$A(z)-$analitik funksiyalar uchun Xardi sinfi

Asrorova Charos Baxtiyor qizi.

“TIQXMMI” Milliy tadqiqotlar universitetining Qarshi irrigatsiya va agrotexnologiyalar insituti, ‘‘Matematika va tabiiy fanlar” kafedrasi stajyor-o‘qituvchi.

Saidov Sardor Soxib o‘g‘li.

Qarshi davlat universiteti, ‘‘Algebra va geometriya” kafedrasi stajyor-o‘qituvchi.

Annotatsiya. Ushbu maqolada A(z)-analitik funksiyalar uchun Xardi sinfi, Golomorf funksiyani S da ($S=S(D)$ Shilov chegarasi) yotmagan biror $M\subset\partial D$ (M - qaralayotgan funksiyalar sinfi uchun yagonalik to’plami bo’lishi kerak (masalan, $\overline{D}$ da uzluksiz yoki $H^p(D),\ p\geq 1$ Xardi sinfiga kiruvchilardan biri.*))*to‘plamdagi qiymatlari bo‘yicha D da tiklash masalasi hamda ushbu $f\in H^1_A\left(L(a;R)\right)$ funksiya va Lebeg o‘lchovi musbat bo‘lgan $M\subset\partial L(a;R)$ to‘plam uchun Karleman formulasi keltirilgan.

Kalit so‘zlar. A(z)-analitik funksiyalar,Shilov chegarasi,yagonalik to‘plami,Xardi sinfi,so‘ndiruvchi funksiya,Koshining integral formulasi,lemniskata,Lebeg o‘lchov,Karleman formulasi,modulning maksimum prinsipi,Beltrami tenglamasi

Golomorf funksiyani S Shilov chegarasida mavjud bo‘lmagan biror $M\subset D$ to‘plamdagi qiymatlari bo‘yicha D ning ichkarisida funksiya qiymatlarini tiklash masalasini ko‘raylik.

Bir o’zgaruvchili va ko‘p o‘zgaruvchili kompleks o‘zgaruvchilar nazariyasida golomorf funksiyalarninig integral formulalari muhim ahamiyat kasb etadi. Golomorf funksiyalarninig integral formulalari, klassik masalalardan biri bo‘lgan D sohaning ∂D chegarasiga yaqinlashishda golomorf funksiyalarning ∂D dagi yoki S dagi qiymatlari bo’yicha D sohaning nuqtalarida golomorf funksiyani tiklash masalasini yechadi. Bu klassik masala bilan bir qatorda tabiiyki quyidagi masalani qarash ham mumkin:

Golomorf funksiyani S da ($S=S(D)$ Shilov chegarasi) yotmagan biror $M\subset\partial D$ to‘plamdagi qiymatlari bo‘yicha D da tiklash. Albatta, M - qaralayotgan funksiyalar sinfi uchun yagonalik to’plami bo’lishi kerak (masalan, $\overline{D}$ da uzluksiz yoki $H^p(D),\ p\geq 1$ Xardi sinfiga kiruvchilardan biri.).

Bu masalani yechishda maxsus $D\subset C$ to‘plam uchun birinchilardan 1926-yil T. Karleman harakat qilgan, uning usuliga ko‘ra avvalo Koshining integral formulasi uchun “so‘ndiruvchi” funksiya qurib oladi. Bu usulni G. M. Goluzin va V. I. Krilov rivojlantirib tekislikda bir bog‘lamli soha uchun yechadi. G. M. Goluzin va V. I. Krilov usulida bir bog‘lamli soha Ddan olingan M to‘plamga bog‘liq yordamchi golomorf funksiya quriladi, umuman olganda ko‘p bog‘lamli soha uchun C va C^n da o‘rinli emas. 1956-yilda integral formula yadrosining approksimasiyasiga asoslangan usulni M. M. Lavrentov taklif etadi. M. M. Lavrentov usulini G. M. Goluzin va V. I. Krilov usuli o‘rinsiz bo‘lganda ham qo’llash mumkin. Bunda D dagi soha (bir bog’lamli bo‘lmaganda ham) golomorf yadro bilan Karleman formulasining mavjudligi teoremasi isbotlanadi. Karleman formulasi birinchi marta fiziklar V. A. Fokom va F. M. Kuni tomonidan ishlatiladi.

Ma'lumki, $K \subset \partial D$ kompakt uchun Karleman formulasining mavjudligi K kompakt uchun shartli turg'unlikka ekvivalent ekan. Karleman formulasi nazariy fizika va matematik fizika masalalarida keng qo'llanilib kelishi bilan muhimdir.

Bizga $D \subset C$ qavariq soha va bu sohada yotuvchi $L(a;R) \subset D$ lemniskata berilgan bo'lsin.

1-ta'rif: $A(z)-$*analitik funksiya*lar *uchun Xardi sinfi quyidagi shartni qanoatlantiradigan funksiyalar sinfidir:*

Agarda $f(z)$ *funksiya* $L(a;R)$ *lemniskatada* $A(z)-$*analitik va bu funksiyadan olingan quyidagicha integral chegaralangan bo'lsa:*

$$\exists T > 0, \int\limits_{\partial L(a;R)} |f(z)|^p \left|dz + A(z)d\bar{z}\right| \leq T, \; p \geq 1$$

o'rin bo'ladi.

Aytaylik, $f(z)$ funksiyamiz ham $A(z)-$analitik funksiya: $f \in O_A(D)$, ham Xardi sinfiga tegishli: $f \in H^p(D)$ bo'lsin, demak, biz ikkala sinfga ham tegishli bo'lgan funksiyani $f \in H_A^p(D)$ deb belgilaymiz.

H_A^∞ ko'rinishdagi $A(z)-$analitik funksiyalar uchun Xardi sinfiga tegishli funksiya esa quyidagi shartni qanoatlantiradi:

$$\|f\|_{H_A^\infty} = \sup_{|\psi(z;a)|<R} |f(z)| < \infty.$$

H_A^p Xardi fazosi - bu kompleks tekislikdagi ochiq to'plam bo'lgan $L(a;R)$ lemniskatada quyidagi shartni qanoatlantiruvchi $A(z)-$analitik funksiyalar sinfidir:

$$0 < r < R, \; \|f\|_{H_A^p} = \sup_{0<r<R}\left(\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{|\psi(z;a)|=r} |f(z)|^p \left|dz + A(z)d\bar{z}\right|\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

$L(a;R) \subset D$ lemniskata berilgan bo'lsin. Bu soha bir bog'lamli, chegarasi $\partial L(a;R)$ silliq. $f \in H_A^1(L(a;R))$ funksiya uchun Koshining integral formulasi o'rinli:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial L(a:R)} \frac{f(z)\left(d\zeta + Ad\bar{\zeta}\right)}{\zeta - z + \overline{\int\limits_{\gamma(z;\zeta)} \overline{A(\tau)}d\tau}} \quad (3.1.1.)$$

$\zeta \in \partial L(a;R)$, $z \in L(a;R)$, bu yerda ζ nuqtadan z nuqtaga boruvchi ixtiyoriy yo'lni $\gamma(\zeta;z)$ orqali belgilaymiz.

Endi $\partial L(a;R)$ lemniskata chegarasida Lebeg o‘lchovi musbat bo‘lgan M to‘plamni qaraymiz. Biz chegaraning biror $M\subset\partial L(a;R)$ qismida berilgan $A(z)$- analitik funksiya qiymatlarini soha ichki nuqtalar to‘plamida tiklash masalasini qo‘yamiz. Karleman g‘oyasidan foydalanib, (3.1.1) formuladagi $\partial L(a;R)\setminus M$ bo‘yicha integrallashdan ozod qiladigan yordamchi funksiyani quramiz. Buning uchun quyidagi 2 ta shartni qanoatlantiruvchi yordamchi $\varphi(z)\in H_A^{\infty}(L(a;R))$ funksiyani kiritamiz:

1. $|\varphi(\zeta)|=1,\quad \partial L(a;R)\setminus M$ ning deyarli hamma yerida;
2. $|\varphi(\zeta)|>1,\quad L(a;R)$ da.

Bu holda $\varphi(z)$ yordamchi funksiyani $\varphi(z)=\exp(u+iv)$ ko‘rinishda olamiz va bu funksiya yuqoridagi 2 ta shartni to‘liq qanoatlantiradi:

1. $|\varphi(\zeta)|=e^u=1$, agar $\partial L(a;R)|M$ da bo‘lsa;
2. $|\varphi(\zeta)|=e^u=e>1$, agar M da bo‘lsa.

$A(z)$ funksiya $L(a;R)$ lemiskatada antianalitik bo‘lsa, ya’ni $\dfrac{\partial A}{\partial z}=0$ tenglik bajarilsa, u holda quyidagi teorema o‘rinli bo‘ladi.

Teorema-l. *Agar* $f\in H_A^1(L(a;R))$ *va* $M\subset\partial L(a;R)$ *to‘plam Lebeg o‘lchovi musbat bo‘lgan to‘plam bo‘lsa, u holda* $\forall z\in D$ *nuqta uchun quyidagi Karleman formulasi o‘rinli:*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{m\to\infty}\int_M f(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m\frac{d\zeta+Ad\zeta}{\zeta-z+\overline{\int_{\gamma(z;\zeta)}\overline{A(\tau)}d\tau}} \qquad (3.1.2).$$

Isbot. $f\varphi^m\in H_A^1(L(a:R))$ bo‘ladi, Beltrami tenglamasiga qo‘ysak,

$$\exists T>0,\ \int_{\partial L(a;R)}\left|f(z)\varphi^m(z)\right|^p\left|dz+A(z)d\bar{z}\right|\le T.$$

Endi $f(z)\varphi^m(z)$ uchun $A(z)-$lemniskatada Koshining integral formulasini yozamiz:

$$f(z)\varphi^m(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial L(a;R)}f(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m\frac{d\zeta+Ad\bar{\zeta}}{\zeta-z+\overline{\int_{\gamma(z;\zeta)}\overline{A(\tau)}d\tau}}$$

$\partial L(a;R)$ lemniskata chegarasini 2 ta M va $\partial L(a;R)\setminus M$ sohaga ajratamiz, o‘ng tomondagi $\varphi^m(z)$ ni o‘ng tomonga bo‘lib yuborib, uni integralning ichiga kiritaylik:

ISSN 2181-2632 www.involta.uz

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_M f(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m \frac{d\zeta+Ad\overline{\zeta}}{\zeta-z+\overline{\overline{\int\limits_{\gamma(z;\zeta)}\overline{A(\tau)}d\tau}}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial L(a;R)|M} f(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m \frac{d\zeta+Ad\overline{\zeta}}{\zeta-z+\overline{\overline{\int\limits_{\gamma(z;\zeta)}\overline{A(\tau)}d\tau}}}.$$

Koshining integral formulasini 2 ta yig'indiga ajratdik, 2-yig'indi $\partial L(a:R)\setminus M$ chegaraning qismi bo'yicha bu yerda integrallanuvchi funksiya $f(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m$ ni baholaymiz. Modulning maksimum prinsipiga ko'ra $f(\zeta)$ funksiyamiz $\partial L(a;R)$ chegarada o'zining maksimum qiymatiga erishadi:

$$\max_{\zeta\in\partial L(a;R)}|f(\zeta)|=A$$

bo'lsin. Endi yordamchi $\varphi(z)$ funksiyani xossasiga ko'ra $\left|\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right|\le q<1$ bo'ladi. Bundan, $\left|f(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m\right|\le A\cdot q^m\underset{m\to\infty}{\to}0$. Ko'rinadiki, Koshi integral formulasidagi yig'indilarning ikkinchisidan limitga o'tsak, u nolga teng bo'lar ekan:

$$f(z)=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_M f(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m \frac{d\zeta+Ad\overline{\zeta}}{\zeta-z+\overline{\overline{\int\limits_{\gamma(z;\zeta)}\overline{A(\tau)}d\tau}}}+$$

$$+\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial L(a;R)|M} f(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m \frac{d\zeta+Ad\overline{\zeta}}{\zeta-z+\overline{\overline{\int\limits_{\gamma(z;\zeta)}\overline{A(\tau)}d\tau}}}=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_M f(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m \frac{d\zeta+Ad\overline{\zeta}}{\zeta-z+\overline{\overline{\int\limits_{\gamma(z;\zeta)}\overline{A(\tau)}d\tau}}}+0=$$

ISSN 2181-2632 www.involta.uz

$$=\frac{1}{2\pi i}\lim_{m\to\infty}\int_M f(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m \frac{d\zeta + A d\bar{\zeta}}{\zeta - z + \overline{\int_{\gamma(z;\zeta)} \overline{A(\tau)}d\tau}}.$$

Isbot tugadi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati

1. Садуллаев А. “Теория плюрипотенциала. Применения”, часть 1,часть 2, “Palmarium Academic Publishing” 2012г.
2. Xudoyberganov G., Varisov A., Mansurov H. Kompleks analiz, T. “Universitet”, 1998y.
3. Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х. Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред, Т. “Университет”, 2012 г.
4. Жабборов Н.М., Отабоев Т.У. Теорема Коши для $A(z)$-аналитических функций. Узбекский математический журнал, 2014 г.
5. Жабборов Н.М., Отабоев Т.У.,Аналог интегральной формулы Коши для A-аналитических функций,Узбекский математический журнал, (нашрда).
6. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ,часть 1, М., “Наука”, 1985г.
7. W.K. Hayman and P.B. Kennedy,“Subharmonic functions”, Academik Press, 1976y.
8. Maciej Klimek. “Pluripotential theory”, Oxford science publications, 1991y.
9. Секефальви-Надь Б, Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970.
10. Лаврентьев М.М, Савельев Л.Я. “Линейные операторы и некорректные задачи”, М.Наука,1992г.
11. Arbuzov E.V., Bukhgeim A.L. “Carleman’s formulas for A-analytic functions in a half-plane”, J.Inv.III-Posed Problems, 1997.

ISSN 2181-2632 www.involta.uz