$

$$\nabla^2 \mathbf{J} = j\omega\mu\sigma \mathbf{J} = j \frac{2}{\delta_{sd}^2} \mathbf{J} \quad \sigma \gg \omega\epsilon. \quad (3.72)$$

## 3.3. Incidencia normal

En este apartado consideraremos el estudio de ondas electromagnéticas planas y uniformes al interactuar de un medio a otro, es decir desde un medio que posee constantes  $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$  a un medio con constantes  $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$ . Definiremos tres tipos de ondas propagarse de un medio 1 a un medio 2, por convención el desplazamiento irá de izquierda a derecha, y tendremos una onda incidente (en dirección  $+\hat{\mathbf{z}}$ ), una onda transmitida (en dirección  $+\hat{\mathbf{z}}$ ), y una onda reflejada (en dirección  $-\hat{\mathbf{z}}$ ). Además consideraremos que la onda electromagnética interactúa con el medio 2 de forma normal, viz., el medio 2 es normal a la dirección de propagación. Estas ondas las podemos describir de forma fasorial como:

$$\mathbf{E}_i = E_{i,x} \hat{\mathbf{x}} = E_i e^{-\gamma_1 z} \hat{\mathbf{x}} = E_i e^{-\alpha_1 z} e^{-j\beta_1 z} \hat{\mathbf{x}} \quad (3.73)$$

$$\mathbf{H}_i = H_{i,x} \hat{\mathbf{y}} = \frac{E_i}{\eta_1} e^{-\gamma_1 z} \hat{\mathbf{y}} = \frac{E_i}{\eta_1} e^{-\alpha_1 z} e^{-j\beta_1 z} \hat{\mathbf{y}} = \frac{E_i}{\|\eta_1\|} e^{-\alpha_1 z} e^{-j\beta_1 z} e^{-j\theta_{\eta_1}} \hat{\mathbf{y}}, \quad (3.74)$$

### 3. Radiación: ondas planas

con la constante de propagación y la impedancia intrínseca para el medio 1 (un número complejo),

$$\gamma_1 = \alpha_1 + j\beta_1 = \sqrt{j\omega\mu_1(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)}, \quad \eta_1 = \|\eta_1\| \angle \theta_{\eta_1} = \sqrt{j\omega\mu_1 / (\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)}. \quad (3.75)$$

La onda reflejada, generada por la frontera entre el medio 1 y medio 2 (en dirección  $-\hat{\mathbf{z}}$ ), se puede describir como:

$$\mathbf{E}_r = E_{rx}\hat{\mathbf{x}} = E_r e^{\gamma_1 z}\hat{\mathbf{x}} = E_r e^{\alpha_1 z} e^{-j\beta_1 z}\hat{\mathbf{x}} \quad (3.76)$$

$$\mathbf{H}_r = H_{ry}\hat{\mathbf{y}} = -\frac{E_r}{\eta_1} e^{\gamma_1 z}\hat{\mathbf{y}} = -\frac{E_r}{\|\eta_1\|} e^{\alpha_1 z} e^{-j\beta_1 z} e^{-j\theta_{\eta_1}}\hat{\mathbf{y}}. \quad (3.77)$$

Donde el signo negativo en  $-E_r$  viene de ecuación (3.28). Solo una fracción de la onda incidente finalmente será transmitida al medio 2 y la podemos representar como:

$$\mathbf{E}_t = E_{tx} e^{-\gamma_2 z}\hat{\mathbf{x}} = E_t e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z}\hat{\mathbf{x}} \quad (3.78)$$

$$\mathbf{H}_t = H_{ty}\hat{\mathbf{y}} = \frac{E_t}{\eta_2} e^{-\gamma_2 z}\hat{\mathbf{y}} = \frac{E_t}{\|\eta_2\|} e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} e^{-j\theta_{\eta_2}}\hat{\mathbf{y}}, \quad (3.79)$$

donde las constantes de propagación e impedancia intrínseca del medio 2 son:

$$\gamma_2 = \alpha_2 + j\beta_2 = \sqrt{j\omega\mu_2(\sigma_2 + j\omega\epsilon_2)} \quad \eta_2 = \|\eta_2\| \angle \theta_{\eta_2} = \sqrt{j\omega\mu_2 / (\sigma_2 + j\omega\epsilon_2)}. \quad (3.80)$$

Hemos asumido que no existe una onda viajando en la dirección  $-\hat{\mathbf{z}}$  en el medio 2. Esto es porque asumimos que el medio 2 posee un largo infinito y que no existirán reflexiones. Para todos los campos de subíndices  $r, i, t$  son soluciones de la ecuaciones de Maxwell de forma independiente, y para tener una solución general solo debemos satisfacer en el punto de discontinuidad  $z = 0$ . Entonces se tiene que para los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = \mathbf{E}_t, \quad \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r = \mathbf{H}_t, \quad \text{para } z = 0. \quad (3.81)$$

Dejando en términos de las amplitudes (que pueden o no ser complejas) se tiene:

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \equiv \hat{R}, \quad \frac{E_t}{E_i} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \equiv \hat{T}. \quad (3.82)$$

Donde hemos definido los coeficientes de reflexión y transmisión  $\hat{R}$  y  $\hat{T}$ , respectivamente. Nótese que estos coeficientes son adimensionales, que pueden ser números complejos, e.g.,  $\hat{R} = \|\hat{R}\| \angle \theta_{\hat{R}}$ , y que dependen de las propiedades de los medios 1 y 2. De ecuación (3.82) también tenemos que:

$$1 + \hat{R} = \hat{T} \quad (3.83)$$

El coeficiente de reflexión  $\|\hat{R}\| \leq 1$  y  $\hat{T}$  puede ser mayor a la unidad. Para el caso en que los medios 1 y 2 poseen una conductividad  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  entonces estamos en un caso sin pérdidas y los coeficientes de reflexión y transmisión serán números reales.

En la incidencia normal tendremos dos puntos:

I Medios 1 y 2 sin pérdidas:  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ . En este punto el sistema se simplifica bastante,  $\eta_1, \eta_2, \hat{T}, \hat{R}$  serán reales y  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ .

II Medio 2 es un conductor perfecto  $\sigma_2 = \infty$ . En este caso no tendremos una onda transmitida ya que los campos eléctrico y magnético son cero dentro de un conductor perfecto. En efecto esto es:  $\eta_2 = 0, \hat{R} = -1,$  y  $\hat{T} = 0$ .

Otra cantidad de interés es **voltage-wave standing ratio (VWSR)** definido como el cociente entre la amplitud máxima y mínima de la onda incidente,

$$\text{VSWR} = \frac{\|E_i\|_{\max}}{\|E_i\|_{\min}} = \frac{1 + \|\hat{R}\|}{1 - \|\hat{R}\|}. \quad (3.84)$$

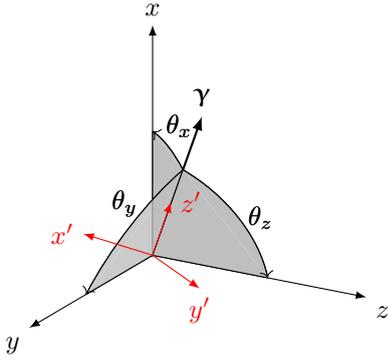


Figura 3.5: Coordenadas en propagación de ondas oblicuas. Asumimos que nuestra onda se propaga en  $\boldsymbol{\gamma} = +\hat{\mathbf{z}}'$  (no perdemos generalidad con este cambio). Los ángulos  $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$  corresponden a el vector  $\boldsymbol{\gamma}$  respecto de los ejes coordenados originales  $(x, y, z)$ . El plano  $x'y'$  no posee una orientación particular.

Esta cantidad se vuelve particularmente útil en línea de transmisión (LT) apartado 4.3 y antenas apartado 5.4.1 ya que nos permite cuantificar qué tan buena es la impedancia de antena con su línea de transmisión (ver apartado 4.2).

#### Atención

Existen dos definiciones de reflexión y transmisión (cantidades definidas en física; capítulo 9 de Griffiths 2017),  $R$  y  $T$  las cuales son cantidades reales,  $R, T \in \mathbb{R}$ ; y  $\hat{R}$  y  $\hat{T}$  (Paul & Nasar 1998). La primera corresponde a una definición más usada en física y no posee propiedades conductoras del medio,  $\sigma = 0$ , es decir  $T$  y  $R$  son siempre reales. La segunda definición, es más general, y entrega los coeficientes como un número complejo  $T \neq \hat{T}$  y  $\hat{R} \neq R$ . Solo usaremos  $\hat{R}$  y  $\hat{T}$ .

### 3.4. Incidencia oblicua

Ahora consideraremos ondas electromagnéticas que se desplazan de un medio 1 a un medio 2, similar a apartado 3.3, i.e., con sus mismos campos incidente, reflejado y transmitido, pero ahora la incidencia que posee la onda  $\mathbf{E}_i$  ya no será normal (respecto a su propagación). Asumiremos siempre que el plano de incidencia es el plano  $xy$  y que el ángulo de incidencia es  $\theta_i$  (medido desde la normal). La onda reflejada  $\mathbf{E}_r$  y transmitida  $\mathbf{E}_t$  se propagarán en el medio 1 con un ángulo de reflexión  $\theta_r$  y en el medio 2 con un ángulo de transmisión  $\theta_t$ , respectivamente.

Consideremos una onda plana y uniforme propagándose en la dirección  $+\hat{\mathbf{z}}'$ , donde la coordenada primada hace referencia a un plano ortonormal auxiliar compuesto de  $(x', y', z')$ . Esta forma de representar la onda nos permite describir de forma simple la propagación en  $(x, y, z)$ , pero sin perder la generalidad de la solución. Los campos fasoriales en este nuevo ser coordenado son:

$$\mathbf{E} = E_m e^{-\gamma z'} \hat{\mathbf{x}}', \quad (3.85)$$

$$\mathbf{H} = \frac{E_m}{\eta} e^{-\gamma z'} \hat{\mathbf{y}}', \quad (3.86)$$

en este caso hemos denotado la amplitud compleja como  $E_m$ . Para describir esta cambio coordenado podemos aplicar una rotación de los ejes originales  $(x, y, z)$  o en el caso de conocer los ángulos  $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$  usamos el teorema de cosenos directores:

$$z' = \cos \theta_x x + \cos \theta_y y + \cos \theta_z z. \quad (3.87)$$

La exponencial de la constante de propagación es:

$$e^{\gamma z'} = e^{\gamma \cos \theta_x x} e^{\gamma \cos \theta_y y} e^{\gamma \cos \theta_z z} = e^{\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{r}'}, \quad (3.88)$$

donde hemos usado:

$$\mathbf{r} = x' \hat{\mathbf{x}}' + y' \hat{\mathbf{y}}' + z' \hat{\mathbf{z}}' = x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}} \quad (3.89)$$

ya que por definición usamos el mismo origen de coordenadas. El vector de propagación  $\boldsymbol{\gamma} = \gamma \hat{\mathbf{z}}'$  (ya que inicialmente definimos que la onda se propaga en  $+\hat{\mathbf{z}}'$ ). Para encontrar la proyección del vector de propagación en términos del sistema coordenado no primado usamos el producto punto:

$$\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{r} = (\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z) \cdot (x, y, z) = \gamma (\cos \theta_x x + \cos \theta_y y + \cos \theta_z z). \quad (3.90)$$

### 3. Radiación: ondas planas

Escribiendo entonces la generalización en coordenadas  $(x, y, z)$  de los campos:

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z) e^{-\gamma \cdot \mathbf{r}} \quad (3.91)$$

$$\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z) e^{-\gamma \cdot \mathbf{r}} \quad (3.92)$$

Donde  $(E_x, E_y, E_z)$  y  $(H_x, H_y, H_z)$  son las proyecciones de los vectores primados en el set coordinado  $(x, y, z)$ . Similarmente podemos calcular el vector unitario de la propagación de onda,  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ , como:

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{\boldsymbol{\gamma}}{|\boldsymbol{\gamma}|} = \cos \theta_x \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta_y \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta_z \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.93)$$

entonces podemos obtener una expresión vectorial para el campo auxiliar magnético:

$$\mathbf{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{\gamma}} \times \mathbf{E}}{\eta}. \quad (3.94)$$

#### 3.4.1. Ley de Snell

Aquí veremos la relación que existe entre los ángulos de incidencia, reflexión y transmisión,  $(\theta_i, \theta_r, \theta_t)$ . Generalizamos para el set ecuaciones (3.91) a (3.92), asumiendo que los vectores de propagación se encuentran en el plano  $xz$  (el problema no pierde generalidad con esta condición), por lo que los vectores de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  tendrán componentes en  $x$  y  $z$ , luego:

$$\mathbf{E}_i = (E_{x_i}, E_{y_i}, E_{z_i}) e^{-\gamma_1(\sin \theta_i x + \cos \theta_i z)} \quad \mathbf{H}_i = (H_{x_i}, H_{y_i}, H_{z_i}) e^{-\gamma_1(\sin \theta_i x + \cos \theta_i z)} \quad (3.95)$$

$$\mathbf{E}_r = (E_{x_r}, E_{y_r}, E_{z_r}) e^{\gamma_1(-\sin \theta_r x + \cos \theta_r z)} \quad \mathbf{H}_r = (H_{x_r}, H_{y_r}, H_{z_r}) e^{\gamma_1(-\sin \theta_r x + \cos \theta_r z)} \quad (3.96)$$

$$\mathbf{E}_t = (E_{x_t}, E_{y_t}, E_{z_t}) e^{-\gamma_2(\sin \theta_t x + \cos \theta_t z)} \quad \mathbf{H}_t = (H_{x_t}, H_{y_t}, H_{z_t}) e^{-\gamma_2(\sin \theta_t x + \cos \theta_t z)}. \quad (3.97)$$

Las condiciones de frontera para el campo eléctrico y campo auxiliar magnético en  $z = 0$  son:

$$(E_{x_i} \hat{\mathbf{x}} + E_{y_i} \hat{\mathbf{y}}) e^{-\gamma_1 \sin \theta_i x} + (E_{x_r} \hat{\mathbf{x}} + E_{y_r} \hat{\mathbf{y}}) e^{-\gamma_1 \sin \theta_r x} = (E_{x_t} \hat{\mathbf{x}} + E_{y_t} \hat{\mathbf{y}}) e^{-\gamma_2 \sin \theta_t x} \quad z = 0 \quad (3.98)$$

$$(H_{x_i} \hat{\mathbf{x}} + H_{y_i} \hat{\mathbf{y}}) e^{-\gamma_1 \sin \theta_i x} + (H_{x_r} + H_{y_r} \hat{\mathbf{y}}) e^{\gamma_1 \sin \theta_r x} = (H_{x_t} \hat{\mathbf{x}} + H_{y_t} \hat{\mathbf{y}}) e^{-\gamma_2 \sin \theta_t x} \quad z = 0. \quad (3.99)$$

Igualando componentes llegamos a que las siguientes exponenciales deben ser iguales:

$$e^{-\gamma_1 \sin \theta_i x} = e^{-\gamma_1 \sin \theta_r x} = e^{-\gamma_2 \sin \theta_t x}, \quad (3.100)$$

Lo que eventualmente resulta en las siguientes condiciones:

$$\theta_i = \theta_r \quad (3.101)$$

la ley de reflexión de Snell, y

$$\gamma_1 \sin \theta_i = \gamma_2 \sin \theta_t \quad (3.102)$$

la ley de refracción de Snell. Claro que al considerar el caso de un medio sin pérdidas  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ , se tiene que:

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \sqrt{\frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1}} \approx \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \sqrt{\epsilon_r}, \quad (3.103)$$

donde para muchos materiales, i.e., algún dieléctrico común (que no sea un material ferromagnético),  $\mu_r \approx 1$ , esto es usando ecuaciones (2.85) y (2.86). El índice de refracción de un medio que posee  $\mu_r \approx 1$  está dado por el cociente de la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en el medio,  $n = c/u$ . Por lo que podemos reescribir ecuación (3.102) como:

$$n = \frac{c}{u} = \sqrt{\epsilon_r} \quad \Rightarrow \quad \sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i. \quad (3.104)$$

La ley de Snell fue primero derivada de forma empírica, con propiedades de la luz y movimiento de partículas. Ahora es derivada por completo a través de las ecuaciones de Maxwell. El lector puede notar que al ir desde un medio menos denso a más denso  $\epsilon_{r2} > \epsilon_{r1}$ , se tiene que  $\theta_t < \theta_i$  (se tiende a alinear con la normal de la superficie), el cual es el caso en que una onda de luz se transmite desde el aire al vidrio o agua.

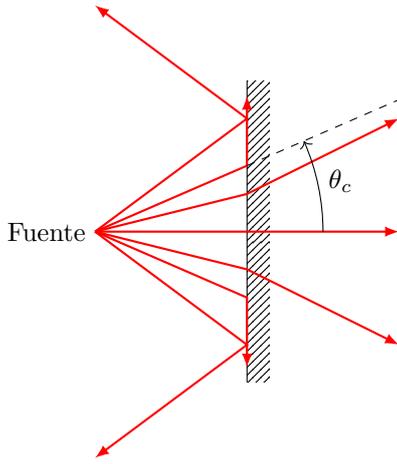


Figura 3.6: Ley de Snell (reflexión y refracción). El diagrama muestra los ángulos incidente  $\theta_i$ , reflejado  $\theta_r$  y transmitido  $\theta_t$  para distintos  $\theta_i$  iniciales. El ángulo crítico,  $\theta_c$ , está dado por el rayo completamente reflejado. La ley de Snell fue derivada primero de forma empírica (con la cual solo es necesaria la física de partícula de la luz) y luego a través de las ecuaciones de Maxwell redefinida.

### 3.4.2. Ángulo de reflexión total

Sabemos que no existirá una transmisión al medio 2 en caso de que el ángulo de transmisión,  $\theta_t = 90^\circ$ , es decir la radiación es completamente removida del medio 2. A este caso se le llama ángulo crítico o ángulo de reflexión total. Para este caso crítico,  $\theta_c$ , tenemos que:

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \arcsin\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}. \quad (3.105)$$

Supongamos ahora que ángulo incidente es mayor al ángulo crítico,  $\theta_i > \theta_c$ , inmediatamente vemos que no existe ningún ángulo real que cumpla con esa condición. Siguiendo el argumento de la onda transmitida, ecuación (3.97), podemos llegar a la siguiente conclusión:

$$\beta_2 \cos \theta_t = -j\beta_2 \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sin^2 \theta_i - 1} = -j\alpha_2. \quad (3.106)$$

Lo que indica que tenemos una onda propagándose a través de la dirección  $x$  que además cuenta con una atenuación  $\alpha_2$ , que se origina por tener un ángulo de incidencia mayor al ángulo crítico. Entonces, tenemos una onda plana, **no uniforme**, que se propaga en la frontera entre los medios 1 y 2.

## 3.5. Polarización

La polarización es una propiedad de las ondas electromagnéticas. Consideremos una onda electromagnética que se propaga en un medio sin pérdida ( $\alpha = 0$  y  $\theta_\eta = 0$ ) y que está descrita por los siguientes campos (propagándose en dirección  $+z$ ),

$$\mathcal{E} = \|E^+\| \cos(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{x}} \quad \mathcal{H} = \frac{\|E^+\|}{\eta} \cos(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{y}}. \quad (3.107)$$

Pero esto es asumiendo que las componentes  $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_z = \mathcal{H}_x = \mathcal{H}_z = 0$ , pero ahora, sin perder generalidad del campo eléctrico y que pueda satisfacer la ecuación de onda podemos escribir los campos en términos de un desfase  $\delta$ :

$$\mathcal{E} = \|E_x^+\| \cos(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{x}} + \|E_y^+\| \cos(\omega t - \beta z + \delta) \hat{\mathbf{y}} \quad (3.108)$$

$$\mathcal{H} = \frac{\|E_x^+\|}{\eta} \cos(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{y}} - \frac{\|E_y^+\|}{\eta} \cos(\omega t - \beta z + \delta) \hat{\mathbf{x}}. \quad (3.109)$$

Donde la amplitud tanto en  $x$  e  $y$  poseen distinto valor. Por simplicidad consideremos a la onda electromagnética justo en el punto  $z = 0$  y que las constantes puramente reales las podemos describir como  $E_x = \|E_x^+\|$  y  $E_y = \|E_y^+\|$ , aquí analizaremos como se comportan estas amplitudes una respecto a la otra.

### 3. Radiación: ondas planas

Figura 3.7: Onda electromagnética no polarizada. No corresponde a ninguno de los puntos listados en apartado 3.5. La onda electromagnética se dice no polarizada cuando su vector de campo eléctrico no posee un orden de rotación definido o apunta hacia todos lados de forma aleatoria. Por lo general materia que irradia térmicamente producirá un espectro no polarizado o *unpolarized*.

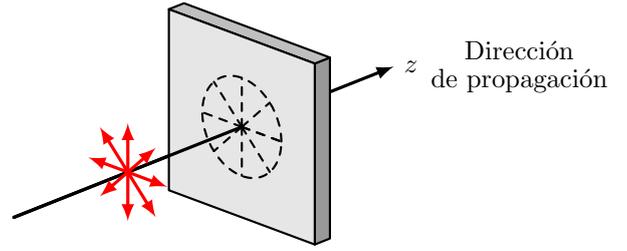
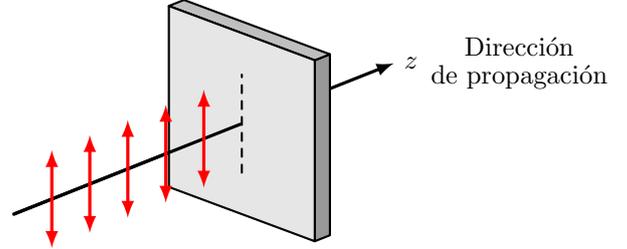


Figura 3.8: Onda electromagnética polarizada linealmente. El campo eléctrico posee una amplitud solo en una de las componentes  $x$  o  $y$  pero no en ambas. Los puntos I y II muestran los casos en que una onda puede ser representada por polarización lineal.



(I)  $E_x = E_y$  y  $\delta = 0$ , entonces el campo eléctrico se reduce a:

$$\mathcal{E}(z=0) = E_x \cos \omega t (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}). \quad (3.110)$$

A este punto lo diremos que la onda se encuentra “linealmente polarizada” (figura 3.8).

(II)  $E_x \neq E_y$  y  $\delta = 0$ , entonces el campo eléctrico se reduce a:

$$\mathcal{E}(z=0) = E_x \cos \omega t \left( \hat{\mathbf{x}} + \frac{E_y}{E_x} \hat{\mathbf{y}} \right). \quad (3.111)$$

Nuevamente la onda está “linealmente polarizada” (figura 3.8).

(III)  $E_x = E_y$  y  $\delta = -90^\circ$  ó  $\delta = 90^\circ$ , entonces el campo eléctrico se reduce a:

$$\mathcal{E}(z=0) = E_x (\cos \omega t \hat{\mathbf{x}} + \sin \omega t \hat{\mathbf{y}}). \quad (3.112)$$

Lo que el vector del campo eléctrico realiza un movimiento circular en el plano  $xy$ . A este punto lo llamaremos “circularmente polarizada” (figura 3.9). Nótese que dependiendo del valor de  $\delta$  (positivo o negativo) le asignaremos el nombre de **right-hand circular polarization (RCP)** ( $\delta = 90^\circ$ ) o **left-hand circular polarization (LCP)** ( $\delta = -90^\circ$ ).

(IV)  $E_x \neq E_y$  y  $\delta = -90^\circ$ , entonces el campo eléctrico se reduce a:

$$\mathcal{E}(z=0) = E_x \left\{ \cos \omega t \hat{\mathbf{x}} + \frac{E_y}{E_x} \sin \omega t \hat{\mathbf{y}} \right\}. \quad (3.113)$$

Lo que llamaremos una onda elíptica polarizada. En cualquier instante de tiempo las amplitudes estarán ligadas de la forma:

$$\left( \frac{\mathcal{E}_x}{E_x} \right)^2 + \left( \frac{\mathcal{E}_y}{E_y} \right)^2 = 1. \quad (3.114)$$

Nuevamente dependiendo del signo del ángulo  $\delta$  tendremos **RCP** o **LCP** pero de forma elíptica (figura 3.9 pero con la geometría de figura 3.10).

Cuando el espectro electromagnético no posee ninguno de los puntos I a IV, entonces hablamos de una onda no polarizada, figura 3.7.

El punto IV, el más general comprende cualquier tipo de polarización combinada, es decir, algún grado de polarización circular más algún grado de polarización lineal. Descomponiendo el vector de campo eléctrico

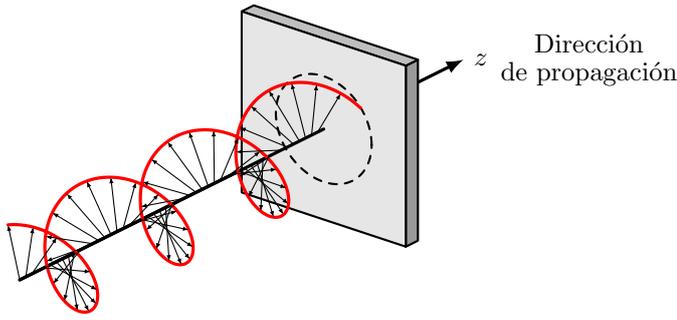


Figura 3.9: Onda electromagnética polarizada circularmente. El campo eléctrico posee una amplitud en ambas componentes  $x$  e  $y$  pero con un desfase de  $90^\circ$  o  $-90^\circ$ . Dependiendo de esto entonces tendremos los casos RCP o LCP. El punto III muestra el caso de polarización circular.

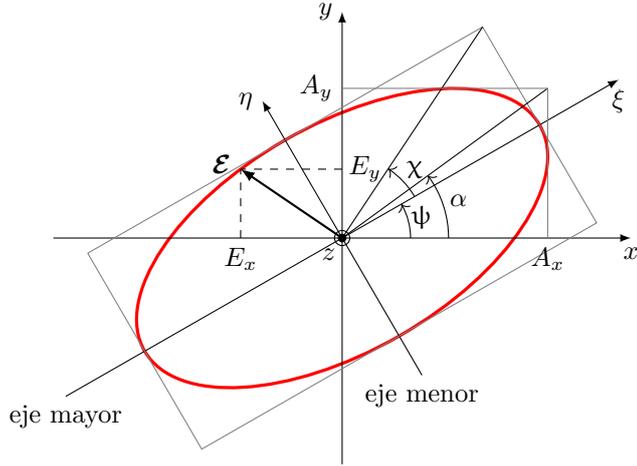


Figura 3.10: Elipse de polarización y sus componentes. El diagrama corresponde a el momento instantáneo cuando la elipse es dibujada por el campo eléctrico en una superficie imaginaria (similar a lo que ocurre en la sección gris de figura 3.9) con el eje  $z$  perpendicular a la hoja. El eje mayor de la elipse es el eje  $\xi$  y el eje menor es el eje  $\eta$ . Con la elipse de polarización podemos describir los parámetros de Stokes. El punto IV muestra el caso en que la onda está elípticamente polarizada.

tenemos:

$$\mathcal{E}(z, t) = \mathcal{E}_x \hat{\mathbf{x}} + \mathcal{E}_y \hat{\mathbf{y}} \quad (3.115)$$

$$\mathcal{E}(z, t) = \left( A_x e^{i\delta_x} \hat{\mathbf{x}} + A_y e^{i\delta_y} \hat{\mathbf{y}} \right) e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (3.116)$$

donde el término  $\delta$  lo usaremos como la diferencia de fase y posee el valor de  $\delta = \delta_x - \delta_y$ . En la figura 3.10 se muestra un ejemplo de una onda elípticamente polarizada, y la relación que existe con las amplitudes  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $A_x$ , y  $A_y$ . También es común realizar un cambio de coordenadas del plano  $(x, y)$  al  $(\xi, \eta)$  para expresar de forma más fácil su geometría (y sin términos cruzados). Usamos diferentes ángulos para realizar la transformación, estos son:  $\chi$  ángulo de elipse que da la fracción entre las amplitudes de los ejes  $\xi$  y  $\eta$ :

$$\tan(\alpha) = \frac{A_y}{A_x} \quad (3.117)$$

$$\tan(2\psi) = \tan(2\alpha) \cos \delta \quad (3.118)$$

$$\tan(2\chi) = \sin(2\alpha) \sin \delta \quad (3.119)$$

Cuando la diferencia de fases es cero ( $\delta = 0$  o  $\chi = 0$ ), el vector  $\mathcal{E}$  se vuelve linealmente polarizado. Para poder expresar de forma completa el vector de campo electromagnético y su polarización usamos la base ortogonal de Stokes. La base de Stokes utiliza cuatro parámetros para describir la polarización de forma completa y en términos de las mismas amplitudes  $A_x$  y  $A_y$  (vea figura 3.10). Los parámetros de Stokes son:  $I$ ,  $Q$ ,  $U$  y  $V$  y pueden ser observados o emitidos por un receptor analógico que posee polarización lineal (apartado 5.4.1). Si conocemos las amplitudes del eje  $x$  e  $y$  entonces los parámetros de Stokes son:

$$I \equiv \langle A_x^2 + A_y^2 \rangle \quad (3.120)$$

$$Q \equiv \langle A_x^2 - A_y^2 \rangle \quad (3.121)$$

$$U \equiv \langle 2A_x A_y \cos \delta \rangle \quad (3.122)$$

$$V \equiv \langle 2A_x A_y \sin \delta \rangle \quad (3.123)$$

### 3. Radiación: ondas planas

Las cantidades  $\sqrt{Q^2 + V^2}$  y  $Q/U$  describen la componente lineal y circular de la polarización, respectivamente. Note que las cantidades son siempre reales. También note que usamos el promedio de las amplitudes con corchetes triangulo ya que es una cantidad promediada en el tiempo (similar al caso de vector de Poynting). El set de ecuaciones (3.120) a (3.123) da la información completa de cantidad de polarización que posee una onda electromagnética. Para cuantificar la cantidad de polarización usamos el *ratio* de polarización, definido como  $p$ :

$$p = I_p/I \quad I_p = \sqrt{Q^2 + U^2 + V^2} \quad \tan(2\psi) = \frac{V}{Q} \quad \tan(2\chi) = \frac{U}{Q}. \quad (3.124)$$

Entonces hablamos de un caso de fuente no polarizada (*unpolarized*)  $p = 0$  y parcialmente polarizada con  $0 < p < 1$ . El flujo de la fuente que emite radiación **RCP** es cuando  $V > 0$  y **LCP** con  $V < 0$ . Los parámetros de Stokes pueden también ser expresados en términos de polarizaciones circulares, viz., cuando observamos/emitemos con un polarizados circular (Lorimer & Kramer 2012). También, al describir una fuente no polarizada decimos que emite de forma simultánea en todas las direcciones y su vector de campo eléctrico no posee una dirección privilegiada (Condon & Ransom 2016).

La polarización puede expresarse en materiales a través de diversas propiedades, e.g., materiales birrefringentes los cuales al ser sometidos a un esfuerzo (*stress*; Landau & Lifshitz's 1959) presentan cambios en su polarización (reflectada o transmitida), propiedad llamada fotoelasticidad. Materiales transparentes, como es sabido, puede dejar atravesar cierto tiepo de polarización, e.g., los conocidos lentes polarizados. Por último, la naturaleza y el mundo que nos rodea está altamente polarizado, fuentes de radiación como el Sol, estrellas, galaxias, etc., emiten radiación polarizada. Por ejemplo, la radiación del Sol es parcialmente polarizada con  $p \approx 0.1$  (aunque su emisión es casi de *blackbody*) y la radiación de las estrellas es altamente polarizada con  $p \approx 0.9$ .

## 4. Radiación: ondas confinadas

En el capítulo 3 vimos como ondas se transportan por un medio material, por lo generalmente infinito, y por el cual se transportan en la misma dirección de forma constante. Ejemplos de sistemas que puede “guiar” ondas electromagnéticas son las guías de ondas (*waveguides*; apartado 4.6) y *LTs* (*transmission lines*; apartado 4.1). Existen varios tipos de *LT*, e.g., de cables paralelos, de cable paralelo a una superficie, o tipo de cable coaxial (en la industria de *radio frequency (RF)* conocidos como *N-type*, y *sub-miniature version A*). Otros tipos de *LTs*, con más de un conductor, son llamadas *multiconductor transmission lines*, y son encontradas en diversos sistemas electrónicos de transmisión de potencias en forma de voltaje de tres fases. La industria ya ha adoptado nuevos tipos de *LTs* las cuales se desarrollan en *printed circuit board (PCB)*, donde sistemas de múltiples capas son utilizados de forma eficiente y mejorando conexiones impresas para componentes digitales cada vez más pequeños.

### 4.1. Ondas TEM en líneas de transmisión sin pérdidas

Comenzamos con el estudio de *LTs* donde no existen perdidas. Una *LT* sin perdidas es la cual en que sus conductores son perfectos y el medio que rodea al conductor, un dieléctrico, también es perfecto. La base de cualquier *LT* es la llamadas ondas *transverse electromagnetic (TEM)*. Una onda electromagnética de tipo *TEM* es la cual no posee ninguna estructura (i.e., vectores eléctricos o magnéticos) en dirección de la propagación de la onda (los vectores eléctrico y magnético no son necesariamente independientes de la posición).

Asumiendo que la propagación de la onda *TEM* se realiza en la dirección  $\hat{\mathbf{z}}$ , entonces:

$$\mathcal{E}_z = \mathcal{H}_z = 0. \quad (4.1)$$

Supongamos que tenemos dos cables infinitos en dirección  $\hat{\mathbf{z}}$  se les aplica una corriente (en sus extremos). Entre estos dos conductores, líneas de campo eléctrico se desplazarán en el plano  $xy$ , transverso a  $z$ , y con ninguna componente de este en  $\hat{\mathbf{z}}$ . A medida que aumentamos la energía transmitida, esperamos que este campo eléctrico se mantenga en una estructura estable (pero solo hasta cierto nivel de frecuencia). Obviamente también en  $xy$  tendremos una componente del campo magnético y su energía transmitida en  $\hat{\mathbf{z}}$  estará dada por la ecuación de Poynting (apartado 2.2.7).

Además de esta representación en *LTs*, existe una forma adicional de transportar energía a través de ondas electromagnéticas en las cuales **no ambos** campos son transpuestos a la propagación de la onda, las llamadas guías de ondas (apartado 4.6). Las guías de ondas, poseen una propiedad adicional en la que una frecuencia de corte existe,  $\nu_{\text{cutoff}}$ , donde frecuencias mayores son transmitidas y frecuencias menores son atenuadas casi por completo (modos de vibración específicos). Por otro lado, en *LTs*, y mientras se posea una sección transversal a la conducción mucho menor a la longitud de onda, los modos de propagación más altos siempre dominarán y el único modo de transmisión sera el de *TEM*. En general podemos asumir que el modo *TEM* es el único posible para un rango de frecuencias de 0.1–1 GHz.

Cabe destacar que conductores, por lo general, no son perfectos, i.e., vemos que la propagación tipo *TEM* no se cumple. De todas formas, su aproximación si es posible siempre y cuando se tenga un buen conductor y el medio que envuelve al conductor sea un buen dieléctrico.

Nótese otra propiedad importante de las *LTs* y conducción por *TEM* es que si **no** existe un campo variable en el tiempo, y si es posible definir, en general, una diferencia de potencial  $\Delta V$  para el principio y final de la línea, lo que es similar a modelar un caso estático. Para demostrar esto comenzamos por la leyes de Faraday y Ampère, ecuaciones (2.96) y (2.97), en forma integral y asumimos una propagación tipo *TEM*,

$$\oint \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = -\mu \frac{d}{dt} \int \mathcal{H} \cdot d\mathbf{a}, \quad (4.2)$$

$$\oint \mathcal{H} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathcal{J} \cdot d\mathbf{a} + \epsilon \frac{d}{dt} \int \mathcal{E} \cdot d\mathbf{a}. \quad (4.3)$$

#### 4. Radiación: ondas confinadas

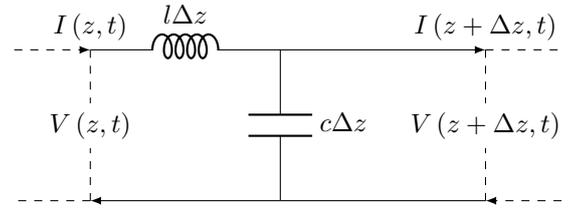


Figura 4.1: **LT** por unidad de longitud sin pérdidas. Modelo equivalente de una sección de **LT** de largo  $\Delta z$ . En cada punto  $z$ , posee un voltaje y corriente.

Luego,

$$\oint (\mathcal{E}_x dx + \mathcal{E}_y dy) = 0, \quad (4.4)$$

$$\oint (\mathcal{H}_x dx + \mathcal{H}_y dy) = \int \mathcal{J}_z dx dy. \quad (4.5)$$

Donde ecuaciones (4.4) a (4.5) representan exactamente el caso estático de ondas electromagnéticas. Con esto llegamos a las siguientes conclusiones para ondas **TEM**:

1. El campo eléctrico de una onda **TEM** en cualquier plano transversal  $xy$  es conservativo y satisface las ecuaciones de electrostática.
2. El campo magnético de una onda **TEM** en cualquier plano transversal  $xy$  es conservativo y satisface las ecuaciones de magnetostática.

Podemos concluir que el voltaje a lo largo de una sección de la **LT** está dado por:

$$V(z, t) = - \int \mathcal{E}_T \cdot d\mathbf{l}, \quad (4.6)$$

con  $\mathcal{E}_T$  el campo eléctrico perpendicular o transversal al movimiento de la onda. De forma similar, usando ecuación (4.5), podemos decir que:

$$I(z, t) = \oint \mathcal{H} \cdot d\mathbf{l}. \quad (4.7)$$

Nótese que tanto el voltaje como la corriente han sido expresados en términos del tiempo  $t$  y posición  $z$ .

Consideremos ahora una sección pequeña de la **LT** (i.e., dos cables),  $\Delta z$ . Definimos entonces inductancia y capacitancia<sup>1</sup> por unidad de longitud como:

$$l = L/\Delta z, \quad c = C/\Delta z, \quad (4.8)$$

donde son medidas en  $\text{H m}^{-1}$  y  $\text{F m}^{-1}$ , respectivamente. Con estas definiciones podemos caracterizar a la **LT** por unidad de longitud, cosa que es solo posible ya que los campos transversos eléctrico y magnético satisfacen las ecuaciones de electrostática y magnetostática (en un plano  $xy$ ). Asumiendo que la línea es uniforme, entonces todas las secciones pueden ser caracterizadas por cantidades por unidad de longitud. Entonces, una onda que se transmite en modo **TEM** satisface el caso estático 0 Hz, ecuaciones (4.4) y (4.5), en cualquier distribución del plano  $xy$  (es decir, las ecuaciones en capítulo 2 son válidas).

Para ilustrar la **LT** utilizaremos un diagrama mostrado en figura 4.1. Asumiremos que los valores tanto como para la corriente y para el voltaje no serán discretos, y que tendrán una variación *smooth* a lo largo de la línea, y como ya sabemos dependerán de su posición y tiempo, ecuaciones (4.6) y (4.7).

<sup>1</sup>La capacitancia por unidad de longitud la expresaremos como  $c = C/\Delta z$ , usando la misma letra que para la velocidad de la luz en el vacío comúnmente, para evitar confusión usaremos  $u_0 \equiv c$ .

Evidentemente, para encontrar las variables  $V(z, t)$  e  $I(z, t)$  aproximaremos a  $\Delta z \rightarrow 0$ ,

$$V(z + \Delta z, t) - V(z, t) = -l\Delta z \frac{\partial}{\partial t} I(z, t) \quad (4.9)$$

$$I(z + \Delta z, t) - I(z, t) = -c\Delta z \frac{\partial}{\partial t} V(z + \Delta z, t) \quad (4.10)$$

$$= -c\Delta z \frac{\partial}{\partial t} \left[ V(z, t) = l\Delta z \frac{\partial}{\partial t} I(z, t) \right] \quad (4.11)$$

$$= -c\Delta z \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} + lc\Delta z^2 \frac{\partial^2 I(z, t)}{\partial t^2}. \quad (4.12)$$

Despejando las PDE y en el límite de  $\Delta z \rightarrow 0$  encontramos las llamadas ecuaciones telegráficas o del telegrafista (*transmission-line equations*):

$$\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = -l \frac{\partial I(z, t)}{\partial t}, \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = -c \frac{\partial V(z, t)}{\partial t}, \quad (4.14)$$

más interesante aún es el caso de sus segundas derivadas al aplicar una derivada parcial respecto a  $z$  en ecuación (4.13) y una derivada parcial respecto a  $t$  en ecuación (4.14), obtenemos que:

$$\frac{\partial^2 V(z, t)}{\partial z^2} = lc \frac{\partial^2 V(z, t)}{\partial t^2}, \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial^2 I(z, t)}{\partial z^2} = lc \frac{\partial^2 I(z, t)}{\partial t^2}. \quad (4.16)$$

Lo cual, como ya sabemos, representa una ecuación de onda (apartado 3.1). Adicionalmente se desprende que propiedades de materiales por unidad de longitud, inductancia y capacitancia son análogas a los términos  $\mu$  y  $\epsilon$ ,

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{lc}}, \quad \Rightarrow lc = \mu\epsilon. \quad (4.17)$$

Este set de ecuaciones (4.13) y (4.14), fue desarrollado por Oliver Heaviside quién desarrolló el modelo de LT a partir de agosto de 1876 (Hunt 1994).

Similar al tipo de soluciones en capítulo 3, la solución estará dada por más de una onda armónica y la suma de todas sus posibles combinaciones es la solución que satisface a la PDE, entonces proponemos:

$$V(z, t) = V^+ \left( t - \frac{z}{u} \right) + V^- \left( t + \frac{z}{u} \right), \quad (4.18)$$

$$I(z, t) = I^+ \left( t - \frac{z}{u} \right) + I^- \left( t + \frac{z}{u} \right). \quad (4.19)$$

Donde las cantidades  $V^+$ ,  $V^-$ ,  $I^+$  e  $I^-$  son funciones de la forma  $V^+ (t - z/u) = 2 \cos \omega (t - z/u)$ , que aún no han sido determinadas. Los super-índices  $+$  y  $-$  hacen referencia a la dirección de la onda en dirección  $+z$  y  $-z$ . Como ya es sabido para el caso del campo eléctrico y magnético de una onda armónica, las ondas de  $V$  e  $I$  en una dirección deben estar relacionadas como:

$$I^+(z, t) = \frac{V^+(t - \frac{z}{u})}{R_C}, \quad (4.20)$$

$$I^-(z, t) = -\frac{V^-(t + \frac{z}{u})}{R_C}, \quad (4.21)$$

donde la constante  $R_C$  en unidades de  $\Omega$  está dada por:

$$R_C = \sqrt{\frac{l}{c}} = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (4.22)$$

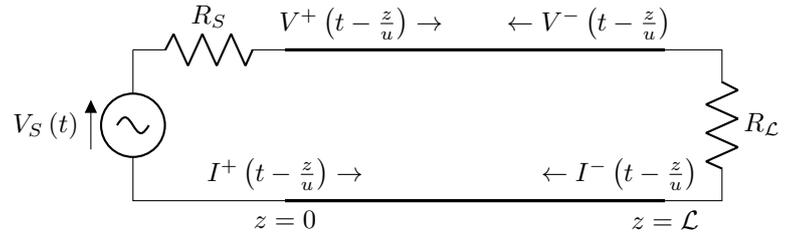


Figura 4.2: LT terminada en una resistencia.

y corresponde a la **resistencia característica** (*characteristic resistance*) de la línea. Nótese la similitud que existe con la transmisión de ondas no confinadas, capítulo 3. Aquí la resistencia característica juega un rol análogo al que cumple la impedancia intrínseca,  $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ , de una onda electromagnética libre. Reemplazando en ecuaciones (4.18) y (4.19), tenemos:

$$V(z, t) = V^+ \left( t - \frac{z}{u} \right) + V^- \left( t + \frac{z}{u} \right), \quad (4.23)$$

$$I(z, t) = \frac{1}{R_C} V^+ \left( t - \frac{z}{u} \right) - \frac{1}{R_C} V^- \left( t + \frac{z}{u} \right). \quad (4.24)$$

Nótese que la corriente, definida en la ley de Ohm apartado 2.3.1, se desprende que para un material conductor común:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}}{\rho}, \quad \Rightarrow I = \frac{V}{R}, \quad (4.25)$$

donde la conductividad es el recíproco de la resistividad,  $\sigma = \rho^{-1}$ , y  $R$  es la famosa resistencia común unidimensional de un conductor. Desde la derivación del set telegráfico, ecuaciones (4.13) y (4.14), sabemos que pueden ser modeladas por ecuaciones estáticas, entonces podemos decir que:

$$V(L, t) = R_L I(L, t). \quad (4.26)$$

Figura 4.2 muestra las ondas viajando de izquierda y derecha, con un eje  $z \in [0, L]$ . Las propiedades de la LT son: un largo total  $L$ , una resistencia  $R_L$  al final de la línea, un voltaje de entrada o fuente (*source*) sinusoidal de  $V_S(t)$ , y una resistencia interna de  $R_S$ . Por lo general se desea conocer la corriente y el voltaje en los terminales de la línea, es decir:  $I(0, t)$ ,  $I(L, t)$ ,  $V(0, t)$ , y  $V(L, t)$ ; en función del tiempo  $t$ .

Adicionalmente, justo en la terminal de la línea  $z = L$  las resistencias deben ser iguales,  $R_L = R_C$ , en caso contrario se produce un caso de *mismatch* de la LT (e.g., cuando es acoplada a otro sistema). Definimos el coeficiente de reflexión para LTs *voltage reflection coefficient*, en  $z = L$  como:

$$\widehat{R}_L = \frac{V^-(t + \frac{L}{u})}{V^+(t - \frac{L}{u})}. \quad (4.27)$$

Reemplazando en ecuaciones (4.23) y (4.24) en  $z = L$ ,

$$V(L, t) = V^+ \left( t - \frac{L}{u} \right) + V^- \left( t + \frac{L}{u} \right), \quad (4.28)$$

$$= V^+ \left( t - \frac{L}{u} \right) (1 + \widehat{R}_L), \quad (4.29)$$

$$I(L, t) = I^+ \left( t - \frac{L}{u} \right) + I^- \left( t + \frac{L}{u} \right), \quad (4.30)$$

$$= \frac{V^+(t - L/u)}{R_C} (1 - \widehat{R}_L). \quad (4.31)$$

Donde el coeficiente de reflexión  $\widehat{R}_L$  en  $z = L$ , también conocido como *current reflection coefficient*, es:

$$\widehat{R}_L = \frac{I^-(t + L/u)}{I^+(t - L/u)}. \quad (4.32)$$

Es decir, la razón entre la amplitud de corrientes en ecuación (4.32) es el negativo de la razón de voltajes en ecuación (4.27). Reemplazando ecuación (4.26) en estos resultados encontramos las siguientes definiciones:

$$R_{\mathcal{L}} = R_C \frac{1 + \widehat{R}_{\mathcal{L}}}{1 - \widehat{R}_{\mathcal{L}}}, \quad (4.33)$$

o equivalentemente

$$\widehat{R}_{\mathcal{L}} = \frac{R_{\mathcal{L}} - R_C}{R_{\mathcal{L}} + R_C}. \quad (4.34)$$

Lo que es muy similar al caso de una onda electromagnética que se propaga en el vacío a otro medio continuo y lineal, apartado 3.3. Recordemos que:

$$\widehat{R} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = -\frac{H_r}{H_i}. \quad (4.35)$$

Si consideramos la porción inicial de figura 4.2, en  $z = 0$ , y que en ese mismo momento se conecta la fuente  $V_S(t)$ , nos podemos imaginar que no existen ondas viajando en sentido contrario (aunque técnicamente esto no es cierto). Entonces la “primera onda” llega en un tiempo  $\mathcal{L}/u$  al otro extremo, entonces podemos decir que **no** existirá ninguna onda viajando en sentido contrario en  $z = 0$  en un tiempo menor a  $t = 2\mathcal{L}/u$ . Es decir:

$$V(0, t) = V^+(t), \quad 0 \leq t < \frac{2\mathcal{L}}{u}. \quad (4.36)$$

Por lo que inicialmente podemos relacionar la resistencia de la fuente y su voltaje inicial con las cantidades  $V$  e  $I$  en  $z = 0$  y  $0 \leq t < \frac{2\mathcal{L}}{u}$ ,

$$V(0, t) = \frac{R_C V_S(t)}{R_C + R_S}, \quad 0 \leq t < \frac{2\mathcal{L}}{u}. \quad (4.37)$$

Similarmente podemos encontrar el coeficiente de reflexión (que en este caso sería el *voltage reflection coefficient*), el cual es:

$$\widehat{R}_S = \frac{R_S - R_C}{R_S + R_C}. \quad (4.38)$$

Este proceso de reflexiones continúa innumerables veces y, nuevamente, dependiendo del tiempo y posición el voltaje y la corriente variarán. Para cualquier tiempo, el voltaje en algún punto dado de la línea es la suma de todos los valores individuales de ondas de voltaje que existen en la línea en ese mismo punto en algún tiempo.

Una buena forma de llevar un historial de posibles reflexiones es a través del *lattice diagram*, figura 4.3. En el diagrama la horizontal corresponde al largo de la línea y la vertical el tiempo (o reflexiones en el tiempo), donde existen incrementos fijos proporcionales a  $\mathcal{L}/u$ . Asumiendo que existe un voltaje de fuente  $V_S(t)$ , la onda posee una magnitud  $K$  después de cierto tiempo  $t'$ . En el diagrama, la onda se propaga hacia la derecha, y en el tiempo  $t' + \mathcal{L}/u$  llega al final de la línea, donde se refleja y se propaga hacia la izquierda. En el tiempo  $t' + 2\mathcal{L}/u$  la onda reflejada llega al inicio de la línea, donde se refleja y se propaga hacia la derecha (y así consecutivamente). El diagrama nos muestra las reflexiones de forma ordenada y nos permite encontrar el voltaje  $V(z, t)$ , siguiendo los varios movimientos y reflexiones de la onda de voltaje inicial. Similarmente es posible calcular la corriente  $I(z, t)$ , reemplazando  $\widehat{R}_S$  y  $\widehat{R}_{\mathcal{L}}$ , por  $-\widehat{R}_S$  y  $-\widehat{R}_{\mathcal{L}}$ , y,

$$I^+ \left( t - \frac{0}{u} \right) = \frac{V_S(t)}{R_C + R_S}. \quad (4.39)$$

Generalmente estamos solo interesados en encontrar el voltaje y la corriente en los extremos de la línea (en posiciones  $z = 0$  y  $z = \mathcal{L}$ ) para cualquier instante de tiempo.

La potencia promedio por unidad de área (o la integral sobre el área del vector de Poynting promedio  $\langle S \rangle$ ) en una LT está dado por:

$$P_{\text{av}} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ V(z) \overline{I(z)} \right], \quad (4.40)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\|V^+\|^2}{R_C} \left( 1 - \|\widehat{R}_{\mathcal{L}}\|^2 \right). \quad (4.41)$$

Ya que para el caso de LT sin pérdidas se tiene que la amplitud del coeficiente de reflexión es igual en toda la línea:  $\|\widehat{R}(z)\| = \|\widehat{R}(z = \mathcal{L})\|$ , viz., en ecuación (4.41).

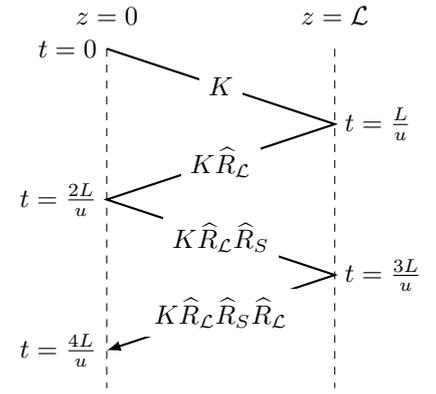


Figura 4.3: *Lattice diagram*. Diagrama con el cual se pueden seguir la cantidad de reflexiones producidas por un pulso en una LT. Los coeficientes de reflexión de la carga y en la resistencia son  $\widehat{R}_L$  y  $\widehat{R}_S$ , respectivamente.

## 4.2. Excitaciones sinusoidales en estado estable en líneas sin pérdidas

Aquí consideraremos el caso en que la fuente posee alguna forma sinusoidal, es decir:

$$V_S(t) = V_S \cos \omega t = \text{Re} \left[ V_s e^{j\omega t} \right] \quad (4.42)$$

Donde  $V_S$  es la amplitud compleja de la fuente, y  $\omega$  es la frecuencia angular de la fuente. Asumimos entonces que el voltaje y la corriente poseen forma fasorial:

$$V(z, t) = \text{Re} \left[ V(z) e^{j\omega t} \right] \quad (4.43)$$

$$I(z, t) = \text{Re} \left[ I(z) e^{j\omega t} \right], \quad (4.44)$$

es decir  $V(z)$  es ahora una función independiente del tiempo. Reemplazando en ecuaciones (4.13) y (4.14), tenemos:

$$\frac{dV(z)}{dz} = -j\omega LI(z) \quad \frac{d^2V(z)}{dz^2} = -\omega^2 lC V(z) \quad (4.45)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -j\omega CV(z) \quad \frac{d^2I(z)}{dz^2} = -\omega^2 lC I(z). \quad (4.46)$$

Para resolver este sistema usamos una solución armónica, similar a lo expuesto en apartado 3.2, es decir:

$$V(z) = V^+ e^{-j\omega/uz} + V^- e^{-j\omega/uz} \quad (4.47)$$

$$I(z) = \frac{V^+}{R_C} e^{-j\omega/uz} + \frac{V^-}{R_C} e^{-j\omega/uz}. \quad (4.48)$$

Las constantes  $V^+$  y  $V^-$  pueden ser complejas las cuales se pueden representar en forma fasorial con ángulos  $\theta^+$  y  $\theta^-$ . y  $u = (lc)^{-1/2}$ . Escribimos la solución ahora en función completa, incluyendo el tiempo:

$$V(z, t) = V^+ \cos(\omega t - \beta z + \theta^+) + V^- \cos(\omega t + \beta z + \theta^-) \quad (4.49)$$

$$I(z, t) = \frac{V^+}{R_C} \cos(\omega t - \beta z + \theta^+) - \frac{V^-}{R_C} \cos(\omega t + \beta z + \theta^-), \quad (4.50)$$

con la constante de fase igual a  $\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon} = \omega \sqrt{lc} \text{ rad m}^{-1}$ .

Consideremos la LT mostrada en figura 4.4. La línea es terminada a una distancia  $z = L$  con una impedancia compleja de valor  $Z_L$ , con la fuente como una cantidad fasorial de la forma  $V_S = \|V_S\| \angle 0^\circ$  y una impedancia compleja interna de valor  $Z_S$ . El coeficiente de reflexión complejo será:

$$\widehat{R}(z) = \frac{V^- e^{j\beta z}}{V^+ e^{-j\beta z}} = \frac{V^-}{V^+} e^{j2\beta z}. \quad (4.51)$$

Y en términos del coeficiente de reflexión:

$$V(z) = V^+ e^{-j\beta z} \left( 1 + \widehat{R}(z) \right) \quad (4.52)$$

$$I(z) = \frac{V^+}{R_C} e^{-j\beta z} \left( 1 - \widehat{R}(z) \right). \quad (4.53)$$

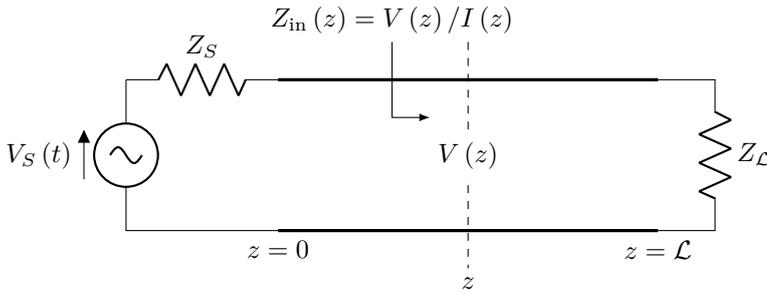


Figura 4.4: LT con fuente sinusoidal. Valores dependientes solo de la variable  $z$ , como la corriente y el voltaje, pueden ser expresados en términos fasoriales.

Definimos también la impedancia de entrada (compleja),  $Z_{in}(z)$ , de la LT en cualquier punto de la línea  $z$ , como el cociente entre el voltaje y la corriente en ese punto:

$$Z_{in} = \frac{V(z)}{I(z)} = R_C \frac{1 + \widehat{R}(z)}{1 - \widehat{R}(z)}. \quad (4.54)$$

Calculando el coeficiente de reflexión en  $z = L$ , luego

$$\widehat{R}(z = L) = \widehat{R}_L = \frac{V^-}{V^+} e^{j2\beta L} \quad \Rightarrow \quad Z_L = R_C \frac{1 + \widehat{R}_L}{1 - \widehat{R}_L} \quad \Rightarrow \quad \widehat{R}_L = \frac{Z_L - R_C}{Z_L + R_C}. \quad (4.55)$$

El cual es el caso análogo a la incidencia normal de una onda plana y uniforme para medios de dieléctricos, apartado 3.3. Finalmente resolvemos usando:

$$\frac{V^-}{V^+} = \widehat{R}_L e^{-j2\beta L} \quad \Rightarrow \quad \widehat{R}(z) = \widehat{R}_L e^{-j2\beta(L-z)}. \quad (4.56)$$

Por lo que el coeficiente de reflexión en cualquier punto  $z$  de la LT es posible relacionarlo con el coeficiente de reflexión en el extremo de la línea (*reflection coefficient at the load*) y que puede ser calculado mediante ecuación (4.55).

Una forma adicional de encontrar el coeficiente de reflexión en cualquier punto de la línea es a través de la impedancia de entrada,  $Z_{in}(z)$ , la cual es una función compleja de  $z$  y que puede ser calculada como:

$$Z_{in} = R_C \frac{Z_L + jR_C \tan \beta(L-z)}{R_C + jZ_L \tan \beta(L-z)}, \quad (4.57)$$

la cual puede encontrarse al usar ecuación (4.56) y sustituir  $e^{j2\beta(z-L)}$ . El argumento de varias de estas ecuaciones también puede expresarse como:

$$\beta L = \frac{\omega L}{u} = \frac{2\pi L}{\lambda}. \quad (4.58)$$

Donde  $\lambda = u/\nu$  en el medio que envuelve a los conductores.

### 4.3. Acoplamiento de impedancias

El acoplamiento de impedancias hace referencia al estudio de la conexión de distintos elementos que transportan energía o radio frecuencias y que al conectarse la impedancia del sistema sea minimizada. Una LT que posee un *mismatch* ( $R_C \neq Z_L$ ) dará muchas reflexiones (o también conocidas como ecos), y hará que el sistema sea menos eficiente en transportar información. En práctica no es posible asegurar un acoplamiento de dos líneas de modo perfecto, por lo que es necesario medir qué tan buena es la conexión, que nuevamente es a través del VWSR (visto por primera vez en apartado 3.3), pero en este caso definido como el cociente de la máxima y mínima amplitud de la onda de voltaje:

$$\text{VWSR} = \frac{\|V\|_{\max}}{\|V\|_{\min}}. \quad (4.59)$$

En el caso de un buen acoplamiento (*matched*)  $\text{VWSR} = 1$  para un  $Z_L = R_C$ , y para el caso de un no acoplamiento de impedancias (*mismatched*)  $\text{VWSR} = \infty$ , para  $Z_L = 0$  o  $Z_L = \infty$ . Entonces VWSR siempre será una cantidad real y positiva  $1 \leq \text{VWSR} < \infty$  (que nuevamente al estar más cerca de 1 es mejor el

resultado de acoplamiento). De forma adicional es posible dejar **VWSR** en función del coeficiente de reflexión en  $z = \mathcal{L}$ :

$$\text{VWSR} = \frac{1 + \|\widehat{R}_{\mathcal{L}}\|}{1 - \|\widehat{R}_{\mathcal{L}}\|}. \quad (4.60)$$

#### 4.4. Calculadora gráfica de impedancias: carta de Smith

La carta de Smith (o *Smith chart*) es un método de visualización de impedancias en el plano polar<sup>2</sup>, vea también apéndice B.

Para el trabajo de ondas sinusoidales en **LTs** (apartado 4.1) es fundamental el uso de cantidades complejas y que requieren un sin fin de operaciones algebraicas. De esto nació la carta de Smith, que busca reducir de forma práctica el número de estas operaciones, y adicionalmente desde la carta de Smith se desprenden otras conclusiones físico-matemáticas no resultas anteriormente en **LTs**.

La carta de Smith fue desarrollada por Phillip H. Smith (**Smith 1939**) y de forma independiente por Mizuhashi Tosaku (incluso dos años antes que Smith; **Mizuhashi 1937**) y corresponde a una técnica gráfica para acelerar los cálculos, llamada nomograma (donde en ciencias como la ingeniería existen muchas otras más, en particular ingeniería mecánica). La idea de los nomogramas es realizar cálculos in situ, de forma expedita, cosa que con la modernización de la computación muchos nomogramas ya no son prácticos. La carta de Smith es la excepción porque además permite visualizar impedancias gráficamente para entender problemas particulares.

Por ejemplo, determine la impedancia de entrada (*input impedance*),  $R_C$  de una **LT**, dado que conocemos su largo y la impedancia propia de la línea. Si consideramos una línea sin pérdida, la constante de propagación será  $\beta = 2\pi/\lambda = \omega/u$ . Como fue visto en apartado 4.1 la impedancia de entrada está dada por:

$$Z_{\text{in}}(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = R_C \frac{1 + \widehat{R}(z)}{1 - \widehat{R}(z)}, \quad (4.61)$$

y el coeficiente de reflexión entre dos puntos dado por:

$$\widehat{R}(z_1) = \widehat{R}(z_2) e^{-j2\beta(z_2 - z_1)}. \quad (4.62)$$

Donde, recordemos que  $u$  es la velocidad de propagación de la onda en el medio, con constantes  $\mu$  y  $\epsilon$ .

La carta de Smith relaciona de forma gráfica la impedancia de entrada y el coeficiente de reflexión (*voltage reflection coefficient*). Primero partimos por normalizar la impedancia de entrada (*normalized input impedance*), como:

$$z_{\text{in}} = \frac{Z_{\text{in}}(z)}{R_C} = \frac{1 + \widehat{R}(z)}{1 - \widehat{R}(z)} = r + jx, \quad (4.63)$$

con  $r = \text{Re}[z_{\text{in}}]$  y  $x = \text{Im}[z_{\text{in}}]$ . Similarmente podemos expresar el coeficiente de reflexión en términos de:

$$\widehat{R}(z) = \left\| \widehat{R}(z) \right\| \angle_{\widehat{R}} = p + jq, \quad (4.64)$$

ídem al caso de  $z_{\text{in}}$ . Con el set de ecuaciones (4.63) y (4.64) tenemos que:

$$z_{\text{in}} = r + jx = \frac{1 + p + jq}{1 - p - jq}, \quad (4.65)$$

con lo que podemos despejar cada componente real e imaginaria en un set de ecuaciones. Es decir:

$$\left( p = \frac{r}{r+1} \right)^2 + q^2 = \frac{1}{(r+1)^2}, \quad (4.66)$$

$$(p-1)^2 + \left( q + \frac{1}{x} \right)^2 = \frac{1}{x^2}. \quad (4.67)$$

Con lo cual es evidente que existe una familia de circunferencias que cumple con las variables  $p, q, r$  y  $x$ . Entonces la carta de Smith, que se expresa en el plano complejo, es una superposición de ambas ecuaciones (4.66) y (4.67), vea figura 4.5.

<sup>2</sup>Su versión original puede ser descargada a través de la IEEE Microwave Theory and Technology Society (MTTS) <https://mtt.org/smith-chart/>.

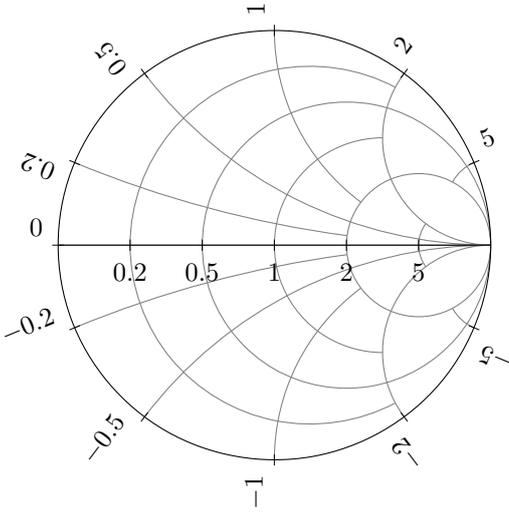


Figura 4.5: Carta de Smith básica. Círculos cerrados que nacen en el extremo izquierdo corresponden a la ecuación (4.66). Círculos abiertos que nacen en el extremo izquierdo corresponden a la ecuación (4.67).

El punto más importante de la carta de Smith es que el coeficiente de reflexión y la impedancia de entrada normalizada,  $\widehat{R}$  y  $z_{in}$ , comparten puntos en el plano polar donde ambas circunferencias, ecuaciones (4.66) y (4.67), se cortan. En la sección de más afuera de la carta (figura B.1) se indican los ángulos del coeficiente de reflexión, donde  $\theta_{\widehat{R}}$  puede ser calculado de forma gráfica. Por lo general el nomograma se encuentra en la parte inferior de la carta de Smith (ver versión MTTTS), que con la ayuda de un compás se puede medir el vector  $\widehat{R}$ , usando  $\|\widehat{R}\|$  en esta escala.

Para el clásico problema, supongamos que deseamos saber la impedancia de entrada de una LT uniforme, sin pérdidas, y de un largo  $\mathcal{L}$ , dado que conocemos  $R_C, \beta$  y  $Z_{\mathcal{L}}$ . Sabemos que:

$$z_{\mathcal{L}} = \frac{Z_{\mathcal{L}}}{R_C} = \frac{1 + \widehat{R}}{1 - \widehat{R}}, \quad (4.68)$$

entonces lo podemos graficar directamente en el plano complejo de Smith, figura 4.6. Desde la posición de  $z_{\mathcal{L}}$ , tenemos  $\widehat{R}_{\mathcal{L}} = \|\widehat{R}_{\mathcal{L}}\| \angle \theta_{\widehat{R}_{\mathcal{L}}}$ , y el coeficiente de reflexión a una distancia  $\mathcal{L}$  desde la carga es (de  $z_1 = 0$  a  $z_2 = \mathcal{L}$ ) es:

$$\widehat{R} = \widehat{R}_{\mathcal{L}} e^{-j2\beta\mathcal{L}}. \quad (4.69)$$

El coeficiente de reflexión  $\widehat{R}_{\mathcal{L}}$  puede ser calculado por la diferencia:  $\theta_{\widehat{R}_{\mathcal{L}}} - 2\beta\mathcal{L}$  como se aprecia en figura 4.6. Para calcular el ángulo  $2\beta\mathcal{L}$ , podemos usar la parte más exterior de la carta de Smith figura B.1, o alternativamente, podemos realizar una rotación respecto al largo de la línea en proporción a la longitud de onda en vez de  $2\beta\mathcal{L}$ . Si el medio es homogéneo en la LT, caracterizado por  $\mu, \epsilon$ , entonces la velocidad de propagación  $u$ , de la onda TEM es:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}, \quad (4.70)$$

y su longitud de onda es  $\lambda = u/\nu$ , con  $\nu$  la frecuencia en que opera la línea. En la sección exterior de la carta de Smith (figura B.1), dice “hacia generador” (*towards generator*), lo que implica una transferencia de la impedancia normalizada  $z_{\mathcal{L}}$  en dirección decreciente de  $z$ . Similarmente el caso “hacia carga” (*towards load*), se refiere flujo de  $z_{\mathcal{L}}$  en dirección creciente de  $z$ . Llamaremos estos modos *towards generator* (TG) y *towards load* (TL).

#### Ejemplo 4.1

Considere una LT de 10 m de largo que se encuentra en un medio de poliuretano ( $\epsilon_r = 2.25$  y  $\mu_r = 1$ ), y que opera a una frecuencia de  $\nu = 34$  MHz. Si la LT tiene una impedancia de carga  $Z_{\mathcal{L}} = (50 + j100) \Omega$ , y la resistencia característica del sistema es  $R_C = 50 \Omega$ , entonces determine la impedancia de entrada del sistema utilizando la carta de Smith (vea Paul & Nasar 1998, apéndice C). Solución:  $Z_{in} = 14.5 - j41 \Omega$ .

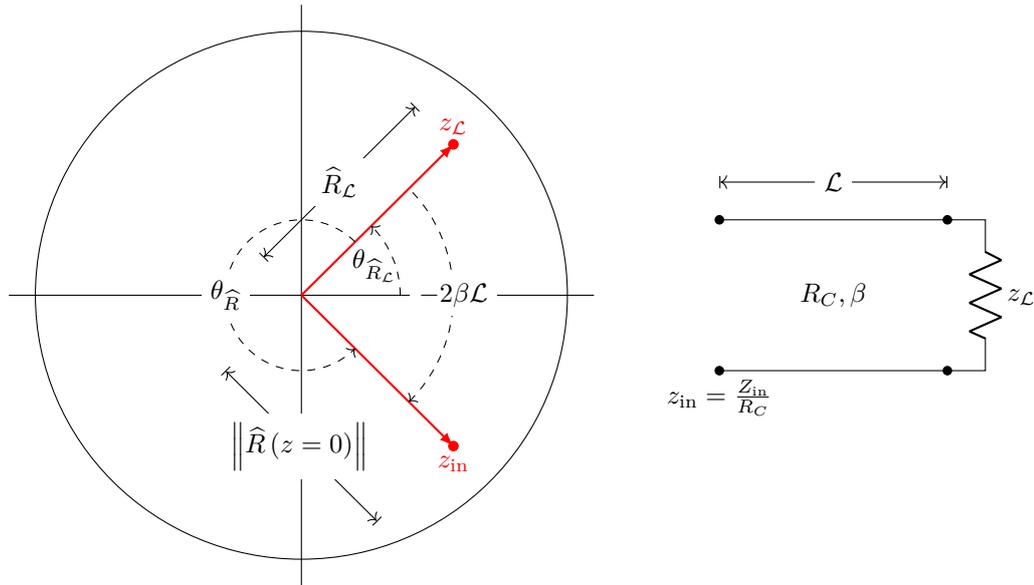


Figura 4.6.: Impedancia de entrada en carta de Smith. Diagrama de la izquierda representa la carta de Smith y el de la derecha el análogo de su *LT*.

Existen varios otros resultados adicionales que se desprenden de la carta de Smith (vea Paul & Nasar 1998, apéndice C). Uno de ellos es el siguiente, el voltaje máximo en una *LT*, con  $z_{\text{in}} \in \mathbb{R}$ , i.e., la cantidad es puramente debida a resistencia,  $z_{\text{in}} = \text{VWSR}$ , entonces demostramos que depende de una relación simple de impedancia con la impedancia de entrada normalizada,

$$z_{\text{in}} = \frac{1 + \widehat{R}}{1 - \widehat{R}}. \quad (4.71)$$

## 4.5. Líneas de transmisión con pérdidas

Como ya es sabido los materiales conductores no son perfectos ( $\sigma \neq \infty$ ; apartado 2.3.1), por lo que una onda tipo *TEM* no podrá existir ya que existe, en un caso con pérdidas, una componente del campo eléctrico en la dirección  $z$ ,  $\mathcal{E}_z$ . En general, conductores usados en *LTs*, pueden ser lo suficientemente buenos conductores y se aproximan razonablemente bien de modo de usar la misma formulación en apartado 4.1 pero incluyendo ahora un término disipativo (y asumimos que *TEM* existe). Entonces, para una *LT* con pérdidas asumiremos un caso de *TEM* aproximado o casi-*TEM* (o también llamado *quasi-TEM*). Este apartado se basa en Paul & Nasar (1998), capítulo 7 y para una revisión más extensa vea Adler et al. (1960), capítulo 9.

La solución a la derivación de las ecuaciones de una *LT* con pérdidas esta dada por:

$$\frac{dV(z)}{dz} = -(r + j\omega l) I(z) = -ZI(z) \quad (4.72)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -(g + j\omega c) V(z) = -YV(z), \quad (4.73)$$

Con las variables  $Z$  e  $Y$  la impedancia y admitancia por unidad de longitud. Ambas pueden ser separadas en sus componentes reales e imaginarios ( $r, l$ ) para  $Z$  y ( $g, c$ ) para  $Y$ . Las cantidades en minúsculas también corresponden a variables por unidad de longitud (en un diferencias  $\Delta z$ , similar a apartado 4.1) y se expresan gráficamente en figura 4.7. Cantidades resistencia, inductancia, conductancia, y capacitancia dadas por  $r, l, c, g$ , respectivamente. La inductancia puede poseer dos fuentes, la inductancia interna  $l_i$  (debida a la corriente que pasa por los mismos cables), y la inductancia externa  $l_e$ , que han sido combinadas ambas en  $l = l_i + l_e$ . La solución a ecuaciones (4.72) y (4.73), está dada por:

$$V(z) = V^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + V^- e^{\alpha z} e^{j\beta z} \quad (4.74)$$

$$I(z) = \frac{V^+}{Z_C} e^{-\alpha z} e^{j\beta z} - \frac{V^-}{Z_C} e^{\alpha z} e^{j\beta z}, \quad (4.75)$$

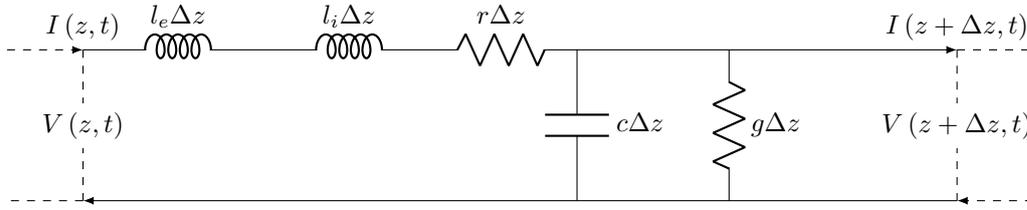


Figura 4.7.: LT por unidad de longitud con pérdidas. Modelo equivalente de una sección de LT de largo  $\Delta z$ . En cada punto  $z$ , posee un voltaje y corriente. Las cantidades en minúsculas corresponden a valores por unidad de longitud: inductancia  $l$  (que puede ser interna y externa), resistencia  $r$ , capacitancia  $c$ , y conductancia  $g$ .

Lo que es, en principio muy similar a ecuaciones (4.23) y (4.24). La constante de propagación puede ahora ser expresada como:

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \alpha + j\beta, \quad (4.76)$$

$Z_C$  es la **impedancia característica** del sistema y que está dada por:

$$Z_C = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \quad (4.77)$$

Nótese que la solución es muy similar a lo visto en la propagación de ondas planas y uniformes, apartado 3.2 en ecuación (3.29), y para el caso de una impedancia característica puramente real se llega a la resistencia característica, ecuación (4.22).

El cambio que existe ahora en este set de ecuaciones (4.74) y (4.75), las ondas que viajan en la LT son atenuadas con la exponencial dependiente de  $\alpha$ . Es análogo al caso de ondas planas y uniformes, y es una aproximación al caso real que funciona bien. Nótese que la onda viajera ahora no poseerá la misma fase en el voltaje y en la corriente, ya que ahora la cantidad  $Z_C$  es compleja. Otra condición a discutir es la velocidad de propagación de la onda, que ahora es:

$$u = \frac{\omega}{\beta}, \quad (4.78)$$

pero cuidado, ahora la constante  $\beta = \text{Im}[\gamma]$  depende de propiedades de pérdida de la línea. En el caso de una LT e sin pérdidas  $r = l_i = g = 0$ , por lo que  $\beta = \omega\sqrt{l_e c}$ . En el caso de una LT con pérdidas tendremos que  $\beta$  incrementará más su valor, viz., la velocidad de propagación será aún menor. De forma similar al caso TEM ideal, podemos calcular la impedancia de entrada pero ahora con pérdidas, y que es muy similar a ecuación (4.57),

$$Z_{\text{in}}(z) = Z_C \frac{Z_{\mathcal{L}} + Z_C \tanh \gamma (\mathcal{L} - z)}{Z_C + Z_{\mathcal{L}} \tanh \gamma (\mathcal{L} - z)}, \quad (4.79)$$

nótese el cambio de  $\tanh \rightarrow \tan$  de ecuación (4.57) a ecuación (4.79).

Otros resultados de apartado 4.1 se pueden obtener de forma similar,

$$\hat{R}(z) = \frac{V^- e^{\gamma z}}{V^+ e^{-\gamma z}} = \frac{V^-}{V^+} e^{2\gamma z} \quad (4.80)$$

$$V(z) = V^+ e^{-\gamma z} (1 + \hat{R}(z)) \quad (4.81)$$

$$I(z) = \frac{V^+}{Z_C} e^{-\gamma z} (1 - \hat{R}(z)). \quad (4.82)$$

La impedancia de entrada está definida igual que en ecuación (4.61),

$$Z_{\text{in}} = \frac{V(z)}{I(z)} = Z_C \frac{1 + \hat{R}(z)}{1 - \hat{R}(z)}. \quad (4.83)$$

Evaluando ecuación (4.80) al final de la LT en  $z = \mathcal{L}$ ,

$$\hat{R}(z) = \hat{R}_{\mathcal{L}} e^{2\gamma(z-\mathcal{L})} = \hat{R}_{\mathcal{L}} e^{2\alpha(z-\mathcal{L})} e^{j2\beta(z-\mathcal{L})}, \quad (4.84)$$

#### 4. Radiación: ondas confinadas

donde para el caso sin pérdidas, ecuación (4.56), el coeficiente de reflexión de dos puntos  $z_1$  y  $z_2$  de la LT solo tendrán un término de fase distinto, viz., la magnitud del coeficiente de reflexión es constante en toda la LT. En el caso con pérdidas, el coeficiente de reflexión es una función de la posición, en ecuación (4.84).

Usualmente las pérdidas están especificadas en términos de pérdida por unidad de longitud. Consideremos ahora el caso de una LT con pérdidas y que solo deja a que la onda se transporte en una sola dirección. Este es el caso particular en que el “acoplamiento es perfecto” (*matched*)  $Z_{\mathcal{L}} = Z_C$  (apartado 4.3) o estamos en presencia de una LT infinita. Las ondas de voltaje y corriente son:

$$V(z) = V^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (4.85)$$

$$I(z) = \frac{V^+}{Z_C} e^{-\alpha z} e^{j\beta z}. \quad (4.86)$$

La potencia promedio en la dirección  $+\hat{z}$  esta dada en ecuación (4.40), podemos entonces describir la potencia promedio que se disipa en la LT como:

$$P_{\text{diss}} = P_{\text{av}}(z) - P_{\text{av}}(z+d), \quad (4.87)$$

don  $d$  alguna longitud en la dirección  $+\hat{z}$ . Es trivial demostrar que el cociente entre la potencia promedio en  $z$  y en  $z+d$  es:

$$10 \log \frac{P_{\text{av}}(z)}{P_{\text{av}}(z+d)} = 10 \log e^{2\alpha d}, \quad (4.88)$$

es decir, la constante de atenuación puede ser especificada como la pérdida de la LT por unidad de longitud, siempre y cuando el acoplamiento de impedancias sea  $Z_{\mathcal{L}} = Z_C$ .

Ahora representaremos las constantes características de una LT como lo son la constante de propagación y la impedancia característica en términos de los parámetros de línea  $r, l, g$  y  $c$ . El problema se puede ver lo suficientemente complejo para que alguna solución analítica no sea posible, por lo que asumiremos que estamos en presencia de muy altas frecuencias o de alguna LT con bajas pérdidas. Una LT con bajas pérdidas (*low-loss line*) es tal que:  $r \ll \omega l$  y  $g \ll \omega c$ , e ignoraremos la inductancia interna del material conductor  $l_i$ , ya que para la mayoría de casos se tiene que  $l_e > l_i$ . Entonces, para una LT con bajas pérdidas, la constante de propagación es:

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(r + j\omega l)(g + j\omega c)} \quad (4.89)$$

$$= j\omega \sqrt{lc} \left(1 + \frac{r}{j\omega l}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{g}{j\omega c}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.90)$$

$$\approx j\omega \sqrt{lc} \left\{1 + \frac{1}{2j\omega} \left(\frac{r}{l} + \frac{g}{c}\right)\right\}, \quad (4.91)$$

donde hemos aproximado usando  $r \ll \omega l$  y  $g \ll \omega c$ , además de una expansión binomial. Luego tenemos que la parte real e imaginaria de la constante de propagación son:

$$\alpha \approx \frac{r}{2} \sqrt{\frac{c}{l}} + \frac{g}{2} \sqrt{\frac{l}{c}} = \frac{r}{2R_C} + \frac{gR_C}{2}, \quad \beta \approx \omega \sqrt{lc}, \quad (4.92)$$

hemos usado la definición de la resistencia característica de una LT sin pérdidas  $R_C = \sqrt{l/c}$ , definida en ecuación (4.22). Similarmente podemos encontrar la impedancia característica del sistema:

$$Z_C = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{r + j\omega l}{g + j\omega c}} \approx \sqrt{\frac{l}{c}} \left\{1 + \frac{1}{2j\omega} \left(\frac{r}{l} - \frac{g}{c}\right)\right\} \quad (4.93)$$

$$\approx \sqrt{\frac{l}{c}}, \quad \omega > \frac{1}{2} \left(\frac{r}{l} - \frac{g}{c}\right), \quad (4.94)$$

donde hemos usado nuevamente la misma aproximación. Por lo tanto podemos aproximar a  $Z_C \approx R_C = \sqrt{l/c}$ , es decir ignoramos la parte imaginaria de la impedancia característica.

La cuadro 4.1 muestra un resumen de todas las variables de LT, que son bastantes.

Nombre	Name	Símbolo	Unidad SI
Resistencia característica	<i>Characteristic resistance</i>	$R_C$	$\Omega$
Impedancia por unidad de longitud	<i>Impedance per unit length</i>	$Z$	$\Omega$
Admitancia por unidad de longitud	<i>Admittance per unit length</i>	$Y$	S
Impedancia característica	<i>Characteristic impedance</i>	$Z_C$	$\Omega$
Inductancia	<i>Inductance</i>	$L$	H
Inductancia por unidad de longitud	<i>Inductance per unit length</i>	$l$	$\text{H m}^{-1}$
Resistencia por unidad de longitud	<i>Resistance per unit length</i>	$r$	$\Omega \text{ m}^{-1}$
Capacitancia por unidad de longitud	<i>Capacitance per unit length</i>	$c$	$\text{F m}^{-1}$
Conductancia por unidad de longitud	<i>Conductance per unit length</i>	$g$	$\text{S m}^{-1}$
Potencia promedio	<i>Average power</i>	$P_{\text{av}}$	W

Cuadro 4.1.: Lista de variables relevantes en *LTs*. El lector debe notar que en este capítulo no hicimos distinción entre cantidades fasoriales y dependientes del tiempo, i.e.,  $V(z, t)$  también es escrita como  $V(z)$ . La impedancia intrínseca, análoga en el estudio de propagaciones de ondas planas y uniformes, no es incluida en esta tabla y usa el símbolo  $\eta$ . Variables usadas a lo largo de este capítulo también se encuentra en cuadro 3.1.

## 4.6. Introducción a guías de ondas

Guías de onda o *waveguides* son sistemas característicos para la propagación de RF de un punto a otro, viz., ondas confinadas. Similarmente a las *LTs*, son capaces de “guiar” una onda con la menor pérdida de energía posible y que dependiendo de su aplicación estas serán transportadas por una *LT* o una guía de onda.

Existen varios tipos de guías de onda, la más común es la rectangular, pero guías cilíndricas (con una sección transversal circular o elíptica) también son comunes en RFs y en altas frecuencias a nivel óptico en su transporte con fibra óptica (donde por lo general cuentan con una densidad que depende de la refracción del material).

Guías de onda poseen una aplicación particularmente importante en telecomunicaciones (pérdidas de energía no son tan importantes) y en radio astronomía (tratamos siempre de conservar la mayor parte de la energía). Otras aplicaciones incluyen el radar y microondas.

Las guías de ondas fueron primero propuestas por Joseph John Thomson (físico inglés y ganador del Nobel en física) en 1893 pero luego fueron probadas experimentalmente por Oliver Lodge (físico inglés) en 1894. Finalmente el análisis matemático completo de guías de ondas fue expuesto por Lord Rayleigh (físico inglés y Nobel en física; y la misma persona que la ley de Rayleigh-Jeans) en 1897 (vea Greiner & Dreitlein 1990, capítulo 2). Sin lugar a dudas una de las mayores importancias de las guías de ondas son permitir el uso de tecnologías asociadas al radar. En forma particular durante la segunda guerra mundial de parte del lado aliado inglés. Junto con la invención del magnetrón, que transforma energía eléctrica en energía electromagnética en forma de microondas.

## 4.7. Ecuación de onda para guías de onda

Una guía de onda es una cavidad cerrada, como un tubo, que puede o no ser llenado con un material dieléctrico. La guía de onda rectangular es la más común, y es la que estudiaremos en este capítulo de forma completa (apartado 4.8). Como veremos, las guías de onda poseen además una frecuencia de corte o *cutoff frequency* y que bajo la frecuencia de corte ninguna radio frecuencia será transmitida a través de la guía de ondas. Esta frecuencia de corte está dada por las condiciones de frontera.

Para obtener la solución al interior de la guía de ondas comenzamos por la ecuación de onda para un medio sin pérdidas ( $\sigma = 0$ ) y para soluciones tipo armónicas; es decir ecuaciones (3.17) y (3.18) (apartado 3.1.2),

$$\nabla^2 \mathbf{E} = -\omega^2 \mu \epsilon \mathbf{E} \quad (4.95)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = -\omega^2 \mu \epsilon \mathbf{H}. \quad (4.96)$$

Expresamos la solución para la onda transportándose en dirección  $\hat{\mathbf{z}}$  que puede poseer ondas viajeras en ambos

#### 4. Radiación: ondas confinadas

sentidos, es decir la solución es:

$$E_x(x, y, z) = E_x^{+'}(x, y) e^{-\gamma z} + E_x^{-'}(x, y) e^{\gamma z} \quad (4.97)$$

$$E_y(x, y, z) = E_y^{+'}(x, y) e^{-\gamma z} + E_y^{-'}(x, y) e^{\gamma z} \quad (4.98)$$

$$E_z(x, y, z) = E_z^{+'}(x, y) e^{-\gamma z} + E_z^{-'}(x, y) e^{\gamma z} \quad (4.99)$$

$$H_x(x, y, z) = H_x^{+'}(x, y) e^{-\gamma z} + H_x^{-'}(x, y) e^{\gamma z} \quad (4.100)$$

$$H_y(x, y, z) = H_y^{+'}(x, y) e^{-\gamma z} + H_y^{-'}(x, y) e^{\gamma z} \quad (4.101)$$

$$H_z(x, y, z) = H_z^{+'}(x, y) e^{-\gamma z} + H_z^{-'}(x, y) e^{\gamma z} \quad (4.102)$$

Donde las amplitudes con el signo + se transportan hacia  $+\hat{\mathbf{z}}$  y con - hacia  $-\hat{\mathbf{z}}$ . Para simplificar este set de ecuaciones, consideraremos solo aquellas ondas que se transportan en  $+\hat{\mathbf{z}}$  ya que el resultado para ondas con  $-\hat{\mathbf{z}}$  es similar. Nótese que nuevamente hemos usado la constante de propagación,  $\gamma$ , pero en este caso su valor no es necesariamente el mismo que para ondas libres visto en capítulo 3. Substituyendo nuestro *ansatz*, de set armónico en las ecuaciones (4.95) y (4.96), tenemos:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \gamma^2 E_x = -\omega^2 \mu \epsilon E_x \quad (4.103)$$

$$\vdots \quad (4.104)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \gamma^2 H_z = -\omega^2 \mu \epsilon H_z, \quad (4.105)$$

donde hemos reducido la notación. Podemos entonces expresar un operador nabla parcial (transverso) y definido como:

$$\nabla_T \equiv \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{y}}, \quad (4.106)$$

y aplicarlo a nuestra solución para escribirla de forma más compacta, es decir:

$$\nabla_T^2 \mathbf{E} = -(\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) \mathbf{E}, \quad (4.107)$$

$$\nabla_T^2 \mathbf{H} = -(\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) \mathbf{H}. \quad (4.108)$$

Donde hemos usado el laplaciano parcial o operador laplaceano transverso:  $\nabla_T^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ . Consideremos ahora la ley de Faraday y ley de Ampère (corregida) y de forma fasorial para el interior de la guía de ondas  $\sigma = 0$ , ecuaciones (2.168) y (2.169),

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (4.109)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E}. \quad (4.110)$$

Y substituyendo nuestro *ansatz* propuesto tenemos:

$$\nabla_T \times \mathbf{E} - \gamma \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (4.111)$$

$$\nabla_T \times \mathbf{H} - \gamma \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E}. \quad (4.112)$$

Ya que  $\nabla = \nabla_T + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$  y substituímos  $\mathbf{E} = \mathbf{E}' e^{-\gamma z}$  y  $\mathbf{H} = \mathbf{H}' e^{-\gamma z}$ . Ahora como asumimos dependencia solo en  $z$  de la solución resolveremos solo esas mismas componentes para  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ . Sabiendo esta solución a priori, entonces podemos encontrar el resto fácilmente. Es decir,  $E_x, E_y, H_x$  y  $H_y$  pueden ser expresadas en términos de  $E_z$  y  $H_z$ . El lector podrá comprobar que se llega a:

$$E_x = -\frac{1}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \left( j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} + \gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (4.113)$$

$$E_y = -\frac{1}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \left( j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (4.114)$$

$$H_x = -\frac{1}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \left( j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (4.115)$$

$$H_y = -\frac{1}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \left( j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} \right). \quad (4.116)$$

Por lo que solo debemos resolver para las variables  $E_z$  y  $H_z$ . Este set de ecuaciones es:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = -(\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) E_z \quad (4.117)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = -(\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) H_z. \quad (4.118)$$

Para resolver el set de PDE usamos el método de separación de variables, es decir, asumimos que la solución es posible separala en componentes espaciales, es decir:

$$E_x(x, y, z) = E'(x, y) e^{-\gamma z} = X(x) Y(y) e^{-\gamma z}. \quad (4.119)$$

Donde es evidente que  $H_z$  tendrá una solución similar. Substituyendo en la ecuación de onda para  $E_z$  tenemos:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) = 0. \quad (4.120)$$

Lo que es similar a lo usado en apartado 2.5.3. Asumimos entonces que las secciones de la variable  $x$  y de la variable  $y$  son:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -M^2, \quad (4.121)$$

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -N^2, \quad (4.122)$$

y los signos negativos y cuadrado han sido agregados por conveniencia. Evidentemente tenemos que la constante de propagación dependerá de  $M$  y  $N$ :

$$\gamma^2 = \omega^2 \mu \epsilon - M^2 - N^2. \quad (4.123)$$

Nuevamente la solución de una PDE de laplaciano transversal será armónica, y llegamos a las soluciones:

$$X(x) = X_1 \sin(Mx) + X_2 \cos(Mx) \quad (4.124)$$

$$Y(y) = Y_1 \sin(Ny) + Y_2 \cos(Ny). \quad (4.125)$$

Donde  $X_1, X_2, Y_1$  y  $Y_2$  son constantes de integración a determinar (y que pueden o no ser números complejos). Entonces la solución para  $E_z$  es:

$$E_z = [X_1 \sin(Mx) + X_2 \cos(Mx)] [Y_1 \sin(Ny) + Y_2 \cos(Ny)] e^{-\gamma z}, \quad (4.126)$$

y es similar al caso  $H_z$ . Incluyendo nuestras soluciones y usando ecuaciones (4.113) a (4.116), solo es posible tener dos tipos de soluciones:

- (I)  $E_z = 0, H_z \neq 0$ , ya que el campo eléctrico es transversal al eje de la guía de ondas (eje  $z$ ), a este tipo de ondas las llamaremos **transverse electric (TE)**.
- (II)  $E_z \neq 0, H_z = 0$ , ya que el campo auxiliar magnético es transversal al eje de la guía de ondas (eje  $z$ ), a este tipo de ondas las llamaremos **transverse magnetic (TM)**.

Interesantemente, para el caso en que tengamos  $E_z = H_z = 0$  estamos en presencia de una onda tipo **TEM** y **no** puede ser transportada por una guía de ondas. Para efectos de estos resultados la forma de la guía de ondas no es particularmente importante, pero para definir sus constantes de integración sí. Es decir, puede ser de forma circular, o incluso irregular.

## 4.8. Propagación en guías de ondas rectangulares

En esta sección encontraremos las constantes de integración para la solución propuesta en ecuación (4.126) dada una geometría de guía de onda rectangular como se muestra en figura 4.8. Asumiremos que el interior de la guía de ondas posee propiedades de  $\mu, \epsilon$ , y  $\sigma = 0$  (para el caso con pérdidas podemos usar una expresión de permitividad compleja de  $\hat{\epsilon}$ ; vea apartado 3.2.4) y para las paredes una conductividad perfecta  $\sigma = \infty$ . Luego, estas condiciones nos ayudarán a encontrar las condiciones de frontera del problema y resolver para  $X_1, X_2, Y_1$  y  $Y_2$ . Debemos entonces resolver para dos sistemas, para los puntos I y II en apartados 4.8.1 y 4.8.2.

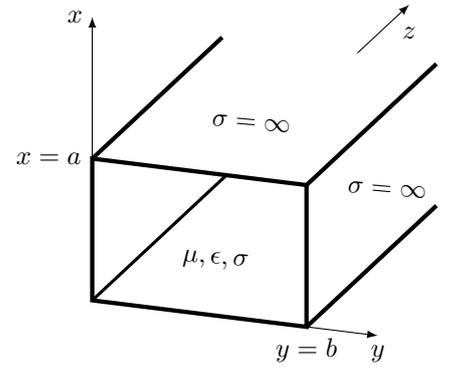


Figura 4.8: Representación de guía de onda rectangular. Por lo general se le asignan valores de  $a$  y  $b$  a los lados de la guía de onda rectangular, hecha de un conductor que posee una conductividad  $\sigma = \infty$ . Asumimos que al interior de la guía de ondas tenemos un medio homogéneo, caracterizado por  $\mu$ ,  $\epsilon$ , y  $\sigma$ .

### 4.8.1. Modo de propagación TM

Usamos el punto II,  $H'_z = H_z = 0$  y para  $E_z$  usamos ecuación (4.126). Las condiciones de frontera son para las paredes de la guía de ondas donde el campo eléctrico debe ser cero, es decir:

$$E_z(x=0, y) = E_z(x, y=b) = E_z(x=a, y) = E_z(x, y=0) = 0. \quad (4.127)$$

Con este resultado inmediatamente tenemos que  $X_2 = Y_2 = 0$ . Luego,

$$E_z = A \sin(Mx) \sin(Ny) e^{-\gamma z}, \quad (4.128)$$

donde  $A = X_1 Y_1$ . Aplicando las mismas condiciones de frontera tenemos que:

$$\sin(Ma) = 0 \quad \Rightarrow \quad Ma = m\pi \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.129)$$

$$\sin(Nb) = 0 \quad \Rightarrow \quad Nb = n\pi \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.130)$$

Y la constante de propagación es:

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon}. \quad (4.131)$$

El lector ya debe estar familiarizado (con lo visto en capítulo 3), que la propagación sin perdidas es puramente compuesta de una parte imaginaria, i.e.,

$$\gamma = j\beta_{mn}, \quad (4.132)$$

y que  $e^{-\gamma z} e^{j\omega t} = e^{j(\omega t - \beta_{mn} z)}$ . Donde hemos usado una dependencia explícita de los enteros  $m$  y  $n$ , lo que implica que la constante de fase dependerá de las dimensiones mismas de la guía de ondas. De ahora en adelante también definiremos los distintos “modos” de una guía de ondas TM como  $TM_{mn}$ . Para que la constante de propagación sea puramente imaginaria se debe cumplir que:

$$\omega^2 \mu \epsilon > \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2. \quad (4.133)$$

En el caso opuesto,

$$\omega^2 \mu \epsilon < \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad (4.134)$$

entonces tendremos que  $\gamma = \alpha_{mn} = \sqrt{\left(m\pi/a\right)^2 + \left(n\pi/b\right)^2}$  y que  $e^{-\gamma z} e^{j\omega t} = e^{-\alpha_{mn} z} e^{j\omega t}$ , o que claramente indica que la propagación en el eje  $z$  no existe. Estos modos de “no propagación” son llamados en inglés *evanescent*. Entonces para que podamos tener una onda TM transmitida en una guía de ondas, entonces debemos hacer calzar  $a$ ,  $b$  y  $\nu$  en ecuación (4.133) y cumplir la condición. Definimos ahora la llamada frecuencia de corte o *cutoff frequency* que es la frecuencia más baja que puede ser transmitida en la guía de ondas, y es dada por:

$$\nu_{\text{cutoff}, mn} \equiv \frac{1}{2\pi\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \frac{u}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}, \quad (4.135)$$

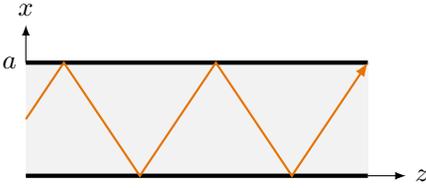


Figura 4.9: Propagación de onda electromagnética en una guía de ondas. La propagación es compuesta por muchas ondas planas y uniformes que al chocar con las paredes general una propagación tipo **TM**. La vista en tres dimensiones de la guía de ondas puede ser vista en figura 4.8.

donde  $u$  es la velocidad de propagación, ecuación (3.41), similar al caso de una onda plana y uniforme,  $u = (\mu\epsilon)^{-1/2}$ . Pero no confundir, los modos de una onda **TM** no se parecen en nada a una onda plana e uniforme y solo agregamos  $u$  para dejar la expresión más compacta. Similarmente podemos escribir la constante de fase para  $\text{TM}_{mn}$ ,

$$\beta_{mn} = 2\pi\nu\sqrt{\epsilon\mu}\sqrt{1 - \left(\frac{\nu_{\text{cutoff},mn}}{\nu}\right)^2} \quad (4.136)$$

$$\beta_{mn} = \beta\sqrt{1 - \left(\frac{\nu_{\text{cutoff},mn}}{\nu}\right)^2}, \quad \nu > \nu_{\text{cutoff},mn}, \quad (4.137)$$

donde nuevamente para dejar compacta la expresión usamos la constante de fase de una onda plana e uniforme,  $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ , vista en ecuación (3.43). Con esta información podemos entonces calcular las demás componentes de los campos, ecuaciones (4.113) a (4.116) con ecuación (4.128) y el punto II:

$$E_x = \frac{-j\beta_{mn}M}{M^2 + N^2} A \cos(Mx) \sin(Ny) e^{-j\beta_{mn}z}, \quad (4.138)$$

$$E_y = \frac{-j\beta_{mn}N}{M^2 + N^2} A \sin(Mx) \cos(Ny) e^{-j\beta_{mn}z}, \quad (4.139)$$

$$E_z = A \sin Mx \sin Ny e^{-j\beta_{mn}z}, \quad (4.140)$$

$$H_x = \frac{j\omega\epsilon N}{M^2 + N^2} A \sin(Mx) \cos Ny e^{-j\beta_{mn}z}, \quad (4.141)$$

$$H_y = \frac{-j\omega\epsilon M}{M^2 + N^2} A \cos(Mx) \sin(Ny) e^{-j\beta_{mn}z}, \quad (4.142)$$

$$H_z = 0. \quad (4.143)$$

El orden fundamental de una onda **TM** es el  $m = n = 1$ , ya que al usar  $m = n = 0$  obtenemos que todos los campos son ceros. Entonces el primer modo o modo fundamental está dado por  $\text{TM}_{11}$ .

La propagación de una onda **TM** es la combinación de ondas planas y uniformes que chocan con las paredes de la guía de ondas, como visto en figura 4.9. La velocidad de estas ondas planas e uniformes puede ser calculada con la ya conocida fórmula  $u = (\mu\epsilon)^{-1/2}$ , sin embargo la combinación colectiva de todas estas ondas hacen una “suma de ondas” que se propaga en la dirección  $z$  y su velocidad está dada por el modo específico:

$$u_{\text{ph},mn} = \frac{\omega}{\beta_{mn}} = \frac{u}{\sqrt{1 - \left(\frac{\nu_{\text{cutoff},mn}}{\nu}\right)^2}}, \quad \nu > \nu_{\text{cutoff},mn}. \quad (4.144)$$

A  $u_{\text{ph},mn}$  la llamaremos la velocidad de fase de la onda resultante, y es mayor a la velocidad de la luz en el material,  $u$ . Que esta velocidad sea mayor a la velocidad de la luz en el material no implica que la energía o información viaje más rápido que la velocidad de la luz en el material (un casi axioma físico), sino que expresa la velocidad de fase constante de los frentes de onda.

Otra definición de velocidad es la velocidad de grupo. Estas son secciones de ancho de banda pequeñas que transportan información,  $u_{\text{g},mn}$  (velocidad a la cual la modulación es propagada)

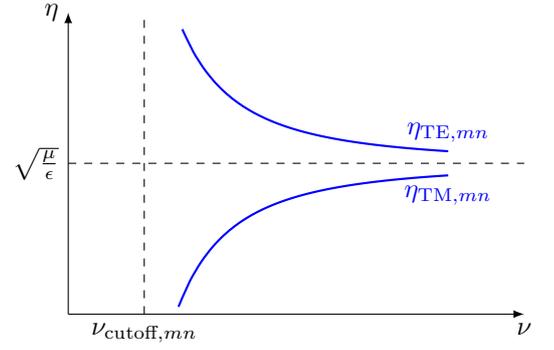
$$u_{\text{g},mn} = \frac{d\omega}{d\beta_{mn}} = u\sqrt{1 - \left(\frac{\nu_{\text{cutoff},mn}}{\nu}\right)^2}, \quad \nu > \nu_{\text{cutoff},mn}. \quad (4.145)$$

Nótese que la velocidad de grupo es menor que la del medio, viz., la información se transporta más lento que la velocidad  $u$ ,

$$u_{\text{ph},mn}u_{\text{g},mn} = u^2. \quad (4.146)$$

#### 4. Radiación: ondas confinadas

Figura 4.10: Impedancia intrínseca para modos TE y TM. La impedancia intrínseca  $\eta_{\text{TM},mn}$  (apartado 4.8.1) y  $\eta_{\text{TE},mn}$  (apartado 4.8.2) del sistema aumenta al estar próximo a la frecuencia de corte,  $\nu_{\text{cutoff},mn}$ . Toda frecuencia mayor a  $\nu_{\text{cutoff},mn}$  pasará por la guía de ondas, pero dependiendo de su  $\nu$  tendrá más o menos impedancia o oposición a su propagación. Ambas impedancias intrínsecas están conectadas por la ecuación (4.171).



La longitud de onda también presentará un comportamiento  $mn$  y que estará dado cada vez que se complete un ciclo de  $2\pi$  radianes,

$$\lambda_{mn}\beta_{mn} = 2\pi \Rightarrow \lambda_{mn} = \frac{2\pi}{\beta_{mn}} = \frac{u_{\text{ph},mn}}{\nu} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\nu_{\text{cutoff},mn}}{\nu}\right)^2}}, \quad \nu > \nu_{\text{cutoff},mn}, \quad \lambda = u/\nu. \quad (4.147)$$

Por último también existirá una relación entre amplitudes eléctricas y magnéticas (similar al caso de la impedancia intrínseca del medio en ondas libres)

$$\frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\beta_{mn}}{\omega\epsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{1 - \left(\frac{\nu_{\text{cutoff},mn}}{\nu}\right)^2} \quad \nu > \nu_{\text{cutoff},mn}. \quad (4.148)$$

Con lo que definimos  $\eta_{\text{TM},mn}$ , una impedancia intrínseca de onda para un modo TM

$$\eta_{\text{TM},mn} \equiv \eta \sqrt{1 - \left(\frac{\nu_{\text{cutoff},mn}}{\nu}\right)^2} \quad \nu > \nu_{\text{cutoff}}. \quad (4.149)$$

Nótese que ecuación (4.149) es solo para una onda propagándose en  $+\hat{z}$  (para esas amplitudes del tipo  $E'_x$ ). Las impedancias intrínsecas para los modos TM y TE están en figura 4.10.

Con  $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ . Evidentemente podemos expresar las amplitudes como:

$$E_x = \eta_{\text{TM},mn} H_y, \quad E_y = -\eta_{\text{TM},mn} H_x. \quad (4.150)$$

Finalmente podemos escribir los campos completos para  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{H}$  (multiplicando por  $e^{j\omega t}$  y calculando su parte real), vea ecuación (2.149),

$$\mathcal{E}_x = \frac{\beta_{mn}}{h^2} \frac{m\pi}{a} A \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda_{mn}}\right), \quad (4.151)$$

$$\mathcal{E}_y = \frac{\beta_{mn}}{h^2} \frac{n\pi}{b} A \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda_{mn}}\right), \quad (4.152)$$

$$\mathcal{E}_z = \frac{\beta_{mn}}{h^2} \frac{n\pi}{b} A \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda_{mn}}\right), \quad (4.153)$$

$$\mathcal{H}_x = -\frac{\omega\epsilon}{h^2} \frac{n\pi}{b} A \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda_{mn}}\right), \quad (4.154)$$

$$\mathcal{H}_y = \frac{\omega\epsilon}{h^2} \frac{m\pi}{a} A \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda_{mn}}\right), \quad (4.155)$$

$$\mathcal{H}_z = 0. \quad (4.156)$$

Donde hemos asumido que  $C$  es una constante puramente real y la constante  $h \equiv \sqrt{M^2 + N^2}$ . Similar a la definición de nabra transpuesto, ecuación (4.106), podemos escribir los campos eléctrico y auxiliar magnético

como una combinación en  $\hat{\mathbf{x}}$  y  $\hat{\mathbf{y}}$ :

$$\mathcal{E}_T = \frac{\beta_{mn}A}{h^2} \left[ \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \hat{\mathbf{x}} + \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \hat{\mathbf{y}} \right] \sin\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda_{mn}}\right), \quad (4.157)$$

$$\mathcal{H}_T = \frac{\omega\epsilon}{h^2} A \left[ -\frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \hat{\mathbf{x}} + \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \hat{\mathbf{y}} \right] \sin\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda_{mn}}\right). \quad (4.158)$$

### 4.8.2. Modo de propagación TE

De forma análoga resolvemos el punto II,  $E'_z = E_z = 0$  y para  $H_z$  usamos ecuación (4.126) (que tiene la misma forma pero ahora con el campo auxiliar  $H_z$ ). El procedimiento es muy similar por lo que solo presentaremos las soluciones aquí. Ahora las condiciones de frontera estarán dadas por la definición de  $E_z = 0$ , donde en las paredes se debe cumplir que:

$$E_x(x, y = 0) = E_x(x, y = b) = E_y(x = 0, y) = E_y(x = a, y) = 0. \quad (4.159)$$

Las condiciones para  $H_z$  estarán dadas por las ecuaciones (4.113) a (4.116):

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{y=b} = \left. \frac{\partial H_z}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial H_z}{\partial x} \right|_{x=a} = 0. \quad (4.160)$$

La forma de la solución para  $H_z$  es similar a ecuación (4.126) y evaluando condiciones de frontera llegamos a una forma similar a ecuación (4.128),

$$H_z = A \cos(Mx) \cos(Ny) e^{-j\beta_{mn}z}, \quad (4.161)$$

donde hemos reemplazado de inmediato  $\gamma$  por solo la parte imaginaria que es la que finalmente transmite la onda en la guía de ondas. Realizando cálculos similares podemos llegar al siguiente set de ecuaciones:

$$E_x = \frac{j\omega\mu N}{M^2 + N^2} A \cos(Mx) \sin(Ny) e^{-j\beta_{mn}z}, \quad (4.162)$$

$$E_y = \frac{-j\omega\mu N}{M^2 + N^2} A \sin(Mx) \cos(Ny) e^{-j\beta_{mn}z}, \quad (4.163)$$

$$E_z = 0, \quad (4.164)$$

$$H_x = \frac{j\beta_{mn}M}{M^2 + N^2} A \sin(Mx) \cos(Ny) e^{-j\beta_{mn}z}, \quad (4.165)$$

$$H_y = \frac{j\beta_{mn}N}{M^2 + N^2} A \cos(Mx) \sin(Ny) e^{-j\beta_{mn}z}, \quad (4.166)$$

$$H_z = A \cos(Mx) \cos(Ny) e^{-j\beta_{mn}z}. \quad (4.167)$$

Las constantes  $M, N$ , y  $\beta_{mn}$  corresponden a las mismas definiciones de TM en apartado 4.8.1. Omitiremos los cálculos para las componentes dependiente del tiempo, pero es simple y solo basta con multiplicar por  $e^{j\omega t}$  y calcular la parte real. Similar al caso TE<sub>mn</sub> ahora tendremos modos TM<sub>mn</sub>, los cuales serán diferentes. Como fue brevemente mostrado en figura 4.10, la impedancia intrínseca para una onda TM es:

$$\eta_{\text{TE},mn} = \frac{\omega\mu}{\beta_{mn}}, \quad \nu > \nu_{\text{cutoff},mn}, \quad (4.168)$$

$$= \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\nu_{\text{cutoff},mn}}{\nu}\right)^2}}. \quad (4.169)$$

Con  $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$  la impedancia intrínseca de una onda plana y uniforme. Luego, los componentes de las ondas transversas son:

$$E_x = \eta_{\text{TE},mn} H_y, \quad E_y = -\eta_{\text{TE},mn} H_x. \quad (4.170)$$

Nuevamente; estas definiciones son solo consistentes para una conducción de la onda en sentido  $+\hat{\mathbf{z}}$  (explicado al inicio de apartado 4.7).

Otra condición interesante que se desprende de este análisis es el hecho de que las impedancias también están ligadas (similar a lo ocurrido en apartado 4.8.1),

$$\eta_{\text{TE},mn} \eta_{\text{TM},mn} = \eta^2 = \frac{\mu}{\epsilon}. \quad (4.171)$$

Nombre	Name	Símbolo	Unidad SI
Frecuencia de corte	<i>Cutoff frequency</i>	$\nu_{\text{cutoff},mn}$	Hz
Constante de fase	<i>Phase constant</i>	$\beta_{mn}$	rad m <sup>-1</sup>
Velocidad de fase	<i>Phase velocity</i>	$u_{\text{ph},mn}$	m s <sup>-1</sup>
Velocidad de grupo	<i>Group velocity</i>	$u_{\text{g},mn}$	m s <sup>-1</sup>
Longitud de onda	<i>Wavelength</i>	$\lambda_{mn}$	m
Impedancia intrínseca <b>TM</b>	<i>Intrinsic impedance</i>	$\eta_{\text{TM},mn}$	$\Omega$
Impedancia intrínseca <b>TE</b>	<i>Intrinsic impedance</i>	$\eta_{\text{TE},mn}$	$\Omega$

Cuadro 4.2.: Lista de variables relevantes en guías de ondas. Variables usadas a lo largo de este capítulo también se encuentra en cuadro 3.1.

### 4.8.3. Flujo de energía en una guía de ondas

El flujo de energía nuevamente estará dado por el vector de Poynting, apartado 3.2.3. Calculemos, por ejemplo, el factor  $\mathbf{E} \times \bar{\mathbf{H}}$  para un modo  $\text{TE}_{10}$ ,

$$\mathbf{E} \times \bar{\mathbf{H}} = E_y \hat{\mathbf{y}} \times (\overline{H_x} \hat{\mathbf{x}} + \overline{H_z} \hat{\mathbf{z}}) = -E_y \overline{H_x} \hat{\mathbf{z}} + E_y \overline{H_z} \hat{\mathbf{x}} \quad (4.172)$$

$$= \frac{\beta_{10} \omega \mu a^2}{\pi^2} \|A\|^2 \sin^2 \left( \frac{\pi x}{a} \right) \hat{\mathbf{z}} - \frac{j \omega \mu a}{\pi} \|A\|^2 \sin \left( \frac{\pi x}{a} \right) \cos \left( \frac{\pi x}{a} \right) \hat{\mathbf{x}}, \quad (4.173)$$

en general, solo nos interesa el promedio de esta cantidad, donde el lector puede comprobar que senos y cosenos se anulan en el promedio, vea apartado 2.4.2. Entonces,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\|E_y\|^2}{\eta_{\text{TE},10}} \hat{\mathbf{z}}. \quad (4.174)$$

Este resultado, como sabemos, solo incluye propagación en  $+\hat{\mathbf{z}}$ . Entonces, podemos llegar a la solución general tanto para los modos **TE** como **TM**,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\|E_x\|^2 + \|E_y\|^2}{\eta_{mn}} \hat{\mathbf{z}}, \quad (4.175)$$

donde la cantidad  $\eta_{mn}$  será  $\eta_{\text{TE},mn}$  para un modo **TE** y  $\eta_{\text{TM},mn}$  para un modo **TM**. Evidentemente para encontrar la potencia total promedio debemos integrar ecuación (4.175) sobre las dimensiones perpendiculares a la propagación, es decir:

$$P_{\text{av}}(z) = \int \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{\mathbf{z}} \, da = \iint \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{\mathbf{z}} \, da = \frac{1}{2} \int_{y=0}^{y=b} \int_{x=0}^{x=a} \frac{\|E_x\|^2 + \|E_y\|^2}{\eta_{mn}} \, dx \, dy, \quad (4.176)$$

con  $da = \hat{\mathbf{z}} \, da$  el diferencial de superficie (apartado 1.1.5).

Finalmente, para los apartados 4.8.1 y 4.8.2, es conveniente definir la constante adimensional o “factor”  $F_{mn}$ :

$$F_{mn} = \sqrt{1 - \left( \frac{\nu_{\text{cutoff},mn}}{\nu} \right)^2}, \quad \nu > \nu_{\text{cutoff},mn}. \quad (4.177)$$

La cual nos deja expresar de forma mucho más compacta a las cantidades listadas en el resumen, cuadro 4.2. También es importante recalcar que la constante de propagación para guías de ondas ahora no solo depende del medio, como pasaba en el caso de **LT** o de ondas planas y uniformes. La constante de propagación,  $\gamma$ , depende ahora de las dimensiones y la geometría de la guía de ondas. Guías de ondas sin pérdidas no serán analizadas, pero el lector puede derivar su propia solución, donde debemos hacer el cambio a una permitividad compleja del tipo, ecuación (3.53), donde la constante de propagación (arriba de una dada frecuencia de corte  $\nu_{\text{cutoff},mn}$ ) tendrá ahora una parte real, i.e.,  $e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$ .

## 5. Introducción a conceptos de antenas

Una radio antena es un componente que permite tanto emitir (o transmitir) como recibir ondas de radio frecuencias. En otras palabras, es un sistema que permite transmitir ondas electromagnéticas desde una guía de ondas o líneas de transmisión al espacio libre (y viceversa; recibir ondas libres y pasarlas a ondas confinadas). Por lo que información puede ser transmitidas sin la necesidad de alguna estructura que intervenga. Para un sistema en el que queremos transmitir información por una línea de largo  $R$ , para líneas de transmisión se tiene que la potencia disipada (apartado 4.5) es de la forma  $(e^{-\gamma R})^2$  con  $\gamma$  la constante de propagación, en cambio para una antena que transmite (o equivalentemente recibe), la pérdida de energía es de la forma  $1/R^2$  (donde esta cantidad viene de la ley de flujo). Existen muchos factores para decidir entre una LT o una antena, pero en general a frecuencias bajas y a distancias cortas las LT son superiores. Interferencia de sistema de antenas, la cantidad de ancho de banda transmitido, o el costo de construcción; son algunas de las condiciones para decidir entre distintos sistemas.

Antenas o radio antenas pueden ser de varios tipos y tamaños<sup>1</sup>. Además, un set de antenas es conocido como un arreglo de antenas, *array* o interferómetro (local o no local). Dependiendo de la aplicación que se busque, será necesario emitir/recibir con una antena o un interferómetro en que sus propiedades como *sensitivity*, resolución angular  $\theta_{\text{res}}$  (ancho máximo de su *beam* principal), ancho de banda  $\Delta\nu$ , y frecuencia  $\nu$ , estarán restringidas por diseño.

Antenas, creadas primero con el fin de telecomunicaciones, también pueden ser usadas con otros fines. Equipos de detección (*remote sensing systems*) que pueden ser activos como el radar o pasivos como los radiómetros (*radiometer*), que pueden recibir energía dispersa o energía proveniente desde una fuente, respectivamente. De particular importancia son la tecnología de radiómetros, ya que gracias a ellos se basa la tecnología de radio astronomía.

### 5.1. Breve historia del desarrollo de antenas

Los primeros fenómenos electromagnéticos (antes de las ecuaciones de Maxwell; apartado 2.2) fueron estudiados por Joseph Henry. Él pudo detectar descargas y/o luz entre alambres verticales (en el techo de su casa), y marcan el inicio del estudio de antenas. Luego James Clerk Maxwell extiende y unifica los fenómenos eléctricos y magnéticos en uno solo, además de predecir la existencia de ondas electromagnéticas (teóricamente). No fue si no hasta varios años después (incluso después de su muerte), que Heinrich Hertz prueba de forma experimental la existencia de ondas electromagnéticas y que se transmiten en el aire (ya que su transmisión en el vacío da para un largo debate, el “éter”). Cabe destacar que fue Heinrich Hertz quien fue el primero en construir una antena tipo reflector en 1888 y que operaba a 455 MHz. El ingeniero que comercializó, llevó el fenómeno de telecomunicaciones a más personas y ayudo a realizar la primera comunicación transatlántica fue Guglielmo Marconi, quien en 1895 creó el primer reflector parabólico en transmisiones de 1.2 GHz. Sus desarrollos generaron gran interés en la industria y el gobierno, por lo que en 1901 se realiza la primera comunicación transatlántica con un monopolo de 48 m de largo (parecido a lo que hoy llamamos una antena tipo discone). Un año antes de los grandes desarrollos de Marconi, el físico ruso Alexander Popov pudo realizar y recibir telecomunicaciones a grandes distancias (por sobre tres millas), pero se le asigna a el padre de la telecomunicaciones y antenas a Marconi, ya que el fue él quien masifico su uso además de realizar el trabajo de forma independiente. Ya en 1912 se forma el [Institute of Radio Engineers \(IRE\)](#), donde la importancia de antenas ya en esa época queda clara con su primera publicación de tópico de antenas ([Pupin et al. 1913](#)). Mucha más ingeniería de antenas, y sus distintos tipos se desarrollaron durante la primera y segunda guerra mundial. Famoso es el caso de la tecnología del radar y su uso por parte de los ingleses para atacar a naves de la *Luftwaffe*. Una breve línea de tiempo de la historia y tecnología de antenas está en figura 5.1.

El desarrollo de antenas de tipo dipolo, monopolo, y sus variantes (e.g., Yagi-Uda) fue durante la época de 1920, las antenas tipo bocina (o trompeta o *horn*) desarrolladas a fines de 1930 y el desarrollo de los primeros arreglos de antenas en la época de 1940 (que un un principio fueron completamente analógicos).

<sup>1</sup>No confundir entre receptor (*receiver*) y antena. Una antena puede ser una antena parabólica, la cual posee también un receptor.

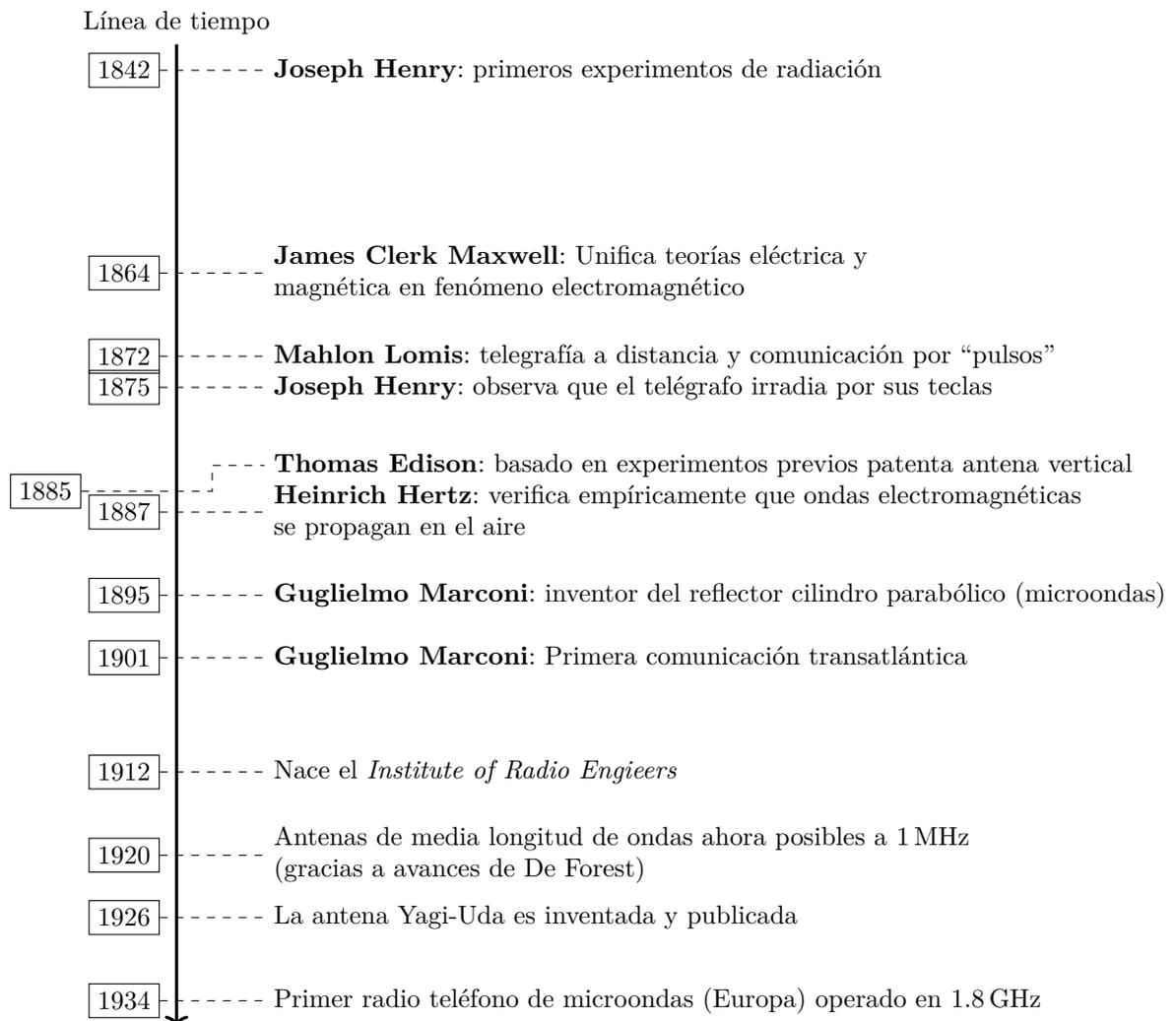


Figura 5.1.: Breve historia de la tecnología de antenas. El resumen se centra solo desde el descubrimiento de los fenómenos eléctricos y magnéticos experimentales (Joseph Henry), hasta las telecomunicaciones transatlánticas. Desarrollos posteriores, también de ingeniería eléctrica, y que van de la mano con esta serie de tiempo son el avance en ciencias de la computación donde la invención de los transistores (o reducción de su tamaño y costo) aceleró de forma exponencial su avance.

De forma adicional al desarrollo de antenas, Karl Guthe Jansky en los años 1930 diseñó y creó una antena direccional (propiedad llamada *directivity*) de 20.5 MHz trabajando para los laboratorios Bell en comunicaciones transatlánticas. Luego de varios meses de observación con su antena, el análisis de datos arrojó que la misma señal era repetitiva, de 23 h y 56 min. Después de varias discusiones (junto a su amigo astrofísico Albert Melvin Skellett), pudo revelar que la gran emisión que observó durante meses no era nada más que el mismo centro Galáctico de la Vía Láctea (Jansky 1933). Esto fue el nacimiento de la **radio astronomía** ya que hasta ese entonces no se sabía de fenómenos astronómicos relacionados a estas frecuencias (unidad de flujo energético lleva el nombre de Jansky; apéndice A).

## 5.2. Una breve historia de la radio astronomía

La astronomía esta ligada a nuestra historia como especie, desde antes que existieran las naciones el ser humano a buscado explicaciones a eventos que suceden en el cielo. Se estudió primero la relación con las estaciones del año, y el ciclo Lunar para definir de forma más precisa el tiempo, pero no fue hasta el desarrollo científico del renacimiento en que se comenzó a estudiar fenómenos del cielo con herramientas físicas cotidianas. Muchos descubrimientos previos, que fueron re-descubiertos en el renacimiento fueron realizados por medio

oriente (donde muchas veces se les da su origen erróneo a culturas más occidentales). Estos avances hechos por Copernicus, Tycho Brahe, Kepler, Galileo, entre otros, fueron los que dieron paso a la revolución científica y a la astronomía moderna. Con la llegada de la mecánica celeste de Newton se abrió paso a conceptos de física relacionados con la astronomía (que se entiende como un fenómeno de solo observación, aunque hoy en día no lo expresamos de esa forma), es decir, la astrofísica. Avances llegaron de la mano con nuevos instrumentos capaces de detectar regiones más alejadas, y en 1920 se vivió una revolución. El Universo pasó de ser solo la Galaxia (Vía Láctea) a miles de millones de galaxias (“El gran debate” o el Shapley-Curtis debate; Shapley & Curtis 1921). Ya en 1929 Edwin Hubble (astrónomo americano), descubre que el Universo se está expandiendo, y que las galaxias se alejan de nosotros a una velocidad proporcional a su distancia (Pannekoek 1961).

Aunque ya a finales de 1800 se habían hecho las primeras pruebas con radio ondas, y hasta 1920 se sabía mucho del Universo, pero no fue hasta 1930 que se descubrió la primera fuente de radio astronómica (el centro Galáctico). Entonces, ¿por qué no se descubrieron radio señales del Universo antes? La explicación puede sonar un poco contra intuitiva, pero es porque sabíamos ya bastante de astrofísica. Los descubrimientos y astrofísica de estrellas se habían ya estudiado por generaciones de astrónomos. La radio emisión de una estrella a bajas longitudes de onda está dada por la relación de Rayleigh-Jeans,  $B_\nu(\nu, T) = 2k_B T \nu^2 / c^2$ , lo que implica una potencia de radiación muy baja, de hecho ni una antena moderna potente, funcionando a los  $\sim 1$  GHz, podría percibir la fotosfera de una estrella, aproximadamente  $S_\nu \sim 0.3 \mu\text{Jy}$ , donde un telescopio moderno solo puede llegar a los  $\sim 1 \mu\text{Jy}$ . Sin embargo, observaciones de Karl Jansky probaron que si existe emisión de radio en el Universo detectable, y por ende, durante años hubo mucho escepticismo de parte de astrónomos respecto a la fuente de radio emisión (Condon & Ransom 2016).

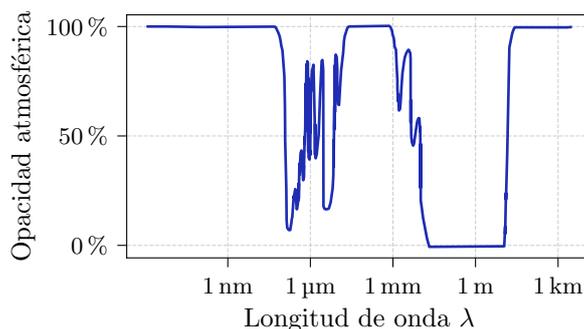
Desde entonces se ha detectado muchos tipos de radio señales, haciendo una revolución en astronomía, prácticamente revelando un “Universo paralelo” totalmente desconocido hasta el momento. Los descubrimientos más grandes en radio astronomía son los siguientes:

- Radiación de origen no térmico (que no se origina del movimiento de partículas en un gas caliente) o *nonthermal radiation*, la Galaxia y muchas otras fuentes emiten radiación no térmica (Reber 1940).
- Radio galaxias, *quasi-stellar radio source* (QUASARS) los cuales obtienen su energía de *super massive BH* (SMBH) (Baade & Minkowski 1954).
- Evolución cosmológica de radio galaxias y QUASARS (Ryle & Clarke 1961).
- Emisión espectral térmica originada por átomos, iones y moléculas frías en el medio interestelar o *interstellar medium* (ISM).
- Emisión del tipo *microwave amplification by stimulated emission of radiation* (MASER) originadas en el ISM (Weaver et al. 1965).
- Emisión continua y coherente de cierto tipo de estrellas y pulsares (*pulsars*).
- Radiación cósmica de fondo o *cosmic microwave background* (CMB) del *Big Bang* (Penzias & Wilson 1965).
- Pulsares, *neutron stars* (NSs) (Hewish et al. 1968), y *fast radio bursts* (FRBs) Lorimer et al. (2007).
- El SMBH del centro Galáctico (Balick & Brown 1974).
- Evidencia de materia oscura o *dark matter* (DM), derivada de la curva de HI Galáctica (Roberts & Whitehurst 1975).
- Detección del primer exoplaneta (un planeta fuera del sistema solar y que fue realizado en torno a un pulsar) (Wolszczan & Frail 1992).
- Lentas gravitacionales (*strong gravitational lensing*).

Son algunas de los descubrimientos más importantes. Una lista completa de estos descubrimientos y su bibliografía puede ser vista en capítulo 1 de Condon & Ransom (2016).

La mayor parte de la energía del Universo se encuentra en la llamada CMB y su radiación un efecto secundario desde el *Big Bang*. La energía de la CMB posee un espectro de cuerpo negro (*blackbody*; Greiner & Dreitlein 1990) casi perfecto de temperatura 2.73 K con su punto máximo a los  $\nu \approx 220$  GHz. Radiación más energética y cercana al *optical/near-infrared radiation* (OIR) tiene su punto máximo a los  $\nu \approx 3 \times 10^5$  GHz (orden de

Figura 5.2: Opacidad atmosférica en frecuencias de radio ondas. La atmósfera es en su mayoría transparente a longitudes de onda largas y comienza a ser absorbida, principalmente por la molécula de agua, a longitudes de onda de los milímetros (a frecuencias altas). A bajas frecuencias menores a 100 MHz la ionósfera absorbe casi toda la radiación. La ventana de frecuencias mucho más altas, mayor a THz, en óptico también poseen una ventana similar pero mucho más pequeña. Frecuencias más altas como rayos-X y  $\gamma$  son completamente absorbidos. Figura adaptada de Condon & Ransom (2016).



los  $\sim 1 \mu\text{m}$  en longitud de onda) que se debe a radiación térmica de fuentes pequeñas y radiación *nonthermal* de radio galaxias tipo *active galactic nuclei* (AGN). *Far infrared radiation* (FIR) tiene su punto más alto a los  $\nu \approx 1 \times 10^3$  GHz ( $\sim 100 \mu\text{m}$  en longitudes de onda) y que en su mayoría proviene de la interacción de luz óptica con el ISM que genera re-emisión térmica. Radiación más energética como lo son los rayos-X y  $\gamma$  son una mezcla de radiación *nonthermal* (radiación tipo *synchrotron*, *inverse-Compton scattering*) de partículas aceleradas en AGN y radiación térmica extragaláctica de cúmulos de galaxias (*galaxy clusters*).

Por último, la ventana terrestre de radio frecuencias es amplia, y mayor a la del espectro óptico, como se aprecia en la figura 5.2. La atmósfera en longitudes de onda de centímetros a metros es completamente transparente, ideal para observaciones de radio astronomía y la tecnología de telecomunicaciones. Hoy en día, este tipo de ciencia ya no se realiza por separado y se toma un espectro electromagnético para luego ser analizado en multi-frecuencias. Solo así podremos entender los mecanismos el Universo.

### 5.3. Antenas elementales

Una antena es un elemento capaz de transmitir o recibir un frente de ondas en una frecuencia específica  $\nu$ , o un rango de frecuencias que llamaremos ancho de banda o *bandwidth*  $\Delta\nu$  (no confundir con *beamwidth*). Antenas vienen de todos tipos y tamaños, las más comunes son las antenas parabólicas (que técnicamente es un paraboloide; apartado 5.5), antena tipo dipolo (o una combinación de dipolos) y la antena *microstrip* (hecha con algún material o resina que permita conducción). La figura 5.3 muestra varios tipos de antena, desde dipolo a antenas de apertura. Dependiendo de su aplicación podremos tener antenas que posean mayor o menor grado de dirección (algo que conoceremos como *directivity*), que trabajan en cierto *bandwidth*  $\Delta\nu$ , o alguna frecuencia específica  $\nu$ , o alguna polarización específica (i.e., existen antenas para polarización circular o lineal).

Por argumentos de las ecuaciones de Maxwell y leyes de termodinámica podemos llegar a dos simples teoremas de antenas, llamados teoremas de reciprocidad (vea Wilson et al. 2013, capítulo 5).

- Teorema de reciprocidad fuerte: Si existe voltaje aplicado a los terminales de una antena  $A$  y corriente medida en los terminales de una antena  $B$ , luego una corriente igual (de amplitud y fase iguales), aparecerá en los terminales de  $A$ , si y solo si el mismo voltaje es aplicado en  $B$ .
- Teorema de reciprocidad débil: El patrón de potencia<sup>2</sup> de una antena es el mismo para una antena que recibe o que transmite.

Básicamente lo que estos teoremas nos están diciendo es que las propiedades de una antena son iguales para transmitir o emitir. Equivalentemente, uno podría diseñar una antena por completo solo considerando transmisión o emisión, y aún así es posible usarlas con sus mismas propiedades en estas dos condiciones<sup>3</sup>. La propiedad patrón de radiación será definida para el caso más simple en apartado 5.4.

<sup>2</sup>vea final del apartado 5.4 para aclarar esta definición.

<sup>3</sup>Famosos sitios de radio telescopios no solo observan el Universo algunos son usados como sistemas de georeferencia (geodesia).

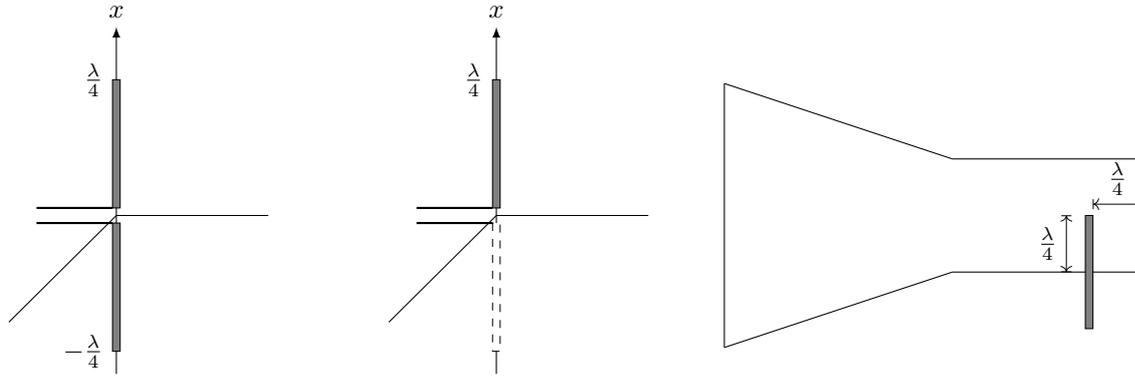


Figura 5.3.: Dos tipos de antenas. Las primeras dos de la izquierda corresponden a una antena tipo dipolo (y monopolo), con la cual es posible detectar longitudes de onda  $\lambda$ . La antena tipo monopolo del centro posee una conexión a tierra. La antena de la derecha corresponde a una antena tipo *feedhorn* (o en español, bocina de alimentación). Este tipo de antena posee una apertura rectangular (viz., antena de apertura) y es conectada directamente hacia una guía de ondas (apartado 4.8) la cual luego conecta con el mismo tipo de antena monopolo.

## 5.4. Antena de dipolo ideal

Para describir las propiedades de antenas realizaremos el modelo ideal y más básico, una antena tipo dipolo simple (o *Hertzian dipole*). Para describir la radiación de una antena debemos encontrar las expresiones que generan los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  en su forma fasorial (asumiendo nuevamente que la solución es armónica al igual que en capítulos 3 y 4). Como sabemos, la fuente que genera un campo en una antena es la corriente  $\mathbf{J}$  que le damos al sistema (es decir  $\mathbf{J}$  es una cantidad conocida). Entonces buscaremos una solución a las ecuaciones de Maxwell, ecuaciones (2.166) a (2.169), en términos de la cantidad conocida. Para esto usaremos el set de ecuaciones (2.170) y (2.172), vistas en apartado 2.4.4, pero en su forma fasorial, es decir:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.1)$$

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \nabla V, \quad (5.2)$$

donde recordemos que en términos fasoriales cada una de estas variables puede o no ser un número complejo. Nuevamente, no estamos interesados en el fundamento físico del potencial vectorial magnético  $\mathbf{A}$ , sino que solo en su uso para poder calcular los campos que finalmente generarán radiación  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ . Similar a lo hecho en apartado 2.4.4 partimos de ecuaciones (5.1) y (5.2), pero su solución en forma fasorial será equivalente a ecuación (2.180), calculando el operador d'Alambertiano para fasores:

$$\square^2 \equiv \nabla^2 + \mu\epsilon\omega^2 \quad (5.3)$$

Y tenemos que ecuación (2.177) se vuelve:

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \omega^2 \mu\epsilon \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}. \quad (5.4)$$

Donde efectivamente no poseemos dependencia en  $V$  y solo depende de la variable conocida a priori  $\mathbf{J}$ . Si separamos en componentes cartesianas:

$$\nabla^2 A_x + \omega^2 \mu\epsilon A_x = -\mu J_x \quad (5.5)$$

$$\nabla^2 A_y + \omega^2 \mu\epsilon A_y = -\mu J_y \quad (5.6)$$

$$\nabla^2 A_z + \omega^2 \mu\epsilon A_z = -\mu J_z. \quad (5.7)$$

Luego podemos describir en términos de la constante de fase,  $\beta^2 = \omega^2 \mu\epsilon$ . La solución a este set de ecuaciones se puede describir de forma integral, siempre y cuando se conozca la distribución de la corriente, entonces:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{J} e^{-j\beta s}}{s} d\tau'. \quad (5.8)$$

## 5. Introducción a conceptos de antenas

En esta integral consideramos que  $\mathcal{V}$  es un volumen cerrado que contiene a la fuente de corriente  $\mathbf{J}$ , y  $s$  es la distancia entre el punto de observación y la fuente de corriente (vea Stutzman & Thiele 1981, capítulo 1). Finalmente si se conoce la distribución de corriente en la superficie de la antena  $\mathbf{J}$ , de la condición de Lorentz (*Lorentz gauge*) se tiene (vea Paul & Nasar 1998, capítulo 9):

$$V = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{A}}{j\omega\mu\epsilon} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} + \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})}{j\omega\mu\epsilon}, \quad (5.9)$$

y para el campo auxiliar magnético:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}. \quad (5.10)$$

Por lo tanto, es posible encontrar los campos eléctrico y auxiliar magnético, sabiendo a priori la distribución de corriente y resolviendo la ecuación (5.4), que solo depende del potencial vectorial magnético  $\mathbf{A}$  (efectivamente condensando todas las ecuaciones de Maxwell en una sola). Alternativamente, si  $\mathbf{J} = 0$ , tenemos de inmediato la solución (ley de Ampère) ecuación (2.169):  $\mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{H} / (j\omega\epsilon)$ . Lo que hemos hecho es solo cambiar el problema de punto de vista, en vez de resolver por  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ , lo que hacemos es usar  $\mathbf{J}$ , que hasta ahora hemos asumido conocido, pero en realidad esta cantidad tampoco es tan fácil de encontrar. Desde un punto de vista teórico y empírico sabemos que la corriente se distribuirá de alguna forma en la apertura de una radio antena, la cual la podemos aproximar a alguna forma simple (siempre y cuando la antena usada también lo sea), lo cual resulta más conveniente que lidiar con  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  y el set completo de las ecuaciones de Maxwell.

Ahora que ya conocemos como calcular los campos continuamos con el dipolo simple o dipolo tipo *Hertzian*. Asumamos ahora un elemento infinitesimal de largo  $dl$  que transporta una corriente  $I$  y que asumimos constante (tanto en amplitud como en fase) a lo largo de la antena. La antena está ubicada como se muestra en figura 5.4, en el eje  $z$ . Resolvemos ecuación (5.8) solo para la dirección  $\hat{\mathbf{z}}$ ,

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} I dl \frac{e^{-j\beta s}}{s}, \quad (5.11)$$

lo cual es más conveniente expresar en coordenadas esféricas (y usaremos  $s \rightarrow r$ ):

$$A_r = A_z \cos \theta, \quad (5.12)$$

$$A_\theta = -A_z \sin \theta, \quad (5.13)$$

$$A_\phi = 0. \quad (5.14)$$

Usando ecuaciones (5.9) y (5.10) podemos encontrar el campo auxiliar magnético primero y luego el campo eléctrico:

$$H_r = 0 \quad E_r = \frac{2dl}{4\pi} \eta \beta^2 \cos \theta \left( \frac{1}{\beta^2 r^2} - j \frac{1}{\beta^3 r^3} \right) e^{-j\beta r} \quad (5.15)$$

$$H_\theta = 0 \quad E_\theta = \frac{I dl}{4\pi} \eta \beta^2 \sin \theta \left( j \frac{1}{\beta r} + \frac{1}{\beta^2 r^2} - j \frac{1}{\beta^3 r^3} \right) e^{j\beta r} \quad (5.16)$$

$$H_\phi = \frac{I dl}{4\pi r} \beta^2 \sin \theta \left( j \frac{1}{\beta r} + \frac{1}{\beta^2 r^2} \right) e^{-j\beta r} \quad E_\phi = 0. \quad (5.17)$$

Nótese que existe una sola componente del campo auxiliar magnético que es cero. Además, imaginemos que la corriente de fuente no es oscilatoria, o que solo provenga de una corriente continua, entonces la constante de fase es  $\beta = 0$ , entonces solo nos quedaríamos con un solo término:

$$H_\phi = \frac{I dl \sin \theta}{4\pi r^2}, \quad (5.18)$$

el cual es exactamente la solución azimutal del campo magnético de un dipolo magnético, la ley de Biot-Savart (apartado 2.1.2). Para frecuencias que no son cero, entonces tenemos tres dependencias radiales, las cuales son llamadas *far-field*  $r^{-1}$ , *induction field*  $r^{-2}$ , y *dipole terms*  $r^{-3}$ . La primera condición es la que domina siempre a distancias más lejanas, la segunda domina en un rango más cercano a la antena y la tercera ya es muy cerca de la antena (y relacionado con el dipolo eléctrico figura 2.11). Para nuestros cálculos consideraremos solo la condición de *far-field* (por razones que se argumentarán pronto; apartado 5.6), entonces tenemos que:

$$\mathbf{H} = \frac{j\beta I dl \sin \theta}{4\pi r} e^{-j\beta r} \hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad r \gg \lambda \quad (5.19)$$

$$\mathbf{E} = \frac{j\eta\beta I dl \sin \theta}{4\pi r} e^{-j\beta r} \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad r \gg \lambda. \quad (5.20)$$

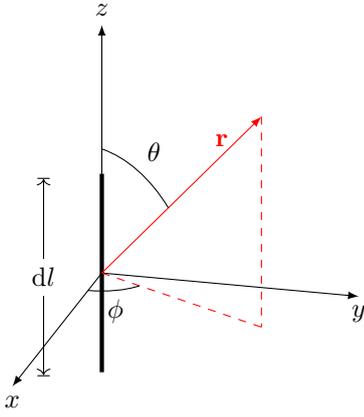


Figura 5.4: Antena de dipolo y el caso más simple de resolver analíticamente. La antena se encuentra ubicada solo en la dirección  $\hat{\mathbf{z}}$ , con un largo infinitesimal  $dl$ . Examinaremos como los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  se comportan a una distancia  $\mathbf{r}$  de la antena.

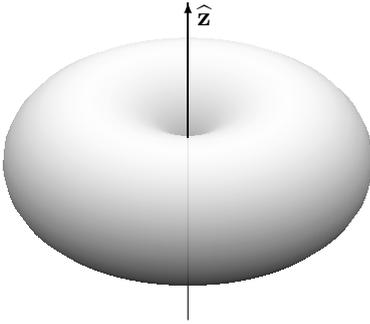


Figura 5.5: Patrón de radiación de un dipolo ideal (solo para el caso *far-field*). El *beam* de la antena es máximo a los  $\theta = \pi/2$  y completamente nulo en  $\theta = 0$  (como una dona pero sin agujero en el centro). Su distribución o *directivity* observa casi todo el espacio. El patrón de potencia solo se mide en coordenadas angulares y es independiente de las coordenadas físicas como se muestra en figura 5.4, el eje  $z$  solo está ahí para orientarnos respecto a la ubicación de la antena.

Nuevamente tendremos la relación de la impedancia intrínseca del sistema respecto a las amplitudes de los campos, i.e.,

$$\frac{E_\theta}{H_\phi} = \eta, \quad r \gg \lambda. \quad (5.21)$$

Es de nuestro interés conocer la potencia radiada por este sistema, donde nuevamente hacemos uso del vector de Poynting promedio, ecuación (2.160),

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} [\mathbf{E} \times \overline{\mathbf{H}}] = \frac{1}{2} \text{Re} [E_\theta \overline{H_\phi}] \hat{\mathbf{r}} = \frac{\omega^2 u \|I\|^2 dl^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2 u r^2} \hat{\mathbf{r}} = 15\pi \left( \frac{dl \|I\| \sin \theta}{\lambda r} \right)^2 \hat{\mathbf{r}}. \quad (5.22)$$

Lo que hemos encontrado en ecuación (5.22) es la energía que irradia (o por el teorema de reciprocidad, recibe) una antena las poseer una corriente  $I$ , y que luego es expresada en términos de su longitud y a la distancia que deseamos medir. Ecuación (5.22) es más importante aún y es un parámetro de antena llamado el **patrón de potencia**  $\|\langle \mathbf{S} \rangle\|$  (o *power pattern* o simplemente *beam*), y es la porción del espacio a la que la antena está activamente “apuntando”. El lector también puede notar que a medida que nos alejamos de la antena existe un término cuadrático a la menos dos,  $r^{-2}$ , que hace que la intensidad total de radiación caiga con esa ley (lo discutido en la introducción de capítulo 5). Por último, el **patrón de potencia posee unidades angulares** para su descripción y no unidades físicas de dimensiones de la antena, es decir hemos pasado desde un espacio de dimensiones de antena física (llamado apertura) a un espacio angular (llamado patrón de potencia).

El *beam* para una antena de tipo dipolo tendrá una estructura como se muestra en la figura 5.5, donde la radiación es mayor perpendicular al eje  $z$ . Esta “dirección” angular de la antena es a lo que llamamos *directivity*, donde el *beam* para este caso posee casi una distribución isométrica. Evidentemente el *beam* llega a ser nulo justo en  $z = 0$ .

Si reordenamos la notación de ecuaciones (5.19) y (5.20), de la forma:

$$\mathbf{E} = jE_0 \frac{e^{-j\beta r}}{r} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad \text{y} \quad \mathbf{H} = j \frac{E_0}{\eta} \frac{e^{-j\beta r}}{r} (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}}{\eta}, \quad (5.23)$$

con  $E_0 = \eta \beta I dl \sin \theta / (4\pi)$ , donde los campos se asemejan bastante a la ecuación de onda plana y uniforme (apartado 3.2).

También podemos calcular las expresiones completas de los campos  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{H}$ , realizando la ya conocida operación fasorial, y ahora asumiendo que la corriente es de la forma  $I = \|I\| \angle 0^\circ$  (nuevamente en el *far-field*),

$$\mathcal{E} = -\frac{E_0}{r} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{u} \right) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (5.24)$$

$$\mathcal{H} = \frac{E_0}{\eta r} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{u} \right) \right] (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}). \quad (5.25)$$

El argumento de las funciones trigonométricas es llamado el retardo de fase, y es la cantidad de tiempo que le toma a la onda viajar desde la antena hasta el punto de observación.

En general, solo estaremos interesados en la condición *far-field*, donde la onda se comporta de manera plana e uniforme (capítulo 3; también discutido en apartado 5.6). De lo contrario el análisis se vuelve muy complejo con diferentes frentes de onda, esféricos y/o irregulares, y condiciones en que la antena misma interactuará con el frente de ondas (*near-field*). Para efectos prácticos podemos realizar toda nuestra teoría en el *far-field* sin necesidad de recurrir a métodos numéricos de resolución de las ecuaciones de radiación de antena. Evidentemente hemos realizado estos cálculos aquí de manera simple. Por lo general cálculos de patrones de potencia son complejos (incluso en el *far-field*) y no fáciles de optimizar y a ser realizados con *software* especializado (e.g., ANSYS HFSS<sup>4</sup>, CENOS<sup>5</sup>, NEC<sup>6</sup>, son algunos de ellos).

### 5.4.1. Propiedades de antenas

Antenas poseen propiedades distintas establecidas para distintas aplicaciones. Aquí ahondaremos en particular en las más importantes y mencionar algunas de ellas (vea Balanis 1992, capítulo 2),

- Patrón de radiación (*radiation pattern*)  $F_a(\theta, \phi)$ : variación angular de la radiación en torno a la antena.
- Patrón de potencia (*power pattern* o *beam*)  $P_a(\theta, \phi)$ : Flujo promedio del vector de Poynting o potencia/intensidad por unidad de área. En antenas de apertura y donde el ángulo del patrón de potencia es mayor lo llamamos *main beam* y su ancho más largo corresponde al *beamwidth* (BW) (vea figura 5.10).
- Directividad (*directivity*)  $D_a(\theta, \phi)$ : Cociente entre la densidad de potencia es mayor y el patrón de potencia, medidos a una misma distancia de la antena (es decir posición del *main beam*).
- Ganancia (*Gain*): Definido como la *directivity* menos las pérdidas de la antena. A veces llamado también *sensitivity*.
- Polarización: Son las propiedades de radiación del frente de ondas emitido o transmitido, existen dos tipos de polarización, lineal y circular que también pueden ir combinados (vea apartado 3.5 y **no** confundir con propiedad de polarización de materiales apartado 2.2.3).
- Impedancia  $Z_a$ : Cociente entre el voltaje y la corriente (definido en apartado 4.2). Propiedad fundamental para que la LT o guía de ondas hagan una buena conexión con la antena.
- Ancho de banda (*bandwidth*)  $\Delta\nu$ : rango de radio frecuencias en que la antena puede transmitir o recibir.
- *Scanning*: Movimiento del patrón de potencia o *scanning* que realiza la antena en el espacio, que puede ser realizado por el movimiento mecánico de la antena, o por retardos de tiempo en arreglos de antenas (vea apartado 5.8).

#### Patrón de potencia

El *beam* es el parámetro más importante de una radio antena y merece su propia sección. Al patrón de potencia lo definiremos entonces como la norma del vector de Poynting promedio (medido en  $\text{W m}^{-2}$ ), que para el caso del dipolo ideal corresponde a la ecuación (5.22), y es una función de las coordenadas angulares  $\theta$  y  $\phi$ ,

$$P_a(\theta, \phi) = \|\langle \mathbf{S} \rangle\|. \quad (5.26)$$

<sup>4</sup><https://www.ansys.com/products/electronics/ansys-hfss>

<sup>5</sup><https://www.cenos-platform.com>

<sup>6</sup><https://www.nec2.org>

De acuerdo a los teorema de reciprocidad débil, descritos en la introducción de apartado 5.3, el patrón de potencia es el mismo para una antena que transmite o recibe. El patrón de potencia es usualmente descrito como una cantidad normalizada (*normalized power pattern*),

$$P_{a, \text{norm}}(\theta, \phi) = \frac{P_a(\theta, \phi)}{P_{a, \text{max}}}. \quad (5.27)$$

Por otro lado, el patrón de radiación  $F_a(\theta, \phi)$  es una cantidad compleja, y usualmente descrito en términos del campo eléctrico generado por la antena:

$$F_{a, \text{norm}}(\theta, \phi) = \frac{E_\theta}{E_{\theta, \text{max}}}, \quad (5.28)$$

donde  $E_\theta$  es la componente del campo eléctrico en ecuación (5.20) para el caso de un dipolo ideal. El patrón de potencia se relaciona con el patrón de radiación de la siguiente manera:

$$P_{a, \text{norm}} = \|F_{a, \text{norm}}\|^2, \quad (5.29)$$

el cual es también conveniente escribirlo en decibeles:

$$\|F_{a, \text{norm}}\|_{\text{dB}} = 20 \log \|F_{a, \text{norm}}\| = P_{a, \text{norm, dB}}. \quad (5.30)$$

El lector puede notar que el patrón de potencia es una cantidad real, y no es posible invertir el proceso de ecuación (5.29) para obtener el patrón de radiación.

### Directividad

La potencia promedio en de una antena estará dada por la ya conocida definición:

$$P_{\text{av}} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} \right] = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \int (\mathbf{E} \times \overline{\mathbf{H}}) \cdot d\mathbf{a} \right] \quad (5.31)$$

$$= \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (E_\theta \overline{H_\phi} - E_\phi \overline{H_\theta}) \sin \theta d\phi d\theta \right] \quad (5.32)$$

$$= \iint U(\theta, \phi) d\Omega = U_{\text{max}} \iint \|F_{a, \text{norm}}\|^2 d\Omega. \quad (5.33)$$

Donde hemos usado la definición de ángulo sólido,  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$  (apartado 1.3.2), y agregado una nueva definición, intensidad de radiación  $U(\theta, \phi)$ , y corresponde a la potencia irradiada en la dirección del ángulo sólido:

$$U(\theta, \phi) = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \mathbf{E} \times \overline{\mathbf{H}} \right] \cdot r^2 \hat{\mathbf{r}} = S(\theta, \phi) r^2. \quad (5.34)$$

El promedio de la intensidad de radiación está dado por:

$$\langle U \rangle = \frac{1}{4\pi} \int U(\theta, \phi) d\Omega = \frac{P_{\text{av}}}{4\pi}. \quad (5.35)$$

Luego podemos definir la *directivity* como el cociente o *ratio* entre la intensidad de radiación y su valor promedio, es decir:

$$D_a(\theta, \phi) = \frac{U(\theta, \phi)}{\langle U \rangle} = \frac{4\pi}{\Omega_a} P_{a, \text{norm}}. \quad (5.36)$$

Con otra definición de ángulo sólido de antena  $\Omega_a$ , la cual corresponde a:

$$\Omega_a \equiv \int P_a(\theta, \phi) d\Omega. \quad (5.37)$$

El *maximum peak directivity*, o donde la propiedad es mayor corresponde a  $D_{\text{max}}$

$$D_{\text{max}} = \frac{U_{\text{max}}}{\langle U \rangle} = \frac{4\pi}{\Omega_a}, \quad (5.38)$$

por lo tanto:

$$D_a(\theta, \phi) = D_{\text{max}} P_a(\theta, \phi). \quad (5.39)$$

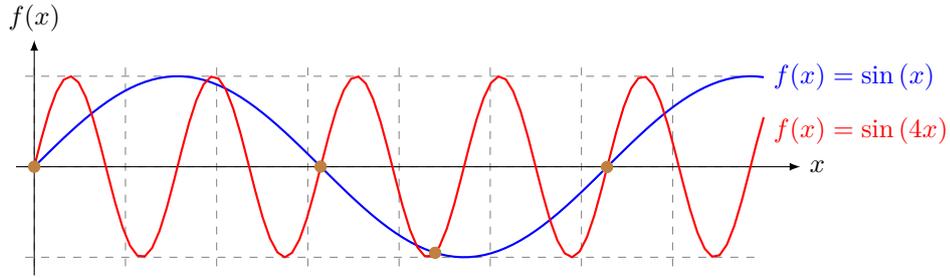


Figura 5.6.: Muestreo y teorema de Nyquist-Shannon. Una familia de curvas de onda, por ejemplo  $f(x) = \sin(x)$  y  $f(x) = \sin(4x)$ , pueden ser utilizadas para representar una señal de  $N = 4$  puntos. Para poder determinar de forma completa un frente de ondas debemos realizar un muestreo (o *sampling*) de datos mayor a la cantidad  $N = 2\Delta\nu\tau$  y separados en un tiempo no menor a  $(2\Delta\nu)^{-1}$ , de lo contrario la fase del frente de ondas quedará indeterminada.

### 5.4.2. Radiómetros

En radio frecuencias por lo general (a menos que estemos casi al límite entre radiación milimétrica e infrarroja) podemos hablar de temperatura y potencia de forma intercambiable. Esto se debe a que a frecuencias más bajas la radiación se comporta siguiendo la ley de Rayleigh-Jeans (bajas frecuencias en el espectro de Planck) y podemos describir la potencial (medida en alguna frecuencia o rango de frecuencias) de forma proporcional a la temperatura (Leighton 1959; Greiner & Dreitlein 1990), es decir:

$$P = k_B T \Delta\nu, P_\nu = k_B T. \quad (5.40)$$

Donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann (apéndice A),  $T$  es la temperatura de la fuente y  $\Delta\nu$  es el ancho de banda del receptor. Denotaremos  $P_\nu$  la potencia para alguna frecuencia  $\nu$  en particular o algún ancho de banda  $\Delta\nu$ . El lector ya debe inferir que la energía que nos llega a la antena, el flujo  $S_\nu$  debe de alguna forma ser proporcional a esta potencial  $P_\nu$  (para alguna frecuencia  $\nu$ ). Esto será retomado cuando vemos otras propiedades de antena en apartado 5.5, en particular la ecuación (5.47).

El radiómetro es un radio receptor utilizado para medir un frente de ondas en algún rango de frecuencias  $\Delta\nu$  bien definido. Radiación que emite el cielo, la tierra u alguna otra fuente natural es casi indistinguible de la radiación emitida por una resistencia a cierta temperatura (la misma electrónica de un radio receptor). El ruido (o equivalentemente la temperatura de ruido), generado por fuentes naturales, posee una distribución gaussiana, con una media de cero y una varianza de  $\sigma^2 = k_B T \Delta\nu$  (la naturaleza por lo general se distribuye con ruido gaussiano o de Poisson). La potencia o la intensidad del ruido (que se obtiene realizando el cuadrado del voltaje;  $P_{av} \propto |V|^2$ ), siempre es mayor a cero, y cuando proviene de fuentes estacionarias viz., la potencia no varía mucho respecto del tiempo (e.g., como una fuente astronómica). Del teorema de Nyquist-Shannon (ver Marks 2009, capítulo 5), sabemos que cualquier señal que posea un ancho de banda finito  $\Delta\nu$ , que posea una duración de tiempo  $\tau$ , puede ser representada (en fase y en amplitud) por la cantidad mínima de muestras (*samples*)  $N = 2\Delta\nu\tau$  y separados en un tiempo no menor a  $(2\Delta\nu)^{-1}$  (de lo contrario la onda quedará indeterminada; vea figura 5.6). Entonces, para que un radiómetro pueda detectar señales lo que hacemos es promediar muchas muestras independientes de tamaño  $N$  o más grande, que al hacerlo reducimos el nivel de ruido y podemos encontrar señales más débiles con un nivel de certeza  $\sqrt{\Delta\nu\tau} \ll 1$ .

En general, para poder detectar fuentes débiles debemos conocer nuestro nivel total de ruido y el nivel total de ruido de nuestro instrumento. Existen varios “niveles de ruido”, los cuales se pueden expresar a través de la *system temperature*  $T_{sys}$ . La *system temperature* es la temperatura equivalente de una resistencia que produce el mismo nivel de ruido que el sistema de recepción. La *system temperature* es la suma de la temperatura de ruido de la antena  $T_a$ , la temperatura de ruido del receptor  $T_r$ , es decir:

$$T_{sys} = T_a + T_r. \quad (5.41)$$

Un sistema de recepción completo posee dos tipos de fuentes de ruido, una proveniente de lo que rodea a la antena y la otra es debido a la antena misma (el mismo instrumento de medición).

La llamada temperatura de receptor  $T_r$  está dada por los mismos componentes internos de la recepción, esto es cables, amplificadores, filtros, atenuadores, u algún otro sistema complejo para recibir las radio frecuencias.

Cada uno de estos componentes está además, caracterizado por cierto *gain* o pérdida. Para estimar esta temperatura lo que hacemos es unir en una cadena todos estos elementos de la forma:

$$T_r = T_0 + \frac{T_1}{G_0} + \frac{T_2}{G_1 G_0} + \dots + \frac{T_{m-1}}{G_0 G_1 \dots G_{m-2}}. \quad (5.42)$$

Donde los componentes  $G_i$  son la ganancia y  $T_i$  la temperatura de ruido de cada componente  $i$  con  $i = 0, \dots, m$ , generalizado para una conexión con  $m$  puertos.

Por otro lado, la temperatura de antena, que también cumple con  $P_a = k_B T_a \Delta\nu$ , puede venir de muchas fuentes (naturales o no) de forma simultánea:

$$T_{\text{sys}} = T_{\text{src}} + T_{\text{cmb}} + T_{\text{sky}} + T_{\text{spill}} + T_r + \dots = T_a + T_r \quad (5.43)$$

Donde  $T_{\text{src}}$  es la temperatura de la fuente (que puede llegar a ser varios ordenes menos que las otras contribuciones),  $T_{\text{cmb}} \approx 2.73$  K es la temperatura de la radiación cósmica de fondo,  $T_{\text{sky}}$  es la temperatura del cielo (que puede poseer cierta opacidad dependiendo de la radio frecuencia a observar y la elevación de la antena),  $T_{\text{spill}}$  es la temperatura de la radiación que se escapa de la antena. Otras fuentes más débiles incluyen la atmósfera o el mismo suelo. Por ejemplo, la radiación que emite la tierra es de  $\sim 300$  K (la cual obviamente varía respecto a la hora del día/noche). Cuando la antena apunta directamente al cielo ( $90^\circ$  de elevación), su temperatura es bien baja  $T \sim 3-5$  K (en un rango de frecuencias de  $\nu = 1-10$  GHz).

Es de suma importancia saber y estimar el nivel de ruido que tendrá cierta fuente. Para esto definimos la temperatura total de ruido que posee el sistema, a la cual llamamos la ecuación del radiómetro  $\sigma_T$  (para su completa derivación vea [Condon & Ransom 2016](#)),

$$\sigma_T = k_c \frac{T_{\text{sys}}}{\sqrt{\Delta\nu t_{\text{int}}}}, \quad (5.44)$$

donde  $k_c$  es una constante que depende de la configuración del radiómetro, y  $t_{\text{int}}$  el tiempo de integración. La ecuación (5.44) nos dice que el nivel de ruido y el cociente de señal a ruido o [signal-to-noise ratio \(SNR\)](#) es:

$$\text{SNR} = \frac{T_a}{\sigma_T} = \frac{T_a}{T_{\text{sys}}} \sqrt{t_{\text{int}} \Delta\nu}. \quad (5.45)$$

Para definir un valor de detección [SNR](#) mínimo, dependerá mucho de la ciencia a realizar, pero un valor certero de detección es  $\text{SNR} > 10$  (mayor a un 99% de certeza).

## 5.5. Antena de apertura

### 5.5.1. Geometría de antenas

Antenas de apertura son la clásica antena tipo paraboloide ([Baars & Kärcher 2018](#)), donde su máxima extensión es perpendicular a la propagación del frente de ondas (que en el caso de un paraboloide es el diámetro de la circunferencia). A la circunferencia formada en la vista superior (diagrama de la derecha en figura 5.7) se le da el nombre de apertura y es donde llega el frente de ondas plano y uniforme para ser recibido (o de igual manera emitido). La apertura además de ser el área física de una antena es también una distribución que relaciona el *beam* o patrón de radiación con las unidades físicas de la antena. Existen diversos tipos de geometrías y configuraciones de antenas de apertura, los más populares son la antena Cassegrain con sub-reflector hiperbólico (figura 5.7 y cuadro 5.1 corresponde a una antena Gregoriana con sub-reflector elíptico), o de tipo bocina (*feedhorn*), como se muestra en figura 5.3 a la derecha. Además es preferible que la apertura principal de la antena sea regular, i.e., una circunferencia y/o rectángulo de lados conocidos, para que así su *beam* sea caracterizado mejor.

Un ejemplo completo de geometría Gregoriana es el telescopio Effelsberg de  $100\text{-m}^7$  ubicado en Effelsberg, Alemania. El telescopio operado por [Max-Planck-Institut für Radioastronomie \(MPIfR\)](#) fue construido en los 1970s y hasta el día de hoy sigue funcionando ininterrumpidamente. Su rango de frecuencias varía desde uno a varios GHz (pero usando diferentes receptores). Sus parámetros geométricos se encuentran en cuadro 5.1 y su sección transversa con su plano de apertura se encuentran en figura 5.7. La geometría Gregoriana está compuesta por un paraboloide (reflector primario) y un elipsoide (reflector secundario), donde el sub-reflector está sujeto en posición por cuatro estructuras metálicas o *struts* (vistas en el plano de apertura figura 5.7).

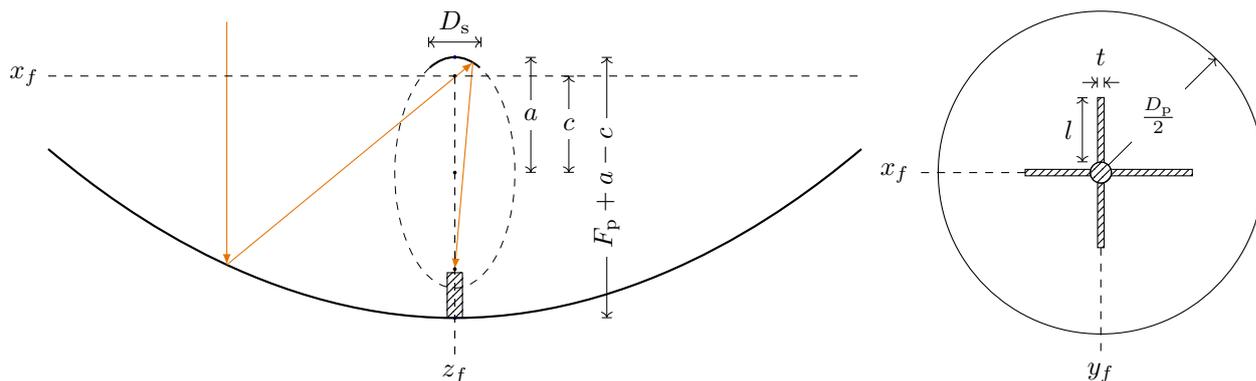


Figura 5.7.: Diagrama telescopio de 100-m Effelsberg (Cassanelli et al. 2021). El diagrama de la izquierda corresponde a la sección transversa de la radio antena de geometría Gregoriana. La geometría Gregoriana consta de una antena paraboloide con un sub-reflector elipsoide pequeño, donde su máxima extensión (del eje  $x_f$ ) corresponde al diámetro del sub-reflector  $D_s$ . Constantes  $2a$  y  $2c$  corresponden a dimensiones de elipse llamadas eje mayor y eje focal. La constante  $F_p$  corresponde a la distancia focal hacia el reflector principal (o *primary reflector*). El diagrama de la derecha es la vista del llamado plano de apertura (plano  $x_y y_f$ ). Dimensiones de las estructuras que soportan al sub-reflector elíptico o *struts* son cuatro de largo y ancho  $l$  y  $t$ , respectivamente. Las dimensiones reales del telescopio están dadas en cuadro 5.1.

Diámetro reflector principal	$D_p$	100 m
Diámetro sub-reflector sub-reflector	$D_s$	6.5 m
Distnacia focal efectiva	$F_{\text{eff}}$	387.394 m
Distancia focal reflector principal	$F_p$	29.98 m
Eje mayor sub-reflector	$2a$	14.3050 m
Eje menor sub-reflector	$2b$	7.3872 m
Eccentricidad elíptica sub-reflector	$e$	0.856 34
Largo <i>struts</i> (plano apertura)	$l$	20 m
Ancho <i>struts</i> (plano apertura)	$t$	2 m

Cuadro 5.1.: Constantes geométricas del telescopio Effelsberg (geometría gregoriana). Las constantes pueden ser visualizadas en figura 5.7.

El sub-reflector posee un diámetro de 6.5 m y en el caso de Effelsberg posee un sistema capaz de deformar la superficie reflectora y así corregir potenciales aberraciones del sistema óptico.

Figura 5.7 muestra además el avance del frente de ondas usando el clásico método de *ray-tracing*, lo que considera a la radiación como una partícula. Esto en realidad es más complejo, en realidad el frente de ondas plano que llega interactúa con el metal de la antena generando frentes de ondas reflejados y no planos con una posible geometría esférica que luego son sumados de forma coherente en el foco de la antena (donde se encuentra el receptor). Imaginemos ahora que existen errores considerables en la curvatura de la radio antena, desde un punto de vista de *ray-tracing*, ninguna señal debería formarse en el foco. Sin embargo, si es posible formar información pero será de una forma no coherente. Esto es, la antena forma un *beam* pero no será óptimo, algo que la teoría de *ray-tracing* no puede explicar del todo.

## 5.5.2. Ganancia de una radio antena

La ganancia, *gain*, o *sensitivity* de una radio antena se mide en  $\text{K Jy}^{-1}$  y es el cociente entre la temperatura de antena y el flujo a cierta frecuencia emitido por una fuente distante (en el *far-field*), y la denotaremos como

<sup>7</sup>Vea <https://www.mpifr-bonn.mpg.de/en/effelsberg>.

$S_\nu$ . Entonces podemos describir la cantidad como:

$$P_{\nu,a} = k_B T_a = \frac{1}{2} A_e S_\nu \quad (5.46)$$

$$\Gamma \equiv \frac{T_a}{S_\nu} = \frac{A_e}{2k_B}, \quad (5.47)$$

con  $P_{\nu,a}$  la potencia generada solo por efectos de lo que recibe la antena,  $A_e$  la apertura efectiva de una radio antena, que está relacionada con la apertura física  $A_p = \pi D_p^2/4$  (para una apertura circular) de la siguiente manera:

$$A_e = A_p \varepsilon_{\text{aper}}. \quad (5.48)$$

La cantidad adimensional  $\varepsilon_{\text{aper}}$  corresponde a la eficiencia de apertura. Nótese que  $\Gamma$  depende del área colectora de una radio antena, lo que efectivamente aumenta cuanto podemos detectar fuentes más débiles en el espacio.

La eficiencia de apertura describe el porcentaje de una apertura ideal que es efectivamente utilizada por la antena. Por lo general podemos describir la eficiencia de apertura en un set de sub-eficiencias,

$$\varepsilon_{\text{aper}} = \varepsilon_{\text{cr}} \varepsilon_{\text{bk}} \varepsilon_{\text{ph}}. \quad (5.49)$$

Estas son las eficiencias de *cross-polarization*, *blockage*, y *phase-error*. La eficiencia  $\varepsilon_{\text{cr}}$  corresponde a la fuga o escape de información de una polarización a otra en el mismo receptor (también llamado *leakage*). La segunda  $\varepsilon_{\text{bk}}$  corresponde a el porcentaje de área de apertura bloqueada por elementos (vea apartado 5.5.4). La última,  $\varepsilon_{\text{ph}}$ , corresponde a errores de fase ópticos, o cuando la misma antena no alcanza un nivel de coherencia óptico alto y se producen errores de suma de fases (es decir existen aberraciones ópticas; Baars 2021; Ruze 1966).

### 5.5.3. Patrón de potencia para antenas de apertura

Para una antena de apertura, existirán dos condiciones de frontera, ya vistas en apartado 2.2.6, pero ahora incluiremos un término auxiliar extra, estas son:

$$\mathcal{H}_1^\parallel - \mathcal{H}_2^\parallel = \boldsymbol{\kappa} \times \hat{\mathbf{n}}, \quad (5.50)$$

$$\left( \boldsymbol{\mathcal{E}}_1^\parallel - \boldsymbol{\mathcal{E}}_2^\parallel \right) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathfrak{M}, \quad (5.51)$$

Con  $\hat{\mathbf{n}}$  el vector normal a la superficie y  $\mathfrak{M}$  es la nueva cantidad llamada densidad magnética superficial (*magnetic current surface density*). Donde los medios poseen propiedades  $(\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1)$  y  $(\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2)$ . La cantidad  $\mathfrak{M}$  proviene de la ley de Faraday, ecuación (2.93), y cuando una superficie posee propiedades de magnetización, de lo contrario la cantidad es cero (como lo hemos asumido hasta el momento). Las llamadas densidad magnéticas son útiles para representar geometrías complejas de campo magnético.

Partiendo de nuestra solución de las ecuaciones de Maxwell para algún elemento que irradia, ecuación (5.8), podemos describir la solución más general para cualquier tipo de geometría (en el *far-field*) como:

$$\mathbf{E}_A = -j\omega \left( A_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \right). \quad (5.52)$$

Donde  $A_\theta$  y  $A_\phi$  son las componentes del potencial vectorial en coordenadas esféricas. Es posible demostrar que los campos eléctricos y magnético auxiliares de apertura están relacionados mediante la operación:

$$\mathbf{A} = \mu \frac{e^{-j\beta s}}{4\pi s} \hat{\mathbf{n}} \times \int_S \mathbf{H}_a e^{j\beta s} da', \quad (5.53)$$

$$\mathbf{F} = \frac{e^{-j\beta s}}{4\pi s} \hat{\mathbf{n}} \times \int_S \mathbf{E}_a e^{j\beta s} da'. \quad (5.54)$$

Donde  $\mathbf{F}$  es el potencial vectorial magnético asociado con la densidad de corriente  $\boldsymbol{\kappa}$ . Ecuaciones (5.53) y (5.54) corresponden a una integral de Fourier o **Fourier transform** (FT) en dos dimensiones sobre el plano de apertura  $\mathcal{S}$  (vea Tolstov 1962, capítulo 10). La FT juega un rol importante en la óptica, llamada óptica de Fourier (Conrady 1957; Bracewell 1986), en la que relacionamos propiedades de apertura con las propiedades de la radiación (y el patrón de potencia). Nótese que estas condiciones son solo ciertas cuando estamos en el régimen

## 5. Introducción a conceptos de antenas

*far-field*. Para reducir la notación definiremos las variables de Fourier como:

$$\mathbf{P} \equiv \int_S \mathbf{E}_a e^{j\beta s} da' = \mathcal{F}[\mathbf{E}_a], \quad \Rightarrow \mathbf{F} = -\epsilon \frac{e^{-j\beta s}}{4\pi s} (-P_y \hat{\mathbf{x}} + P_x \hat{\mathbf{y}}). \quad (5.55)$$

$$\mathbf{Q} \equiv \int_S \mathbf{H}_a e^{j\beta s} da' = \mathcal{F}[\mathbf{H}_a], \quad \Rightarrow \mathbf{A} = \mu \frac{e^{-j\beta s}}{4\pi s} (-Q_y \hat{\mathbf{x}} + Q_x \hat{\mathbf{y}}). \quad (5.56)$$

Con  $\mathcal{F}$  la FT (en algunos libros es denotada como  $\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{E}_a$ ). Similarmente al caso del potencial vectorial magnético podemos escribir esta densidad magnética de corriente  $\mathfrak{M}$  en una integral análoga:

$$\mathbf{F} = \epsilon \frac{e^{-j\beta s}}{4\pi s} \int_S \mathfrak{M}(\mathbf{r}') e^{j\beta s} da'. \quad (5.57)$$

Y su campo magnético auxiliar asociado es (en el *far-field*):

$$\mathbf{H}_F = -j\omega (F_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + F_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}). \quad (5.58)$$

Como ya se ha visto que las amplitudes de las ondas electromagnéticas están ligadas (*coupled*), podemos escribir que:

$$\mathbf{E}_F = \eta \mathbf{H}_F \times \hat{\mathbf{r}} = j\omega \eta (-F_\phi \hat{\boldsymbol{\theta}} + F_\theta \hat{\boldsymbol{\phi}}), \quad (5.59)$$

por lo que la expresión más general para el campo eléctrico es la contribución de todas las corrientes:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_F = -j\omega [(A_\theta - \eta F_\phi) \hat{\boldsymbol{\theta}} + (A_\phi + \eta F_\theta) \hat{\boldsymbol{\phi}}]. \quad (5.60)$$

Este sistema contiene ambas corrientes, eléctricas y magnéticas. Este formalismo nos entrega el campo eléctrico en el *far-field*, para el caso en que conozcamos como se distribuye la corriente dentro de la apertura de antena. Esta corriente ahora es posible expresarla en términos de los campos eléctrico y auxiliar magnético dentro de la misma apertura, y descritos como  $\mathbf{E}_a$  y  $\mathbf{H}_a$ . Esto es efectivamente calcular el patrón de radiación desde primeros principios ecuación (5.28). Finalmente podemos escribir la solución a el campo eléctrico en términos de las variables definidas de Fourier  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$ , en ecuación (5.60),

$$E_\theta = j\beta \frac{e^{-j\beta s}}{4\pi s} [P_x \cos \phi + P_y \sin \phi + \eta \cos \theta (Q_y \cos \phi - Q_x \sin \phi)], \quad (5.61)$$

$$E_\phi = j\beta \frac{e^{-j\beta s}}{4\pi s} [\cos \theta (P_y \cos \phi - P_x \sin \phi) - \eta (Q_y \sin \phi + Q_x \cos \phi)]. \quad (5.62)$$

Esto es, sin embargo, una aproximación de largos cálculos que el lector puede revisar, por ejemplo en [Stutzman & Thiele \(1981\)](#), capítulo 7.

Ahora que poseemos las herramientas para calcular las variables de radiación de una apertura computemos el caso más simple, esto es una rendija de ancho  $\ell$  y de largo infinito que se encuentra en un material conductor (*slit in an infinite conducting plane*), como se muestra en figura 5.8. Esto es muy similar al experimento de Thomas Young en 1801 *double slit-experiment* desde un punto de vista físico ([Kipnis 1991](#)). Una onda incidente  $\mathbf{E}_i = \hat{\mathbf{x}} E_0 e^{-j\beta z}$  (similar a la incidencia normal; apartado 3.3), generará un campo en la rendija o apertura de la forma:

$$\mathbf{E}_a = \begin{cases} \hat{\mathbf{x}} E_0 & |y| \leq \frac{\ell}{2}, \quad z = 0 \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (5.63)$$

Como el campo es uniforme en  $y$  entonces tenemos que es solo un problema unidimensional. Calculamos nuestra variable  $\mathbf{P}$  como:

$$\mathbf{P} = \hat{\mathbf{x}} P_x = \hat{\mathbf{x}} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} E_0 e^{j\beta x' \sin \theta} dx' = \hat{\mathbf{x}} E_0 \ell \frac{\sin \left[ \left( \frac{\beta \ell}{2} \right) \sin \theta \right]}{\left( \frac{\beta \ell}{2} \right) \sin \theta} = \hat{\mathbf{x}} E_0 \ell \text{sinc} \left( \frac{\beta \ell}{2} \sin \theta \right). \quad (5.64)$$

Con  $\text{sinc}(x) \equiv \sin(x)/x$ , la llamada función sinc.

Ahora procedemos en calcular  $F_{a, \text{norm}}$  le patrón de radiación, con lo cual debemos computar  $E_\theta$  y normalizarlo, usando ecuación (5.61). Pero nos podemos dar cuenta que la solución es simplemente:

$$F(\theta) = \frac{E_\theta}{E_0} = \text{sinc} \left( \frac{\beta \ell}{2} \sin \theta \right). \quad (5.65)$$

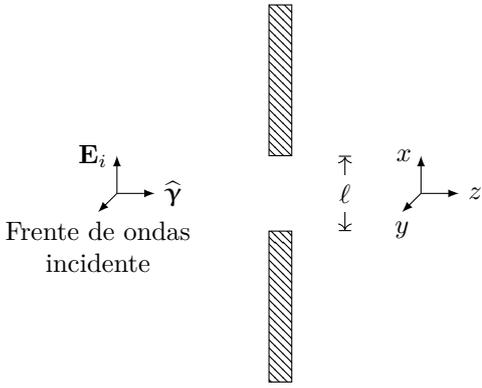


Figura 5.8: Frente de ondas incidente en una rendija de ancho  $\ell$  y largo infinito. El frente de ondas posee una amplitud solo en la dirección  $x$  y se propaga en la dirección  $z$ . El frente de ondas genera un campo eléctrico en la apertura de valor  $\mathbf{E}_a = E_0 \hat{\mathbf{x}}$  que luego irradiará hacia el lado derecho con un patrón  $F(\theta)$  ecuación (5.65) y mostrado en figura 5.9.

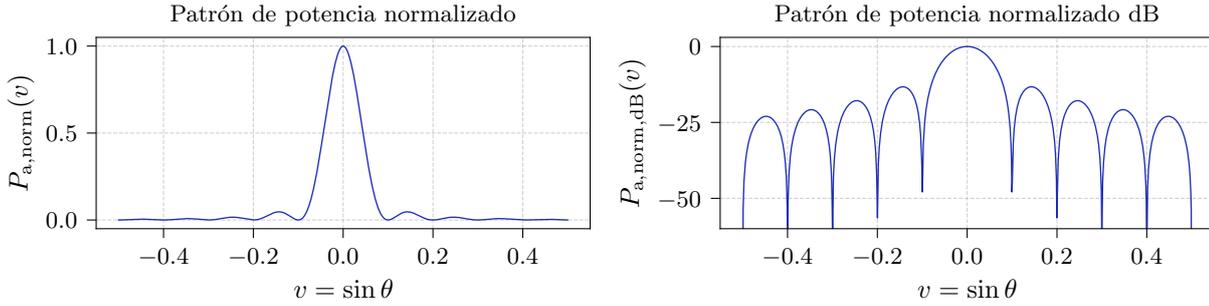


Figura 5.9.: Patrón de potencia apertura unidimensional, vista en figura 5.8. Se ha calculado el patrón de radiación ecuación (5.65) y luego se ha calculado el patrón de potencia ecuación (5.29) usando  $\ell = 10\lambda$  y  $v = \sin \theta$ . También es común expresar el patrón de potencia en decibelios, para así ver más claramente la contribución que tienen los *lobes* u oscilaciones laterales respecto de la posición de mayor *directivity* o *main beam*.

Esto es el patrón de radiación y al calcular su valor absoluto encontramos el patrón de radiación. Nótese que además depende de las dimensión  $\ell$  y que en algún momento lo podemos representar como unidades de longitud de onda  $\lambda$ ; i.e.,  $\ell = k\lambda$  con  $k \in \mathbb{R}$  (y  $F$  se vuelve adimensional o con dimensiones angulares). De forma gráfica podemos ver el patrón de potencia en figura 5.9, donde hemos calculado simplemente ecuación (5.29) (y que corresponde al observable de la antena). Para poder graficar hemos usado  $\ell = 10\lambda$  y hemos usado la variable  $v = \sin \theta$ , así hacemos  $P_{a, \text{norm}}$  independiente de  $\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon} = 2\pi/\lambda$ .

Similarmente, podemos realizar este mismo ejercicio para una apertura circular, es decir:  $\mathbf{E}_a = \hat{\mathbf{y}}E_0$  con  $r' \leq R$ , y se llega al resultado:

$$F(\theta) = \frac{2J_1(\beta R \sin \theta)}{\beta R \sin \theta}. \tag{5.66}$$

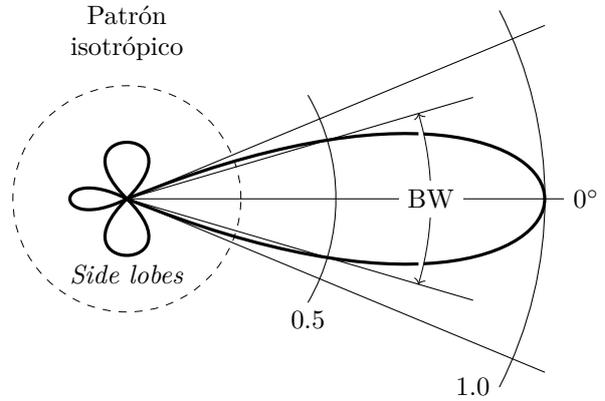
Con  $J_1(x)$  la función de Bessel de clase uno. Esta relación también es llamada la “apertura uniforme” de una radio atena y es el patrón de potencia ideal al que se desea llegar. Nótese que el patrón de una función sinc  $(x)$  es muy parecido al de una función  $2J_1(x)/x$ . El patrón de potencia cambiará significativamente de tipo de apertura en tipo de apertura (y más aún de un dipolo a una parabólica). Por lo general, antenas de apertura tendrán un *beam* que poseerá más directividad y será menos isotrópico (pero esto también dependerá de la configuración de su receptor), vea figura 5.10. Podemos realizar una buena aproximación del tamaño del *beam* o BW (no confundir con *bandwidth*  $\Delta\nu$ ) de una radio antena (apertura circular), siguiendo:

$$\text{BW} \approx \frac{\lambda}{D_p} \times 1.22 \text{ rad}. \tag{5.67}$$

Donde esta aproximación no es más que el punto más ancho del *peak* o donde la *directivity* es máxima ecuación (5.66) (ancho del *peak* centrado en cero en figura 5.9). La aproximación nos deja encontrar la máxima extensión angular que tendrá el *beam* en la dirección del pico central, que llamamos *main lobe*. El valor  $D_p$  es el diámetro de la apertura circular o la mayor extensión que posea la apertura.

El lector ya pudo haber reconocido que la cantidad BW es inversamente proporcional a el diámetro de la apertura de una antena paraboloide,  $D_p$ , lo que implica que a mayor escala de nuestra antena, menor va a

Figura 5.10: Patrón de potencia en coordenadas polares. El diagrama (no a escala ni tampoco con proporciones matemáticas; a diferencia de figura 5.9) muestra la estructura que posee un *beam* direccional de una antena de apertura. El *beam* principal o *main beam* (a  $0^\circ$ ) posee la mayor dimensión angular y es expresada a través de la cantidad  $BW$ , ecuación (5.67). En comparación un patrón isotrópico en coordenadas angulares es dibujado en el centro. La radio antena también poseerá otros *beam* llamados *side lobes* que poseen menos *sensitivity* pero si son capaces de detectar o irradiar frentes de ondas (incluso en la parte detrás de la antena).



ser el tamaño del  $BW$  (lo que puede parecer contra intuitivo). Esto significa poseer una mayor *sensitivity* o ganancia en una porción de ángulo sólido  $d\Omega$  menor, lo que efectivamente puede detectar alguna señal mejor en una dirección del espacio específica. Podemos entonces describir la ganancia en ecuación (5.47), como:

$$\Gamma = \frac{\pi D_p^2 \varepsilon_{\text{aper}}}{8 k_B}, \quad (5.68)$$

donde solo hemos reemplazado por la apertura física  $A_p$ . De esta relación podemos ver que:

$$BW \propto \lambda \propto \nu^{-1} \propto \Gamma^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.69)$$

Lo que nos dice que la región angular dependerá cada vez más de la frecuencia y qué tanta ganancia necesitamos. Históricamente debido a esta relación se empezó a construir antenas más y más grandes, lo que hace que su estructura mecánica sea más compleja<sup>8</sup>. La solución a este problema es interferometría en la que podemos combinar diferentes antenas para hacer efectivamente una antena más grande, pero que no posee la complejidad mecánica de una antena de un solo plato (y la complejidad mecánica es cambiada por la complejidad digital).

Por último, una antena paraboloide que posee un  $BW$  bien definido posee una “resolución angular”  $\theta_{\text{res}} \sim$  igual a su  $BW$ . Nos referimos a resolución angular al describir la porción del cielo que es efectivamente visible para la antena con su *beam* principal. La cantidad  $\theta_{\text{res}}$  es fundamental para interferometría y radio astronomía, y nos deja posicionar fuentes de forma muy precisa en el cielo. Por ejemplo, la resolución angular de algunas fuentes usando *very long baseline interferometry* (VLBI) puede ser del orden de los *parcosegundo* ( $1 \times 10^{-6}$  segundos de arco; apéndice A).

#### 5.5.4. Distribución de apertura

En la práctica siempre nos encontramos con el observable de antenas patrón de potencia  $P_a$  y **no** con la distribución del campo eléctrico sobre la apertura  $\mathbf{E}_a$  a la cual llamaremos la “distribución de apertura”. Gráficamente esta relación está expresada en figura 5.11. En el caso real la apertura está compuesta de muchos otros elementos, los cuales los podemos describir mediante,

$$\underline{E}_a(x, y) = B(x, y) E_a(x, y) e^{j\varphi}, \quad (5.70)$$

donde hemos definido la distribución de apertura “real”  $\underline{E}_a(x, y)$ , elementos que bloquean la apertura o *blockage*  $B(x, y)$ , la función de iluminación  $E_a(x, y)$  (que puede o no ser uniforme) y además posee un término de fase el cual contiene elementos ópticos (tales como las aberraciones o desfases) llamado fase de la distribución de apertura. Ahora describimos estos elementos con más detalle:

<sup>8</sup>El radio telescopio de Green Bank de 300-pies cayó por su propio peso y errores mecánicos: <https://public.nrao.edu/telescopes/300-foot-telescope/>.

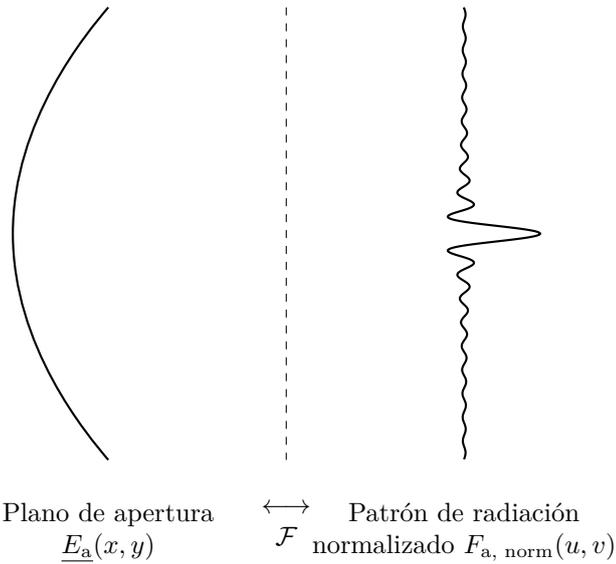


Figura 5.11: Descripción gráfica de la relación entre el “real” plano de apertura  $E_a$  el observable de antena. Desde el plano de apertura podemos calcular la FT para llegar al observable de antena. Por lo general, lo que observamos es solo  $P_a, \text{norm}$  lo cual es la norma al cuadrado de  $F_a, \text{norm}$ , ecuación (5.29), es decir es un proceso irreversible y solo es posible resolverlo a través de información adicional con algún método numérico. A esta rama de la ciencia se le llama holografía en el contexto de antenas.

- $B(x, y)$  distribución *blockage*: Son secciones misma de la antena o de cualquier antena de apertura que bloquean la radiación a llegar al foco. Estos pueden ser soportes por ejemplo del sub-reflector (o también llamados *struts*) que bloquean y reflejan la radiación (o peor aún generan frentes de onda esféricos que luego desfasan la suma coherente de frentes de onda). Estos elementos se pueden ver en figura 5.7, diagrama de la derecha.
- $E_a(x, y)$  distribución de iluminación: La iluminación o *taper* (o también llamado apodización en física óptica) es el efecto que posee un receptor sobre el plano de apertura, ese efecto por lo general posee una amplitud mayor al centro de la apertura y se debilita a los extremos. La principal función de una iluminación no uniforme es generara cambios en el *beam*, de modo de reducir la amplitud de los *side lobes* de la radio antena. Un clásico ejemplo de iluminación es la iluminación cuadrática en pedestal:

$$E_a(r') = C + (1 + C) \left[ 1 - \left( \frac{r'}{a} \right)^2 \right]^q, \quad (5.71)$$

con  $C$  la altura del pedestal,  $a$  algún radio y  $q$  la constante de taper. La iluminación es un efecto que realiza el receptor y no es propio de la antena. Una antena puede poseer uno o más receptores por ende su distribución de apertura real cambiará con cada uno de ellos (effectivamente cambiando  $\varepsilon_{\text{aper}}$ ).

- $\varphi$  fase de la distribución de apertura: La fase posee elementos ópticos de la antena y describe las aberraciones del sistema. Dependiendo de la geometría, en principio, podemos describir la fase de apertura con alguna combinación polinómica ortonormal y así extraer la óptica. Por lo general esto se hace a través de la base ortonormal en el círculo unitario en la base de los polinomios circulares de Zernike (Born & Wolf 1965). Estos errores de fase alterarán la eficiencia de fase  $\varepsilon_{\text{ph}}$ .

Desafortunadamente para poder encontrar la distribución de apertura completa debemos resolver un problema casi sin solución el cual es encontrar la fase de un número complejo una vez que calculamos su norma, ecuación (5.29). Para resolver este problema hay un sin fin de métodos llamados *phase retrieval* y en particular para radio antenas hablamos de holografía (Cassanelli et al. 2021). Holografía es fundamental para endender las desviaciones que posee nuestro *beam* y así mejorar la eficiencia de nuestra recepción y transmisión (Stroke 1969).

## 5.6. Ondas planas y rangos de radiación

Como ya se ha discutido en apartado 5.4, existen diferentes medios en los cuales la radiación de una antena se comporta diferente. Estos medios son llamados *reactive near-field*, *radiating near-field*, y *far-field*. Donde en el último caso tenemos una propagación de ondas planas y uniformes. Cualquier otro medio, es decir en el caso *near-field*, el sistema tenderá a poseer ondas electromagnéticas con geometrías esféricas o más complejas que

Región	Distancia desde la antena ( $r$ )
<i>near-field</i> reactivo	de 0 a $0.62\sqrt{D_p^3/\lambda}$
<i>near-field</i> radiativo	de $0.62\sqrt{D_p^3/\lambda}$ a $2D^2/\lambda$
<i>far-field</i> (Fraunhofer)	de $2D^2/\lambda$ a $\infty$

Cuadro 5.2.: Definiciones de regiones radiativas en una antena de apertura (Stutzman & Thiele 1981). Las regiones corresponden al plano *near-field* (cercano a la antena) y *far-field* (lejano a la antena).

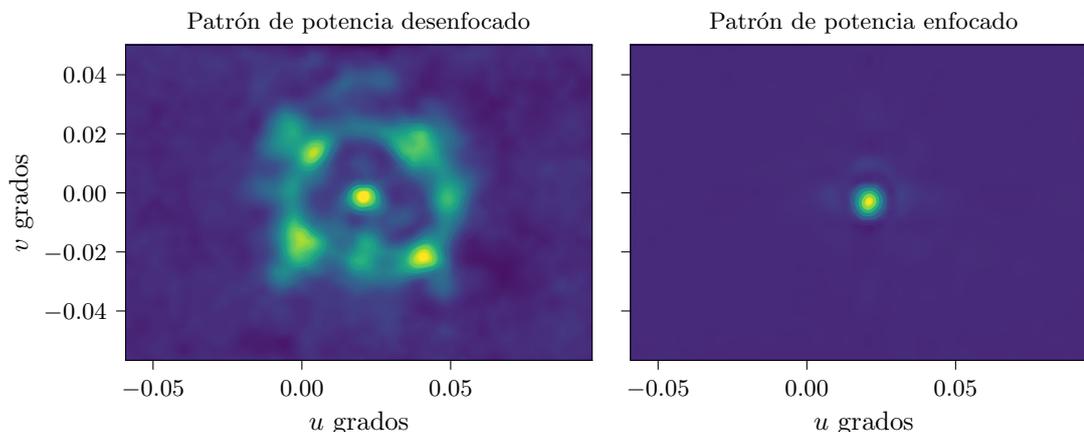


Figura 5.12.: Patrón de radiación desenfocado (izquierda) y enfocado (derecha) del radio telescopio de 100-m Effelsberg. Efectos como el que se aprecian en el gráfico pueden ser debido a un desenfoque o a recepción en el *near-field*. Los gráficos fueron tomados en 2018 y forman parte de una campaña de observación de holografía en el telescopio Effelsberg (Cassanelli et al. 2021) con un receptor de  $\lambda = 9$  mm. El patrón desenfocado es la misma figura mostrada en la portada de este trabajo. El *beam* enfocado (derecha) es la versión real del concepto matemático descrito en ecuación (5.66).

dependan de su posición. Estas condiciones de radiación para una antena de apertura circular están resumidas en la cuadro 5.2. Las condiciones están en términos de la longitud de onda  $\lambda$  con la cual se recibe o transmite y el diámetro de la apertura  $D_p$ . Es decir, a mayores frecuencias siempre tendremos una distancia mayor para poder detectar un frente de ondas plano. Esta cantidad resulta particularmente importante al hacer estudios de holografía, ya que por lo general se usa alguna sonda o antena de referencia para emitir una onda plana pero si es que estamos a muy altas frecuencias la distancia de esta antena de referencia resulta extremadamente lejana, y por ende difícil de implementar.

Tanto en casos de radiación capturada en el *near-field* o algún efecto óptico que haga un desenfoque en la antena tendremos que el patrón de potencia no será óptimo y tendrá una forma peor distribuida (y mucho menos direccional). Esto sucede al estar muy cerca de la antena o de forma análoga, al desenfocar la antena (e.g., la superficie posee gran cantidad de aberraciones). Un *beam* desenfocado y enfocado real para el telescopio Effelsberg puede verse en la siguiente figura 5.12.

## 5.7. Digitalización

La digitalización de una antena es fundamental para las tecnologías de hoy. Digitalizar es convertir el voltaje analógico transmitido desde la antena a una línea de transmisión, y que esta luego sea digitalizada (en cierto número de bits). La digitalización ofrece muchas ventajas: fácil transporte de la información, conservación de los datos, manipulación y post procesamiento de datos (que es particularmente importante para arreglos de antenas apartado 5.8). Antiguamente procesos de correlación, FT, o combinación se realizaban de forma analógica, con sistemas de RF capaces de operar en el voltaje mismo. Hoy, poseemos la ventaja de realizar una copia digital de los voltajes y hacer y rehacer estas operaciones de forma rápida y precisa. Sistemas capaces de transformar una señal analógica a una señal digital es llamado *analog-to-digital converter* (ADC), y en el caso de un proceso inverso *digital-to-analog converter* (DAC). La digitalización de una señal analógica se realiza en dos pasos: muestreo (*sampling*) y cuantización. En simples términos lo que la digitalización hace es medir el

voltaje continuo y transformarlo a un número proporcional de electrones que luego es transformado a un número proporcional de bits discretos. La cuantización es decir pasar de una variable continua a discreta generará inevitablemente algún error que es medido a través de la eficiencia cuántica. Un ADC es caracterizado por su ancho de banda y su SNR. El ancho de banda está caracterizado por su *sampling rate* y es usualmente medido en unidades de *giga samples per second* (GSPS). El SNR de un ADC es influenciado por muchos factores, entre ellos: la resolución, linealidad del instrumento y la precisión (que tan bien los niveles de cuantización se ajustan a la señal analógica), *aliasing* (efecto debido a Nyquist-Shannon) y *jitter* (variación temporal). Por lo general los ADCs son seleccionados de forma que compatibilicen el ancho de banda requerido y el SNR necesario para la señal a digitalizar. Si un ADC opera a una frecuencia de muestreo mayor que el doble del ancho de banda de la señal, entonces, según el teorema de muestreo de Nyquist-Shannon, es posible una reconstrucción casi perfecta (Razavi 1995).

## 5.8. Arreglo de antenas

Los primeros experimentos de arreglos de antenas se realizaron a comienzos de los años 1940, primero de forma analógica (es decir interferencia de radio frecuencias guiadas), y luego de forma digital. Desde entonces se han creado un sin número de aplicaciones tecnológicas, de telecomunicaciones y con fines científicos. Un arreglo de antenas, *antenna array*, o interferómetro; se compone de dos o más antenas, las cuales pueden ser locales o no locales. Un interferómetro local es el cual posee a todos sus elementos de antena conectados bajo un mismo sistema de *tempo* (o reloj) y que además observan una atmósfera y ubicación con propiedades similares (es decir, antenas no están separadas más allá de  $\sim 100$  km). Ejemplos de interferómetro locales son [Canadian Hydrogen Intensity Mapping Experiment \(CHIME\)](#) y [Atacama Large Millimetre/sub-millimetre Array \(ALMA\)](#). Arreglos no locales de antenas son las cuales poseen un reloj distinto (que puede o no ser calibrado) y que su atmósfera es distinta (o sin atmósfera, como ocurre en la telecomunicación satélites). Uno de los casos más comunes es VLBI, que se dedica a realizar correlaciones de antenas a distancias de cientos a miles de kilómetros. Algunos ejemplos de sistemas o colaboraciones no locales son: [European VLBI Network \(EVN\)](#)<sup>9</sup>, [VLBI Exploration of Radio Astrometry \(VERA\)](#)<sup>10</sup>, [CHIME Fast Radio Burst Project \(CHIME/FRB\) Outriggers](#)<sup>11</sup>; son algunos de los proyectos de interferometría a grandes distancias. Otra aplicación de interferometría a gran escala es el continuo monitoreo de placas tectónicas<sup>12</sup>, donde VLBI (que dependiendo de su frecuencia) puede detectar variaciones del orden de centímetros (utilizando frecuencias de MHz a GHz).

La mayor ventaja de sistemas de interferometría es la capacidad de alcanzar una gran resolución angular (separación kilométrica) sin la necesidad de una estructura mecánica colosal. Esto, sin lugar a dudas, es gracias a los avances científicos de digitalización y componentes electrónicos capaces de almacenar información de forma digital. La resolución angular para un set de antenas estará dada por la función de correlación  $\rho(\tau)$  que es una forma coherente de correlacionar las fases de los frentes de ondas. Aquí analizaremos en detalle el interferómetro de dos elementos apartado 5.8.1.

La interferometría ya es una realidad para el espectro de ondas de radio, pero no lo es a frecuencias más altas. Solo hasta el orden bajo  $\sim$  THz es posible realizar correlaciones de forma digital. Cualquier otro tipo de correlación a frecuencias más altas (e.g., óptico) es necesario realizar correlaciones de forma analógica, lo cual es muy complejo y costoso. De forma adicional los receptores deben estar muy cerca uno del otro y operaciones a distancia son casi imposibles. Una vez que tengamos receptores rápidos y capaces de mapear por completo el frente de ondas a altas frecuencias podremos realizar experimentos de interferometría a cualquier longitud de ondas. Los primeros ordenes de interferometría óptica ya son una realidad pero solo con experimentos sencillos (Barbieri et al. 2023; Hanbury Brown 1974), hay un camino largo de recorrer para que la interferometría óptica sea una realidad en la ciencia.

### 5.8.1. El interferómetro de dos elementos

Un interferómetro de dos elementos consiste en un set de antenas, las cuales pueden ser de cualquier tipo, incluso pueden o no ser similares (i.e., un dipolo y una antena de apertura), pero lo que sí debe existir entre ellas es que posean un mismo sistema de digitalización, un ancho de banda común (con exactamente las mismas frecuencias o canales espectrales) y número de muestreo (*sampling rate*) idéntico. Por simplicidad designaremos

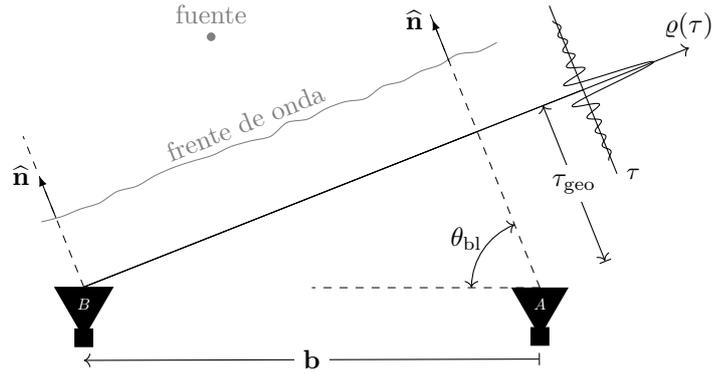
<sup>9</sup><https://www.evlbi.org>.

<sup>10</sup><https://www.miz.nao.ac.jp/veraserver/>.

<sup>11</sup><https://www.chime-frb.ca>.

<sup>12</sup><http://www.csn.uchile.cl>.

Figura 5.13: Interferómetro de dos elementos. La función de correlación  $\varrho(\tau)$  será máxima solo cuando iguale al retardo geométrico  $\tau = \tau_{\text{geo}}$ . La variable  $b = \|\mathbf{b}\|$  representa el vector de línea de base y su norma corresponde a la distancia Euclidiana de las antenas  $A$  y  $B$ . El ángulo  $\theta_{\text{bl}}$  corresponde a *baseline angle* y puede ser descrito en coordenadas locales o del cielo. Nótese que el frente de ondas no es completamente una onda plana.



a nuestras antenas como  $A$  y  $B$ , donde la distancia entre ellas es  $\mathbf{b}$  la llamada *baseline* (vector línea de base). Supongamos ahora que una fuente posicionada en alguna parte del cielo emite una señal en dirección a nuestro arreglo de dos antenas, como se muestra en figura 5.13. La orientación respecto a la fuente está dada por el *baseline angle*  $\theta_{\text{bl}}$  el cual puede ser descrito en distintos tipos de coordenadas (del cielo, locales, etc.). La dirección de la fuente, es decir, en la dirección que se propaga el frente de ondas hacia la antena, es  $\hat{\mathbf{n}}$ . Ambos voltajes en los sitios  $A$  y  $B$  estarán en fase si y solo si corregimos por el llamado retardo geométrico (*geometric delay*),  $\tau_{\text{geo}}$ . Solo cuando corregimos por esta cantidad la correlación,  $\varrho(\tau)$ , de ambos voltajes  $V_A$  y  $V_B$  será máxima, es decir:

$$\varrho_{\text{max}} = \varrho(\tau = \tau_{\text{geo}}). \quad (5.72)$$

La relación que gobierna el retardo geométrico es simplemente:

$$\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \tau_{\text{geo}}c, \quad (5.73)$$

donde el *baseline angle*,  $\theta_{\text{bl}}$ , queda claramente especificado mediante el producto punto del *baseline vector* y posición de la fuente. En general, la cantidad de retardo geométrico puede contener otros efectos indeseados (atmosféricos, de origen instrumental: analógico o digital), que debe ser removidos para obtener la máxima correlación. La posición de máxima correlación nos entregará el retardo de desfase. Una vez que la correlación entre los voltajes sea alcanzada se generará el llamado patrón de *fringe* (mostrado en la parte superior de figura 5.13). La norma de este patrón nos dará un máximo y solo será alcanzado cuando ecuación (5.72) se cumpla.

Interferometría es solo posible ya que al digitalizar nuestro voltaje preservamos tanto la amplitud como la fase de nuestro frente de ondas. La correlación **solo depende de la fase**, las amplitudes son independientes, y sin un mapeo completo del frente de ondas que sea suficientemente rápido (es decir que cumpla con el teorema de Nyquist-Shannon), el frente de ondas no generará una correlación (o equivalentemente solo existirá ruido para la función  $\varrho(\tau)$ ). En otras palabras, la correlación es una medida de la coherencia entre dos señales, o el nivel de fase entre dos señales. En el caso de un interferómetro de dos elementos, la correlación es simplemente el producto de los voltajes de cada antena como se verá en apartado 5.8.2.

### 5.8.2. Teorema de Wiener-Khinchin

El teorema de Wiener-Khinchin (vea Thompson et al. 2017, capítulo 2) establece la relación que existe entre *power spectral density* (PSD) y la función de autocorrelación de una función de onda. Siempre y cuando se cumpla que:  $2t_{\text{int}} \gg (\Delta\nu)^{-1}$  (que el tiempo de integración sea mayor al *bandwidth* total):

$$r(\tau) = \lim_{t_{\text{int}} \rightarrow \infty} \frac{1}{2t_{\text{int}}} \int_{-t_{\text{int}}}^{t_{\text{int}}} v(t - \tau)v(t) dt, \quad (5.74)$$

$$= \langle \mathbf{v}[q] \mathbf{v}[q - q'] \rangle \quad (5.75)$$

con  $r(\tau)$  la función de autocorrelación y  $v$  un voltaje ( $v$  una función continua y  $\mathbf{v}$  un vector de valores discretos de voltaje). Ahora si realizamos el cuadrado de la amplitud obtenemos el PSD. Y corresponde a la FT de la

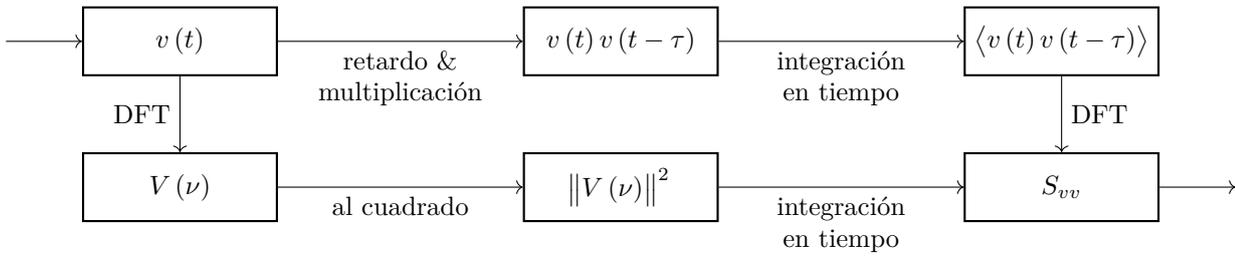


Figura 5.14.: Cálculo de PSD. La parte superior del diagrama corresponde a un correlador del tipo XF y la inferior FX.

función de autocorrelación de una señal:

$$\mathbf{S}_{vv}[w] = \sum_{q'=-\infty}^{q'=+\infty} \langle \mathbf{v}[q] \mathbf{v}[q-q'] \rangle e^{-2\pi i q' w} = \langle \|\mathbf{V}[w]\|^2 \rangle, \quad \text{with} \quad \mathbf{V}[w] = \sum_{q=0}^{q=Q-1} \mathbf{v}[q] e^{-2\pi i q w/Q}. \quad (5.76)$$

En palabras simples, la correlación (un caso particular de la autocorrelación  $r$ ), cumple con el teorema de Wiener-Khinchin de tal forma que para una función  $f$ :

$$f \star f = \overline{F} F = \|F\|^2, \quad (5.77)$$

con la operación  $\star$  definida como correlación y  $F$  la FT de  $f$ .

Entonces generalizando para nuestro set de antenas  $A$  y  $B$  definimos *cross-correlation function* en términos de voltage:

$$\varrho(\tau) = v_B(t) \star v_A(t) = \lim_{t_{\text{int}} \rightarrow \infty} \int_{-t_{\text{int}}}^{t_{\text{int}}} dt v_A(t-\tau) v_B(t), \quad (5.78)$$

con  $t_{\text{int}}$  el tiempo de integración y  $v_A$  y  $v_B$  voltages medidos en antenas  $A$  y  $B$ , respectivamente. Nótese que en caso de ser voltages expresados en forma compleja (i.e., con un termino de fasor), debemos realizar el complejo conjugado de  $\overline{v_A}$ . Por último, la operación de *cross-correlation*, en general, no conmuta (vea [Bracewell 1986](#), capítulo 3).

### 5.8.3. Correlador

Tanto en ciencia (radio astronomía) como en aplicaciones ingenieriles, un correlador o *correlator*, es un sistema digital que recibe información, con un muestreo que cumple con Nyquist-Shannon, provenientes de dos o más antenas y calcula la *cross-correlation function*,  $\varrho(\tau)$ , en función de un retardo,  $\tau$ . A diferencia de voltages instantáneos (análogicos en una *LT*), la función  $\varrho$  puede ser integrada fácilmente, sin pérdida de información y luego grabada a discos duros con un muestreo de tiempo mucho menor. En particular, un *correlator* es el corazón de un radio interferómetro donde técnicas de *aperture synthesis* ([Thompson et al. 2017](#); [Saha 2011](#)) son utilizadas para luego extraer la máxima información del frente de ondas. Todo el proceso de un correlador está basado a través del teorema de Wiener-Khinchin (apartado 5.8.2).

Para entender este concepto de correlador, supongamos que estamos recibiendo información con una antena parabólica (de geometría común, i.e., Cassegrain). La antena posee un foco, donde la señal es “integrada” (sumada) de forma coherente. La señal, que originalmente se transmite como un frente de ondas plano, al interactuar con la antena genera frentes de ondas esféricos (que cada uno con cierto retardo geométrico) que luego son integrados coherentemente en el foco. Es decir, una antena parabólica es en efecto, un correlador analógico.

Gracias a la naturaleza de la radiación y aplicación del teorema de Wiener-Khinchin, existen dos posibles arquitecturas de correladores (es decir para calcular PSD), estas son: XF (multiplicar y luego aplicar FT) o FX (FT y luego multiplicar). Para entender este tipo de caminos consideremos la siguiente figura 5.14.

Tecnología moderna ya ha reemplazado casi por completo los primeros tipos de correladores, que ahora son más fáciles de transportar, eficientes energéticamente y programables desde un computador normal,  $\mathcal{O}(N \log N)$ . Las llamadas *field-programmable gate arrays* (FPGA) pueden realizar millones de cálculos de

fast FT (FFT) por segundo produciendo una PSD con mayor precisión en bit y menores artefactos de digitalización<sup>13</sup>. Para anchos de banda ( $\Delta\nu$ ) acotados, correladores pueden ser utilizados hasta en computadores normales.

#### 5.8.4. Interferometría a gran escala

Como mencionado en la introducción, apartado 5.8, los arreglos de antenas también pueden ser creados a distancias intercontinentales, e incluso en el espacio. La principal diferencia entre arreglos a largas distancias y arreglos locales es el origen de su sistema para matener estabilidad temporal (*tempo*) y las propiedades atmosféricas y físicas del entorno (ya que en un interferómetro local estas propiedades son iguales).

La técnica VLBI ya conocida en los años 1960 fue puesta a prueba por primera vez por Broten et al. (1967), donde se utilizaron una línea de base del orden de  $\sim 3000$  km, en Canadá desde Columbia Británica hasta el parque Algonquin en Ontario. Desde entonces han existido un sin número de experimentos de VLBI (e.g., el nuevo set de telescopios llamados CHIME/FRB outriggers; Cassanelli et al. 2022). Las principales aplicaciones de VLBI son la alta precisión en la determinación de posiciones de fuentes astronómicas, y posiciones geoestacionaria.

Dependiendo del tipo de frecuencia o ancho de banda que utilicemos para realizar nuestro experimento de VLBI pueden existir diferentes contribuciones de elementos a corregir, que al igual que en un interferómetro local son un retardo de tiempo (que produce la desfase). Pero ahora, además de existir un retardo geométrico existirán otros efectos de casi el mismo orden de magnitud que el retardo geométrico (que en una línea de base de 3000 km puede llegar a ser del orden de  $\sim 2.5$  ms), o incluso más (lo cual para el caso de un interferómetro local nunca es el caso). Estas distintas contribuciones de retardos son expresadas en la siguiente ecuación:

$$\tau_{\text{total}}(t, \nu) = \tau_{\text{clock}}(t) + \tau_{\text{geo}}(t, \theta) + \tau_{\text{iono}} + \tau_{\text{inst}}(t, \nu) + \xi. \quad (5.79)$$

Donde hemos descrito el retardo total a corregir en un sistema de VLBI,  $\tau_{\text{total}}$ , y hemos ordenado sus fuentes de mayor a menor contribución (por lo general y de izquierda a derecha). Estas contribuciones son el retardo de reloj (o qué tan bien sincronizados están los relojes en cada estación), el retardo geométrico (que en una línea de base de e.g., 3000 km posee un valor de  $\sim 2.5$  ms), efectos de retardo hechos por la ionósfera que son altamente dependientes en la frecuencia (y a más baja frecuencia más se ve afectado el frente de ondas), retardos debido a efectos del instrumento mismo y finalmente algún otro error del sistema. Desafortunadamente el observable corresponde solo a  $\tau_{\text{total}}$  y es trabajo del correlador desacoplar estas distintas contribuciones para poder finalmente utilizar la definición en ecuación (5.73). Por lo general, estos errores ahora serán más grande que una muestra (o *sample*), donde sabemos debe ser del orden o menor a  $(2\Delta\nu)^{-1}$ , es decir estos retardos son de varios ordenes más. Para complicar aún más el experimento, los datos, por lo general, deben ser transportados a alguna ubicación en común ya que transportar cientos de TB no es sencillo (aunque esto esta cambiando de forma muy rápida).

La gran ventaja que ofrece resolver este problema de retardos es la increíble ganancia de resolución angular. Al aumentar la línea de base, i.e., 3000 km y una frecuencia central de  $\nu = 600$  MHz tendremos una resolución angular de 100 marcosegundo, algo imposible de adquirir sin interferometría.

<sup>13</sup>Un ejemplo es el proveedor <https://www.xilinx.com/products/silicon-devices/soc/rfsoc.html>

# A. Constantes, convenciones y unidades

## A.1. Constantes

Constantes físicas recomendadas por CODATA 2018 (Tiesinga et al. 2019) y constantes astronómicas recomendadas por IAU 2023 resolución B2 (Mamajek et al. 2015). También recomiendo constantes físicas y astrofísicas dadas por Burrows & Ostriker (2014).

## A.2. Constantes numéricas

$$\begin{aligned}\pi &= 3.141\,592\,7 \\ i &= \sqrt{-1} \\ e &= 2.718\,281\,8 \\ 1'' &= 1 \text{ arcosegundo} = 2.7778 \times 10^{-4} \text{ deg} = 4.848\,14 \times 10^{-6} \text{ rad}\end{aligned}$$

## A.3. Constantes físicas

Permeabilidad del vacío	$\mu_0 \equiv 1.256\,637\,062\,12 \times 10^{-6} \text{ H m}^{-1} \approx 4\pi \times 1 \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$
Permitividad del vacío	$\epsilon_0 \equiv \frac{1}{c^2 \mu_0} = 8.854\,187\,812\,8(13) \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$
Velocidad de la luz en el vacío	$c \equiv u_0 \equiv 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$
Impedancia intrínseca del vacío	$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.73 \Omega \approx 120\pi \Omega$
Constante de Planck	$h \equiv 6.626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ J s}$
	$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} = 1.054\,571\,817 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Constante de Boltzmann	$k_B \equiv 1.380\,649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma \equiv 5.678\,374\,419 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2/\text{K}^4$
Constante gravitacional	$G \equiv 6.674(45) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Carga del electrón	$e \equiv 1.602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masa del electrón ( <i>rest mass</i> )	$m_e \equiv 9.109\,383\,7(43) \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masa del protón ( <i>rest mass</i> )	$m_p \equiv 1.672\,621\,923\,69(51) \times 10^{-27} \text{ kg}$

## A.4. Constantes astronómicas

Año juleano	$1 \text{ a} \equiv 265.25 \text{ d} = 3.155\,760\,0 \times 10^7 \text{ s}$
Distancia media Tierra-Sol	$1 \text{ au} \equiv 149\,597\,870\,700.0 \text{ m}$
Parsec	$1 \text{ pc} \equiv 648000/\pi \text{ au} = 3.085\,677\,58 \times 10^{16} \text{ m}$
Constante de Hubble	$H_0 \equiv 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
Masa solar	$M_\odot \equiv 1.9884(545587523195) \times 10^{30} \text{ kg}$
Flujo ( <i>Flux density</i> ) (Janksy)	$1 \text{ Jy} \equiv 1 \times 10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$
Constante de dispersión	$k_{\text{DM}} \equiv \frac{e^2}{2\pi m_e c} = 4.148\,808\,0(3) \times 10^3 \text{ MHz}^2 \text{ pc}^{-1} \text{ cm}^3 \text{ s}$

## A.5. Convenciones

En la física, ingeniería y astronomía del electromagnetismo existen varias convenciones. En particular, y la más importante es la definición del elemento fasorial,  $j$  (apartado 1.5). En física es definido como  $i$ , pero en ingeniería es definido como  $j$ . Para transformar entre notaciones simplemente use:

$$i \leftrightarrow -j. \tag{A.1}$$

## B. Carta de Smith

### B.1. Introducción

Carta de Smith o *Smith chart* es un gráfico y nomograma presentados en apartado 4.4 y que simplifica el número de cálculos con números complejos. La carta de Smith fue desarrollada por Phillip Smith en 1939 mientras trabajaba en los laboratorios de Bell. La carta de Smith es particularmente importante en el uso de LTs y su estimación de impedancias de forma expedita.

De forma adicional recomendamos al lector la fuente bibliográfica Paul & Nasar (vea 1998, apéndice C).

### B.2. Diagrama

La carta o gráfico oficial de Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) y MTTS está disponible *online*<sup>1</sup>, que incluye nomogramas extra (ejes de otras variables; e.g., *standing wave loss*) y la versión en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X está disponible en figura B.1.

---

<sup>1</sup>MTTS cata de Smith: <https://mtt.org/smith-chart/>.

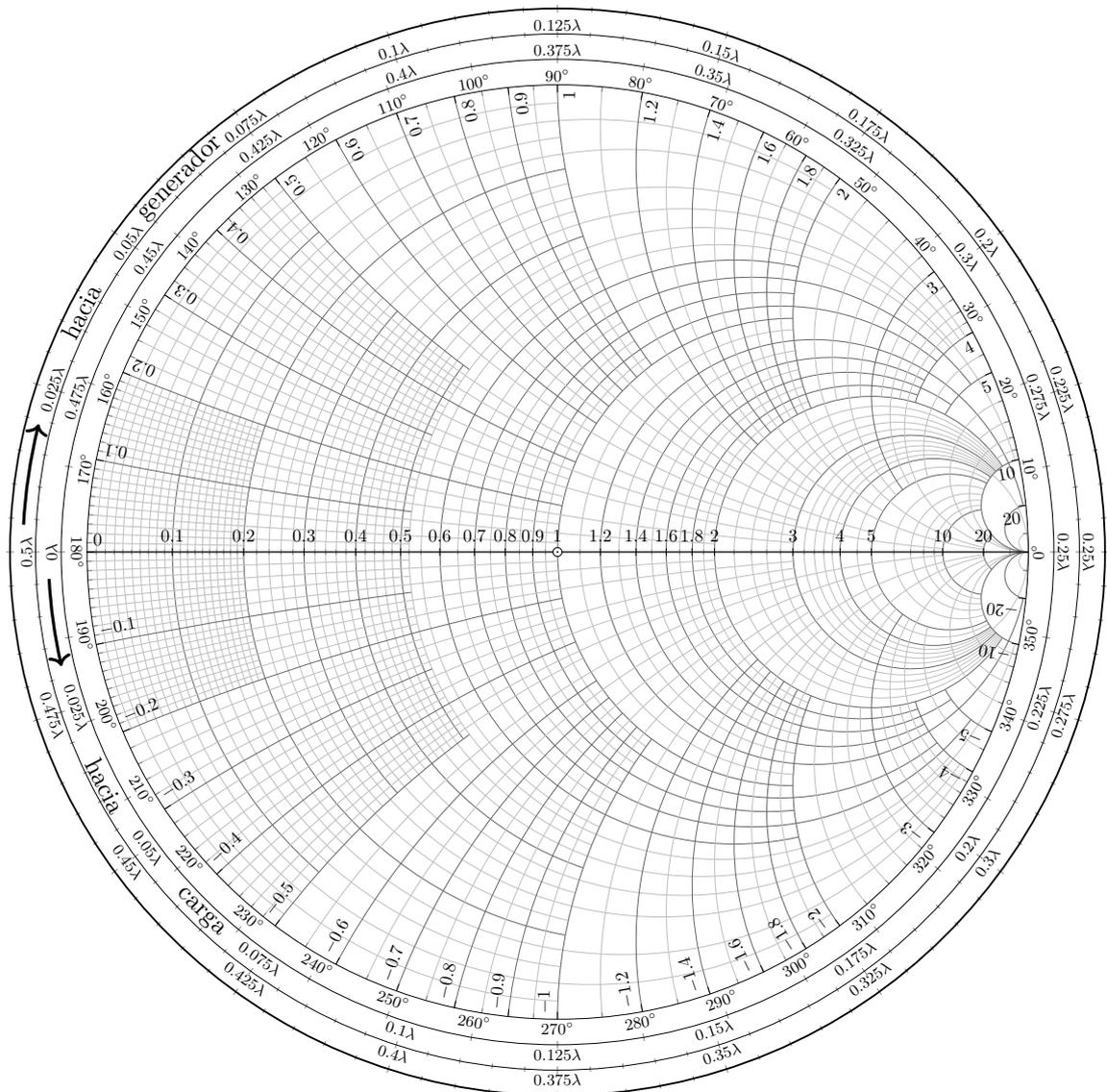


Figura B.1.: Carta de Smith en coordenadas de impedancia. Las secciones de la circunferencia concéntrica más exterior es llamada hacia generador (TG) y la segunda más exterior es llamada hacia la carga (TL).

## C. Siglas

- ADC** analog-to-digital converter
- AGN** active galactic nuclei
- ALMA** Atacama Large Millimetre/sub-millimetre Array
- BW** beamwidth
- CAD** computer-aided design
- CHIME** Canadian Hydrogen Intensity Mapping Experiment
- CHIME/FRB** [CHIME](#) Fast Radio Burst Project
- CMB** cosmic microwave background
- DAC** digital-to-analog converter
- DM** dark matter
- EVN** European [VLBI](#) Network
- FDM** finite difference method
- FEM** finite element method
- FFT** fast [FT](#)
- FIR** far infrared radiation
- FPGA** field-programmable gate arrays
- FRB** fast radio burst
- FT** Fourier transform
- GR** general relativity
- GSPS** giga samples per second
- IEEE** Institute of Electrical and Electronics Engineers
- IRE** Institute of Radio Engineers
- ISM** interstellar medium
- LCP** left-hand circular polarization
- LT** línea de transmisión
- MASER** microwave amplification by stimulated emission of radiation
- MPIfR** Max-Planck-Institut für Radioastronomie
- MTTS** [IEEE](#) Microwave Theory and Technology Society
- NS** neutron star
- ODE** ordinary differential equation

*Siglas*

- OIR** optical/near-infrared radiation
- PCB** printed circuit board
- PDE** partial differential equation
- PSD** power spectral density
- QED** quantum electrodynamics
- QFT** quantum field theory
- QUASARS** quasi-stellar radio source
- RCP** right-hand circular polarization
- RF** radio frequency
- SI** International System of Units
- SMA** sub-miniature version A
- SMBH** super massive BH
- SNR** signal-to-noise ratio
- TE** transverse electric
- TEM** transverse electromagnetic
- TG** towards generator
- TL** towards load
- TM** transverse magnetic
- VERA** VLBI Exploration of Radio Astrometry
- VLBI** very long baseline interferometry
- VWSR** voltage-wave standing ratio

# Bibliografía

- Adler, R. B., Chu, L. J., & Fano, R. M. 1960, *Electromagnetic energy transmission and radiation* (Wiley New York)
- Anderson, C. D. 1933, *Phys. Rev.*, 43, 491, doi: [10.1103/PhysRev.43.491](https://doi.org/10.1103/PhysRev.43.491)
- Arfken, G. B., & Weber, H.-J. 1967, *Mathematical methods for physicists* (Academic Press Orlando, FL)
- Arfken, G. B., Weber, H. J., & Spector, D. 1999, *American Journal of Physics*, 67, 165, doi: [10.1119/1.19217](https://doi.org/10.1119/1.19217)
- Baade, W., & Minkowski, R. 1954, *Astrophysical Journal*, 119, 206, doi: [10.1086/145812](https://doi.org/10.1086/145812)
- Baars, J. W. M. 2021, *URSI Radio Science Bulletin*, 375, 10
- Baars, J. W. M., & Kärcher, H. J. 2018, *Radio Telescope Reflectors: Historical Development of Design and Construction*, Vol. 447, doi: [10.1007/978-3-319-65148-4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-65148-4)
- Balanis, C. A. 1992, *IEEE Proceedings*, 80, 7
- Balick, B., & Brown, R. L. 1974, *Astrophysical Journal*, 194, 265, doi: [10.1086/153242](https://doi.org/10.1086/153242)
- Barbieri, C., Naletto, G., & Zampieri, L. 2023, *Astronomy*, 2, 180, doi: [10.3390/astronomy2030013](https://doi.org/10.3390/astronomy2030013)
- Bardeen, J. 1973, *Science*, 181, 1209, doi: [10.1126/science.181.4106.1209](https://doi.org/10.1126/science.181.4106.1209)
- Beiser, A. 2002, *Concepts of modern physics*
- Bork, A. M. 1963, *American Journal of Physics*, 31, 854, doi: [10.1119/1.1969140](https://doi.org/10.1119/1.1969140)
- Born, M., & Wolf, E. 1965, *Principles of optics. Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*
- Bracewell, R. N. 1986, *The Fourier Transform and its applications*
- Brotten, N. W., Legg, T. H., Locke, J. L., et al. 1967, *Science*, 156, 1592, doi: [10.1126/science.156.3782.1592](https://doi.org/10.1126/science.156.3782.1592)
- Burrows, A. S., & Ostriker, J. P. 2014, *Proceedings of the National Academy of Science*, 111, 2409, doi: [10.1073/pnas.1318003111](https://doi.org/10.1073/pnas.1318003111)
- Byron, F. W., Fuller, R. W., & Merzbacher, E. 1971, *Physics Today*, 24, 52, doi: [10.1063/1.3022387](https://doi.org/10.1063/1.3022387)
- Cassanelli, T., Bach, U., Winkel, B., & Kraus, A. 2021, arXiv e-prints, arXiv:2109.00006. <https://arxiv.org/abs/2109.00006>
- Cassanelli, T., Leung, C., Rahman, M., et al. 2022, *Astronomical Journal*, 163, 65, doi: [10.3847/1538-3881/ac3d2f](https://doi.org/10.3847/1538-3881/ac3d2f)
- Clerk Maxwell, J. 1865, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series I*, 155, 459
- Condon, J. J., & Ransom, S. M. 2016, *Essential Radio Astronomy*
- Conrady, A. E. 1957, *Applied optics and optical design*
- Cordero, P. 2015, *Electromagnetismo*
- Dorf, R. C. 1993, *The electrical engineering handbook*
- Feynman, R. P. 1964, *Feynman lectures on physics. Volume 2: Mainly electromagnetism and matter*
- . 2006, *QED: The Strange Theory of Light and Matter*

- Fossheim, K., Sudbø, A., & Ryazanov, V. 2005, *Physics Today*, 58, 60, doi: 10.1063/1.2117828
- Geuzaine, C., & Remacle, J.-F. 2009, *International journal for numerical methods in engineering*, 79, 1309
- Goldstein, H., Poole, C., & Safko, J. 2002, *Classical mechanics* (Addison Wesley)
- Greiner, W. 2004, *Classical Mechanics*, doi: 10.1007/b97649
- Greiner, W., & Dreitlein, J. 1990, *American Journal of Physics*, 58, 1217, doi: 10.1119/1.16210
- Griffiths, D. J. 2017, *Introduction to Electrodynamics*, 3rd edn. (Prentice Hall)
- Griffiths, D. J., & Schroeter, D. F. 2018, *Introduction to Quantum Mechanics*, doi: 10.1017/9781316995433
- Hanbury Brown, R. 1974, *The intensity interferometer. Its applications to astronomy*
- Haynes, W. M. 2014, *CRC Handbook of Chemistry and Physics*
- Hecht, F. 2012, *J. Numer. Math.*, 20, 251. <https://freefem.org/>
- Hewish, A., Bell, S. J., Pilkington, J. D. H., Scott, P. F., & Collins, R. A. 1968, *Nature*, 217, 709, doi: 10.1038/217709a0
- Hughes, T. 2000, *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Dover Civil and Mechanical Engineering (Dover Publications)
- Hunt, B. J. 1994, *The maxwellians* (cornell university press)
- Jackson, J. D. 1998, *Classical Electrodynamics*, 3rd Edition
- Jansky, K. 1933, *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, 21, 1387, doi: 10.1109/JRPROC.1933.227458
- Kipnis, N. 1991, *History of the Principle of Interference of Light*, Science networks historical studies (Springer)
- Landau, L. D., & Lifshitz's, E. M. 1959, *Theory of elasticity*
- Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. 1960, *Electrodynamics of continuous media*
- Leighton, R. 1959, *Principles of Modern Physics*, International series in pure and applied physics (McGraw-Hill)
- Lorimer, D. R., Bailes, M., McLaughlin, M. A., Narkevic, D. J., & Crawford, F. 2007, *Science*, 318, 777, doi: 10.1126/science.1147532
- Lorimer, D. R., & Kramer, M. 2012, *Handbook of Pulsar Astronomy*
- Mamajek, E. E., Torres, G., Prsa, A., et al. 2015, arXiv e-prints, arXiv:1510.06262. <https://arxiv.org/abs/1510.06262>
- Marks, R. 2009, *Handbook of Fourier Analysis & Its Applications* (Oxford University Press)
- Mizuhashi, T. 1937, *The Journal of the Institute of Electrical Communication Engineers of Japan*, 20, 1053
- Pannekoek, A. 1961, *A history of astronomy*.
- Paul, C. R., & Nasar, S. A. 1998, *Introduction to Electromagnetic Fields* (McGraw-Hill)
- Penzias, A. A., & Wilson, R. W. 1965, *Astrophysical Journal*, 142, 419, doi: 10.1086/148307
- Peres, A. 1961, *Phys. Rev.*, 122, 273, doi: 10.1103/PhysRev.122.273
- Pupin, Goldsmith, A. N., Espenschied, L., Marriott, R. H., & Martin, J. 1913, *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, 1, 12, doi: 10.1109/JRPROC.1913.216565
- Razavi, B. 1995, *Principles of Data Conversion System Design*, Electrical engineering, circuits and systems (Wiley)
- Reber, G. 1940, *Astrophysical Journal*, 91, 621, doi: 10.1086/144197

- Reif, F., & Scott, H. L. 1998, *American Journal of Physics*, 66, 164, doi: 10.1119/1.19073
- Roberts, M. S., & Whitehurst, R. N. 1975, *Astrophysical Journal*, 201, 327, doi: 10.1086/153889
- Rosser, W. 2013, *Classical Electromagnetism via Relativity: An Alternative Approach to Maxwell's Equations* (Springer US)
- Ruze, J. 1966, *Proceedings of the IEEE*, 54, 633, doi: 10.1109/PROC.1966.4784
- Ryle, M., & Clarke, R. W. 1961, *Monthly Notices of the RAS*, 122, 349, doi: 10.1093/mnras/122.4.349
- Saha, S. K. 2011, *Aperture Synthesis*, doi: 10.1007/978-1-4419-5710-8
- Schouten, J. A., & Corson, E. M. 1952, *Physics Today*, 5, 22, doi: 10.1063/1.3067367
- Schutz, B. 2009, *A First Course in General Relativity*
- Sears, F. W., Zemansky, M. W., Young, H. D., & Freedman, R. A. 2005, *Física Universitaria*, 9th edn., Vol. 2 (Pearson Education)
- Shabad, A. E., & Usov, V. V. 2011, *Phys. Rev. D*, 83, 105006, doi: 10.1103/PhysRevD.83.105006
- Shapley, H., & Curtis, H. D. 1921, *Bulletin of the National Research Council*, 2, 171
- Smith, P. H. 1939, *Electronics*, 12, 29
- Sorokin, D. P. 2022, *Fortschritte der Physik*, 70, 2200092, doi: 10.1002/prop.202200092
- Staelin, D. H. 2011, *Electromagnetics and applications* (Massachusetts Institute of Technology Cambridge, MA, USA)
- Stroke, G. W. 1969, *An Introduction to Coherent Optics and Holography* 2nd edition
- Stutzman, W. L., & Thiele, G. A. 1981, *Antenna theory and design*
- Thompson, A. R., Moran, J. M., & Swenson, George W., J. 2017, *Interferometry and Synthesis in Radio Astronomy*, 3rd Edition, doi: 10.1007/978-3-319-44431-4
- Tiesinga, E., Mohr, P., David, & Taylor, B. 2019, 2018 CODATA RECOMMENDED VALUES OF THE FUNDAMENTAL CONSTANTS OF PHYSICS AND CHEMISTRY, Special Publication (NIST SP), National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD. [https://tsapps.nist.gov/publication/get\\_pdf.cfm?pub\\_id=928211](https://tsapps.nist.gov/publication/get_pdf.cfm?pub_id=928211)
- Tinkham, M., & Wheatley, J. C. 1976, *Physics Today*, 29, 57, doi: 10.1063/1.3023526
- Tolstov, G. 1962, *Fourier Series*, Dover Books on Mathematics (Dover Publications)
- Tolstoy, I. 1973, *Wave propagation*.
- Tong, D. 2015, *Lectures on Electromagnetism*, <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/em.html>
- Valenzuela, P. H. 2008, *Matemática Volumen 4* (Universidad de la Frontera, Temuco, Chile)
- Walker, M. J. 1949, *American Journal of Physics*, 17, 5, doi: 10.1119/1.1989500
- Weaver, H., Williams, D. R. W., Dieter, N. H., & Lum, W. T. 1965, *Nature*, 208, 29, doi: 10.1038/208029a0
- Wilson, T. L., Rohlf, K., & Hüttemeister, S. 2013, *Tools of Radio Astronomy*, doi: 10.1007/978-3-642-39950-3
- Wolszczan, A., & Frail, D. A. 1992, *Nature*, 355, 145, doi: 10.1038/355145a0