MATHEMATICS

ПРО ПОШУК ДІОФАНТОВИХ НАБОРІВ РАЦІОНАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

Зіновєєв І.В.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Запорізький національний університет, Україна
ORCID: 0000-0002-7392-2327
Манько Н.І.–В.
кандидат фізико-математичних наук,
Запорізький національний університет, Україна
ORCID: 0000-0001-8995-7316
Зіновєєв Я.–Д.І.
студент,
Харківський національний університет радіоелектроніки, Україна

ABOUT FINDING OF THE DIOPHANTINE RATIONAL NUMBERS SETS

Zinovieiev I.,
Candidate of sciences in physics and mathematics, associate professor,
Zaporizhzhia National University, Ukraine
ORCID: 0000-0002-7392-2327
Manko N.,
Candidate of sciences in physics and mathematics,
Zaporizhzhia National University, Ukraine
ORCID: 0000-0001-8995-7316
Zinovieiev Y.-D.
student,
Kharkiv national university of radio electronics, Ukraine

Анотація

В статті проведено огляд підходів до пошуку діофантових наборів цілих та раціональних чисел. На основі проведеного аналізу сформульовано методику отримання формул для знаходження елементів діофантових наборів. Базуючись на результатах числових експериментів пошуку діофантових наборів раціональних чисел, отримано формули знаходження таких наборів.

Abstract

The paper reviews approaches to finding of the Diophantine integers and rational numbers sets . The methodology of formulas for finding the elements of the Diophantine sets is formulated and based on the research analysis. The numerical experiments based of the described methodology were carried out. The formulas of the elements of the Diophantine rational numbers sets is obtained.

Ключові слова: метод, алгоритм, діофантовий набір, діофантовий набір раціональних чисел, базові поліноми.

Keywords: method, algorithm, Diophantine set, Diophantine rational numbers set, basic polynomials.

Постановка проблеми. Аналіз останніх публікацій.

Одна із відомих задач цілочислової арифметики, теорії чисел є задача пошуку наборів $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ додатних чисел (цілих або раціональних) таких, що для всіх $1 \le i \le j \le m$ число $a_i \cdot a_j + 1$ є «ідеальним» повним квадратом.

До цієї задачі звертались в різні часи математики всього світу, зокрема Діофант Олександрійський, П'єр Ферма, Франсуа Вієт, Леонард Ейлер, Юрій Матіясевич, Ігор Шафаревич. І в наш час зацікавленість розв'язанням описаної проблеми не зникла, що знайшло відображення в цілій низці робіт останніх десятиріч сучасних математиків, наприклад, в роботах A. Dujella [1-4], M. Stoll [9], P. Gibbs [10], A. Bérczes, L. Hajdu, Sz. Tengely [5], M. Kazalicki, M. Mikic, M. Szikszai [7], К. Д. Жуков [11]. Це свідчить про актуальність досліджень в даному напрямку.

Діофант Олександрійський першим дослідив проблему знаходження, чотирьох чисел, таких що добуток будь-яких двох з них, збільшений на одиницю, є «ідеальним» (повним) квадратом. Він знайшов набір із чотирьох раціональних додатних чисел із цією властивістю [1].

$$\{\,1/16,\ 33/16,\ 17/4,\ 105/16\,\},$$

$$\frac{1}{16}\cdot\frac{33}{16}+1=\left(\frac{17}{16}\right)^2,\quad \frac{1}{16}\cdot\frac{105}{16}+1=\left(\frac{19}{16}\right)^2,\quad \frac{105}{16}\cdot\frac{33}{16}+1=\left(\frac{61}{16}\right)^2,$$

$$\frac{1}{16}\cdot\frac{17}{4}+1=\left(\frac{9}{8}\right)^2,\quad \frac{17}{4}\cdot\frac{33}{16}+1=\left(\frac{25}{8}\right)^2,\quad \frac{105}{16}\cdot\frac{17}{4}+1=\left(\frac{43}{8}\right)^2.$$

Перший набір чотирьох натуральних чисел { 1, 3, 8, 120 }, що задовольняють сформульованим умовам, був знайдений П. Ферма.

Трохи пізніше Л. Ейлер знайшов нескінченну кількість наборів такого типу і виразив їх параметричними формулами

$$\{a, b, a+b+2r, 4r(r+a)(r+b)\}.$$

Також він зумів додати п’ятий раціональний елемент 777480/8288641 до набору Ферма. У 2017 році M. Stoll [9] довів, що продовження набору Ферма до раціональної четвірки з тим же складом унікальне. У 1999 році перший приклад набору шести раціональних чисел зі збереженням умов за Діофантом і Ферма знайшов P. Gibbs [10]:

$$\{11/192, 35/192, 155/27, 512/27, 1235/48, 180873/16\}.$$

В результаті постановка зазначеної вище задачі набула нових формулювань, які умовно можна поділити на два основні напрямки: перший – пошук наборів розмірності більше чотирьох та обґрунтування існування таких наборів, та другий – пошук аналітичних формул елементів таких наборів. Саме дослідженню задачі другого напрямку й присвячена дана робота.

Мета досліджень. В дослідженні була поставлена наступна комплексна мета: проаналізувати дослідження A. Dujella та P. Gibbs; сформулювати гіпотезу про можливий вигляд формул пошуку діофантових наборів розмірності 6; сформулювати алгоритм пошуку та оцінити його чисельну складність.

Матеріали і методи. Означення: Набір цілих додатних чисел $(a_1,\ a_2,\ \dots\ ,a_m)$ будемо називати Діофантовим набором, якщо $a_i\cdot a_j+1$ є повним квадратом для всіх $1\le i\le j\le m$.

Аналогічно для раціональних чисел.

Означення: Набір ненульових раціональних чисел $(p_1,\ p_2,\ \dots\ ,p_m)$ називають Діофантовим набором, якщо $p_i\cdot p_j+1$ є повним квадратом деякого раціонального числа для всіх $1\le i\le j\le m$.

У 1979 році J. Arkin, V. E. Hoggatt, E. G. Strauss [8] довели, що кожна Діофантова трійка $\{a,b,c\}$ може бути розширена до Діофантової четвірки $\{a,b,c,d\}$, де $d=a+b+c+2abc+((ab+1)(ac+1)(bc+1))^2$.

У 2004 році хорватський математик показав, о може існувати лише скінченне число діофантових п’ятірок.

Нехай $\{a,b,c,d\}$ – діофантова четвірка, причому

$$ab+1=r_1^2, ac+1=r_2^2, ad+1=r_3^2,$$
$$bc+1=r_4^2, bd+1=r_5^2, cd+1=r_6^2$$

тоді

$$e=\big((a+b+c+d)(abcd+1)+2abc+2abd+2acd+2bcd\pm$$
$$\pm 2r_1r_2r_3r_4r_5r_6\big)/(abcd-1)^2.$$

Хоча Ейлеру було вже відомо, що існує нескінченна кількість діофантових п’ятірок, до недавнього часу не було відомо, чи існують набори з шести елементів? P. Gibbs знайшов 45 прикладів таких раціональних наборів.

У 2015 році A. Dujella, M. Kazalicki, M. Mikic, M. Szikszai [7] довели що існує нескінченна множина діофантових шестірок, параметризованих за допомогою параметра t, які у 2016 році були спрощені T. Piezas [6]:

$$a=(t^2-2t-1)(t^2+2t+3)(3t^2-2t+1)/\big(4t(t^2-1)(t^2+2t-1)\big),$$
$$b=4t(t^2-1)(t^2-2t-1)/(t^2+2t-1)^3,$$
$$c=4t(t^2-1)(t^2+2t-1)/(t^2-2t-1)^3,$$
$$d=(t^2+2t-1)(t^2-2t+3)(3t^2+2t+1)/\big(4t(t^2-1)(t^2-2t-1)\big),$$
$$e=(-t^5+14t^3-t)/(t^6-7t^4+7t^2-1),$$
$$f=(3t^6-13t^4+13t^2-3)/\big(4t(t^4-6t^2+1)\big).$$

Аналіз робіт A. Dujella та P. Gibbs, на наш погляд, дозволяє зробити припущення, що шукані раціональні числа можна представити параметричними формулами (параметр t), чисельники й знаменники яких є поліномами степеня не вище шостого, а саме:

$$\mathrm{P}_6(\mathrm{t})=\mathrm{a}_0\mathrm{t}^6+\mathrm{a}_1\mathrm{t}^5+\mathrm{a}_2\mathrm{t}^4+\mathrm{a}_3\mathrm{t}^3+\mathrm{a}_4\mathrm{t}^2+\mathrm{a}_5\mathrm{t}+\mathrm{a}_6.$$

Тобто пошук формул елементів діофантових наборів здійснюється у вигляді

$$\mathrm{a}=\frac{\mathrm{a}_0\mathrm{t}^6+\mathrm{a}_1\mathrm{t}^5+\mathrm{a}_2\mathrm{t}^4+\mathrm{a}_3\mathrm{t}^3+\mathrm{a}_4\mathrm{t}^2+\mathrm{a}_5\mathrm{t}+\mathrm{a}_6}{\mathrm{b}_0\mathrm{t}^6+\mathrm{b}_1\mathrm{t}^5+\mathrm{b}_2\mathrm{t}^4+\mathrm{b}_3\mathrm{t}^3+\mathrm{b}_4\mathrm{t}^2+\mathrm{b}_5\mathrm{t}+\mathrm{b}_6},$$

або у вигляді розкладів поліномів на добуток квадратних тричленів:

$$\mathrm{a}=\frac{(\mathrm{t}^2+\mathrm{a}_5\mathrm{t}+\mathrm{a}_6)(\mathrm{t}^2+\mathrm{a}_3\mathrm{t}+\mathrm{a}_4)(\mathrm{a}_0\mathrm{t}^2+\mathrm{a}_1\mathrm{t}+\mathrm{a}_2)}{(\mathrm{t}^2+\mathrm{b}_5\mathrm{t}+\mathrm{b}_6)(\mathrm{t}^2+\mathrm{b}_3\mathrm{t}+\mathrm{b}_4)(\mathrm{b}_0\mathrm{t}^2+\mathrm{b}_1\mathrm{t}+\mathrm{b}_2)}.$$

Як бачимо, для формування чисельника і знаменника можемо використовувати один базовий набір квадратних многочленів $at^2 + bt + cd$, коефіцієнти якого є цілими й належать деякій множині $a, b, c, d \in \{-m, -(m-1), \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, m-1, m\}$.

Спираючись на аналіз отриманих раніше A. Dujella, P. Gibbs формул, вважаємо за доцільне розглянути два випадки $a, b, c, d \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ та $a, b, c, d \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Умова, якій повинні задовольняти шукані числа

$$a^{(i)} = \frac{(t^2 + a_5 t + a_6)(t^2 + a_3 t + a_4)(a_0 t^2 + a_1 t + a_2)}{(t^2 + b_5 t + b_6)(t^2 + b_3 t + b_4)(b_0 t^2 + b_1 t + b_2)} = \frac{P_6^{(i)}}{Q_6^{(i)}} = \frac{p_i}{q_i},$$

приймається наступною

$$a^{(i)} \cdot a^{(j)} + 1 = r^2 \;\Rightarrow\; \frac{p_i}{q_i} \cdot \frac{p_j}{q_j} + 1 = \frac{p_i p_j + q_i q_j}{q_i q_j} = r^2.$$

Як легко побачити, доданки чисельника та знаменник є виразами з одного набору (множини) попарних добутків базових поліномів.

Сформулюємо алгоритм пошуку діофантових наборів раціональних чисел.

Алгоритм пошуку діофантових наборів раціональних чисел

1. Сформувати базовий набір поліномів $f_i = at^2 + bt + cd$, де $a, b, c, d \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ або $a, b, c, d \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.
2. Сформувати повний набір виразів $p_r = f_i \cdot f_j \cdot f_k$.
3. Сформувати повний набір виразив $p_{rs} = p_r \cdot p_s$ (доданки чисельників і знаменники).
4. Обчислити числових значення поліномів $p_{rs} = p_r \cdot p_s$ при $t = 2, t = 3, t = 5$ (якщо умова виконується в параметричному вигляді, то й виконується при конкретних значеннях параметра).
5. Виключити повтори (з метою зменшення варіантів перебору).
6. Здійснити пошук числових наборів, що задовольняють умові $ab + 1 = r^2$.
7. Для знайдених числових наборів відновити вирази, що їм відповідають.
8. Провести перевірку виконання умови $ab + 1 = r^2$ в аналітичному вигляді та відібрати ті, що задовольнять умові, а відповідно й числа, які задаються такими параметричними формулами.

Оцінимо тепер об'єм можливих обчислень (чисельну складність).

Базовий набір квадратних многочленів $at^2 + bt + cd$, коефіцієнти якого є цілими й належать множині $a, b, c, d \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ($\{-2, -1, 0, 1, 2\}$) складається з $6 \cdot 7^2$ ($4 \cdot 5^2$) многочленів (в цей набір входять многочлени з коефіцієнтом 1 при старшому степені). В загальному вигляді можливі конфігурації знаменника дають $6^3 \cdot 7^6$ або $6 \cdot 7^7$, якщо в двох квадратних многочленах брати за старший коефіцієнт одиницю. Аналогічно для чисельника.

Результати досліджень. Для пошуку наборів, що підходять (задовольняють умовам наведеним вище), з метою зменшення варіантів перебору розглядались числові значення цих поліномів при конкретних значеннях $t = 2, t = 3, t = 5$. Із отриманих числових значень вибирались ті, ля яких виконувалась умова $ab + 1 = r^2$, де a, b, r – раціональні числа (звичайні дроби). На основі відібраних значень будуються розрахункові формули. В якості окремого випадку можливих комбінацій отримано формули, які співпадають із окремими формулами A. Dujella, T. Piezas, P. Gibbs в межах прийнятих для вихідних формул обмежень:

$$a = \frac{(2t-1)(t^2 + 3t + 1)(t^3 + 3t^2 + t + 1)}{2(t-2)(t-1)(t+1)(t^2 + t + 1)},$$

$$b = \frac{2(t-1)(t+1)(t^2 + 2)(t^2 + t + 1)}{(2t-1)(t^2 + 3t + 1)(t^3 + 3t^2 + t + 1)},$$

$$c = \frac{(2t-1)(t^2 + 3t + 1)(t^3 + 3t^2 + t + 1)}{2(t-2)(t-1)t^2(t^2 + t + 1)}.$$

Висновки. Таким чином, в роботі проведено огляд підходів до пошуку діофантових наборів раціональних чисел. На основі проведеного аналізу сформульовано методику отримання формул для знаходження елементів діофантових наборів.

Список літератури

1. A. Dujella Diophantine m-tuples URL: https://web.math.pmf.unizg.hr /~duje/dtuples.html
2. A. Dujella A note on Diophantine quintuples. Algebraic Number Theory and Diophantine Analysis: Proceedings of the International Conference held in Graz, Austria, August 30 to September 5, 1998 (pp. 123–128). https://doi.org/10.1515/9783110801958.123
3. Andrej Dujella, On the size of Diophantine m-tuples, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 132 (2002), no. 1, 23–33, DOI 10.1017/S0305004101005515. MR1866322
4. Andrej Dujella, There are only finitely many Diophantine quintuples, J. Reine Angew. Math. 566 (2004), 183–214, DOI 10.1515/crll.2004.003. MR2039327
5. Bérczes, A. Dujella, L. Hajdu, Sz. Tengely, Finiteness results for F-Diophantine sets, Monatsh. Math. 180 (2016), 469-484.
6. Extending rational Diophantine triples to sextuples URL: https://mathoverflow.net/questions/233538/extending-rational-diophantine-triples-to-sextuple
7. A. Dujella, M. Kazalicki, M. Mikic, M. Szikszai, There are infinitely many rational Diophantine sextuples, Int. Math. Res. Not. IMRN 2017 (2) (2017), 490-508
8. J. Arkin, V. E. Hoggatt and E. G. Strauss, On Euler's solution of a problem of Diophantus, Fibonacci Quart. 17 (1979), 333-339.
9. M. Stoll, Diagonal genus 5 curves, elliptic curves over Q(t), and rational diophantine quintuples, preprint, 2017.
10. P. Gibbs, Some rational Diophantine sextuples, Glas. Mat. Ser. III 41 (2006), 195-203., P. Gibbs, A generalised Stern-Brocot tree from regular Diophantine quadruples, XXX Mathematics Archive math.NT/9903035
11. Жуков К. Д. Об обобщении метода Дюжелла // Матем. вопр. криптогр. / 4 (2013), 7–19