Algebarska degeneracija u električnim kolima

— jedan minimalan i dva trivijalna primera —

Predrag Pejović

24.10.2023, 10:52

1 Uvod

U ovom tekstu će biti razmatran fenomen algebarske degeneracije u električnim kolima koji je karakterisan time što je promenljiva kola, struja ili napon, na koju po karakteristikama elemenata deluje izvod po vremenu direktno vezana sa ulaznim promenljivim algebarskom vezom. Ovo dovodi do niza fenomena, poput odsustva mogućnosti za nezavisno zadavanje početnog uslova na algebarski degenerisanom akumulacionom elementu, smanjenja reda funkcija prenosa (reda polinoma u imeniocu funkcija prenosa) i otvaranja mogućnosti da u funkciji prenosa red polinoma u brojiocu bude veći od reda polinoma u imeniocu.

Podrazumevano znanje čitalca ovog teksta obuhvata sposobnost pisanja jednačina tablo modela koji se sastoji iz jednačina po Kirhofovim zakonima za struje (KZS), jednačina po Kirhofovim zakonima za napone (KZN) napisanim preko potencijala čvorova kako bi se izbeglo nalaženje stabla grafa mreže koje nepotrebno komplikuje formiranje jednačina, kao i jednačina po karakteristikama elemenata. Pod promenljivim ili nepoznatim tablo modela se smatraju sve struje grana, svi naponi grana i svi potencijali čvorova. Takođe, podrazumeva se elementarno poznavanje linearne algebre, pre svega Gausovog postupka eliminacije i matrične forme zapisa jednačina. Osim ovoga, podrazumeva se da čitaoci znaju i razumeju šta je to funkcija prenosa kola.

U analizi će se koristiti model stanja električnog kola koji se uobičajeno piše preko jednačina stanja

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u} \tag{1}$$

i jednačina izlaza

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\,\mathbf{x} + \mathbf{D}\,\mathbf{u}. \tag{2}$$

Model stanja se dobija transformacijom tablo modela primenom Gausovog postupka eliminacije. Jednačine stanja su linearne diferencijalne jednačine u normalnoj formi koje obuhvataju samo promenljive (struje i/ili napone) na koje deluje izvod po vremenu, to su promenljive stanja $\mathbf{x}$, i vrednosti pobudnih generatora smeštene u vektor $\mathbf{u}$. Struje i naponi grana kola koji nisu u vektoru promenljivih stanja pripadaju vektoru izlaza $\mathbf{y}$, gde se nalaze i svi potencijali čvorova koji ne mogu neposredno biti promenljive stanja pošto neposredno ne učestvuju u karakteristikama elemenata.

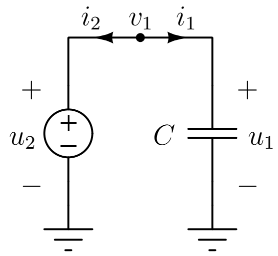
Model stanja razdvaja diferencijalne jednačine i algebarske jednačine, što je izuzetno korisno u nizu metoda za analizu električnih kola i sistema uopšte, posebno u teoriji automatskog upravljanja.

Algebarska degeneracija koja će biti analizirana u ovom tekstu nije posledica samih karakteristika akumulacionih (reaktivnih) elemenata, elemenata kojima karakteristike sadrže izvode po vremenu, bilo struje, bilo napona. Algebarska degeneracija je posledica vezivanja elemenata kola koje dovodi do direktne algebarske veze promenljive na koju deluje izvod po vremenu i vrednosti pobudnih generatora kola, kako će biti pokazano.

Motiv za nastanak ovog teksta je nedovoljno razmatranje kola sa algebarskom degeneracijom u nastavi brojnih predmeta koji se teorijom kola i sistema bave, kao i široka rasprostranjenost i veliki značaj takvih kola i sistema u elektronici, a naročito u energetskoj elektronici. Svako kolo u kome je izvor za napajanje „blokiran“ kondenzatorom ispoljava algebarsku degeneraciju, a takvo je skoro svako kolo u primeni. Dodatni motiv je rasprostranjeno, iako bez dokaza i neargumentovano, uverenje da je nemoguće sintetisati kolo kod koga funkcija prenosa ima veći red polinoma u brojiocu nego u imeniocu. Moguće je, oslanjanjem na algebarsku degeneraciju, a u tekstu će se videti i kako.

2 Minimalni primer

Minimalni netrivijalni primer kola sa algebarskom degeneracijom je prikazan na slici 1 i sastoji se iz paralelne veze kondenzatora i idealnog naponskog izvora.



Slika 1: Minimalni netrivijalni primer kola sa algebarskom degeneracijom.

Kolo sa slike 1 ima dva čvora, $n_n = 2$, pa je broj linearno nezavisnih jednačina po Kirhofovom zakonu za struje $n_n - 1 = 1$. Broj grana kola je $n_b = 2$, pa je dimenzija tablo modela (broj nepoznatih koji je jednak broju jednačina) $n_T = n_n - 1 + 2\,n_b = 5$. Nepoznate u tablo modelu kola su sve struje grana, svi naponi grana i svi potencijali čvorova

$$\mathbf{y}_T = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ u_1 \\ u_2 \\ v_1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Jednačina po Kirhofovom zakonu za struje je

$$i_1 + i_2 = 0 \tag{4}$$

dok su jednačine po Kirhofovom zakonu za napone

$$u_1 - v_1 = 0 \tag{5}$$

i

$$u_2 - v_1 = 0. \tag{6}$$

Jednačine po karakteristikama elemenata su

$$C\,\frac{du_1}{dt} - i_1 = 0 \tag{7}$$

i

$$u_2 = e_g\,(t) \tag{8}$$

što čini pet jednačina po pet nepoznatih tablo modela.

Kako bi tablo model transformisali na model stanja potrebno je identifikovati **potencijalne** promenljive stanja, a to su promenljive na koje deluje izvod po vremenu. Takve promenljive se mogu naći jedino u karakteristikama elemenata, pošto Kirhofovi zakoni samo algebarski povezuju ili struje (KZS) ili napone (KZN). Jedina promenljiva na koju deluje izvod po vremenu u tablo modelu razmatranog kola je napon u_1, pa je potencijalni vektor promenljivih stanja $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u_1 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Vektor ulaznih promenljivih kola sadrži samo napon nezavisnog naponskog izvora

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} e_g(t) \end{bmatrix} \tag{10}$$

dok je po pretpostavljenom vektoru promenljivih stanja vektor izlaza kola

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ u_2 \\ v_1 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Najvažniji korak u formiranju sistema jednačina stanja polazeći od tablo modela je eliminisanje izlaznih promenljivi, sadržanih u vektoru $\mathbf{y}$ iz jednačina tablo modela, što ostavlja jednačine stanja iz modela stanja (model stanja se sastoji iz jednačina stanja i jednačina izlaza). U razmatranom slučaju, očekuje se jedna jednačina stanja, jedna diferencijalna jednačina po promenljivoj stanja. Međutim, eliminacija pretpostavljenih promenljivih izlaza daje

$$u_1 = e_g(t) \tag{12}$$

što predstavlja direktnu algebarsku vezu pretpostavljene promenljive stanja i ulazne promenljive, dok se izvod po vremenu pretpostavljene promenljive stanja u jednačini ne pojavljuje, nema diferencijalne jednačine. **Ovo je algebarska ili dinamička degeneracija, u procesu eliminacije promenljivih izlaza iz tablo modela eliminisan je i izvod pretpostavljene promenljive stanja po vremenu. Pretpostavljena promenljiva stanja je direktno povezana sa ulaznom promenljivom.** U ovakvom slučaju se promenljiva u_1 ne smatra promenljivom stanja, za njeno određivanje ne treba rešavati diferencijalnu jednačinu, data je algebarskom vezom sa ulaznim promenljivim. Stoga se u_1 svrstava u promenljive izlaza, pa je sada vektor izlaznih promenljivih

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ u_1 \\ u_2 \\ v_1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

dok vektor promenljivih stanja ne sadrži ni jednu promenljivu, pa je sistem nultog reda i model stanja nema jednačine stanja, već samo jednačine izlaza.

Zamenom $u_1 = e_g(t)$ se za rešenje po izlaznim promenljivim koje su u ovom slučaju iste i za tablo model i za model stanja ($\mathbf{y}_T = \mathbf{y}$) dobija

$$i_1 = C\,\frac{e_g(t)}{dt} \tag{14}$$

$$i_2 = -C\,\frac{e_g(t)}{dt} \tag{15}$$

$$u_1 = e_g(t) \tag{16}$$

$$u_2 = e_g(t) \tag{17}$$

$$v_1 = e_g(t) \tag{18}$$

što se u matričnoj formi može napisati kao

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ u_1 \\ u_2 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left[e_g(t)\right] + \begin{bmatrix} C \\ -C \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt}\left[e_g(t)\right]. \tag{19}$$

Opšti oblik rešenja u matričnoj formi je za dato kolo

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}\,\mathbf{u} + \mathbf{D}_1 \frac{d\mathbf{u}}{dt} \tag{20}$$

i u izlaznim promenljivim se pojavljuju izvodi po vremenu ulaznih promenljivih. Ova forma jednačine izlaza je bitno različita od (2) i sadrži nov kvalitet, izvode po vremenu ulaznih promenljivih. Ovo uzrokuje niz posledica.

Na ovom mestu potrebno je naglasiti i podvući da kod netrivijalnih slučajeva algebarske degeneracije, a to su slučajevi kada postoji bar jedna ulazna promenljiva, bar jedna promenljiva izlaznog vektora zavisi od izvoda ulaznih promenljivih (ili ulazne promenljive) po vremenu.

Iz datog rešenja kola (19) se lako izvode sve funkcije prenosa kola od pobude do izlaznih promenljivih, a dobijaju se u matričnoj formi kao

$$\begin{bmatrix} i_1(s) \\ i_2(s) \\ u_1(s) \\ u_2(s) \\ v_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\,C \\ -s\,C \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left[e_g(s)\right]. \tag{21}$$

Funkcije prenosa od pobude $e_g(s)$ do struja $i_1(s)$ i $i_2(s)$ imaju red polinoma u brojiocu jedan, a red polinoma u imeniocu nula. Jedan je veće od nula. Nekauzalno? Zašto, prema kojoj definiciji kauzalnosti, sa kojim dokazom? Ako vam (iracionalno) smeta što su razmatrane funkcije prenosa transkonduktanse, u kolo dodajte strujom kontrolisan naponski izvor sa karakteristikom elementa $u_3 - r\,i_1 = 0$, pa će funkcija prenosa od $e_g(s)$ do $u_3(s)$ biti

$$H(s) \triangleq \frac{u_3(s)}{e_g(s)} = s\,r\,C \tag{22}$$

što nema fizičku dimenziju, ali i dalje ima red polinoma u brojiocu jedan, red polinoma u imeniocu nula, a i dalje je jedan veće od nula.

2.1 O kauzalnosti

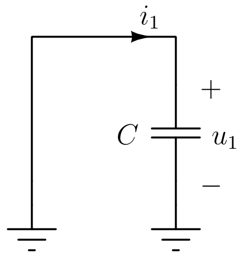
U opisanom primeru se u vektoru izlaznih promenljivih eksplicitno javlja izvod ulazne promenljive $e_g(t)$ po vremenu. Na ovaj način funkcije prenosa kola mogu imati veći red polinoma u brojiocu nego u imeniocu. Uslov za to je postojanje algebarske degeneracije. U konkretnom primeru je admitansa koja je funkcija prenosa mreže

$$Y_1(s) \triangleq \frac{i_1(s)}{e_g(s)} = s\,C \tag{23}$$

kod koje je red polinoma u brojiocu jedan, dok joj je red polinoma u imeniocu nula. Ovo ni na koji način ne narušava kauzalnost kola, o čemu postoje predrasude, potpuno pogrešne, a nažalost široko rasprostranjene. Kada bi to shvatanje bilo tačno, onda bi brzinomer bio nekauzalan instrument pošto je ono što meri izvod pređenog puta po vremenu. Dodatno pogrešno shvatanje je da takvi sistemi ne mogu postojati. Međutim, brzinomeri postoje. Tvrdnja da su sistemi sa redom polinoma u brojiocu većim od reda polinoma u imeniocu nekauzalni bi trebalo da bude praćena definicijom pojma kauzalnosti i dokazom da uslovi koje data definicija kauzalnosti nameće nisu ispunjeni. Međutim, te tvrdnje se tradicionalno oslanjaju samo na argumente autoriteta.

3 Trivijalni primer

U cilju daljeg ilustrovanja problema algebarske degeneracije, na slici 2 je prikazano trivijalno kolo koje ima algebarsku degeneraciju. Kolo je autonomno, nema pobudne generatore, pa je stoga i algebarska degeneracija koja se ispoljava trivijalna u tom smislu što se u izlaznim promenljivim ne pojavljuju izvodi po vremenu ulaznih promenljivih, pošto ulazne promenljive ne postoje u kolu. Jedina raspoloživa algebarska veza potencijalne promenljive stanja koja izaziva algebarsku degeneraciju je njeno izjednačavanje sa nulom.



Slika 2: Trivijalni primer kola sa algebarskom degeneracijom.

Broj čvorova kola je $n_n = 1$, pa je broj linearno nezavisnih jednačina po Kirhofovom zakonu za struje $n_n - 1 = 0$. Broj grana kola je $n_b = 1$, pa je dimenzija tablo modela kola $n_T = n_n - 1 + n_b = 2$. Nepoznate tablo modela su samo struja i napon kondenzatora, i_1 i u_1, u vektorskoj formi

$$\mathbf{y}_T = \begin{bmatrix} i_1 \\ u_1 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Jednačina po Kirhofovom zakonu za struje u razmatranom kolu nema, a jedina jednačina po Kirhofovom zakonu za napone je

$$u_1 = 0. \tag{25}$$

Preostala jednačina tablo modela je karakteristika elementa kondenzatora

$$C\,\frac{du_1}{dt} - i_1 = 0. \tag{26}$$

Potencijalna promenljiva stanja kola je napon na kondenzatoru

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u_1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

po čemu bi vektor izlaznih promenljivih bio

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} i_1 \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Eliminacija i_1 iz tablo modela daje rešenje za napon kondenzatora, potencijalnu promenljivu stanja, kao

$$u_1 = 0 \tag{29}$$

koja je opet algebarski data, nema izvoda po vremenu po potencijalnoj promenljivoj stanja, pa samim tim ni diferencijalne jednačine. Stoga, to nije promenljiva stanja u smislu modela stanja, već promenljiva izlaza, pa je u modelu stanja vektor izlaznih promenljivih

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} i_1 \\ u_1 \end{bmatrix} \tag{30}$$

dok jednačina stanja ne postoji jer je zbog algebarske degeneracije sistem nultog reda.

Rešenje sistema je trivijalno, dato je sa

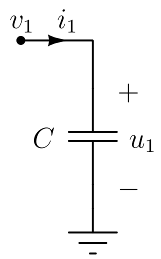
$$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{31}$$

i ono se čak ni ne uklapa u formu jednačine izlaza (2) pošto ni vektor promenljivih stanja $\mathbf{x}$ ni vektor ulaznih promenljivih $\mathbf{u}$ ne postoje, pa ne mogu postojati ni matrice $\mathbf{C}$ ni $\mathbf{D}$.

Upravo opisani trivijalni primer se može smatrati posebnim slučajem prethodno opisanog minimalnog primera, posebnim slučajem kod koga je $e_g(t) = 0$. U oba slučaja nije moguće slobodno zadati početnu vrednost napona na kondenzatoru $u_1(0)$ jer je u trivijalnom slučaju $u_1(0) = 0$, a u minimalnom slučaju je $u_1(0) = e_g(0)$.

4 Minimalni primer kola bez algebarske degeneracije

U cilju poređenja sa prethodna dva primera kola koja ispoljavaju algebarsku degeneraciju, u ovom odeljku je prikazan slučaj sličnog kola bez algebarske degeneracije, koje predstavlja minimalni primer kola bez algebarske degeneracije. Kolo je prikazano na slici 3 i sastoji se samo od kondenzatora.



Slika 3: Minimalni primer kola bez algebarske degeneracije.

Kolo sa slike 3 ima $n_n = 2$ čvora, pa je broj linearno nezavisnih jednačina po Kirhofovom zakonu za struje $n_n - 1 = 1$. Broj grana kola je $n_b = 1$, pa je dimenzija tablo modela kola $n_T = n_n - 1 + 2\,n_b = 3$. Nepoznate (promenljive) tablo modela su struje grana, naponi grana i potencijali čvorova, u konkretnom slučaju

$$\mathbf{y}_T = \begin{bmatrix} i_1 \\ u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Jednačina po Kirhofovom zakonu za struje je

$$i_1 = 0 \tag{33}$$

dok je jednačina po Kirhofovom zakonu za napone

$$u_1 - v_1 = 0. \tag{34}$$

Preostala jednačina tablo modela je karakteristika elementa kondenzatora

$$C\,\frac{du_1}{dt} - i_1 = 0. \tag{35}$$

Pretpostavljeni vektor promenljivih stanja sadrži promenljive na koje deluje izvod po vremenu, u razmatranom slučaju je to samo napon kondenzatora u_1

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u_1 \end{bmatrix} \tag{36}$$

pa su preostale promenljive tablo modela promenljive izlaza u modelu stanja

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} i_1 \\ v_1 \end{bmatrix}. \tag{37}$$

Eliminacijom promenljivih izlaza modela stanja iz tablo modela se dobija jednačina stanja

$$\frac{du_1}{dt} = 0 \tag{38}$$

ili u matričnoj formi

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \end{bmatrix} \tag{39}$$

pa je matrica **A** modela stanja (1)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \tag{40}$$

dok matrica **B** ne postoji jer ni vektor ulaznih promenljivih **u** ne postoji pošto je sistem autonoman (nema nezavisne izvore).

Jednačine izlaza sistema su

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \end{bmatrix} \tag{41}$$

odakle se identifikuje matrica **C** iz jednačine izlaza modela stanja (2)

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{42}$$

dok matrica **D** ne postoji pošto je sistem autonoman i ne postoji ulazni vektor.

Kolo sa slike 3 se lako rešava pošto je

$$i_1 = 0 \tag{43}$$

pa naponi samo održavaju početni uslov napona na kondenzatoru

$$u_1(t) = u_1(0) \tag{44}$$

i

$$v_1(t) = u_1(0). \tag{45}$$

Ovde valja uočiti da promenljiva stanja u odsustvu algebarske degeneracije ima početni uslov koji utiče na rešenje kola. Ovo je bitna razlika u odnosu na kola sa algebarskom degeneracijom.

5 Zaključak

Uobičajene analize dinamičkih svojstava električnih kola polaze od pretpostavke da je za svako električno kolo moguće napisati model stanja u formi sistema jednačina stanja (1) i jednačina izlaza (2) kod koga je red sistema, što je dimenzija vektora promenljivih stanja, odnosno broj promenljivih stanja, jednak broju reaktivnih elemenata u kolu. Pod ovom pretpostavkom rešenje kola ne sadrži izvode po vremenu ulaznih promenljivih (nezavisnih generatora), a svakom reaktivnom elementu je moguće nezavisno zadati početni uslov, pa tako svaki reaktivni element doprinosi odzivu usled početnih uslova kola. Osim toga, pod navedenom pretpostavkom funkcije prenosa kola imaju red polinoma u imeniocu koji je uvek veći ili jednak od reda polinoma u brojiocu. **Ova pretpostavka nije tačna, postoje kola, i to kola od velikog praktičnog značaja, za koje nije moguće napisati model stanja u formi (1) i (2).** Povezivanje elemenata kola može usloviti da su potencijalne promenljive stanja, a to su promenljive u karakteristikama elemenata na koje deluje izvod po vremenu, naponi kondenzatora i struje kalemova, direktno algebarski vezani za pobudne izvore, ili algebarskom vezom uslovljeni da budu jednaki nuli, ili algebarski međusobno vezani, što u ovom tekstu nije razmatrano (slučajevi poput paralelne veze dva kondenzatora). Svaki reaktivni ili akumulacioni (oba termina znače isto) element kod koga je to slučaj je algebarski degenerisan i ne doprinosi redu kola. Nije mu moguće nezavisno zadati početni uslov. Osim toga, takvi elementi uslovljavaju pojavu izvoda po vremenu napona i/ili struja pobudnih generatora u jednačinama stanja i jednačinama izlaza, što omogućava da u funkcijama prenosa kola red polinoma u brojiocu bude veći od reda polinoma u imeniocu.

Kako bi pretpostavku o mogućnosti predstavljanja svih električnih kola modelom stanja u formi datoj sa (1) i (2) sveli na apsurd, u ovom tekstu je dat minimalni kontraprimer kola koje se sastoji iz paralelne veze kondenzatora i idealnog naponskog izvora. Takođe, dat je i trivijalni kontraprimer koji se sastoji samo iz kratko spojenog kondenzatora, koji je poseban slučaj prvog kontraprimera kada je elektromotorna sila generatora jednaka nuli. Trivijalni kontraprimer jeste algebarski degenerisan, ali je sistem autonoman, ne sadrži pobudne izvore, pa nije moguće na njemu ilustrovati pojavu izvoda po vremenu napona i struja pobudnih generatora u modelu stanja, kao i u izlaznim promenljivm kola, što omogućava realizovanje funkcija prenosa koje imaju veći red polinoma u brojiocu nego u imeniocu.

Pogrešna pretpostavka da je za svako kolo moguće napisati model stanja u formi (1) i (2) (nije moguće napisati za svako kolo, mada za niz kola jeste moguće) dovodi do zaključka da nije moguće realizovati funkcije prenosa kola kod kojih je red polinom u brojiocu veći od reda polinoma u imeniocu. Na prvom primeru, minimalnom, pokazano je kako to jeste moguće. Da stvari budu gore, proširilo se ni na čemu utemeljeno uverenje da su takvi sistemi nekauzalni. Tvrdnja o nekauzalnosti nikada nije potkrepljena definicijom pojma kauzalnosti, niti dokazom da je sistem nekauzalan. Sama činjenica da takva uverenja opstaju u populaciji loše govori o sposobnosti ljudi koji ih prihvataju da analiziraju argumente i kritički misle. Naveden je i primer instrumenta za merenje brzine, brzinomera, prisutnog u svakom automobilu po sili zakona, a to je instrument koji meri izvod pređenog puta po vremenu. Da li je taj sistem nekauzalan? Po kojoj definiciji i sa kojim dokazom? Ako je brzina

$$v\,(t) = \frac{dx\,(t)}{dt} \tag{46}$$

onda je

$$v\,(s) = s\,x\,(s) \tag{47}$$

pa je red polinoma u brojiocu jedan, red polinoma u imeniocu nula, a jedan je veće od nula.

Posebno i nezavisno pitanje je pitanje važenja modela. Kako frekvencija raste, tako od neke frekvencije na dalje nužno raste i amplitudska karakteristika funkcija prenosa kod kojih je red polinoma u brojiocu veći od reda polinoma u imeniocu, asimptota amplitudske karakteristike je rastuća. Na visokim frekvencijama i najmanji šum bi se toliko pojačao da bi prekrio signal koji je od interesa, što je sa stanovišta primene nepoželjno. Samo, nijedan model ne važi u beskonačnom opsegu frekvencija. Još mnogo pre frekvencije gama zraka kolo nije moglo da se opiše modelom sa koncentrisanim parametrima, a i mnogi parazitni elemeni su ušli u model kao relevantni na još nižim frekvencijama, dok se kolo i moglo opisati modelom sa koncentrisanim parametrima. Stoga, kako bi se smanjio uticaj šuma i smetnji na visokim frekvencijama kod kola koja u opsegu frekvencija od interesa imaju frekvencijsku karakteristiku sa većim redom polinoma u brojiocu nego u imeniocu, na visokim frekvencijama, van opsega frekvencija od interesa, unose se dodatni polovi koji povećavaju red sistema i obaraju amplitudsku frekvencijsku karakteristiku. Samo, ovo je pitanje prakse, a ne pitanje jednačina koje adekvatno opisuju sistem u frekvencijskom opsegu od interesa, a svakako nema nikakve veze sa kauzalnošću sistema.