$A(z)-$ analitik funksiyalarning xossalari

Asrorova Charos Baxtiyor qizi.
"TIQXMMI" Milliy tadqiqotlar universitetining Qarshi irrigatsiya va agrotexnologiyalar insituti, ''Matematika va tabiiy fanlar" kafedrasi stajor-assistenti.
Doniyorov Abror Raxmidin o'g'li.
Qarshi davlat universiteti, ''Matematik analiz va differensial tenglamalar" kafedrasi stajor-assistenti.

Annotatsiya. Ushbu maqolada A(z)-analitik funksiyalarning ba'zi xossalari,ushbu funksiyalar uchun Koshi teoremasining analogi,Koshi formulasi, Veyershtrass teoremasining analogi hamda Shvarts lemmasining analogi keltirilgan.

Kalit so'zlar. A(z)-analitik funksiyalar,chiziqli kombinatsiya, gomeomorf,qo'zg'almas nuqta,golomorf funksiya,Beltrami tenglamasi,Koshi teoremasining analogi,Koshi formulasi,Veyershtrass teoremasining analogi,Shvarts lemmasining analogi.

1-xossa. *Chekli sondagi* $A(z)-$*analitik funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi yana A(z) - analitik bo'ladi, ya'ni agar* $f_1(z), f_2(z),....., f_n(z)$ – $A(z)-$*analitik funksiyalar va* $\alpha_j \in R,\ \ j=1,2,...,n$ *bo'lsa, u holda* $f(z)=\alpha_1 f_1(z)+\alpha_2 f_2(z)+...+\alpha_n f_n(z)$ *funksiya ham A(z) - analitik bo'ladi.*

Ushbu xossaning isboti bevosita ta'rifdan va $\overline{D}_A$ operatorning chiziqliligidan kelib chiqadi.

2-xossa. *Ikkita* $A(z)-$*analitik funksiyalar ko'paytmasidan iborat funksiya ham A-analitik funksiya bo'ladi, ya'ni agar* $f_1(z), f_2(z)$ – $A(z)-$*analitik funksiyalar bo'lsa, unda ularning ko'paytmasi* $f_1(z)\cdot f_2(z)$ *ham* $A(z)-$*analitik funksiya bo'ladi.*

Isbot. $f_1(z), f_2(z)$ – $A(z)-$analitik funksiyalar bo'lsin. Unda $\overline{D_A} f_1(z)=0$ va $\overline{D_A} f_2(z)=0$, ya'ni $\frac{\partial f_1(z)}{\partial \overline{z}}=A(z)\cdot\frac{\partial f_1(z)}{\partial z}$ va $\frac{\partial f_2(z)}{\partial \overline{z}}=A(z)\cdot\frac{\partial f_2(z)}{\partial z}$ bo'ladi. Bu tengliklardan

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left[f_1(z)\cdot f_2(z)\right]=\frac{\partial f_1(z)}{\partial \overline{z}}\cdot f_2(z)+f_1(z)\cdot\frac{\partial f_2(z)}{\partial \overline{z}}=$$

$$=A(z)\cdot\frac{\partial f_1(z)}{\partial z}\cdot f_2(z)+f_1(z)\cdot A(z)\cdot\frac{\partial f_2(z)}{\partial z}=$$

$$=A(z)\cdot\left(\frac{\partial f_1(z)}{\partial z}\cdot f_2(z)+f_1(z)\cdot\frac{\partial f_2(z)}{\partial z}\right)=A(z)\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[f_1(z)\cdot f_2(z)\right]$$

ni hosil qilamiz. Bundan esa bizga zarur tasdiq kelib chiqadi.

3-xossa. *Ikkita A(z)-analitik funksiyalarning nisbati ham A(z)-analitik funksiya bo‘ladi, ya’ni* $f_1(z),\ f_2(z)$ – $A(z)-$ *analitik funksiyalar (* $f_2(z)\neq 0$ *) bo‘lsa unda* $\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ *funksiya ham* $A(z)$*-analitik funksiya bo‘ladi.*

Isbot. $f_1(z)$ *va* $f_2(z)$ funksiyalar differensiallanuvchi funksiyalar va $f_2(z)\neq 0$ bo‘lganligi uchun $\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ funksiya ham differensiallanuvchi. Ular *A(z)*-analitik funksiyalar, ya’ni $\frac{\partial f_1(z)}{\partial \overline{z}} = A(z)\cdot\frac{\partial f_1(z)}{\partial z}$ va $\frac{\partial f_2(z)}{\partial \overline{z}} = A(z)\cdot\frac{\partial f_2(z)}{\partial z}$ tengliklar o‘rinli bo‘lganligi uchun

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left[\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right] = \frac{\frac{\partial f_1(z)}{\partial \overline{z}}\cdot f_2(z) - \frac{\partial f_2(z)}{\partial \overline{z}}\cdot f_1(z)}{\left[f_2(z)\right]^2} =$$

$$= \frac{A(z)\frac{\partial f_1(z)}{\partial z}\cdot f_2(z) - A(z)\frac{\partial f_2(z)}{\partial z}\cdot f_1(z)}{\left[f_2(z)\right]^2} =$$

$$= A(z)\frac{\frac{\partial f_1(z)}{\partial z}\cdot f_2(z) - \frac{\partial f_2(z)}{\partial z}\cdot f_1(z)}{\left[f_2(z)\right]^2} = A(z)\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right]$$

bo‘ladi va bu aytilgan tasdiqni isbotlaydi.

4-xossa. *Agar* $f(z)$ *funksiya A(z) - analitik funksiya bo‘lsa, u holda* $\overline{f(z)}$ *funksiya* $A(z)-$ *antianalitik funksiya bo‘ladi.*

Bu xossaning isboti bevosita ta’rifdan kelib chiqadi.

Ta’kidlash lozimki, $A(z)\equiv 0$ bo’lganda mos ravishda analitik va antianalitik funksiyalarning ta’riflarini hosil qilamiz.

$|A(z)|<1$ bo’lgan holda D sohaning deyarli hamma yerida gomeomorf yechim oriyentatsiyani o’zgartirmaydi, $|A(z)|>1$ bo’lgan paytda D ning shunday qism to’plamlari mavjud bo’lib, birida deyarli hamma yerida o’zgaradi. Bu holatlarda Beltrami tenglamasi formal aniqlanadi. Bu hol qiziqarli ifodalanadi, qachonki, bir vaqtning o’zida D ning shunday qism to‘plamlari mavjud bo‘lib, birida deyarli hamma yerida $|A(z)|<1$ bajarilsin va boshqasida deyarli hamma yerida $|A(z)|>1$ bajarilsin. Bu vaziyatda Beltrami tenglamasi o‘zgaradigan tip bo‘lishini aytamiz. Uning yechimlar to‘plamini tavsiflaymiz. Beltrami tenglamasi o‘zgaradigan tipini tadqiq qilish masalasini birinchi bo‘lib,

ISSN 2181-2632 www.involta.uz

L.I.Volkovskiy qo‘ygan. $f_{\bar{z}} = A^*(z) f_z(z)$ klassik Beltrami tenglamasini o‘rganish bilan bog‘liq bo‘lgan umumiy holda $f_{\bar{z}} = A(z) f_z(z)$ tenglamasini

$$A^*(z) = \begin{cases} A(z), & |A(z)| \le 1 \quad da; \\ \dfrac{1}{\bar{A}(z)}, & |A(z)| > 1 \quad da \end{cases}$$

kompleks dilatatsiya bilan birgalikda o‘rganamiz.

1-teorema. Ixtiyoriy o’lchovli C kompleks tekislikdagi funksiya $A(z) : \|A\|_\infty < 1$ uchun $f_{\bar{z}} = A(z) f_z(z)$ tenglamaning shunday yagona gomeomorf $X(z)$ yechimi mavjud, bunda X yechim $0,1,\infty$ qo‘zg‘almas nuqtalari tashlab ketiladi.

Ta’kidlash joizki, agar $A(z)$ $(|A(z)| \le c < 1)$ funksiya faqat $D \subset C$ sohada ta’riflansa, u holda uni butun C kompleks tekislikka davom ettirish mumkin, D sohaning tashqarisida $A \equiv 0$ bo’lsin deb faraz qilamizki, teoremamiz ixtiyoriy $D \subset C$ soha uchun to’g’ri bo’lsin.

2-teorema. $f_{\bar{z}} = A(z) f_z(z)$ tenglamaning barcha umumiy yechimlari to’plamini $f(z) = \hat{\text{O}}(X(z))$ bilan belgilanadi, bunda $X(z) -$teoremadagi gomeomorf yechim, $F(\zeta) - X(D)$ dagi ζ bo‘yicha golomorf funksiya. Bundan tashqari, $F = f \circ X^{-1}$ golomorf funksiya o‘ziga xos f ga saqlangan tip bilan o‘tadi.

2.2.2-teoremadan kelib chiqadiki, f $A(z) -$analitik funksiya ichki akslantirishlarni amalga oshiradi, ya’ni u ochiq to‘plamni ochiq to‘plamga akslantiradi. Bu yerdan maksimum prinsipining to‘g‘riligi kelib chiqadi: ixtiyoriy chegaralangan $D \subset \text{J}$ soha uchun modul faqat chegarada maksimumga erishadi:

$$|f(z)| < \max_{z \in \partial D} |f(z)|, \; z \in D.$$

Agar funksiya nolga aylanmasa, u holda minimum prinsipi o‘rinli bo‘ladi:

$$|f(z)| > \min_{z \in \partial D} |f(z)|, \; z \in D.$$

3-teorema. Agar $A(z)$ funksiya m marta differensiallanuvchi funksiyalar sinfiga tegishli bo‘lsa: $A(z) \in C^m(D)$, u holda $f_{\bar{z}} = A(z) f_z(z)$ tenglamaning ixtiyoriy f yechimi ham minimum kabi bu sinfga tegishli bo‘ladi, ya’ni $f \in C^m(D)$.

4-teorema (Koshi teoremasining analogi). Agar $f(z) \in O_A(D) \cap C(\bar{D})$, bunda ∂D chegarasi to‘g‘rilanuvchi bo‘lgan soha bo‘lsa, u holda $\int_{\partial D} f(z)(dz + A(z)d\bar{z}) = 0$ o‘rinli bo‘ladi.

$A(z) -$analitik funksiyani o‘rganishda, $A(z) -$antianalitik funksiya bo’lishida yadro katta ahamiyatga ega:

ISSN 2181-2632 www.involta.uz

$$K(z;\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\overline{z-\zeta+\int\limits_{\gamma(z;\zeta)}\overline{A(\tau)}d\tau}} \quad (2.2.1)$$

bu yerda, $\gamma(z;\zeta)-\zeta,\ z\in D$ nuqtalarni tutashtiruvchi egri chiziq yoki ζ nuqtadan z nuqtaga boruvchi ixtiyoriy yo‘lni $\gamma(z;\zeta)$ bilan belgilaymiz. Shunday qilib D soha bir bog‘lamli va $\bar{A}(z)-$ golomorf funksiya bo‘lsa, u holda $I(z)=\int\limits_{\gamma(\zeta;z)}\bar{A}(\tau)d\tau$ integrallash yo‘liga bog‘liq bo‘lmaydi, u dastlabki holat $I'(z)=\bar{A}(z)$ bilan to‘g‘ri keladi. Agar $D\subset C$ soha bo‘lsa, u holda quyidagi teorema o‘rinli.

5-teorema. $K(z;\zeta)$ yadro $z=\zeta$ dan tashqari boshqa nuqtalarda $A(z)-$analitik funksiya bo‘ladi, ya’ni $K\in O_A(D\setminus\zeta)$. Shuningdek, $K(z;\zeta)$ uchun $z=\zeta$ nuqta birinchi tartibli qutb nuqta bo‘ladi.

1-tasdiq. Agar $D\subset \mathbb{J}$ soha qavariq bo‘lmasa, faqatgina bir bog’lamli bo’lsa, u holda $\psi(z;\zeta)=\overline{z-\zeta+\int\limits_{\gamma(z;\zeta)}\overline{A(\tau)}d\tau}$ funksiya ham D sohada bir qiymatli aniqlanadi, ammo u boshqa yakkalangan nollarga $\zeta:\psi(z;\zeta)\neq 0,\ z\in P=\zeta;\zeta_1;\zeta_2;\zeta_3;...$ ega bo‘lishi mumkin. Biroq $\psi\in O_A(D),\ \psi(z;\zeta)\neq 0,\ z\notin P$ da va $K(z;\zeta)$ yadro $D\setminus P$ da oddiy qutb $\zeta:\zeta_1;\zeta;\zeta_2;\zeta_3;...$ nuqtalarda $A(z)-$analitik funksiya bo‘ladi.

2-teorema saqlangan holda $\psi(z;\zeta)\in O_A(D)$ funksiya ichki akslantirishni amalga oshiradi. Xususan, $L(a;R)=\left\{|\psi(z;a)|=|\overline{z-a+\int\limits_{\gamma(a;z)}\overline{A(\tau)}d\tau}|<R\right\}$ to‘plam D da ochiq to‘plamni ifodalaydi.Yetarlicha kichik $R>0$ larda u D da kompakt yotadi va z nuqtani o‘z ichiga oladi. Bu to‘plamni markazi a nuqtada bo‘lgan $A(z)-$lemniskata deyiladi va $L(a;R)$ kabi belgilanadi. $L(a;R)$ lemniskata maksimum prinsipidan bir bog‘lamli va minimum prinsipidan u bog‘lamlilikni hosil qiladi.

Yuqorida ko‘rsatilgan $A(z)-$ analitik funksiyalarni faqat qavariq $D\subset C$ sohalar uchun ko‘rdik.

6-teorema(Koshi formulasi). $D\subset \mathbb{J}$ $-$ qavariq soha va $G\subset D$ $-\ \partial D$ chegarasi bo‘lakli silliq bo‘lgan ixtiyoriy qism sohasi bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $f(z)\in O_A(G)\cap C(\bar{G})$ funksiya uchun

$$f(z)=\int\limits_{\partial G}K(\zeta;z)f(\zeta)(d\zeta+Ad\bar{\zeta}),z\in G \quad (2.2.2)$$

ISSN 2181-2632 www.involta.uz

formula o‘rinli.

7-teorema(Veyershtrass teoremasining analogi). Agar D sohadagi $A(z)-$ analitik funksiyalardagi

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z),\ f_n(z)\in O_A(D) \quad (2.2.3)$$

qator bu sohaning ixtiyoriy kompakt qism to‘plamida tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda

1. $f(z)\in O_A(D);$
2. $(2.2.6)$ qator z bo’yicha hadlarini differensiallash mumkin:

$$\partial f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\partial f_n(z); \qquad \bar{\partial} f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\partial} f_n(z); \qquad D_A f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} D_A f_n(z) \quad (2.2.4)$$

3. $(2.2.7.)$ qator D ning ixtiyoriy kompakt qism to‘plamida tekis yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Lemma(Shvarts lemmasining analogi). $f\in O_A(L(a;R)),\ |f(z)|\le M$ va $f(a)=0$ bo‘lsin. U holda barcha $z\in L(a;R)$ lar uchun $|f(z)|\le \frac{M}{R}|\psi(z;a)|$ $(2.2.5.)$ o‘rinli.

Isbot. $f(a)=0$ bo‘lsa, u holda $g(z)=\frac{f(z)}{\psi(z;a)}\in O_A(L(a;R)),\ r<R$ fiksirlangan. Maksimum prinsipidan $g(z)$ funksiya $\partial L(a;r)$ da o‘zining maksimumiga erishadi. U holda

$$|g(z)|\le \frac{max|f(z)|: z\in L(a;r)}{|\psi(z;a)|}\le \frac{M}{r}$$

$r\to R$ intilganda limitga o‘tsak, $|g(z)|\le \frac{M}{R}$, ya’ni $|f(z)|\le \frac{M}{R}|\psi(z;a)|$, barcha $z\in L(a;r)$ va barcha $r<R$ lar uchun. *Isbot tugadi.*

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati

1. Садуллаев А. “Теория плюрипотенциала. Применения”, часть 1,часть 2, “Palmarium Academic Publishing” 2012г.
2. Xudoyberganov G., Varisov A., Mansurov H. Kompleks analiz, T. “Universitet”, 1998y.
3. Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х. Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред, Т. “Университет”, 2012 г.
4. Жабборов Н.М., Отабоев Т.У. Теорема Коши для $A(z)$-аналитических функций. Узбекский математический журнал, 2014 г.
5. Жабборов Н.М., Отабоев Т.У.,Аналог интегральной формулы Коши для A-аналитических функций,Узбекский математический журнал, (нашрда).
6. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ,часть 1, М., “Наука”, 1985г.
7. W.K. Hayman and P.B. Kennedy,“Subharmonic functions”, Academik Press, 1976y.
8. Maciej Klimek. “Pluripotential theory”, Oxford science publications, 1991y.

ISSN 2181-2632 www.involta.uz

9. Секефальви-Надь Б, Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970.

10. Лаврентьев М.М, Савельев Л.Я. “Линейные операторы и некорректные задачи”, М.Наука,1992г.

11. Arbuzov E.V., Bukhgeim A.L. “Carleman’s formulas for A-analytic functions in a half-plane”, J.Inv.III-Posed Problems, 1997.