

# Oscilatori u tri tačke

Predrag Pejović

11.01.2023, 22:49

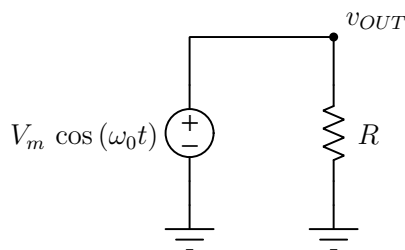
## 1 Uvod

Motiv za nastanak ovog teksta je u tome što oscilatori u tri tačke nisu bili detaljno pokriveni našom nastavnom literaturom iz brojnih razloga. Sa druge strane, analiza oscilatora u tri tačke koristi specifične pristupe u teoriji električnih kola, gde se umesto upornog sprovođenja algoritma koji rešavaju kolo u opštem slučaju, u svakoj situaciji, koriste pristupi koji zahtevaju mnogo više razumevanja, a mnogo manje rada i računanja. Cilj ovog teksta je da studentima približi takav pristup u analizi električnih kola koji je pogodan i za sintezu, koji iznad mukotrpnog rada postavlja vrednosti razumevanja i razmišljanja.

U analizi koja je prikazana, u označavanju struja i napona nije pravljena razlika između trenutnih vrednosti i fazora. Stoga, na čitaocu je da zaključi da li simbol, na primer  $i$ , označava trenutnu vrednost  $i(t)$  ili fazor  $\underline{I}$ . Osim toga, sve analize će biti vršene na šemama za male signale, što neće biti posebno naglašavano.

Iako su u primeni izgubili značaj koji su nekada imali, oscilatori u tri tačke (*three point oscillators*) se i danas predaju, a ima i novijih naučnih radova koji se njima bave. Razlog za to su specifični metodi razvijeni za analizu oscilatora u tri tačke, kao i to što se ti oscilatori i principi na kojima su zasnovani koriste kao osnov za razvoj novih tipova oscilatora, primerenih savremenoj tehnologiji.

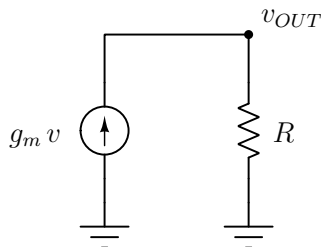
U uvodu je potrebno napomenuti da je cilj da što približnije realizujemo sistem prikazan na slici 1, gde idealni naponski izvor predstavlja harmonijski oscilator (oscilator koji generiše prostoperiodičan napon) amplitude  $V_m$  i kružne frekvencije  $\omega_0$ . Otpronik  $R$  predstavlja potrošač koga oscilator napaja.



Slika 1: Idealni oscilator.

Kolo sa slike 1 je model, želja koju treba da ostvarimo. U ostvarenju te želje dostupne su nam određene komponente, date svojim karakteristikama elemenata. Aktivni element, što je sinonim za element koji proizvodi snagu naizmenične komponente signala, u potpunosti je ograničen na kontrolisan strujni izvor, najčešće na naponom kontrolisan strujni izvor kako je

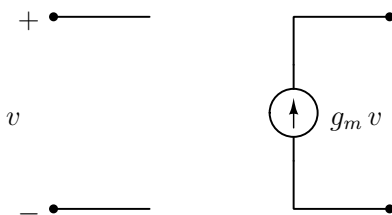
prikazano na slici 2. Kolo sa slike 2 je nekompletno, nedostaje izvor kontrolišućeg napona  $v$ , a postoje i ograničenja koja se nameću na dostupne naponom kontrolisane strujne izvore. Upravo će rešavanje ova dva problema biti suština ovog teksta.



Slika 2: Realizacija oscilatora: izvor energije.

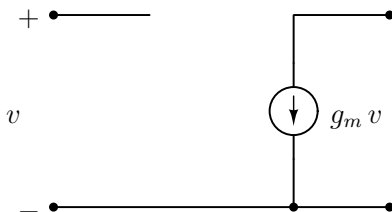
## 2 Transkonduktanski pojačavač

Naponom kontrolisani strujni izvor prikazan na slici 3 je fikcija iz Platonovog sveta modela teorije električnih kola. To je četvoroterminalni dvoportni element i kao takav se može na proizvoljan način povezati na četiri različita čvora, a parametar  $g_m$ , transkonduktansa, može biti bilo pozitivan, bilo negativan.



Slika 3: Naponom kontrolisan strujni izvor.

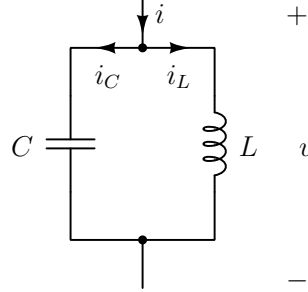
Realno dostupni transkonduktanski aktivni elementi imaju ograničenja u odnosu na naponom kontrolisani strujni izvor prikazan na slici 3, a ta ograničenja su prikazana na slici 4. Prvo, transkonduktanski aktivni element je troterminalni element, ima samo tri pristupa. Drugo, parametar  $g_m$  u realno dostupnim transkonduktanskim aktivnim elementima može da ima samo pozitivne vrednosti. Ova ograničenja su u primeni veoma značajna, iako na prvi pogled tako ne izgleda. Naponom kontrolisani strujni izvor se i dalje koristi za opisivanje transkonduktanskog aktivnog elementa, ali su nametnuta ograničenja uslovila da su mogućnosti elementa sa slike 4 mali podskup mogućnosti elementa sa slike 3. Na primer, ograničenje  $g_m > 0$  za element sa slike 3 nema nikakav značaj: potrebno je samo okrenuti polaritet priključaka desnog porta što odgovara promeni znaka  $g_m$ . Kod elementa sa slike 4 to nije moguće.



Slika 4: Transkonduktanski pojačavač.

### 3 Paralelno oscilatorno kolo

Za generisanje kontrolišućeg signala koji upravlja aktivnim elementom kod LC oscilatora se kao osnova uglavnom koristi paralelno oscilatorno kolo prikazano na slici 5, ili kolo koje se transformacijama može svesti na njega.



Slika 5: paralelno oscilatorno kolo.

Impedansa paralelnog oscilatornog kola je data sa

$$Z = \frac{\frac{j\omega L}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC} \quad (1)$$

i na rezonantnoj (sopstvenoj) frekvenciji, kada

$$1 - \omega^2 LC = 0 \quad (2)$$

što se događa za

$$\omega_{p1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{LC}} = \pm \omega_0 \quad (3)$$

gde je

$$\omega_0 \triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4)$$

ta impedansa teži beskonačnosti

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm \omega_0} Z = \infty. \quad (5)$$

Sopstvene frekvencije paralelnog oscilatornog kola su

$$s_{p1,2} = \pm j\omega_0 \quad (6)$$

pa je za početne uslove  $v_C(0) = V_m$  i  $i_L(0) = 0$  sopstveni odziv paralelnog oscilatornog kola

$$v_C = V_m \cos(\omega_0 t) \quad (7)$$

dok je struja kalema data sa

$$i_L = \frac{V_m}{\omega_0 L} \sin(\omega_0 t) = V_m \sqrt{\frac{C}{L}} \sin(\omega_0 t) = G_0 V_m \sin(\omega_0 t) \quad (8)$$

gde je  $G_0$  parametar koji se uvodi kao karakteristična provodnost paralelnog oscilatornog kola

$$G_0 \triangleq \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (9)$$

dok je njena recipročna vrednost karakteristična otpornost paralelnog oscilatornog kola

$$R_0 \triangleq \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{G_0}. \quad (10)$$

Parametri rezonantna kružna frekvencija  $\omega_0$  i karakteristična otpornost  $R_0$  se često koriste u praksi i zamenjuju vrednosti fizičkih parametara  $L$  i  $C$ , sinonimi su, pošto

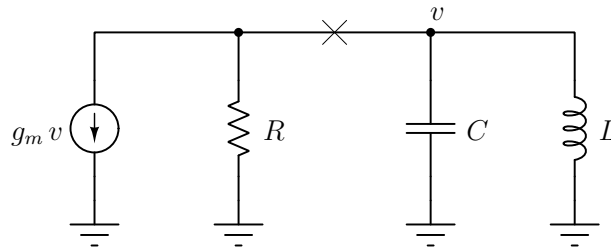
$$L = \frac{R_0}{\omega_0} \quad (11)$$

i

$$C = \frac{1}{\omega_0 R_0}. \quad (12)$$

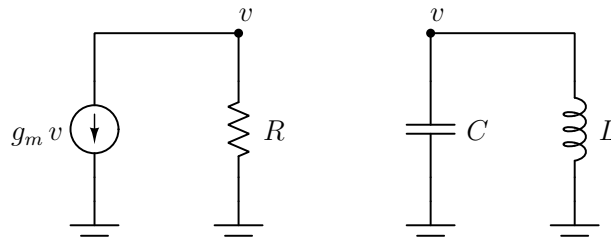
## 4 LC oscilator sa transkonduktansnim pojačavačem

Na slici 6 je prikazan LC oscilator sa transkonduktansnim pojačavačem. Aktivni element treba da obezbedi snagu na potrošaču, dok paralelno oscilatorno kolo daje napon  $v$  koji kontroliše aktivni element, uslovljava amplitudu i frekvenciju oscilovanja. Za paralelno oscilatorno kolo se smatra da nema gubitke, što u realnosti nije slučaj, ali se gubici oscilatornog kola, najbolje modelovani paralelnom otpornošću, pripisuju potrošaču. Stoga, podela kola na aktivni element i potrošač sa leve strane slike 6 i idealno paralelno oscilatorno kolo sa desne strane, označena znakom  $\times$  na slici 6 u praksi nije moguća, ali je jako povoljna za analizu.



Slika 6: LC oscilator.

Na rezonantnoj frekvenciji oscilatornog kola (4) oscilatorno kolo je otvorena veza, pa u grani precrtanoj znakom  $\times$  ne teče struja i ekvivalentno kolo je prikazano na slici 7. Ipak, treba imati u vidu da kolo nije fizički promenjeno uklanjanjem veze između dva dela kola, tako da su potencijali čvorova sa leve i desne strane jednaki, ali da između njih ne teče nikakva struja.



Slika 7: LC oscilator na frekvenciji oscilovanja.

Analiza ekvivalentnog kola za rezonantnu frekvenciju, prikazanog na slici 7 odmah daje

$$g_m v + \frac{v}{R} = 0 \quad (13)$$

što je linearna homogena jednačina po  $v$ ,

$$\left(g_m + \frac{1}{R}\right) v = 0 \quad (14)$$

koja ima netrivialno rešenje za

$$g_m = -\frac{1}{R} \quad (15)$$

što je uslov oscilovanja. Dakle, (4) daje frekvenciju oscilovanja, a (15) daje uslov oscilovanja.

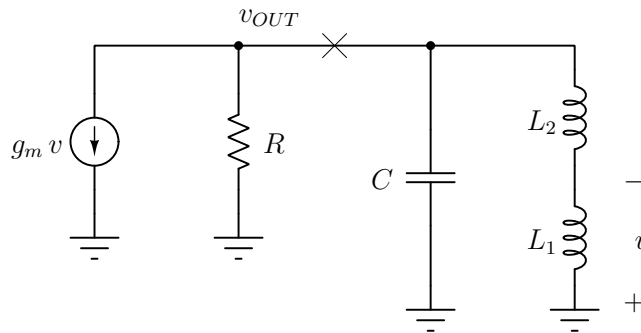
Teorijski, problem je rešen, ali za praktičnu realizaciju ima dva fundamentalna nedostatka:

1.  $g_m < 0$ ,  $g_m$  je negativno, što nije raspoloživo sa jednim aktivnim elementom
2. jedini parametar dostupan za podešavanje kako bi se zadovoljio uslov oscilovanja je  $g_m$ , a izbor  $g_m$  utiče i na nelinearna izobličenja i na koeficijent korisnog dejstva oscilatora, uslovljen je položajem radne tačke.

Stoga, povoljno je da se kolo modifikuje tako da osciluje za  $g_m > 0$  i da se uvede dodatni parametar za podešavanje uslova oscilovanja.

## 5 Hartlijev oscilator

Istorijski, prvo rešenje navedenog problema se pojavilo već 1915. godine [1, 2] i zasnovano je na reaktivnom razdelniku napona koji uvodi dodatni parametar za upravljanje uslovom oscilovanja, kako je prikazano na slici 8.



Slika 8: Hartlijev oscilator, podela kalema.

Kalem iz LC oscilatora sa slike 6 je podeljen na dva dela, a ekvivalentna induktivnost redne veze (podrazumevano je da magnetne sprege između kalemova nema) je

$$L = L_1 + L_2 \quad (16)$$

pa je rezonantna frekvencija ekvivalentnog paralelnog oscilatornog kola u tom slučaju

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2) C}} \quad (17)$$

i tada ekvivalentno oscilatorno kolo predstavlja otvorenu vezu. Kontrolišući napon za aktivni element je označen sa  $v$  na slici 8 i namerno mu je obrnut polaritet u odnosu na  $v_{OUT}$ , pošto nam je takav napon potreban. Kontrolišući napon se preko razdelnika napona dobija kao

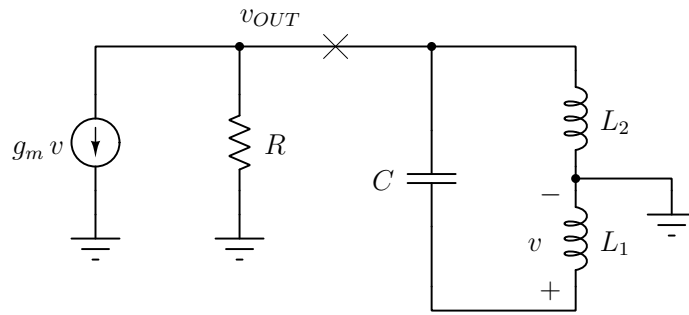
$$v = -\frac{j\omega L_1}{j\omega L_1 + j\omega L_2} v_{OUT} = -\frac{L_1}{L_1 + L_2} v_{OUT} \quad (18)$$

i to je dodati stepen slobode za upravljanje uslovom oscilovanja. Međutim, u kolu sa slike 8 ostaje problem što negativni kraj kontrolišućeg napona nije vezan za masu u skladu sa ekvivalentnom šemom aktivnog elementa sa slike 4. Ovde je ključni korak u izvođenju Hartiljevog oscilatora: treba uočiti da je paralelno oscilatorno kolo na rezonantnoj frekvenciji otvorena veza, da struja kroz granu označenu simbolom  $\times$  ne teče, pa ne teče ni struja po masi između levog dela kola i desnog dela kola. Stoga je na desnom delu kola moguće definisati referentni potencijal po želji, što je i učinjeno u kolu sa slike 9. Ova promena u kolu je po ideji komplikovan korak. Ona ne menja rezonantnu frekvenciju, ona ostaje kako je dato sa (17), ali je promenila napon na reaktivnim elementima! Kako ne teče struja ka masi u desnom delu kola, što se jasno vidi iz ekvivalentne šeme kola na rezonantnoj frekvenciji date na slici 10, struje oba kalema su jednake, pa je

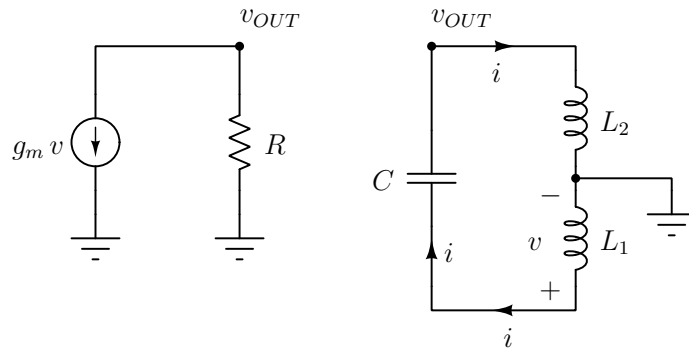
$$\frac{v_{OUT}}{j\omega_0 L_2} = -\frac{v}{j\omega_0 L_1} \quad (19)$$

odakle je

$$v = -\frac{j\omega_0 L_1}{j\omega_0 L_2} v_{OUT} = -\frac{L_1}{L_2} v_{OUT}. \quad (20)$$



Slika 9: Hartlijev oscilator, pomeranje mase.



Slika 10: Hartlijev oscilator na frekvenciji oscilovanja.

Uslov oscilovanja na levoj strani kola se svodi na to da kontrolisani izvor nadoknađuje struju potrošača

$$\frac{v_{OUT}}{R} = -g_m v \quad (21)$$

odakle je

$$\frac{v_{OUT}}{R} = g_m \frac{L_1}{L_2} v_{OUT} \quad (22)$$

što je opet homogena linearna jednačina po  $v_{OUT}$  koja ima netrivialno rešenje za

$$\frac{1}{R} = g_m \frac{L_1}{L_2}. \quad (23)$$

Ovo daje uslov oscilovanja za Hartilev oscilator

$$\boxed{g_m R = \frac{L_2}{L_1}} \quad (24)$$

kod koga je odnos  $L_2/L_1$  dodatni parametar za regulaciju uslova oscilovanja, a koji smo prvobitno zahtevali.

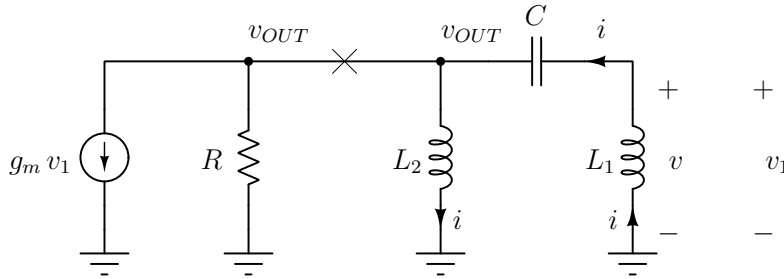
## 6 Analiza Hartiljevog oscilatora primenom Barkhauzenovog kriterijuma

Uslov i frekvenciju oscilovanja Hartiljevog oscilatora je moguće izvesti i primenom Barkhauzenovog kriterijuma i tu se može ući u velike računске teškoće ako se problemu pristupi grubom silom, bez sagledavanja i razumevanja rada kola. Kolo sa slike 9 je u formi povoljnoj za analizu primenom Barkhauzenovog kriterijuma prikazano na slici 11, gde  $v$  i  $v_1$  označavaju isti napon, ali su dve oznake za isti napon uvedene kako bi se predstavilo određivanje kružnog pojačanja u otvorenoj petlji (*open loop gain*). Kružno pojačanje  $v/v_1$  po Barkhauzenovom kriterijumu [3, 4] na frekvenciji oscilovanja treba da zadovolji

$$\frac{v}{v_1} = 1 + j0 \quad (25)$$

a biće izračunato proširivanjem razlomka kao kaskadna veza dve funkcije prenosa

$$\frac{v}{v_1} = \frac{v_{OUT}}{v_1} \frac{v}{v_{OUT}}. \quad (26)$$



Slika 11: Analiza Hartiljevog oscilatora primenom Barkhauzenovog kriterijuma.

Ovde valja napomenuti da je Barkhauzenov kriterijum samo uslov da kolo u zatvorenoj sprezi ima polove na imaginarnoj osi i da nije kriterijum stabilnosti, što se često pogrešno tvrdi [3]. Ekstenzija Barkhauzenovog kriterijuma koja jeste kriterijum stabilnosti je Nikvistov kriterijum [5, 6].

U analizi kola sa slike 11 prvo valja uočiti da znak  $\times$  razdvaja kolo na levi deo koji se sastoji samo iz rezistivnih elemenata i na desni deo koji sadrži samo reaktivne elemente. Kako po Barkhauzenovom kriterijumu kružno pojačanje na frekvenciji oscilovanja mora da ima rezistivnu funkciju prenosa, sa imaginarnim delom jednakim nuli, jedina mogućnost za to je da paralelno oscilatorno kolo na koje se desni deo šeme sa slike 11 svodi bude otvorena veza, što se događa na rezonantnoj frekvenciji ekvivalentnog paralelnog oscilatornog kola

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2) C}}} \quad (27)$$

koja je ujedno i frekvencija oscilovanja oscilatora.

Izlazni napon oscilatora je dat sa

$$v_{OUT} = -g_m R v_1 \quad (28)$$

pa je za određivanje kružnog pojačanja potrebno uspostaviti vezu između  $v_{OUT}$  i  $v$ .

Prvi način da se ustabovi veza između  $v_{OUT}$  i  $v$  je preko razdelnika napona u kolu sa slike 11 i taj metod je ovde prikazan samo iz obrazovnih razloga, da bi se sagledalo zašto je jednostavnije i bolje analizirati svojstva kola i time smanjiti račun. Funkcija prenosa razdelnika je na frekvenciji oscilovanja data sa

$$\frac{v}{v_{OUT}} = \frac{j\omega_0 L_1}{j\omega_0 L_1 + \frac{1}{j\omega_0 C}} = \frac{-\omega_0^2 L_1 C}{1 - \omega_0^2 L_1 C} \quad (29)$$

gde se u izrazu na dva mesta javlja združeni parametar  $\omega_0^2 L_1 C$ . Na frekvenciji oscilovanja (27) vrednost ovog združenog parametra je

$$\omega_0^2 L_1 C = \frac{L_1 C}{(L_1 + L_2) C} = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \quad (30)$$

odakle se tražena veza  $v_{OUT}$  i  $v$  dobija kao

$$\frac{v}{v_{OUT}} = \frac{-\frac{L_1}{L_1+L_2}}{1 - \frac{L_1}{L_1+L_2}} = \frac{-\frac{L_1}{L_1+L_2}}{\frac{L_1+L_2-L_1}{L_1+L_2}} = -\frac{L_1}{L_2}. \quad (31)$$

Drugi način zahteva mnogo manje računa i zasniva se na uočavanju činjenice da desni deo kola, sa reaktivnim elementima, ima samo jednu konturu kroz koju teče jedinstvena struja  $i$

$$i = \frac{v_{OUT}}{j\omega_0 L_2} = -\frac{v}{j\omega_0 L_1} \quad (32)$$

odakle je

$$\frac{v_{OUT}}{L_2} = -\frac{v}{L_1} \quad (33)$$

pa se sa mnogo manje računa traženi odnos dobija kao

$$\frac{v}{v_{OUT}} = -\frac{L_1}{L_2}. \quad (34)$$

Konačno, vraćeni napon se po oba metoda dobija kao

$$v = \frac{L_1}{L_2} g_m R v_1 \quad (35)$$

odakle je kružno pojačanje

$$\frac{v}{v_1} = \frac{L_1}{L_2} g_m R = 1 + j0 \quad (36)$$

što daje uslov oscilovanja

$$\boxed{g_m R = \frac{L_2}{L_1}} \quad (37)$$

koji je identičan uslovu dobijenom u prethodnoj analizi.

Istu analizu je bilo moguće sprovesti i direktno, bez razumevanja i bez redukovanja kola na ekvivalentno kolo za rezonantnu frekvenciju paralelnog oscilatornog kola. U tom slučaju je kružno pojačanje na kompleksnoj frekvenciji  $s$

$$G(s) = -g_m Z \frac{s L_1}{s L_1 + \frac{1}{s C}} = -g_m Z \frac{s^2 L_1 C}{1 + s^2 L_1 C} \quad (38)$$



gde je

$$Z = R \parallel L_2 \parallel \left( s L_1 + \frac{1}{s C} \right) = R \parallel L_2 \parallel \frac{1 + s^2 L_1 C}{s C}. \quad (39)$$

Impedansa  $Z$  se dalje razvija kao

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{s L_2} + \frac{s C}{1 + s^2 L_1 C}} \quad (40)$$

što daje

$$Z = \frac{s L_2 (1 + s^2 L_1 C)}{1 + s \frac{L_2}{R} + s^2 (L_1 + L_2) C + s^3 L_1 \frac{L_2}{R} C}. \quad (41)$$

Ukupno kružno pojačanje se onda dobija kao

$$G(s) = -g_m \frac{s^3 L_1 L_2 C}{1 + s \frac{L_2}{R} + s^2 (L_1 + L_2) C + s^3 L_1 \frac{L_2}{R} C} \quad (42)$$

što na frekvenciji oscilovanja  $\omega_0$  treba da bude

$$G(j\omega_0) = 1 + j0 = g_m \frac{j\omega_0^3 L_1 L_2 C}{1 - \omega_0^2 (L_1 + L_2) C + j\omega_0 \left( \frac{L_2}{R} - \omega_0^2 L_1 \frac{L_2}{R} C \right)}. \quad (43)$$

Kako kružno pojačanje na frekvenciji oscilovanja ne bi imalo imaginarnu komponentu, mora da važi

$$1 - \omega_0^2 (L_1 + L_2) C = 0 \quad (44)$$

odakle se za frekvenciju oscilovanja opet dobija

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2) C}}} \quad (45)$$

što izraz za kružno pojačanje na frekvenciji oscilovanja dalje svodi na

$$G(j\omega_0) = 1 = g_m \frac{\omega_0^2 L_1 L_2 C}{\frac{L_2}{R} - \omega_0^2 L_1 \frac{L_2}{R} C} = g_m R \frac{\omega_0^2 L_1 L_2 C}{L_2 - \omega_0^2 L_1 L_2 C}. \quad (46)$$

Zamenom

$$\omega_0^2 = \frac{1}{(L_1 + L_2) C} \quad (47)$$

se izraz za kružno pojačanje na frekvenciji oscilovanja svodi na

$$G(j\omega_0) = 1 = g_m R \frac{\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}}{L_2 - \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}} = g_m R \frac{L_1 L_2}{L_1 L_2 + L_2^2 - L_1 L_2} = g_m R \frac{L_1}{L_2} \quad (48)$$

odakle se konačno dobija uslov oscilovanja

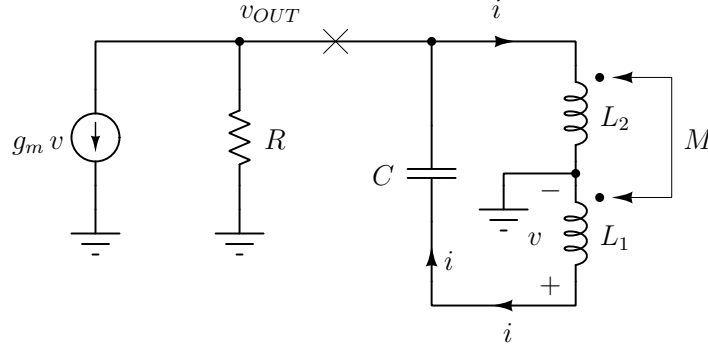
$$\boxed{g_m R = \frac{L_2}{L_1}} \quad (49)$$

što se poklapa sa prethodno dobijenim rezultatima.

Pitanje koje ima smisla ovde postaviti je da li bi ovakvo izvođenje omogućilo uvide u rad kola koji su doveli do sinteze Hartlijevog oscilatora? Iako je metodologija grube sile koju za analizu opštih slučajeva daje teorija električnih kola dovela do tačnog rezultata analize, ona nije omogućila dublji uvid u rad kola, ali je omogućila dobijanje rezultata analize bez razmišljanja, samo sprovođenjem algoritma, što je rad kakav računari obavljaju mnogo brže i pouzdanije od ljudi. Svaki pristup ima i prednosti i mane. Neko više voli da razmišlja, a neko više voli da sprovodi algoritme. Samo, razmišljanje ponekad daje i rezultate koje sprovođenje algoritma nikada ne daje.

## 7 Hartlijev oscilator sa spregnutim kalemovima

Hartlijev oscilator se veoma često realizuje primenom kalema sa srednjim izvodom kod koga dva kalema imaju značajnu magnetnu spregu i međusobnu induktivnost. Takva situacija je prikazana na slici 12 gde je kolo sa slike 9 prošireno magnetnom spregom između kalemova.



Slika 12: Hartlijev oscilator sa spregnutim kalemovima.

Primenom karakteristike elemenata spregnutih kalemova (obrađeno u predmetima Teorija električnih kola (verovatno) i Električna merenja (sigurno)), ekvivalentna induktivnost redne veze spregnutih kalemova je

$$L = L_1 + L_2 + 2M \quad (50)$$

što daje rezonantnu frekvenciju kada paralelno oscilatorno kolo predstavlja otvorenu vezu

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2 + 2M)C}} \quad (51)$$

koja je ujedno i frekvencija oscilovanja oscilatora.

Uočavanjem da se na rezonantnoj frekvenciji kolo oscilatora raspada na dva dela, gde u desnom delu kruži struja jedine konture označena sa  $i$ , zavisnost kontrolišućeg napona aktivnog elementa od izlaznog napona oscilatora se dobija kao

$$v = -\frac{j\omega_0 L_1 + j\omega_0 M}{j\omega_0 L_2 + j\omega_0 M} v_{OUT} = -\frac{L_1 + M}{L_2 + M} v_{OUT}. \quad (52)$$

Kako je

$$\frac{v_{OUT}}{R} = -g_m v \quad (53)$$

zamenom vrednosti za  $v$  iz (52) se dobija

$$\frac{v_{OUT}}{R} = g_m \frac{L_1 + M}{L_2 + M} v_{OUT} \quad (54)$$

što je linearna homogena jednačina po  $v_{OUT}$  koja ima netrivialno rešenje za

$$\frac{1}{R} = g_m \frac{L_1 + M}{L_2 + M} \quad (55)$$

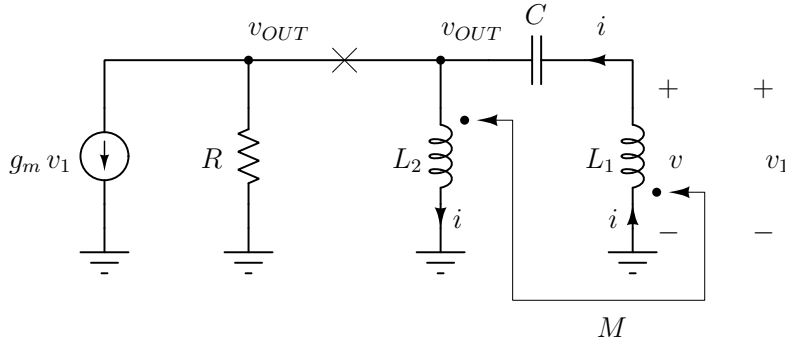
odakle se uslov oscilovanja dobija kao

$$g_m R = \frac{L_2 + M}{L_1 + M} \quad (56)$$

što se svodi na (37) za  $M = 0$ .

## 8 Analiza Hartiljevog oscilatora sa spregnutim kalemovima primenom Barkhauzenovog kriterijuma

Hartiljev oscilator sa spregnutim kalemovima se može analizirati i primenom Barkhauzenovog kriterijuma, a u tom cilju je šema sa slike 12 prilagođena pristupu i prikazana na slici 13. Kolo je opet znakom  $\times$  podeljeno na dva dela od kojih levi deo kola sadrži samo rezistivne elemente, a desni deo samo reaktivne, akumulacione.



Slika 13: Analiza Hartiljevog oscilatora sa spregnutim kalemovima primenom Barkhauzenovog kriterijuma.

Po Barkhauzenovom kriterijumu kružno pojačanje treba da zadovolji

$$\frac{v}{v_1} = 1 + j0 \quad (57)$$

a ono će biti određeno kao kaskadna veza dve funkcije prenosa

$$\frac{v}{v_1} = \frac{v_{OUT}}{v_1} \frac{v}{v_{OUT}}. \quad (58)$$

Ekvivalentna induktivnost redne veze spregnutih kalemova je

$$L = L_1 + L_2 + 2M \quad (59)$$

pa je rezonantna frekvencija na kojoj se desni deo kola ponaša kao otvorena veza

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2 + 2M)C}}. \quad (60)$$

Tada je izlazni napon oscilatora dat sa

$$v_{OUT} = -g_m R v_1. \quad (61)$$

Sa druge strane kola, na rezonantnoj frekvenciji postoji samo jedna kontura kroz koju protiče struja

$$i = \frac{v_{OUT}}{j\omega_0 L_2 + j\omega_0 M} = -\frac{v}{j\omega_0 L_1 + j\omega_0 M} \quad (62)$$

odakle je posle skraćivanja sa  $j\omega_0$

$$\frac{v_{OUT}}{L_2 + M} = -\frac{v}{L_1 + M} \quad (63)$$

pa je konačno tražena funkcija prenosa

$$\frac{v}{v_{OUT}} = -\frac{L_1 + M}{L_2 + M}. \quad (64)$$

Konačno, kružno pojačanje se dobija kao

$$v = \frac{L_1 + M}{L_2 + M} g_m R v_1 \quad (65)$$

i ono mora da zadovolji Barkhausenov kriterijum u njegovom realnom delu

$$\frac{L_1 + M}{L_2 + M} g_m R = 1 \quad (66)$$

pošto je imaginarni deo već zadovoljen kada je ustanovljena rezonantna frekvencija oscilatornog kola, koja je ujedno i frekvencija oscilovanja oscilatora. Oдавde se uslov oscilovanja dobija kao

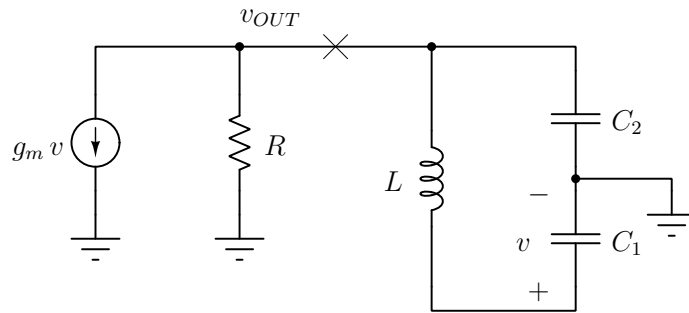
$$\boxed{g_m R = \frac{L_2 + M}{L_1 + M}} \quad (67)$$

što je isti rezultat kao i dobijen prethodnom analizom (56).

Na ovom mestu bi bilo interesantno pokušati analizu Hartlijevog oscilatora sa spregnutim kalemovima direktnom primenom Barkhausenovog kriterijuma, bez pozivanja na osobine paralelnog oscilatornog kola na rezonantnoj frekvenciji, i sagledati računске teškoće koje bi se javile u tom slučaju, kao i saznavnu vrednost i uvide koje takva analiza (ne) daje.

## 9 Kolpicov oscilator

Kolpicov oscilator [7, 8] je nastao tri godine posle Hartlijevog oscilatora, 1918, a zasnovan je na istoj ideji, samo se sada u cilju dobijanja treće tačke koja će biti uzemljena umesto kalema kondenzator deli na dva dela. Šema za male signale Kolpicovog oscilatora je prikazana na slici 14. Srednja tačka dobijena podelom kondenzatora je uzemljena, a na šemi je označen i napon  $v$  koji kontroliše aktivni element. Šema je opet znakom  $\times$  podeljena na dva dela: na levi deo koji sadrži samo rezistivne elemente i desni deo koji sadrži samo reaktivne elemente.



Slika 14: Kolpicov oscilator.

Ekvivalentna kapacitivnost redne veze dva kondenzatora je

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (68)$$

pa je rezonantna kružna frekvencija desnog dela kola, kada se paralelno oscilatorno kolo ponaša kao otvorena veza

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{L C_1 C_2}} = \sqrt{\frac{1}{L} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)}} \quad (69)$$

i to će ujedno biti kružna frekvencija oscilovanja oscilatora.

Kao i u prethodnim analizama, kroz granu označenu sa  $\times$  ne protiče struja, pa iz srednje tačke spoja dva kondenzatora nikakva struja ne može da teče ka masi, to uslovljava Kirhofov zakon za struje primenjen na snop koji obuhvata granu označenu sa  $\times$  i granu od srednje tačke spoja dva kondenzatora ka masi. Stoga mora da važi

$$j\omega_0 C_2 v_{OUT} = -j\omega_0 C_1 v \quad (70)$$

što posle skraćivanja sa  $j\omega_0$  daje

$$C_2 v_{OUT} = -C_1 v \quad (71)$$

odakle je

$$v = -\frac{C_2}{C_1} v_{OUT}. \quad (72)$$

Zamenom u jednačinu po levom, rezistivnom, delu kola

$$\frac{v_{OUT}}{R} = -g_m v \quad (73)$$

dobija se

$$\frac{v_{OUT}}{R} = g_m \frac{C_2}{C_1} v_{OUT} \quad (74)$$

što je opet linearna homogena jednačina po  $v_{OUT}$  koja ima netrivialno rešenje ( $v_{OUT} \neq 0$ ) za

$$\frac{1}{R} = g_m \frac{C_2}{C_1}. \quad (75)$$

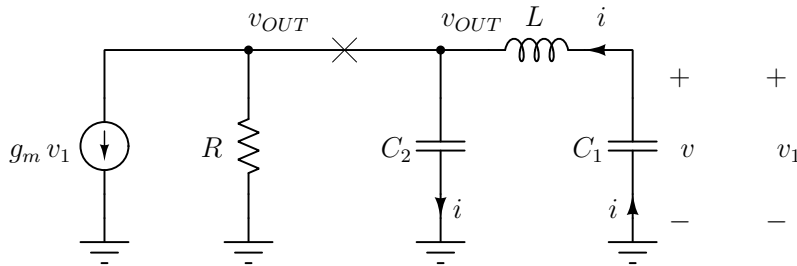
Odavde se konačno dobija uslov oscilovanja

$$\boxed{g_m R = \frac{C_1}{C_2}} \quad (76)$$

koji je po formi i složenosti sličan uslovu oscilovanja za Harlijev oscilator.

## 10 Analiza Kolpicovog oscilatora primenom Barkhauzenovog kriterijuma

Kao i u prethodnim slučajevima, analiza Kolpicovog oscilatora, određivanje frekvencije oscilovanja i uslova oscilovanja, će ovde biti izvedena i primenom Barkhauzenovog kriterijuma. U tom cilju, šema sa slike 14 je prilagođena i prikazana u pogodnijoj formi koja je data na slici 15. Opet se uočava znak  $\times$  koji deli kolo na dva dela od kojih levi deo sadrži samo rezistivne komponente, a desni deo samo reaktivne.



Slika 15: Analiza Kolpicovog oscilatora primenom Barkhauzenovog kriterijuma.

Na rezonantnoj frekvenciji desni deo kola, koji je paralelno oscilatorno kolo, predstavlja otvorenu vezu i tada ne teče struja kroz granu označenu simbolom  $\times$ . Tada su postojeća dva kondenzatora vezana na red, pošto ne teče struja po masi između dva dela kola, a ekvivalentna kapacitivnost je

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (77)$$

što daje rezonantnu frekvenciju

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{L C_1 C_2}} = \sqrt{\frac{1}{L} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)} \quad (78)$$

koja je ujedno i frekvencija oscilovanja oscilatora.

Na rezonantnoj frekvenciji, kada se kolo raspada na dva dela, u desnom delu kola postoji samo jedna kontura kroz koju teče struja

$$i = j\omega_0 C_2 v_{OUT} = -j\omega_0 C_1 v \quad (79)$$

odakle je

$$C_2 v_{OUT} = -C_1 v \quad (80)$$

što daje vezu  $v$  i  $v_{OUT}$

$$v = -\frac{C_2}{C_1} v_{OUT}. \quad (81)$$

Jednačina po potencijalu čvora za desni deo kola daje

$$v_{OUT} = -g_m R v_1 \quad (82)$$

pa se zamenom (81) dobija

$$v = \frac{C_2}{C_1} g_m R v_1. \quad (83)$$

Barkhausenov kriterijum je već zadovoljen u imaginarnom delu samim određivanjem frekvencije oscilovanja kao rezonantne frekvencije paralelnog oscilatornog kola, pa je ostalo da se zadovolji njegov realni deo

$$\frac{v}{v_1} = \frac{C_2}{C_1} g_m R = 1 \quad (84)$$

odakle se kao uslov oscilovanja dobija

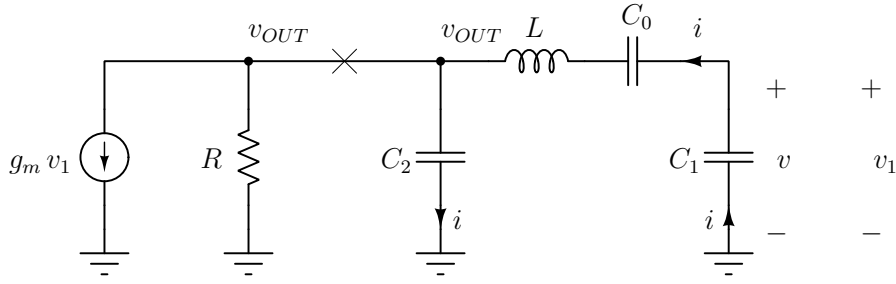
$$g_m R = \frac{C_1}{C_2} \quad (85)$$

što se poklapa sa ranije dobijenim rezultatom.

Za vežbu se ostavlja čitaocu da sam izvede frekvenciju i uslov oscilovanja direktnom primenom Barkhausenovog kriterijuma, u opštem slučaju i bez pozivanja na osobine paralelnog oscilatornog kola na rezonantnoj frekvenciji. Kako je sam postupak dosadan, čitaocu se predlaže da tokom izvođenja razmišlja o saznajnoj vrednosti takvog pristupa.

## 11 Klapov oscilator

Razvijeni metodi za analizu oscilatora u tri tačke su od velike koristi u izvođenju i analizi drugih oscilatora, srodnih po strukturi. Takav je, na primer, Klapov oscilator [9, 10, 11] koji je u formi pogodnoj za analizu primenom Barkhausenovog kriterijuma prikazan na slici 16.



Slika 16: Analiza Klapovog oscilatora.

Razvoj Klapovog oscilatora je motivisan potrebom za povećanjem stabilnosti frekvencije oscilovanja sa u praksi raspoloživim komponentama. Osim toga, kondenzator  $C_0$  povezan na red sa kalemom pojednostavljuje polarizaciju oscilatora, ukida vezu između izlaza i ulaza pojačavača za jednosmernu komponentu struja i napona.

Primenom već razvijene tehnike odmah uočavamo podelu kola na rezistivni i reaktivni deo, kako je označeno znakom  $\times$ . Reaktivni deo kola čini paralelno oscilatorno kolo kod koga je kondenzator realizovan kao redna veza tri kondenzatora kojima je ekvivalentna kapacitivnost

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \quad (86)$$

odnosno

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (87)$$

Ova ekvivalentna kapacitivnost sa kalemom čini paralelno oscilatorno kolo koje se ponaša kao otvorena veza na frekvenciji

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L} \left( \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)} \quad (88)$$

koja je ujedno i frekvencija oscilovanja.

Uočavanjem konture kroz koju na frekvenciji oscilovanja protiče struja  $i$ , na isti način kao i kod Kolpicovog oscilatora se dobija

$$v = -\frac{C_2}{C_1} v_{OUT} \quad (89)$$

pa kako je levi, rezistivni, deo kola isti kao i kod Kolpicovog i kod Hartlijevog oscilatora, za uslov oscilovanja sa istim argumentima zasnovanim na Barkhausenovom kriterijumu se dobija

$$g_m R = \frac{C_1}{C_2} \quad (90)$$

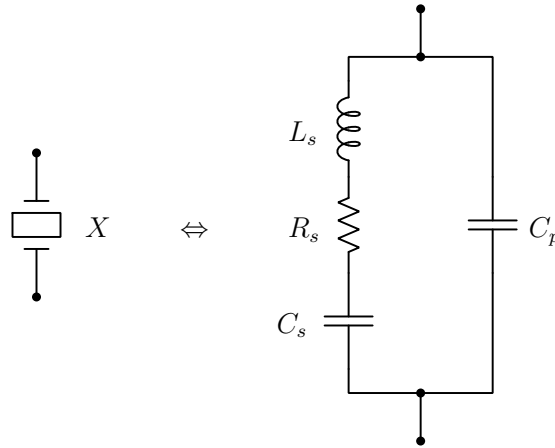
što je isto kao i kod Kolpicovog oscilatora.

Čitaocu se sugeriše da pokuša direktnu primenu Barkhausenovog kriterijuma u ovom slučaju i da razmotri računске teškoće i saznavnu vrednost takvog postupka.

Na sličan način se analizira i Vackaržov oscilator [12] koji je razvijen u cilju obezbeđivanja konstantne amplitude oscilovanja prilikom promena frekvencije oscilatora. Razvoj metoda za analizu oscilatora u tri tačke je doveo do sinteze novih oscilatora kako bi se odgovorilo novim zahtevima.

## 12 Kristalni oscilator

Pod pojmom „kristalni oscilator“ [13, 14] ovde podrazumevamo komponentu zasnovanu na piezoelektričnim efektima u kristalima koja se zbog svojih svojstava koristi u realizaciji oscilatora. Takvi elementi se uglavnom realizuju sa kristalom kvarca kao osnovom, pa se komponenta često u praksi naziva samo „kristal“ ili još češće „kvarc“, pa će i ovde povremeno biti tako nazivana, a termin „kristalni oscilator“ (suprotnost je „amorfni oscilator“?) se koristi samo zbog zahteva forme pisanog teksta (u govoru to niko ne koristi). Simbol za kvarcni oscilator je prikazan na slici 17, kao i njegova ekvivalentna šema. U daljem tekstu će biti analizirana samo ekvivalentna šema, a samom realizacijom komponente se nećemo baviti. Komponente uporedivih performansi, a niže cene, su keramički oscilatori [15].



Slika 17: Kristalni oscilator, simbol i ekvivalentna šema.

Ekvivalentna šema sa slike 17 u rednoj grani ima elemente  $L_s$ ,  $R_s$  i  $C_s$  koji čine redno oscilatorno kolo sa gubicima kojim se modeluju elektromehanički procesi u piezoelektričnom kristalu. Frekvencija fazne rezonanse tog rednog oscilatornog kola je

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{L_s C_s}} \quad (91)$$

pa se na frekvenciji  $\omega_s$  ta grana može predstaviti samo otpornošću gubitaka  $R_s$ . Frekvencija  $\omega_s$  se naziva i frekvencijom kristalnog oscilatora i označava se na komponenti. Ta frekvencija ne zavisi od elektrotatičke kapacitivnosti kontakata, već samo od piezoelektričnih efekata u kristalu.

Česta greška u pristupu kod analize ekvivalentnih kola je kvalitativna analiza bez kvantitativne analize: pravi uvid u model se stiče tek kada se zamene brojevi. Tipične vrednosti za parametre modela koje prikazuju red veličine parametara leve grane su  $L_s = 100 \text{ H}$ ,  $C_s = 10 \text{ fF} = 0.01 \text{ pF}$ ,  $R_s = 10 \text{ k}\Omega$ , dok paralelna kapacitivnost  $C_p = 10 \text{ pF}$  modeluje elektrostatičku kapacitivnost, dakle nije samo električni model neke druge fizičke pojave. Ove kvantitativne vrednosti parametara dovode do fazne rezonanse rednog oscilatornog kola (leve grane sa ekvivalentne šeme) od  $\omega_s = \frac{1}{\sqrt{L_s C_s}} = 1 \text{ M}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ , ali i do reaktansi  $\omega_s L_s = \frac{1}{\omega_s C_s} = 100 \text{ M}\Omega$ . Ovakve reaktanse su nezamislivo velike za realizaciju uobičajenim elektronskim komponentama. Ovde valja uočiti da je  $\omega_s L_s \gg R_s$ , što dovodi do Q-faktora [16] ekvivalentnog rednog oscilatornog kola od  $Q_s = \frac{\omega_s L_s}{R_s} = 10000$ . Ovakva vrednost je nedostižna standardnim komponentama, pa se otpornost  $R_s$  u mnogim analizama može zanemariti. Štaviše, ona je u odnosu na okolne reaktanse  $\omega_s L_s$  i  $\frac{1}{\omega_s C_s}$  mnogo manja nego parazitne otpornosti u oscilatornim kolima prethodno analiziranih reaktivnih mreža oscilatora, a koje nisu prikazivane na šemama jer su odmah zanemarene, bez razmatranja i diskusije.



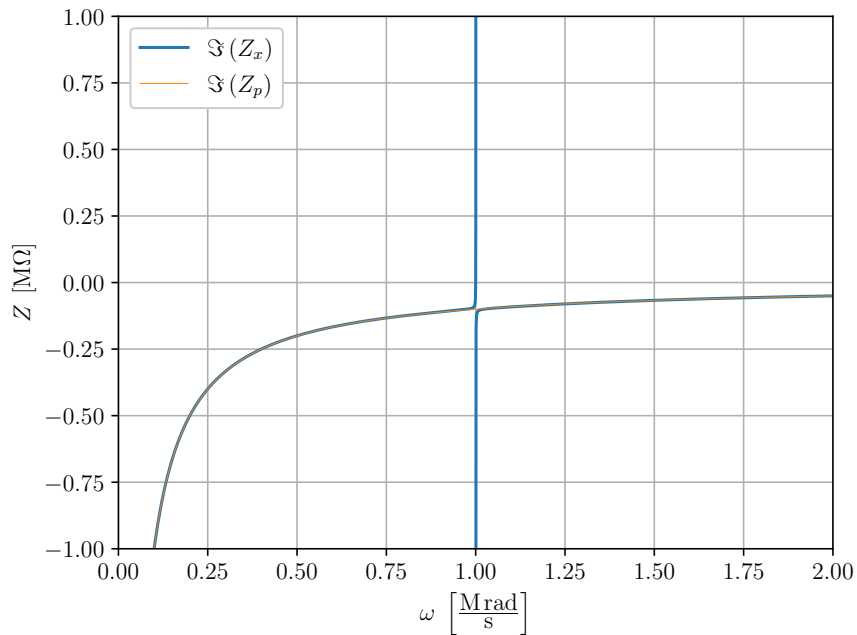
Paralelna kapacitivnost  $C_p$  je parametar koji dosta varira od kristala do kristala, uglavnom uslovljeno njegovom veličinom. Na taj parametar je lako uticati u smeru povećanja (smanjiti se ne može) dodavanjem paralelne kapacitivnosti spolja. Paralelna kapacitivnost dovodi do paralelne rezonanse na sopstvenoj frekvenciji

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{L_s} \left( \frac{1}{C_s} + \frac{1}{C_p} \right)} = \sqrt{\frac{1}{L_s C_s} \left( 1 + \frac{C_s}{C_p} \right)} = \omega_s \sqrt{1 + \frac{C_s}{C_p}} \approx \omega_s \left( 1 + \frac{C_s}{2C_p} \right) \quad (92)$$

što zbog  $C_s \ll C_p$  dovodi do malog razmaka između frekvencija serijske i paralelne rezonanse.

Vrednosti parametara ekvivalentne šeme kristalnog oscilatora variraju u relativno širokim granicama, reda 1000 : 1 [17], zavisno od frekvencije kristalnog oscilatora, ali je Q-faktor uvek reda nekoliko hiljada ili desetina hiljada, a frekvencije redne i paralelne rezonanse su uvek jako bliske.

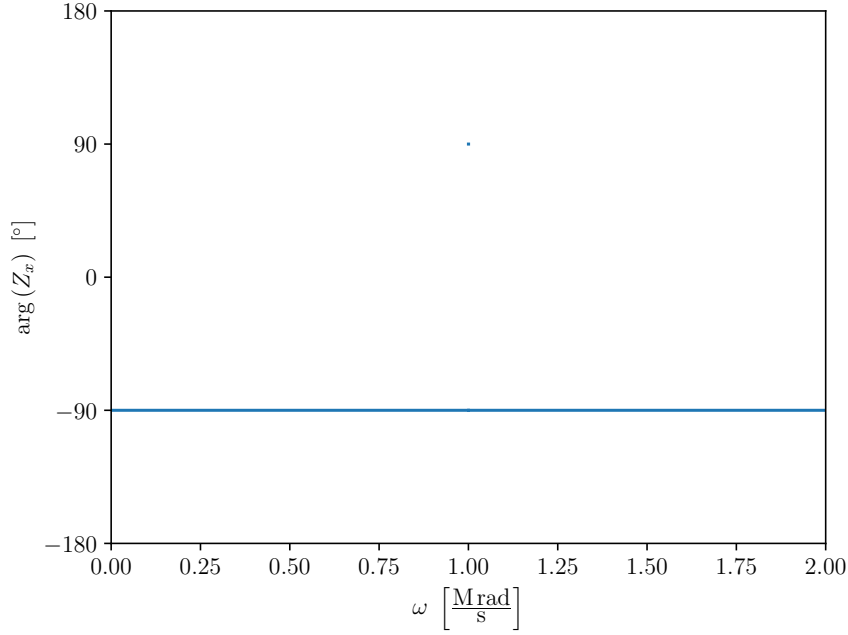
Frekvencijska karakteristika reaktanse kvarcnog oscilatora bez gubitaka, sa  $R_s = 0$  je prikazana na slici 18, uporedo sa frekvencijskom karakteristikom kondenzatora  $C_p$ . Na slici se vidi da reaktansa kondenzatora  $C_p$  u najvećem delu karakteristike dominira reaktansom kristalnog oscilatora, dok se u jako uskom opsegu frekvencija oko serijske rezonanse (91) uočava uticaj grane sa rednim oscilatornim kolom. U neposrednoj blizini serijske rezonanse se uočava paralelna rezonansa na 92 koja uzrokuje pojavu singulariteta u slučaju da  $R_s = 0$ . Ovakvo razdvajanje efekata na frekvencijskoj skali je upravo uslovljeno numeričkim vrednostima parametara ekvivalentne šeme kristalnog oscilatora.



Slika 18: Reaktansa kristalnog oscilatora,  $R_s = 0$ .

Frekvencijska karakteristika faznog ugla impedanse kristalnog oscilatora za  $R_s = 0$  je prikazana na slici 19 sa koje je uklonjen grid (Kako li se ovo kaže na srpskom jeziku? Uklonjena rešetka (kao sa slivnika i prodana otpadu)? Uklonjena koordinatna mreža (za lovljenje funkcija)? Srećom, Zenodo ne traži mišljenje kompetentnih recenzenata.) kako bi se lakše uočila zona frekvencija u kojoj impedansa kvarcnog oscilatora ima induktivni karakter, a koja je toliko uska da se praktično svodi na tačku u dijagramu.

U cilju analize uticaja konačne otpornosti  $R_s$  na reaktansu kristalnog oscilatora, u uskom opsegu oko rezonantnih frekvencija  $\omega_s$  i  $\omega_p$ , za  $999 \frac{\text{krad}}{\text{s}} \leq \omega \leq 1001 \frac{\text{krad}}{\text{s}}$  je prikazana reaktansa za  $R_s = 0$  i  $R_s = 10 \text{ k}\Omega$ . Uočava se da značajne razlike ima samo oko paralelne rezonantne



Slika 19: Fazni ugao impedanse kristalnog oscilatora,  $R_s = 0$ .

frekvencije  $\omega_p$ , gde u prisustvu gubitaka nema prekida, već je reaktansa kontinualna. Najveća je razlika u blizini same  $\omega_p$ , gde je reaktansa u slučaju kada gubitaka nema beskonačna, dok je u suprotnom slučaju bliska nuli. Reaktansa je jednaka nuli na frekvenciji fazne rezonanse, koja je bliska frekvenciji amplitudske rezonanse, kako će biti prikazano na slici 22.

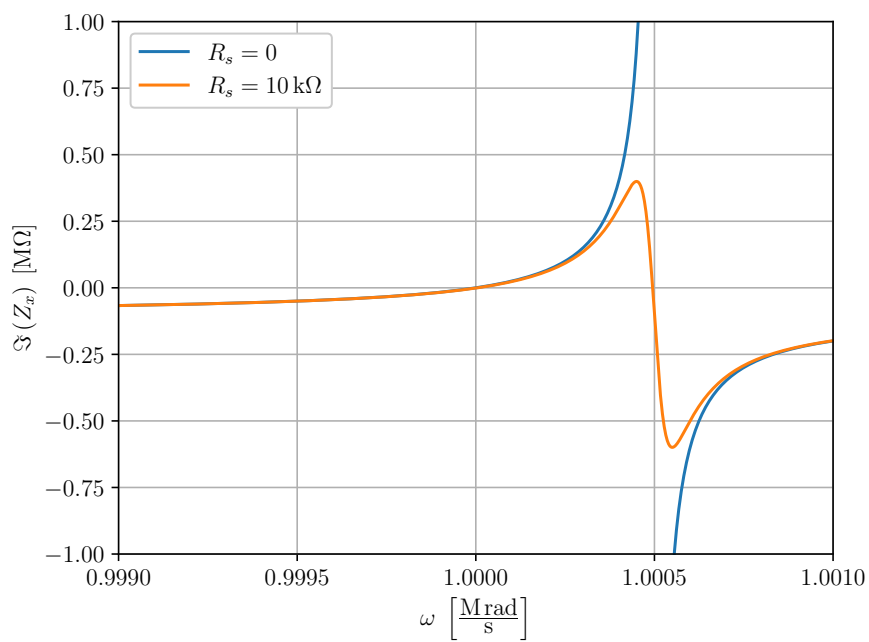
Frekvencijska karakteristika faznog ugla impedanse kristalnog oscilatora o blizini  $\omega_p$  i  $\omega_s$  je prikazana na slici 21. Uočava se da je u slučaju da gubitaka nema za  $\omega_s < \omega < \omega_p$  impedansa kristalnog oscilatora potpuno induktivna, dok je u suprotnom slučaju potpuno kapacitivna. Prelaz između oblasti je prekidani, a u slučaju paralelne rezonanse i dijagram je prekinut jer na frekvenciji paralelne rezonanse impedansa je beskonačna, pa faza nije određena, što izaziva prekid u iscrtavanju dijagrama.

U slučaju da su gubici prisutni, u vrlo približno istom opsegu,  $\omega_s < \omega < \omega_p$ , impedansa kristalnog oscilatora ima induktivni karakter, dok je u suprotnom slučaju kapacitivnog karaktera. U ovom slučaju prelaz nije prekidani, već kontinualan, iako strm. U svom maksimumu, faza ovde ne dostiže vrednost od  $90^\circ$  karakterističnu za čisto induktivnu impedansu, za razliku od slučaja kada gubitaka nema. Sa druge strane, već sa relativno malim udaljavanjem od  $\omega_s$  fazni ugao postaje veoma približno potpuno kapacitivan,  $-90^\circ$ .

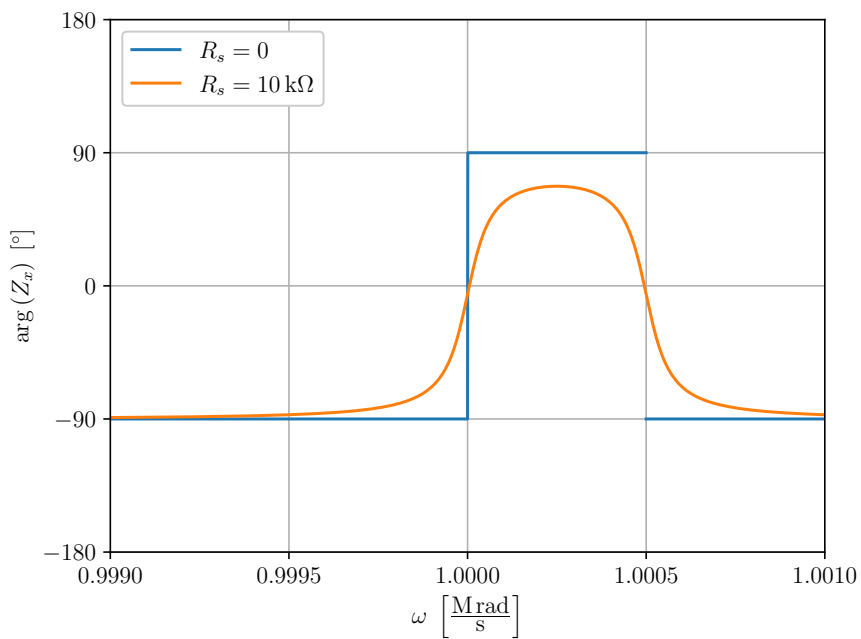
Na slici 22 je prikazana impedansa razmatranog kristalnog oscilatora u blizini rezonantnih frekvencija  $\omega_s$  i  $\omega_p$ . U slučaju bez gubitaka, impedansa je jednaka modulu reaktanse, dok je u slučaju da gubitaka ima bitno različita, u blizini frekvencije gde reaktansa prolazi kroz nulu, što je fazna rezonansa, impedansa dostiže svoj maksimum, što odgovara amplitudskoj rezonansi.

Konačno, na slici 23 su prikazane amplitudska i fazna karakteristika impedanse kristalnog oscilatora u logaritamskoj razmeri [18]. Uočava se dominacija paralelne kapacitivnosti u impedansi kristalnog oscilatora u najvećem delu frekvencijskog opsega, dok se uticaj redne ( $L_s$ ,  $R_s$ ,  $C_s$ ) grane iz ekvivalentne šeme sa slike 17 uočava samo u neposrednoj okolini  $\omega_s$  i njoj bliske  $\omega_p$ .

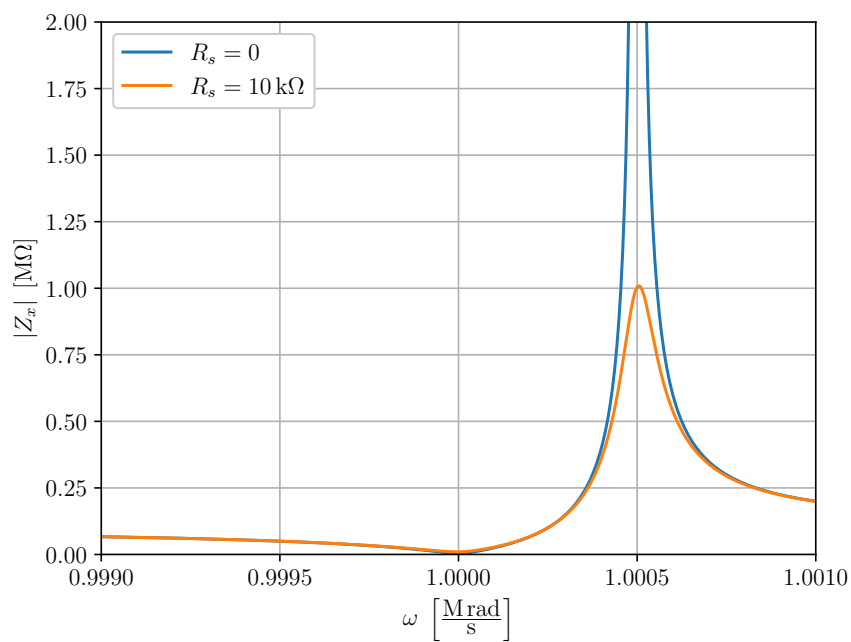
Kristalni oscilator obezbeđuje dobru stabilnost frekvencija  $\omega_s$  i  $\omega_p$  u zavisnosti od temperature i starenja komponente, kao i njihovu malu proizvodnu toleranciju (varijaciju od primerka do primerka koji su proizvedeni istim postupkom). Stoga ima smisla iskoristiti takvu komponentu u realizaciji oscilatora.



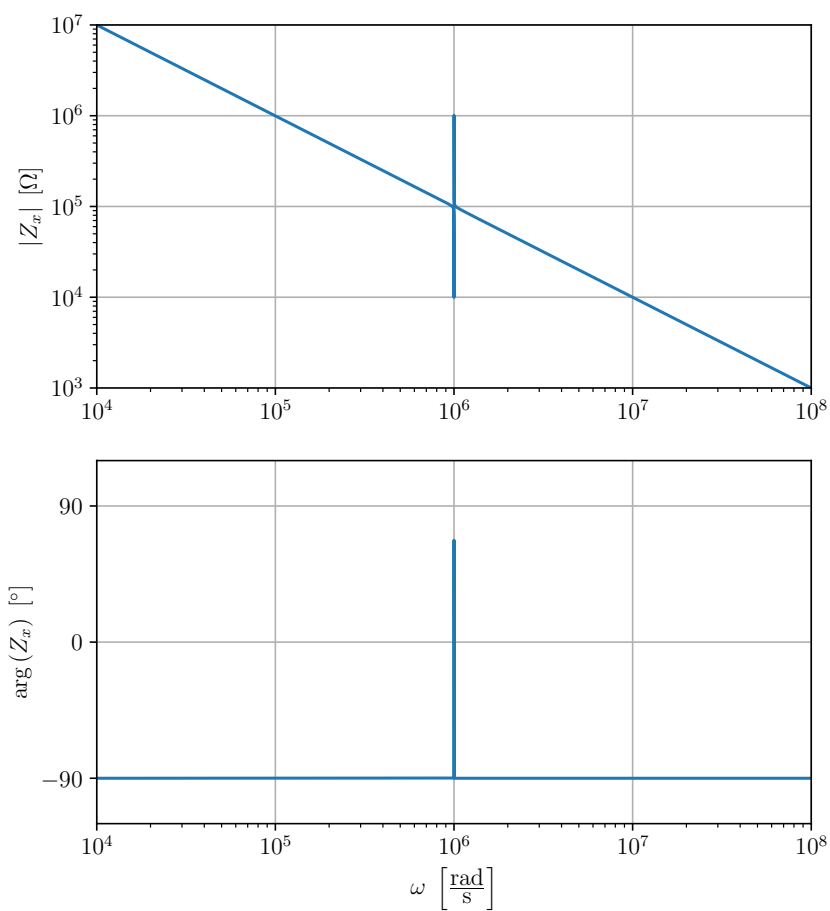
Slika 20: Reaktansa kristalnog oscilatora.



Slika 21: Fazni ugao impedanse kristalnog oscilatora.



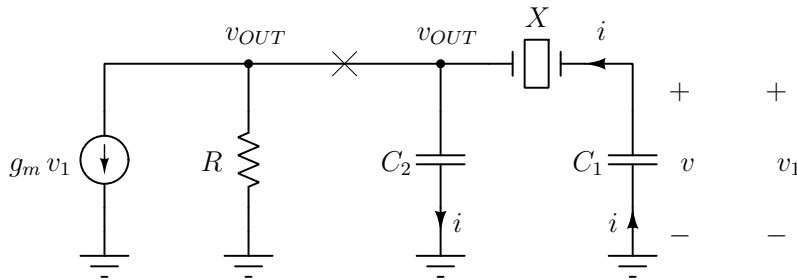
Slika 22: Impedansa kristalnog oscilatora.



Slika 23: Frekvencijska karakteristika kristalnog oscilatora, logaritamska razmera.

### 13 Pirsov oscilator

Prethodno opisana piezoelektrična komponenta, u ovom tekstu nazvana „kristalni oscilator“, a u laboratorijskom slengu nazivana „kvarc“, omogućava realizaciju oscilatora izuzetno stabilne frekvencije, izuzetno malo zavisne od temperature, opterećenja oscilatora potrošačem, mogućih varijacija napona napajanja i mogućih varijacija parametara ostalih elemenata kola. U realizacijama električnih kola oscilatora zasnovanih na ovoj komponenti dominira Pirsov oscilator [19, 20], koji je izveden iz Kolpicevog oscilatora tako što je kalem iz Kolpicevog oscilatora zamenjen kristalnim oscilatorom, kako je prikazano na ekvivalentnoj šemi za male signale prikazanoj na slici 24. Osnovna ideja u izvođenju Pirsovog oscilatora je da će uslov oscilovanja biti ispunjen samo ako je impedansa kristala induktivna, a takvo svojstvo kristalni oscilator ispoljava samo u uskom frekvencijskom opsegu  $\omega_s < \omega < \omega_p$ . Ovim je ograničen mogući opseg za frekvenciju oscilovanja na jako usku zonu i time je zagantovana stabilnost frekvencije. Potrebno je još odrediti i uslov oscilovanja.



Slika 24: Pirsov oscilator.

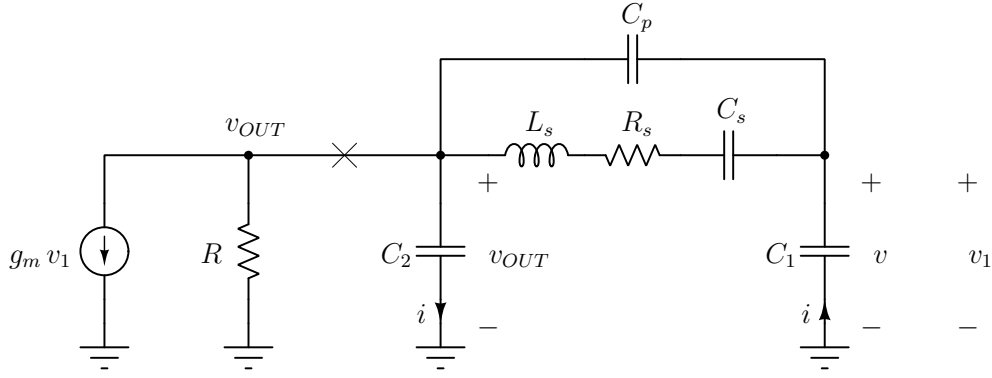
U cilju određivanja uslova oscilovanja Pirsovog oscilatora, kristalni oscilator sa slike 24 je zamenjen odgovarajućom ekvivalentnom šemom sa slike 17 kako je prikazano na slici 25. Na ovoj ekvivalentnoj šemi znak  $\times$  još uvek ne deli kolo na rezistivni i reaktivni deo. U cilju pojednostavljenja analize, uvidom u realne vrednosti parametara ekvivalentne šeme kristalnog oscilatora diskutovane ranije, na ekvivalentnoj šemi sa slike 26 je izostavljena otpornost  $R_s$  kao zanemariva u odnosu na ostale impedanse u okolini ( $\omega L_s$  i  $1/(\omega C_s)$ ) u oblasti frekvencija od interesa. Ova aproksimacija je kvantitativno znatno manja od aproksimacija implicitno uvedenih u analizama prethodnih oscilatora zanemarivanjem gubitaka u reaktivnim elementima. Zato je u analizi ekvivalentnog modela kristalnog oscilatora naglašena kvantitativna komponenta koja donosi nove kvalitete. Nakon uvođenja ove aproksimacije, na ekvivalentnoj šemi sa slike 26 znak  $\times$  zaista deli kolo na rezistivni i reaktivni deo. Na frekvenciji oscilovanja nema razmene energije između rezistivnog i reaktivnog dela kola, pa se svodenjem reaktivnog dela kola na ekvivalentno paralelno oscilatorno kolo kao frekvencija oscilovanja dobija

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(C_1 + C_2)(C_s + C_p) + C_1 C_2}{L_s C_s (C_1 C_2 + (C_1 + C_2) C_p)}}. \quad (93)$$

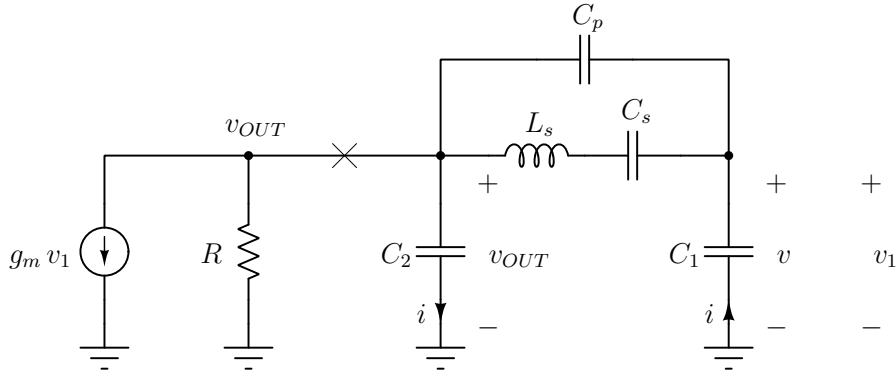
Imajući u vidu da su dodate kapacitivnosti  $C_1$  i  $C_2$  u realnim kolima mnogostruko veće od internih kapacitivnosti ekvivalentne šeme kristalnog oscilatora,  $C_s, C_p \ll C_1, C_2$ , prethodna jednačina se u graničnom procesu svodi na

$$\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{C_s L_s}} \quad (94)$$

odnosno Pirsov oscilator osciluje na frekvenciji kristala  $\omega_s$  (zvaničan termin bi bio: „na frekvenciji fazne rezonanse impedanse grane sa rednim oscilatornim kolom u zamenskom kolu kristalnog



Slika 25: Pirsov oscilator, ekvivalentna šema.



Slika 26: Pirsov oscilator, ekvivalentna šema, zanemarena otpornost gubitaka u kristalu.

oscilatora“; pokušajte da koristite ovaj termin u svakodnevnom radu u laboratoriji i postaće vam jasna njegova neodrživost; terminologiju gotovo uvek nameću oni koji je ne koriste, a imaju neodoljivu potrebu da nameću i ono što ih se uopšte ne tiče; verovatno im to omogućava da se nekoliko minuta osećaju bolje kroz samopercepciju sebe i sopstvenog značaja).

Uslov osilovanja Pirsovog oscilatora se određuje na već uobičajen način, ustanovljavanjem veze između  $v$  koje je jednako  $v_1$  po Barkhausenovom kriterijumu. Analizom reaktivnog dela kola, uz napomenu da na frekvenciji oscilovanja u ustaljenom stanju kroz granu označenu sa  $\times$  struja ne teče dobijamo uslov oscilovanja

$$\boxed{g_m R = \frac{C_1}{C_2}} \quad (95)$$

koji je isti kao i za Kolpicov i Klapov oscilator, a i dobijen je na identičan način.

Na ovom mestu zainteresovanim čitaocima valja skrenuti pažnju na Mešamov oscilator [21] iz 1938. godine, koji ne spada u oscilatore u tri tačke, ali je oscilator koji koristi kristal za definisanje frekvencije oscilovanja i to tako da je dodatno stabilizuje zahtevajući faznu rezonansu ekvivalentne šeme kristala za ravnotežu mosta koji je osnov oscilatora, kao i u slučaju oscilatora sa Vinovim mostom. Osim toga, u oscilatoru se koristi sijalica kao termički zavisna otpornost kojom se reguliše amplituda oscilacija.

## 14 Zaključak

U ovom tekstu su razmatrani oscilatori u tri tačke. Prvo je objašnjen motiv njihovog nastanka, a to je obezbeđivanje oscilacija primenom samo jednog aktivnog elementa, što je u vreme njihovog nastanka bila značajna prednost. Zatim je razvijen metod za analizu oscilatora koji koristi osobinu paralelnog oscilatornog kola da se na rezonantnoj frekvenciji ponaša kao otvorena veza. Ovaj uvid znatno olakšava razumevanje rada kola oscilatora i njegovu analizu, pa samim tim dovodi i do novih ideja u sintezi oscilatora. Za osnovne oscilatore u tri tačke, Hartlijev, kako bez, tako i sa magnetnom spregom, i Kolpicov, izvršena je analiza kako direktno, preko zahteva da homogena linearna jednačina koja opisuje rezistivni deo kola ima netrivialno rešenje, tako i primenom Barkhauzenovog kriterijuma. U cilju ilustrovanja računskih teškoća do kojih direktna primena Barkhauzenovog kriterijuma dovodi bez razumevanja rada kola, izvršena je analiza Hartlijevog oscilatora na taj način. Klapov oscilator je prikazan kao oscilator izveden iz Kolpicovog oscilatora i prikazana je njegova analiza koja je primenom razvijenih tehnika direktna, sa minimumom računa i izvođenja.

Detaljno je analizirana piezoelektrična komponenta nazvana „kristalni oscilator“ predstavljena svojom ekvivalentnom šemom. Kvantitativna analiza za tipične vrednosti parametara je ukazala na bliskost serijske i paralelne rezonanse u ekvivalentnoj šemi, kao i usku oblast gde komponenta ima pozitivnu reaktansu, dakle impedansu induktivnog karaktera. Pirsov oscilator je izveden iz Kolpicovog oscilatora i uz primenu razvijenih tehnika je lako ustanovljen uslov oscilovanja.

Prikazane analize imaju opštiju vrednost od analize i sinteze pojedinačnih tipova oscilatora i suprotstavljaju analitički pristup, koji zahteva razumevanje rada kola, pristupu koji koristi grubu silu i algoritme opšte namene iz teorije električnih kola. Ipak, oba pristupa daju iste numeričke rezultate, ali kroz različitu saznavnu vrednost.

# Literatura

- [1] [https://en.wikipedia.org/wiki/Hartley\\_oscillator](https://en.wikipedia.org/wiki/Hartley_oscillator)
- [2] [https://en.wikipedia.org/wiki/Ralph\\_Hartley](https://en.wikipedia.org/wiki/Ralph_Hartley)
- [3] [https://en.wikipedia.org/wiki/Barkhausen\\_stability\\_criterion](https://en.wikipedia.org/wiki/Barkhausen_stability_criterion)
- [4] [https://en.wikipedia.org/wiki/Heinrich\\_Barkhausen](https://en.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Barkhausen)
- [5] [https://en.wikipedia.org/wiki/Nyquist\\_stability\\_criterion](https://en.wikipedia.org/wiki/Nyquist_stability_criterion)
- [6] Predrag Pejović, „Nikvistov kriterijum stabilnosti“, Zenodo, 2021, <https://zenodo.org/record/5142695#.Y58jkzPMLMU>.
- [7] [https://en.wikipedia.org/wiki/Colpitts\\_oscillator](https://en.wikipedia.org/wiki/Colpitts_oscillator)
- [8] [https://en.wikipedia.org/wiki/Edwin\\_H.\\_Colpitts](https://en.wikipedia.org/wiki/Edwin_H._Colpitts)
- [9] [https://en.wikipedia.org/wiki/Clapp\\_oscillator](https://en.wikipedia.org/wiki/Clapp_oscillator)
- [10] [https://en.wikipedia.org/wiki/James\\_Kilton\\_Clapp](https://en.wikipedia.org/wiki/James_Kilton_Clapp)
- [11] [https://en.wikipedia.org/wiki/Geoffrey\\_G.\\_Gouriet](https://en.wikipedia.org/wiki/Geoffrey_G._Gouriet)
- [12] [https://en.wikipedia.org/wiki/Vack%C3%A1%C5%99\\_oscillator](https://en.wikipedia.org/wiki/Vack%C3%A1%C5%99_oscillator)
- [13] [https://en.wikipedia.org/wiki/Crystal\\_oscillator](https://en.wikipedia.org/wiki/Crystal_oscillator)
- [14] Warren A. Marrison, “The evolution of the quartz crystal clock,” *The Bell System Technical Journal*, vol. 27, no. 3, pp. 510–588, 1948.
- [15] [https://en.wikipedia.org/wiki/Ceramic\\_resonator](https://en.wikipedia.org/wiki/Ceramic_resonator)
- [16] [https://en.wikipedia.org/wiki/Q\\_factor](https://en.wikipedia.org/wiki/Q_factor)
- [17] <https://www.electronics-tutorials.ws/oscillator/crystal.html>
- [18] Predrag Pejović, Amela Zeković, “Bode Plots Revisited: a Software System for Automated Generation of Piecewise Linear Frequency Response Plots,” *Electronics*, vol. 21, no. 2, pp. 76–86, December 2017, ISSN: 1450-5843, DOI: 10.7251/ELS1721076P, <http://doisrpska.nub.rs/index.php/electronics/article/download/4866/4659>
- [19] [https://en.wikipedia.org/wiki/Pierce\\_oscillator](https://en.wikipedia.org/wiki/Pierce_oscillator)
- [20] [https://en.wikipedia.org/wiki/G.\\_W.\\_Pierce](https://en.wikipedia.org/wiki/G._W._Pierce)
- [21] L. A. Meacham, “The bridge stabilized oscillator,” *Bell System Technical Journal*, vol. 17, no. 4, pp. 574–591, 1938.