Divulgaciones Matemáticas Vol. 22, No. 1 (2021), pp. 64–89

Un breve recorrido histórico por el álgebra lineal y algunas de sus aplicaciones a la economía

A short tour along the history of linear algebra and some of its applications to economics

Ana M. Martín-Caraballo (ammarcar@upo.es)
Concepción Paralera-Morales (cparmor@upo.es)
Ángel F. Tenorio (aftenvil@upo.es)

Depto. de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide
Sevilla - España

Resumen

En el presente artículo trataremos diversos tópicos del álgebra lineal (y más concretamente del álgebra matricial) tanto desde una perspectiva histórica en la que se mostrará la evolución de diversos conceptos como desde su aplicación a la resolución de problemas económicos. En relación al recorrido histórico del álgebra lineal, expondremos los inicios de la misma y los principales hitos alcanzados en relación al estudio de las matrices, aunque no seremos exhaustivos por motivo de extensión. Con respecto al uso del álgebra lineal para resolver cuestiones económicas, mostraremos algunas de las aplicaciones más habituales y tradicionales a este respecto, haciendo especial énfasis en el análisis input-output y la teoría de juegos para la toma de decisiones.

Palabras y frases clave: álgebra matricial; aplicaciones a la economía; análisis input-ouput; teoría de juegos; introducción histórica.

Abstract

This article deals with several topics in the field of Linear Algebra (and more concretely Matrix Algebra), by considering both its application to solving economic problems and a historic approach showing the evolution of such concepts. Regarding the historic tour of Linear Algebra, we explain the first steps and the main milestones in the classical research on matrices, although we are not being exhaustive due to reasons of length. With respect to the use of Linear Algebra to solve economic questions, we show some of the most traditional and usual applications, emphasizing Input-Output Analysis and Game Theory, the latter for Decision Making, as its most characteristic examples.

Key words and phrases: matrix algebra; applications to economics; input-output analysis; game theory; historic introduction.

Recibido 11/03/21. Revisado 26/03/21. Aceptado 13/06/21.
MSC (2010): Primary 15-03; Secondary 01A50; 01A55.
Autor de correspondencia: Ángel F. Tenorio

1 Introducción

Al adentrarnos en el ámbito de la aplicación de las matemáticas a otras ciencias, podemos encontrarnos con situaciones cuya modelización consiste en la resolución de ecuaciones e inecuaciones de primer grado o lineales. Es entonces cuando el álgebra lineal se convierte en una herramienta que facilita y permite dar respuesta al problema matemático asociado a la situación del mundo real. La validez del álgebra lineal para tratar estas cuestiones se basa en que los sistemas de ecuaciones lineales son expresables matricialmente y, gracias a esta conversión, pueden aplicarse posteriormente múltiples procedimientos. En consecuencia, el tratamiento y resolución de sistemas lineales, matrices y determinantes (que se obtienen de ellos) se convierte en pieza clave para la resolución de problemas (por ejemplo, aquellos de tipo numérico o relativos a ecuaciones diferenciales) que modelizan situaciones del mundo real que nos rodea.

En el presente artículo, mostraremos cómo el interés y (nos atreveríamos a decir) la necesidad de resolver problemas algebraicos basados en ecuaciones lineales aparece ya en los albores de nuestra historia, pudiéndose encontrar múltiples ejemplos de su uso en los textos matemáticos más antiguos existentes. Como indican Kline [44] y Joseph [42], las tablillas cuneiformes de la Antigua Babilonia (que datan del año 3000 a.C.), los papiros Rhind y moscovita (entre el año 2000 y el 1500 a.C.) o los *Nueve Capítulos sobre el Arte de las Matemáticas* (hacia el s. X a.C.) contienen múltiples ejemplos de resolución de problemas prácticos de álgebra lineal para resolver cuestiones que interesaban en esta cultura, especialmente cuestiones con un fuerte componente económico.

A este respecto, Fedriani et al. [23] realizaron un estudio sobre cómo los sistemas de numeración habían ido apareciendo a lo largo de la historia en base a las necesidades económicas existentes en cada civilización y cómo dichas necesidades generaron diferencias significativas en sus respectivos sistemas como pueden ser la aparición de diferentes conceptos numéricos y de distintos niveles de representación numérica entre otras.

Pero el álgebra lineal no solo permite modelizar situaciones de índole económico, sino que muchísimas situaciones de otras ramas del conocimiento pueden ser modelizadas y tratadas mediante los objetos y resultados propios de este campo. Sin remontarnos al pasado y tocando temas de mayor actualidad, como son las cuestiones relacionadas con la informática, cualquier lenguaje de programación trata los datos como ‘arrays’ o, lo que es lo mismo, como tablas con un determinado número de filas y columnas; y que, por tanto, son modelizables matemáticamente por medio de vectores o matrices (según tengan más de una fila y una columna). Del mismo modo, cualquier matriz puede verse como una transformación que permite codificar y decodificar la información que se envía por un canal de comunicación. Estaríamos hablando de la teoría de códigos lineales, en la que incluso se podrían detectar y corregir los errores que se cometen al transmitir la información anterior por dicho canal por medio de unas matrices especiales llamadas de Hadamard. La detección y corrección de errores en la información transmitida es esencial para la transmisión de imágenes y documentos por Internet.

Un tercer ejemplo más geométrico (y con múltiples aplicaciones tanto al tratamiento de imagen por ordenador como a la robótica) se basa en el hecho que todos los movimientos en el espacio n-dimensional pueden representarse (y por tanto traducirse) como matrices cuadradas invertibles.

Ya que el álgebra lineal es una disciplina matemática que abarca un considerable número de nociones y resultados, el presente artículo va a centrarse en la parcela correspondiente al álgebra matricial. Más concretamente, comenzaremos exponiendo cómo se origina el concepto de matriz y cómo van apareciendo sus operaciones esenciales; para continuar, en una segunda etapa, con el estudio de sus aplicaciones a diversos problemas de índole económica. Por tanto, nuestro objetivo es doble: por un lado, recorrer la evolución histórica del álgebra matricial desde sus orígenes; y por el otro, explicar algunos de los tópicos económicos que pueden tratarse con el álgebra matricial. Finalizaremos el artículo indicando algunas conclusiones sobre la aplicación del álgebra matricial al estudio de problemas económicos tanto desde un punto de vista investigador como docente.

2 Evolución histórica

En esta sección expondremos cómo fueron surgiendo las distintas nociones pertenecientes al álgebra matricial en su correspondiente contexto histórico. Más concretamente, primero veremos su aparición en base al tratamiento matemático que se venía realizando en algunas de las culturas clásicas antiguas (como por ejemplo la Antigua India o China) y, hecho esto, comentaremos cómo se trabajaron y formalizaron dichos conceptos en las denominadas matemáticas modernas, procurando mostrar que dicha formalización requirió de un trayecto que duró varios siglos hasta su culminación a finales del s. XIX.

2.1 Matemáticas antiguas

El uso de las matrices (aunque sin usar esa terminología que aparecerá a mediados del s. XIX) en diversas civilizaciones clásicas de la antigedad puede encontrarse en la resolución y tratamiento de algunos de los problemas clásicos que se exponían en los documentos de esa época. No obstante, debe tenerse en cuenta que en ninguno de ellos se hace un desarrollo matemático formal de las nociones tratadas, sino que se exponían procedimientos aplicados a un problema concreto como guía para resolver problemas similares. Debe tenerse en cuenta que la primera aproximación a un cuerpo matemático cerrado con axiomas, definiciones y proposiciones no tendrá lugar hasta que Euclides elabore su *Elementos* hacia el año 300 a.C., aunque no aparecen ni conceptos ni resultados relativos al álgebra lineal, sino geométricos o pertenecientes a la teoría de números.

2.1.1 India

El matemático árabe Halayudha realizó un comentario en el siglo X en relación a la obra de otro matemático indio llamado Pingala, que vivió en la zona que actualmente conforma el estado de Kerala. Aunque se ha situado a Pingala en el siglo VII a.C., la tradición hindú afirmaba que él era el hermano menor del gran gramático indio Panini que vivió en el s. V a.C., siendo este el siglo en el que finalmente se le ubicó.

Pingala fue quién formuló la primera descripción conocida de un sistema de numeración binario, describiendo este sistema en base a la lista de métricas védicas y las sílabas cortas y largas. En su obra también pueden encontrarse las ideas básicas del mātrā-meru (que posteriormente se denominará sucesión de Fibonacci) y el meru-prāstāra (el conocidísimo triángulo de Pascal o de Tartaglia). Pero eso no es todo, ya que como puede verse en Joseph [42], daría una descripción de cómo formar una matriz.

Debe tenerse en cuenta que, para la Antigua India, el álgebra consistía en las actividades aritméticas y computacionales, no en la detección de patrones deductivos o procedimientos técnicos. En relación al álgebra lineal, se disponían de reglas para resolver las ecuaciones lineales y cuadráticas y los sistemas de las primeras. Solo se denominaba **incógnita** a la primera en la ecuación, recibiendo las restantes nombres de colores (negro, azul, amarillo, etc.) y usándose iniciales de palabras como símbolos. Esto llevaba a disponer de una simbología poco extensa pero muy clarificadora. Aunque los problemas y sus resoluciones se expresaban usando un estilo quasi-simbólico e indicando los pasos que se iban realizando, hay que indicar que se carecía de cualquier tipo de justificación sobre la validez de los métodos de resolución empleados.

En el año 628, Brahmagupta (598–665) escribió el *Brahma-sphuta-siddhanta* (que traducido vendría a ser *La ciencia perfeccionada de Brahma*). El decimoctavo libro de esta obra estaba dedicado al Álgebra y a la resolución de ecuaciones indeterminadas. Posteriormente Bhaskara (1114–1185) escribiría un libro titulado *Siddhānta Shiromani* (que podría traducirse como *Corona* o *Joya de los Tratados*) cuya segunda parte se denominaba *Bijaganita* (cuya traducción sería *Matemáticas por medio de semillas* o *algoritmos*) y estaba centrado en la aplicación de algoritmos de resolución para ecuaciones lineales y cuadráticas y de sus sistemas.

2.1.2 China

En esta civilización tampoco aparecería el nombre de matriz, pero sí su concepto tal y como atestiguaría la aparición de un cuadrado mágico 3×3 hacia el año 650 a.C.

La obra clave de las matemáticas en la Antigua China es el *Jiu Zhang Suan Shu* (o los *Nueve Capítulos sobre el Arte de las Matemáticas*). Era un texto que recopilaba todo el conocimiento matemático existente en China entre los siglos X y I a.C., aunque la primera versión conservada del texto data del año 179 d.C. Desafortunadamente, ni su autoría ni su fecha de composición son conocidas, existiendo teorías que los sitúan en la última dinastía Chin o en la primera dinastía Han (s. I a.C.). El libro se estructuraba como sigue: tras plantearse el enunciado de un problema, se enunciaba la solución del mismo seguida de una explicación sobre el método de resolución empleado. Dicho método podría ir desde una regla general hasta una secuencia de operaciones sin justificación alguna. En el año 263 d.C., el matemático y filósofo Liu Hui (circa 220–circa 280) realizó una serie de comentarios a las explicaciones que se recogían en el libro y que tienen tanto valor como la obra original comentada. En los 246 problemas que se recogen en los nueve capítulos de los que se compone la obra, se recoge todo el conocimiento matemático chino de la época, incluidos los relativos a la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Concretamente, el capítulo octavo, titulado *Fang Cheng* (que puede traducirse como *Método de las Tablas*), contiene 18 problemas de resolución de sistemas de ecuaciones simultáneas con dos o tres incógnitas e incluye el primer texto en el que se hace uso de las matrices para resolver sistemas lineales.

El método mostrado para resolver sistemas de ecuaciones lineales es esencialmente el que Gauss desarrollaría mil quinientos años después y que nosotros utilizamos actualmente. Usando la notación matricial del sistema $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$, se realizaban transformaciones por columnas para obtener otro equivalente $D \cdot \underline{x} = \underline{b}$, con D una matriz triangular superior. Hay que destacar que el uso de estas transformaciones obligaron a la introducción del concepto de número negativo y de la regla cheng-fu (más-menos) para operar con ellos.

El capítulo séptimo, titulado *Ying Buzu* (que vendría a significar *demasiado y no suficiente*), consiste en 19 problemas cuya resolución resulta ser un caso especial de la regla de Cramer para dos ecuaciones con dos incógnitas. Es decir, la cultura china introdujo el concepto de determinante en la historia y lo hizo unos dos mil años antes de su descubrimiento por el matemático japonés Seki Kowa (circa 1639–1708) en su obra *Kai Fukudai no Hô* (cuya traducción sería *Método de resolución de problemas disimulados*) de 1683. No sería hasta diez años después, en 1693, que el matemático y filósofo alemán Gottfried Willhelm Leibniz (1646–1716) llegara también a definir el concepto de determinante en la matemática europea y se le atribuyese históricamente su descubrimiento.

Volviendo a las matemáticas chinas y avanzando hasta la Edad Media, Zhu Shijie (circa 1260–circa 1320) introdujo una serie de métodos algebraicos generales y perfeccionó la simbología empleada, usando la exclusión sucesiva de incógnitas en su obra *Siyuan Yujian* (que significa *El espejo de jade para los cuatro elementos*) fechada en 1303. En su obra, las incógnitas se simbolizaban mediante los cuatro elementos de la cultura china: cielo, tierra, hombre y objeto. Su método se basaba en el uso del *tian yuan* (o *método de la incógnita celeste*), que simplemente consistía en la Regla de Ruffini para resolver ecuaciones; regla que sería introducida por Horner (1786–1837) en las matemáticas europeas medio siglo después de la obra antes referida.

2.2 Matemáticas modernas

Durante los siglos XVIII y XIX, buena parte de los principales matemáticos europeos tomaron parte en el desarrollo y formalización de los determinantes y sus propiedades. En el contexto de las matemáticas modernas, se considera mayoritariamente que la teoría de los determinantes se originó con el matemático alemán Gottfried Willhelm Leibniz (1646–1716), que utilizó los determinantes (aunque llamándolos resultantes) en 1693 [51] para resolver los sistemas de ecuaciones lineales. Como se indicó anteriormente, el matemático japonés Seki Kowa había introducido en el *wasan* (nombre de las matemáticas en Japón durante el periodo Tokugawa) gracias a su obra de 1683, no solo métodos basados en tablas como en la matemática china que ya hemos comentado, sino que también introdujo el concepto y los métodos generales de cálculo de la noción de 'determinante'. Concretamente, trabajó con determinantes de orden menor o igual que 5 y los utilizó para la resolución de ecuaciones, aunque no para sistemas de ecuaciones lineales.

Sería en 1748 cuando un matemático escocés, discípulo de Newton, llamado Colin Maclaurin (1698–1746) publicaría su libro *Treatise of Algebra* [55] y, en el capítulo XI, aparecería la resolución habitual de las ecuaciones lineales simultáneas mediante el método de eliminación de incógnitas. En esta misma obra, pero en su capítulo XII, Maclaurin describiría la solución alternativa de estos sistemas mediante determinantes y que consiste en la denominada Regla de Cramer, a quien Maclaurin atribuyó la regla que reproducía en su libro y de la que posiblemente se tendría conocimiento desde 1730. Maclaurin solo probó en su obra la regla de Cramer para sistemas lineales de orden 2×2 y 3×3, dejando indicado cómo habría que proceder en orden 4×4. Sería dos años después, en 1750, cuando el propio Gabriel Cramer (1704–1752) publicaría este método de resolución para sistemas lineales de orden $n \times n$ en el apéndice de su tratado de geometría titulado *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* [20], aunque sin incluir prueba alguna del resultado. Con las obras de Maclaurin y Cramer, tiene lugar históricamente el pistoletazo de salida para la publicación de trabajos sobre determinantes de manera regular y continuada.

Como curiosidad hay que indicar que en la obra *Artis magnae, sive de regulis algebraicis* (más conocida como *Ars Magna* [11]) del humanista italiano Gerolamo Cardano (1501-1576), publicada en 1545, aparece una regla para la resolución de sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas. Esta regla, que denominó '*regula de modo*', coincide en lo esencial con los cálculos correspondientes a la regla de Cramer de la que hemos hablado anteriormente y que aparece unos dos siglos después. Sin embargo, Cardano no daría una definición formal de determinante ni introduciría un método de cálculo u objeto que se pueda identificar con dicha noción.

En 1764 [3], el matemático francés Êtienne Bézout (1730–1783) introduciría métodos para el cálculo de determinantes al igual que haría el matemático francés Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796) en su obra *Mémoire sur l'élimination*, fechada en 1772 [79]. No obstante, el famoso determinante que le debe su nombre solo aparecería explícitamente en *Mémoire sur la résolution des équations* de 1771 [78]. También en 1772, el matemático, astrónomo y físico francés Pierre-Simon Laplace (1749–1827) generalizaría los trabajos de Bézout, Vandermonde y Cramer, llegando a afirmar que los métodos introducidos por Cramer y Bézout eran impracticables. La obra en cuestión en la que llevaría a cabo esta tarea se denominó *Recherches sur le calcul integral et sur le systeme du monde* [50], en la que (además de estudiar las órbitas de los planetas interiores) discutió la resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante el uso de determinantes (a los que también denominó resultantes tal y como había hecho Leibniz previamente, pero desconocedor de su trabajo), aunque sin llegar a realizar los cálculos. En esa misma obra, Laplace también introdujo el desarrollo general por una fila o columna de un determinante por medio de la suma ponderada alternada de menores del determinante de partida y que hoy denominamos desarrollo de Laplace.

Un año después, en 1773 [49], el matemático y astrónomo francés Joseph-Louis de Lagrange (1736–1813) desarrolló la teoría de las matrices de orden 3×3, demostrando muchas de las propiedades de estas matrices. También en esta obra se interpretó por primera vez un determinante como el volumen de un tetraedro (concretamente el formado por el origen de coordenadas y otros tres puntos). Hay que tener en cuenta que Lagrange realizó su estudio de manera independiente y que nunca llegó a establecer relación entre su investigación y la de Laplace y el resto de los matemáticos franceses que fueron coetáneos suyos y que trabajaron con determinantes y matrices.

Hemos de entrar en el siglo XIX para encontrarnos por primera vez con el término 'determinante', que sería introducido por el matemático y físico alemán Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855) en sus *Disquisitiones Arithmeticae*, publicada en 1801 [30]. No obstante, el objeto al que originalmente llamó determinante no coincide con el que disfruta hoy día de ese nombre, sino que se usaba para una expresión del discriminante de una forma cuadrática expresada en relación a un cierto módulo y lo denominaba de este modo porque ese objeto 'determinaba' las propiedades de la forma cuadrática en cuestión. Más aún, Gauss también expresó en esta obra los coeficientes de sus formas cuadráticas mediante 'arrays' rectangulares (i.e. matrices) y describió cómo se multiplicaban matrices y se calculaba la inversa de una matriz en el contexto de los 'arrays' de coeficientes de formas cuadráticas.

Debe tenerse en cuenta que con el término 'array' que hemos empleado, queremos referirnos a una distribución en formato tabular de datos expresados en filas y columnas. Este término es empleado como sinónimo del término 'matriz' en Computación e Informática, pero eliminando las connotaciones matemáticas que el segundo término tiene en relación a tener definida una estructura algebraica (de espacio vectorial en general y de anillo en el caso de matrices cuadradas de un determinado orden). Este era además el sentido en el que usaba Gauss las matrices ya que no llegó a tener conciencia de la noción de álgebra matricial, puesto que para él, el producto de matrices era simplemente un cálculo para obtener la composición de formas cuadráticas.

Ya hemos indicado que Gauss empleó el término determinante por primera vez en la matemática europea, pero refiriéndose a otro objeto matemático distinto al que hoy en día asociamos a ese término. Para usar el término 'determinante' en su sentido actual habría que esperar a que el matemático francés Augustin Louis Cauchy (1789–1857) leyera su *Essai sur les fonctions symétriques en la Académie des Sciences* del *Institute de France* y que publicaría bajo el título *Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment* en 1815 [12]. Esta obra convertiría a Cauchy en el autor más prolífico de su época en relación a la teoría de determinantes y sería la obra más completa de su tiempo. De hecho, en ella aparecen las demostraciones de todos los resultados obtenidos hasta la fecha (ya que Cauchy no consideraba correctas algunas de las pruebas ya existentes) y un considerable número de resultados nuevos sobre menores y adjuntos, destacando el teorema de multiplicación de determinantes. Este teorema permite expresar el determinante de un producto como producto de determinantes y es comúnmente conocido como la fórmula de Cauchy-Binet para dos matrices rectangulares de órdenes transpuestos. Como curiosidad, indicar que el matemático y físico francés Jacques-Philippe-Marie Binet (1786–1856) llegó de manera independiente al mismo resultado en su *Mémoire sur un systeme de formules analytiques, et leur applications à des considerations géométriques* [4], que presentó a la *Académie des Sciences* en la misma sesión que Cauchy en 1812.

Posteriormente, saldría a la luz la obra *Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes* en 1829 [13], también escrita por Cauchy. En ella se emplearía por primera vez el término 'tableau' al referirse a la matriz de coeficientes asociada a una forma cuadrática en n variables. En esa obra, se calculaban los autovalores de dicha matriz (cuadrada y definida) y aparecían los primeros resultados sobre diagonalización de matrices al expresar una forma cuadrática como suma de cuadrados. También se incluía en esta obra la noción de matrices similares, aunque sin dar nombre a dicha relación de equivalencia y demostrando el resultado principal para matrices similares en relación a la diagonalización de matrices y cálculo de autovalores: dos matrices similares tienen la misma ecuación característica, los mismos autovalores con la misma multiplicidad y, por ende, una es diagonalizable si y solo si lo es la otra. Otra propiedad básica de la diagonalización de matrices incluida en el trabajo comentado era la de que toda matriz simétrica real es diagonalizable.

El siguiente autor del que hablaremos en relación a los determinantes es el matemático alemán Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851), quien publicaría tres trabajos sobre determinantes en el *Crelle's Journal* durante el año 1841 [37, 38, 39]. En ellos, dio la primera formalización algorítmica de la definición de determinante, admitiendo que los términos de un determinante pudiesen ser números o funciones. El trabajo de Jacobi fue esencial para la noción de determinante ya que dotaron al concepto de tal relevancia que se hizo ampliamente conocido. Ese mismo año, el matemático inglés Arthur Cayley (1821–1895) publicaría su artículo sobre la geometría de la posición [14] y ésta sería la primera aportación de la matemática inglesa a la teoría de determinantes. La importancia de esta publicación reside en que este trabajo introdujo la notación empleada en la actualidad para los determinantes: la estructura tabular o 'array' de datos delimitada por una línea vertical a cada lado del 'array'.

Nótese que hemos hablado de la aparición del término 'determinante' pero no del término 'matriz', el cual aparecería casi cuatro décadas después de que Cauchy usase por primera vez el término 'determinante'. No obstante, antes de que se llegase a darle el nombre de 'matriz' al objeto que hoy conocemos como tal, muchos matemáticos europeos estuvieron trabajando con este objeto de forma directa o indirecta (esto último al resolver sistemas de ecuaciones lineales). Al hablar de la evolución histórica del 'determinante' ya hemos comentado algunos de estos casos, pero no podemos pasar por alto en este trabajo uno de los tópicos principales al hablar de matrices: la denominada eliminación gaussiana.

Cuando expusimos en su momento la matemática china, ya hicimos referencia a cómo se dispuso de esta técnica para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, pero no hemos indicado cómo apareció en la matemática europea y lo erróneo de su nombre. Un magnífico estudio sobre esta cuestión se debe a Grcar [33, 34]. A este respecto, el matemático y físico inglés Isaac Newton (1642–1727), cuando estaba revisando entre 1669 y 1670 una versión de un manual sobre álgebra que el impresor John Collins quería editar, insertó una anotación al margen indicando su preocupación sobre la carencia en todos los manuales de la época de un apartado explicando la resolución de sistemas de ecuaciones y su interés en completar esa laguna del conocimiento incluyendo un capítulo a la obra que se iba a editar. Sin embargo, al no llevarse a cabo la edición de este manual, Newton optó por comenzar a escribir un manuscrito que revisó repetidas veces y que quedó inconcluso, datando la última versión de 1684. Esta obra, que iba a titularse *Arithmeticae Universalis*, no llegó a publicarse y Newton hizo entrega de sus notas de clase sobre álgebra a la Universidad de Cambridge, en la que había impartido la cátedra lucasiana de matemáticas hasta 1702 y que se basaron en los borradores de sus manuscritos. Su sucesor en la cátedra, William Whiston (1667–1752), editó las notas de Newton en latín bajo el título de su obra inconclusa en 1707 [62] tras dejar su vida académica y en la que aparecían sus explicaciones sobre cómo resolver los sistemas de ecuaciones tratando las ecuaciones dos a dos. No solo se exponía la regla correspondiente al método de eliminación o reducción (al que él llamó de 'exterminación') que es el que nos ocupa en relación a la evolución histórica de los conceptos de 'matriz' y 'determinante' que estamos considerando en el presente trabajo, sino que también incluía las reglas correspondientes a los métodos de igualación y sustitución. Todos estos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones estaban presentados para aplicar a sistemas de dos o más ecuaciones sin que éstas necesariamente tuvieran que ser lineales.

Aunque el trabajo de Newton es el primer texto de álgebra en las matemáticas europeas que abordó la explicitación de unas reglas para la resolución de sistemas de ecuaciones, las múltiples revisiones de Newton y su reticencia a que se publicasen sus notas (las primeras versiones de su *Arithmeticae Universalis* aparecieron sin autoría) llevaron a que se publicase previamente, en 1690, el *Traité d'Algebre* [70] del matemático francés Michel Rolle (1652–1719). En esta obra aparecería la primera descripción de la eliminación gaussiana bajo el nombre de método de sustitución y formulado específicamente para sistemas de ecuaciones lineales. Sin embargo, los textos de álgebra que surgieron con posterioridad a los de Newton y Rolle tomaron como referencia el desarrollo hecho por Newton para la resolución de sistemas. De estas obras, caben destacar dos: el *A Treatise of Algebra* [71] del matemático inglés Thomas Simpson (1710–1761), que fue publicada en 1745 y que introdujo la regla de adición y sustracción de ecuaciones (i.e. combinaciones lineales de ecuaciones); y la del matemático francés Sylvestre François Lacroix (1765–1843) de 1804 [48], en la que por primera vez se usa el término 'eliminación' para referirse a este método.

En vista de lo anterior, cabría preguntarse cuál fue la aportación de Gauss al respecto del método de eliminación que lleva su nombre y cuyos orígenes en las matemáticas modernas se remontan a Newton y Rolle tal y como acabamos de exponer. Concretamente, la contribución de Gauss al método de eliminación (que él denominó como '*eliminationem vulgarem*' en su obra de 1809 [31]) consistió en su uso para la resolución de las ecuaciones normales que llevan a soluciones aproximadas por mínimos cuadrados de sistemas lineales de ecuaciones y en la introducción de una notación y un procedimiento algorítmico para la eliminación simétrica que permitía una sistematización, simplificación y mayor velocidad en la realización de los cálculos (como puede verse en [32]), lo cual conllevó a su uso extendido por parte de todos los calculistas profesionales en el s. XIX y a la obtención de diferentes variantes algorítmicas del método de eliminación para la simplificación y aumento de velocidad en los cálculos. El más conocido de estás variantes es el denominado método de Gauss-Jordan que idearon de manera independiente el geodesista alemán Wilhelm Jordan (1842–1899) y el matemático luxemburgués Bernard-Isidore Clasen (1829–1902) en 1888 ([41] y [17], respectivamente).

Hecho este inciso en relación a la resolución de sistemas de ecuaciones (lineales), volvemos a la cuestión que nos ocupaba en relación al surgimiento y desarrollo de la noción de 'matriz', ya que la aparición de la noción de matriz y del álgebra de matrices permitió traducir toda la notación y procedimientos algorítmicos para la resolución de sistemas de ecuaciones, simplificando y automatizando aún más los procedimientos y cálculos involucrados.

Concretamente, hubo que esperar a 1850 [72] para que el matemático inglés James Joseph Sylvester (1814–1897) acuñase finalmente el término 'matriz', que definió como una estructura tabular rectangular de términos de la que se puede obtener diversos determinantes como estructuras tabulares cuadradas almacenadas en su interior. Cayley comprendería casi de inmediato la relevancia y significado del concepto de matriz que había introducido su amigo Sylvester, por lo que trabajó en esta noción publicando el artículo titulado *Remarques sur la notations de fonctions algébriques* en 1855 [15]. Esta nota introducía el concepto de inversa de una matriz y el de producto de dos matrices, relacionando la estructura matricial con una forma cuadrática y bilineal. Simultáneamente, en 1853, el matemático y físico irlandés William Rowan Hamilton (1805–1865) escribió sus *Lectures on Quaternions* [35], en la que haría uso del cálculo matricial para estudiar los cuaterniones y obtener para estos objetos varios resultados que serían formalizados para las matrices por Cayley en su memoria de 1858 [16].

Esta memoria se tituló *Memoir on the theory of matrices* y en ella no solo aparece la primera definición abstracta de matriz (mostrando cómo los 'arrays' que se habían estado utilizando hasta ese momento en matemáticas eran casos particulares de su concepto), sino que también incluye el primer tratamiento formal de las operaciones con matrices y sus principales resultados. Así, Cayley dio la definición algebraica de las siguientes operaciones: suma, resta y producto de matrices, producto de matriz por escalar e inversión de matrices. En el caso de la inversa de una matriz, la construyó explícitamente en términos de determinantes. Más aún, introdujo la notación matricial para escribir un sistema de ecuaciones lineales, representando las ecuaciones como filas y las incógnitas como columnas. En la obra comentada, Cayley demostró que dada una matriz de orden 2×2, dicha matriz anula a su polinomio característico. Aunque dejó indicada también la prueba para matrices 3×3, afirmó que no disponía de los requisitos necesarios para demostrar la propiedad considerando una matriz arbitraria de orden arbitrario $n \times n$. Este resultado se conoce como Teorema de Cayley-Hamilton porque, previamente al estudio de Cayley, Hamilton [35] describió una demostración de este resultado para orden 4×4. No obstante y como veremos en breve, habría que esperar al matemático alemán Ferdinand Georg Fröbenius (1849–1917) para disponer del resultado general para matrices de orden $n \times n$.

Aproximadamente una década más tarde, en 1870, el matemático francés Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922) escribe su *Traité des substitutions et des équations algébriques* [40], en el que aparece descrita por primera vez la forma canónica que lleva su nombre al trabajar con las sustituciones lineales sobre un cuerpo finito de orden primo.

En 1878, Fröbenius escribe su obra *Über lineare substitutionen und bilineare formen* [40], sin tener conocimiento del trabajo llevado a cabo por Cayley y que hemos comentado anteriormente. Esta obra se convertiría en uno de los principales referentes sobre la teoría de matrices. Aunque sin emplear el término 'matriz', Fröbenius trabajó con coeficientes de formas cuadráticas. También incluyó demostraciones de resultados fundamentales sobre matrices canónicas como representaciones de clases de equivalencia de matrices. A este respecto, mencionó explícitamente los trabajos previos de los matemáticos alemanes Leopold Krönecker (1823–1891) y Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897) publicados en 1874 [46] y 1868 [82] respectivamente, pero indicando que eran casos particulares de los resultados que él había obtenido. Pero esta obra de Fröbenius no se limitó solo a las cuestiones ya indicadas, sino que incluía la demostración general del Teorema de Cayley-Hamilton, que solo había sido demostrada hasta orden 4×4. Además, este trabajo contenía la primera definición formal del rango de una matriz (usada cuando trabajaba con formas canónicas) y de matriz ortogonal.

No es hasta 1896 que Fröbenius tuvo conocimiento de la obra de Cayley en [16] sobre la teoría de matrices y es entonces que Fröbenius comenzó a emplear el término 'matriz'. De este modo, su artículo de 1896 [26] incluía nuevamente una demostración general del Teorema de Cayley-Hamilton para matrices cuadradas de cualquier orden; atribuyendo el mérito de dicha demostración al propio Cayley, que como ya indicamos antes no había sido capaz de conseguirla.

Fröbenius también fue primordial en el estudio de las matrices positivas, puesto que sus artículos de 1908 [27] y 1909 [28] sobre este tipo de matrices contienen los resultados esenciales y fundamentales sobre éstas, incluso a día de hoy. Es más, la teoría sobre matrices positivas y matrices no negativas recibe el nombre de Teoría de Perron-Fröbenius ya que los dos artículos anteriores junto con el de 1912 [29] y el previo del matemático alemán Oskar Perron (1880–1975) publicado en 1907 [66], crean el cuerpo teórico de los resultados relativos a estos dos tipos de matrices, siendo el resultado principal el denominado Teorema de Perron-Fröbenius. La demostración para las matrices cuadradas reales de términos positivos se debe a Perron [66] que probó la existencia de un único autovalor real positivo (llamado raíz de Perron) que es mayor que el módulo de cualquier otro autovalor (incluidos los autovalores complejos) de la matriz y la existencia de un autovector asociado a este autovalor con todas sus coordenadas positivas. Posteriormente en 1912, Fröbenius [29] extendería el resultado de manera no trivial a cierto tipo de matrices no negativas: las matrices no negativas irreducibles, concepto que introdujo en ese trabajo. Debe tenerse en cuenta que los cuatro artículos indicados en el presente párrafo se consideran igualmente claves para el origen y estudio de los métodos iterativos de las ecuaciones lineales reales (véase Rheinboldt y Vandergraft [69]).

Otro concepto importante dentro del álgebra lineal es el de nulidad de una matriz de orden $m \times n$, que hoy en día podemos identificar con la dimensión del núcleo o espacio nulo de dicha matriz, pero que Sylvester introdujo y definió formalmente en 1884 [73] como un valor k tal que todos los menores de orden $n - k + 1$ de la matriz se anulaban. Este concepto surge al estudiar propiedades invariantes en las matrices bajo ciertas transformaciones, esencialmente de tipo lineal. Una de las propiedades demostrada en ese trabajo era la ley de nulidad de Sylvester, según la cual la nulidad de una matriz está acotada superiormente por la nulidad del producto de esa matriz por cualquier otra por la que se pueda multiplicar y esta segunda nulidad está a su vez acotada superiormente por la suma de las nulidades de las dos matrices multiplicadas.

Con el comienzo del siglo XX debemos volver a tratar la noción de determinante. Aunque existe constancia de la existencia de una definición formal y rigurosa de la noción de determinante por parte de Weierstrass y de Krönecker desde mediados de la década de 1860 y de su uso en sus respectivas lecciones, la comunidad matemática en general tendría que esperar a 1903 para que dichas definiciones aparecieran en sus obras póstumas. En el caso de Weierstrass, el determinante se definía como función homogénea, lineal y normada tal y como aparecería en su *Zur Determinantentheorie* [84]. Por su parte, la definición de Krönecker sería publicada en *Vorlesungen über die Theorie der Determinanten* [47], como parte de las lecciones que impartía sobre determinantes, los cuales evaluaba usando la función delta de Krönecker que el creó y que resulta ser el primer tensor utilizado en las matemáticas. Con las dos publicaciones mencionadas, se da por lo general como completamente desarrollada la teoría moderna de determinantes. Sin embargo, la teoría de matrices requeriría de algo más de tiempo para disponer de una teoría completamente aceptada por la comunidad matemática (todo ello pese a que solemos definir los determinantes a partir de las matrices). En cualquier caso, los trabajos de matemáticos como Cayley, Fröbenius, Weierstrass y Krönecker fueron claves y esenciales para que los términos 'matriz' y 'determinante' fuesen de uso y práctica común en el campo de las matemáticas.

No queremos concluir el presente apartado sin hacer algunas indicaciones a las obras que entendemos sustentarían la teoría de matrices en las matemáticas actuales y la han convertido en una de las herramientas esenciales para la inmensa totalidad de ramas de las matemáticas. En primer lugar, habría que tener en cuenta la obra *Introduction to Higher Algebra* del matemático americano Maxime Bôcher (1867–1918) fechada en 1907 [5]. Posteriormente, aparecerían los tres textos más influyentes sobre álgebra matricial en la década de 1930, dos de ellos escritos por el matemático inglés Herbert Westren Turnbull (1885–1961) en 1928 [75] y 1932 [76] y el tercero por el matemático neozelandés Alexander Craig Aitken (1895–1967) en 1939 [1]. Estas obras llevarían al punto culmen de la teoría de matrices: la publicación de *An Introduction to Linear Algebra* por el matemático ruso Leonid Mirsky (1918–1983) en 1955 [56]. Esta obra mostraría la importancia de la teoría de matrices dentro de las matemáticas y la posicionó como uno de los tópicos matemáticos esenciales para estudiantes universitarios de matemáticas.

2.3 Una visión de los "nombres" a lo largo del tiempo

En las Figuras 1 a 3 se pretende dar un rápido y breve repaso visual a la evolución histórica de los conceptos citados en el apartado anterior. Además, dicho gráfico permite observar cómo el auge en el estudio de las matrices y determinantes tuvo lugar durante los siglos XVIII y XIX.

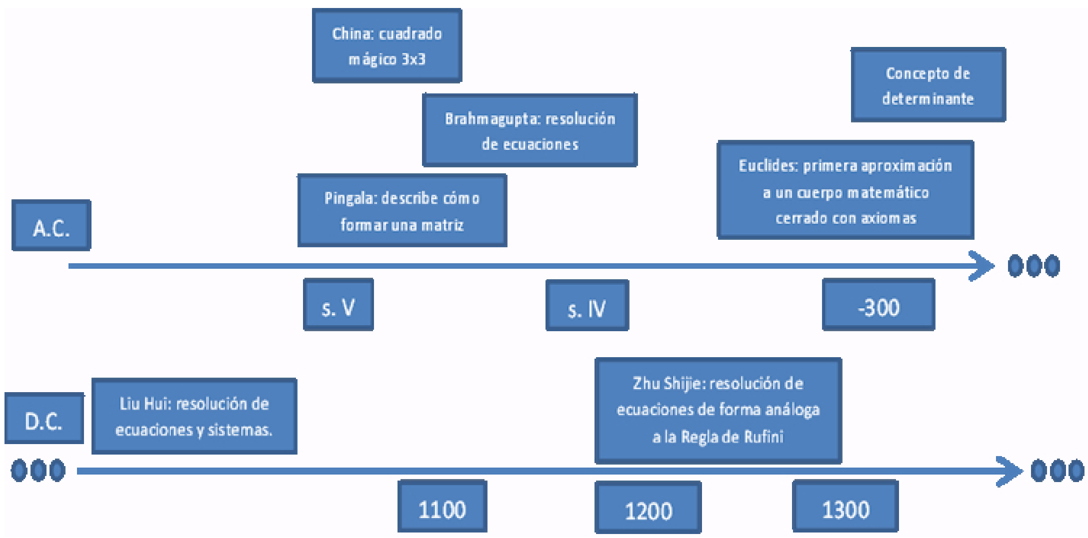

Figura 1: "Visión" de los "nombres" hasta 1400.

3 Algunos conceptos económicos que utilizan matrices

En la presente sección, nos centraremos en posibles aplicaciones de las matrices en el ámbito de la modelización de problemas económicos. Partiendo del hecho de que dichas aplicaciones pueden ser múltiples y variadas, nuestro objetivo solo es mostrar su utilidad en este campo sin llegar a ser exhaustivos. En este sentido y a modo de visión general previa, debe tenerse en cuenta, como ya se comentó en la introducción, que el álgebra matricial y la teoría de matrices pueden utilizarse en la resolución numérica tanto de sistemas de ecuaciones lineales como de ecuaciones diferenciales (ordinarias y en derivadas parciales). Además, las matrices surgen de forma natural y de manera directa o indirecta en múltiples campos de las ciencias experimentales, técnicas y sociales. En la presente sección expondremos cómo la teoría de matrices resulta una herramienta de gran utilidad para estudiar fenómenos económicos.

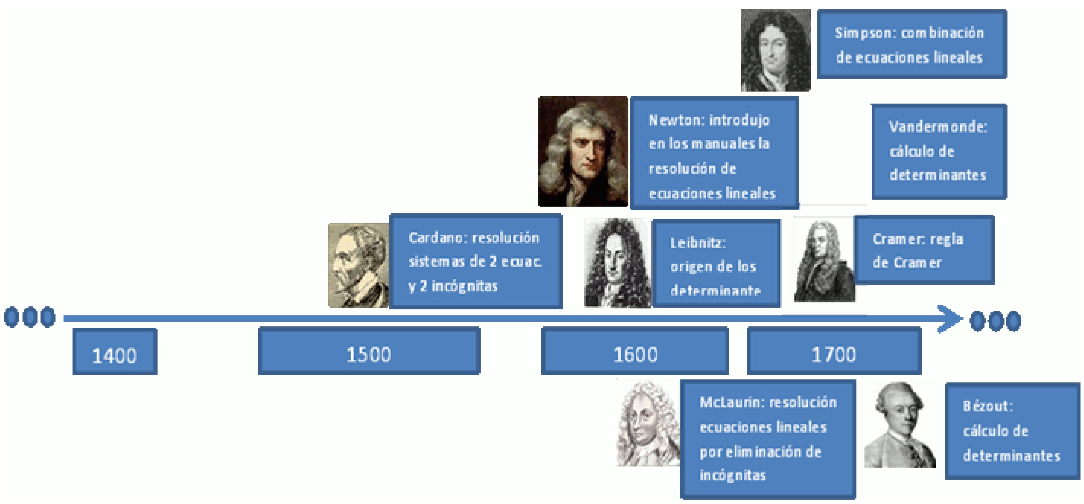

Figura 2: "Visión" de los "nombres" desde 1400 hasta 1800.

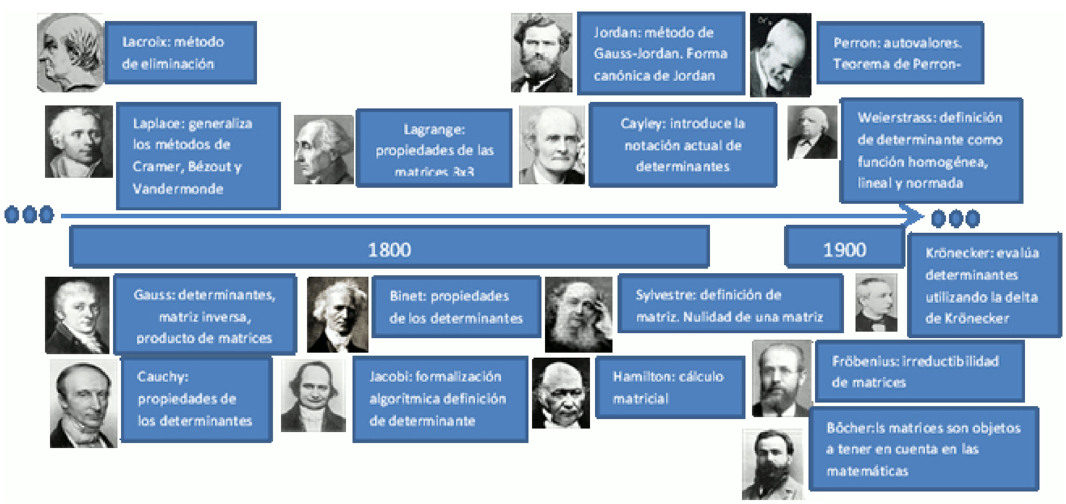

Figura 3: "Visión" de los "nombres" en 1800 y principios de 1900.

3.1 Análisis Input-Output

El economista ruso-americano Wassily Wassilyevich Leontief (1906–1999) introdujo y desarrolló los fundamentos del Análisis Input-Output en tres artículos claves que datan de 1936 [52], 1941 [53] y 1966 [54]. Llevó a cabo el desarrollo de esta herramienta para el estudio de las interrelaciones existentes entre los diferentes sectores económicos (o actividades económicas) en una economía moderna y para ello se valió del algebra matricial para medir la estructura de la misma. Tal fue la relevancia de la herramienta desarrollada y de su aplicación a problemas económicos que fue galardonado con el Premio Nobel en Ciencias Económicas en 1973.

Sin embargo y aunque Leontief es considerado como el padre del Análisis Input-Output, ha de tenerse en cuenta la existencia de otros autores anteriores que pueden considerarse como precursores de los trabajos de Leontief, ya que éstos habían expuesto parte de la infraestructura técnica que sustenta el Análisis Input-Output. En este sentido, la estructura básica de las tablas (matrices o 'arrays') input-output fue establecida por el economista francés François Quesnay (1694–1774) en su *Tableau Economique* en 1758 [67] y 1766 [68]. En esta obra se representaba, por primera vez, la relación entre las compras y las ventas de las industrias de una economía concreta. Dicha representación gráfica se llevaba a cabo mediante un 'array' en el que se representaban los valores numéricos de las compras y ventas realizadas y que se considera el germen de las matrices input-output (o matrices de transacciones) que son la herramienta básica de trabajo en el Análisis Input-Output.

No obstante, Quesnay solo mostraría la representación mediante una tabla y no daría una formulación teórica concisa. Precisamente esa fue la aportación del también economista francés Léon Walras (1834–1930), uno de los pioneros en la matemática económica y del desarrollo de la teoría del equilibrio general, en la que se engloba el Análisis Input-Output. En 1874, Walras [83] adaptó la obra de Quesnay e introdujo en el modelo las compras de los consumidores finales, además de dar la primera representación económica de una tecnología. Para ello, Walras usó un conjunto de coeficientes productivos para relacionar las cantidades necesarias del producto de cada sector para obtener una unidad de un producto concreto a niveles de producción total de dicho producto. Estos coeficientes coinciden, en lo esencial, con los coeficientes técnicos (o tecnológicos) que se usan en la actualidad en la matriz de coeficientes técnicos o matriz tecnológica.

El valor añadido que tuvo el trabajo de Leontief consistió en que su modelo simplificaba la formulación teórica del modelo de Walras por medio de dos hipótesis: considerar que el comportamiento de la tecnología y del mercado se mantiene constante en el tiempo. En base a estas hipótesis, los datos disponibles de un período temporal anterior podrían usarse para prever el comportamiento futuro de la economía y del mercado. Más concretamente, el comportamiento futuro de la economía se reducía a un producto de la matriz técnica de la economía y, por tanto, simplemente consistía en operaciones matriciales.

Los modelos input-output combinan las compras intermedias (entre sectores industriales) y las finales (a consumidores finales y gobierno), además de insertar las correspondientes ventas intermedias y finales. Precisamente, el Análisis Input-Output resulta ser uno de los modelos intersectoriales más populares en la actualidad. En este sentido, las agencias nacionales de estadísticas elaboran las tablas input-output de las economías nacionales y regionales en determinados períodos de años (actualmente cada lustro), usando un número limitado de sectores en función del nivel de agregación de los mismos. Más aún, la Organización de Naciones Unidas ha fomentado el uso del Análisis Input-Output como una herramienta útil y esencial para la planificación de la economía de países en vía de desarrollo, auspiciando un sistema estándar para las contabilidades económicas nacionales usando un modelo input-output (véase [63, 64, 65]).

Por todo lo anterior, el Análisis Input-Output tiene una amplia aceptación y uso en gran número de las ramas de las que consta la Economía. No obstante, su aceptación general no tuvo lugar hasta la década de 1950 con los adelantos en el software y equipos informáticos de modo que se pudiera empezar a manejar el volumen de datos almacenados en las tablas input-output y realizar de manera automática y rápida las operaciones con las mismas. A modo de ejemplo, queremos indicar algunos de los distintos ámbitos que emplean esta técnica matricial: sistemas de cuentas nacionales, elaboración de tablas input-output, economía medioambiental, análisis regional y multirregional, análisis input-output estocástico (donde los términos de la matriz input-output son variables estadísticas), equilibrio general aplicado, matrices de contabilidad social (SAM), política económica o análisis de la productividad, innovación y empleo.

El modelo básico del Análisis Input-Output se caracteriza por el estudio de los datos económicos de los sectores productivos existentes en una determinada región geográfica. Cada sector en la economía produce una serie de bienes a la vez que consume tanto sus productos como los producidos por otros sectores. En consecuencia, cada sector productivo es considerado tanto productor (y los bienes se denominan entonces 'outputs') como consumidor (denominándose 'inputs' los bienes). Estos flujos intersectoriales de compra y venta entre sectores productivos de una economía se miden en unidades monetarias en un período determinado de tiempo (que suele ser de un año). Estas mediciones pueden resumirse distribuyendo estos valores en una matriz, que se denomina tabla de flujos intersectoriales o matriz input-output de la economía. Esta matriz almacena toda esta información y resulta ser la herramienta esencial en el Análisis Input-Output. Con ella se puede generar toda la información necesaria de la economía, permitiendo prever el comportamiento de la misma en el futuro.

La construcción de la matriz de flujos intersectoriales de una economía con n sectores productivos se basa en situar las ventas del sector i al sector j en el término (i, j) de dicha matriz. En consecuencia, la fila i de la matriz viene a representar la distribución de las ventas realizadas por el sector i a los sectores (incluido él mismo) de la economía bajo estudio. Análogamente, si llevamos una interpretación por columnas de la matriz, la columna j representará las compras (consumo de producción) realizadas por el sector j a todos los sectores (incluido el consumo de su propia producción) de la economía. A los datos relativos a los flujos de producción entre los sectores productivos, podemos añadir los datos relativos de consumo de la producción de cada sector llevada a cabo por los consumidores finales (que vienen a ser los usuarios de los productos, el gobierno e incluso las exportaciones). Estos datos requieren la inclusión de columnas adicionales al modelo matricial que permitan registrar las ventas del sector en cuestión a cada uno de los tres colectivos indicados. Debe tenerse en cuenta que solo se añaden columnas y no filas, ya que los consumidores finales no son sectores productivos y por tanto no producen un producto final que puedan vender y que sea consumido por otros sectores o alguno de los colectivos considerados como consumidores finales. De este modo, pasamos de una matriz cuadrada que representa las transacciones entre sectores productivos (la matriz de flujos intersectoriales) a una segunda matriz rectangular en la que aparecen los consumidores finales de los productos realizados por los sectores productivos, Los consumidores finales suelen representarse conjuntamente en una única columna, denominada de demanda final (aunque podría desagregarse la información en columnas independientes llegado el caso). La matriz rectangular obtenida al considerar la columna de demanda final se denomina matriz de transacciones.

Si definimos la matriz de flujos intersectoriales como $Z = [Z1| \dots |Zn]$ por sus columnas Z_i y denotamos respectivamente por Y y por X al vector de demanda final y al vector de producción total de la economía, entonces los términos X_i e Y_i son respectivamente la producción total y demanda final del sector i. En consecuencia, el modelo input-output puede expresarse haciendo uso del Álgebra Lineal por medio de la siguiente ecuación vectorial:

$$X = Z_1 + \cdots + Z_n + Y. \tag{1}$$

Desafortunadamente, la matriz de transacciones se limita a describir el comportamiento actual de la economía como si de una foto fija se tratase. Para prever los posibles cambios en la producción final de cada sector productivo (es decir, el vector X) en función de los cambios que tengan lugar sobre la demanda final (el vector Y), debemos considerar una matriz cuadrada A en la que intervengan todos estos datos. Esto se consigue relativizando la matriz de flujos intersectoriales y obteniendo la denominada matriz tecnológica o de coeficientes técnicos. En esta matriz, el término (i, j) representa el valor del bien comprado al sector i por el sector j, pero relativizado por unidad monetaria respecto de la producción final del sector j. Por tanto, las columnas de la matriz A se obtienen con una simple reescala de las columnas de la matriz Z:

$$A_j = \frac{1}{X_j} \cdot Z_j$$

Como consecuencia, la matriz A nos proporciona información sobre la estructura interna de la economía y podemos usarla tanto para comparar distintos períodos temporales de una economía concreta como para comparar distintas economías entre sí. Haciendo uso de la matriz A de coeficientes técnicos, el modelo input-output puede representarse mediante la siguiente ecuación matricial (o equivalentemente sistema de ecuaciones lineales):

$$A \cdot X + Y = X$$

reflejando las relaciones existentes entre el vector X de producción total y el vector Y de demanda final:

$$Y = (A - Id) \cdot X \qquad \text{y} \qquad X = (A - Id)^{-1} \cdot Y,$$

donde Id es la matriz identidad de orden n y la potencia -1 representa la inversa matricial. Desde un punto de vista puramente económico, las matrices tecnológicas A para las cuales existe la inversa $(A - Id)^{-1}$ son de gran interés y reciben el nombre de matrices productivas. El interés de dichas matrices radica en que una economía con tal matriz tecnológica puede producir una producción total por parte de los sectores productivos que satisfaga cualquier demanda final por parte de los consumidores finales. Una propiedad tan relevante como esta en el ámbito del Análisis Input-Output puede ser traducida y tratada como un simple problema de álgebra matricial con las técnicas propias del Álgebra Lineal.

3.2 Teoría de Juegos

Como disciplina tanto matemática como económica, la Teoría de Juegos se ocupa de la modelización y análisis de situaciones de conflicto y cooperación entre decisores racionales e inteligentes (véase [58]). Más concretamente, estudia el comportamiento racional en la toma de decisiones de dos o más agentes (denominados jugadores) a la hora de afrontar una situación de interacción (que se denomina juego), teniendo en cuenta que tanto las decisiones propias como las del resto de jugadores afectan en la toma de decisión.

En un juego, cada jugador busca la estrategia óptima para alcanzar sus objetivos y tomar las decisiones en base a dicha estrategia que también dependerá del comportamiento previsto de los otros jugadores y del que está observando durante el propio juego con las correspondientes adaptaciones a la estrategia de partida. Para ello, el jugador debe ponderar tanto el nivel de coincidencia como de enfrentamiento de sus objetivos con respecto a los de los demás jugadores; una vez realizada esta ponderación y en base a la misma, el jugador tendrá que decidir si le interesa cooperar o enfrentarse con todos o solo con algunos de los jugadores.

El objetivo de un juego es buscar una solución óptima del mismo por medio de una descripción de las decisiones que debería tomar cada jugador en base a las acciones de todos los jugadores y determinando cuál sería el resultado teniendo en cuenta todas las combinaciones posibles en la toma de decisión.

Por tanto, un juego viene definido simplemente por un conjunto de jugadores, un conjunto de movimientos (llamados estrategias) para esos jugadores y una especificación de recompensas para las posibles combinaciones de estrategias.

La ventaja de la Teoría de Juegos como herramienta de análisis en la toma de decisiones reside en que existen muchas situaciones basadas en la interacción entre agentes que, a priori, pueden no tener relación alguna y habría que resolver específicamente; sin embargo, cuando se modeliza como un juego resulta que comparten una misma estructura que basta analizar una única vez para llevar a cabo la toma de decisiones independientemente del problema real que modeliza y que, tras resolverlo teóricamente, puede trasladarse la solución a la situación concreta para dar respuesta a nuestro problema del mundo real.

Dentro de la Teoría de Juegos, surge una división de manera natural que los diferencia entre los no cooperativos y los que sí lo son. Desde la perspectiva más clásica, los juegos cooperativos son aquellos que permiten la posibilidad de llegar a acuerdos vinculantes entre jugadores mediante mecanismos preestablecidos (véase [36]). Sin embargo, en los juegos no cooperativos, cada jugador debe centrarse única y exclusivamente en su beneficio personal, estando habilitadas todas las posibilidades de cooperación entre jugadores (véase [77]).

Desde sus comienzos, la Teoría de Juegos se plantea como herramienta para comprender cómo funcionan los fenómenos sociales y económicos. Como muestra de esta afirmación, indicaremos algunos de los trabajos aparecidos con anterioridad al s. XX y que pueden considerarse precursores de la Teoría de Juegos. En este sentido, el matemático francés Pierre-Rémond de Montmort (1678–1619) publicaría en 1713 [57] un ensayo en el que aparecen por primera vez el concepto de estrategia mixta y la regla minimax en el contexto de los juegos de azar.

En 1785 [18], el político y matemático francés Marie-Jean-Antoine Nicolas de Caritat, marqués de Condorcet (1743–1794), publicó su principal obra sobre sistemas electorales, en el que introduce el Teorema del Jurado y la Paradoja de Condorcet, según las cuales el criterio de preferencia de la mayoría no permite obtener un vencedor claro. De hecho, también se incluye en la obra el denominado método de Condorcet para seleccionar al candidato que ganaría por mayoría en cualquier emparejamiento contra otro candidato, si existe tal candidato. Esta técnica es esencial en Teoría de Juegos cuando se quieren establecer preferencias para seleccionar candidatos. De manera paralela, en 1770, el matemático y político francés Jean-Charles de Borda (1733–1799) expone su método de elección de un único candidato vencedor mediante ordenación de los candidatos por cada votante según sus preferencias y que se conoce como recuento de Borda [6].

En el campo de la Economía, la Teoría de Juegos aparece con el tratamiento matemático de los problemas de duopolios y oligopolios. En este sentido, la primera referencia habitualmente referida se debe al matemático francés Antoine Augustin Cournot (1801–1877), quien desarrollo en 1838 [19] un modelo en competición imperfecta entre dos empresas (duopolio) que buscan un equilibrio con sus decisiones. Posteriormente se iría complicando el modelo con el estudio realizado por autores posteriores para corregir las problemáticas que iban surgiendo a partir de dicho modelo y sus modificaciones. Ejemplo de ello son las obras de los economistas y matemáticos Joseph-

Louis-François Bertrand (1822–1900) y Francis Ysidro Edgeworth (1845–1926). Precisamente este último publicó en 1881 la obra *Mathematical Psychics* [22], en la que se hacía un estudio de los equilibrios competitivos en base a un principio de incertidumbre que iba reduciéndose a media que aumentaba el número de jugadores. Este tratado es el más relevante del s. XIX sobre Teoría de Juegos, llegando a ser la primera aparición de muchas de las nociones y procedimientos que posteriormente en el s. XX se volverán esenciales en dicho campo.

Con el inicio del s. XX comenzarán las primeras aportaciones en publicaciones matemáticas de la Teoría de Juegos, estableciéndose resultados formales y buscando el formalismo de los conceptos y procedimientos. Será el matemático y lógico alemán Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871–1953) quien tenga el honor de inaugurar este período con su artículo de 1913 [85] sobre el juego del ajedrez para el estudio de las posiciones ganadoras en dicho juego y de la correcta definición de estas posiciones desde la perspectiva de la matemática formal. Pese a contextualizar el artículo con el caso del ajedrez, en verdad, la formulación y demostraciones que se presentan eran válidas para cualquier juego con dos jugadores sin movimientos de oportunidad y con intereses completamente enfrentados, permitiendo realizar infinitos movimientos, aunque en una cantidad finita de posiciones.

Posteriormente, los matemáticos húngaros Dénes König (1884–1944) y László Kalmár (1905–1976) complementarían dicho trabajo. El primero [45] generaliza el estudio permitiendo infinitas posiciones en el juego, pero solo pudiendo alcanzar una cantidad finita de posiciones desde cada posición. El segundo [43] da un paso más e incluye la posibilidad de no solo tener infinitas posiciones, sino que también se puede alcanzar un número infinito de posiciones desde cada posición.

Entre 1921 y 1927, el matemático y político francés Félix Édouard Justin Émile Borel (1871–1956) establece los fundamentos de la teoría de juegos psicológicos [7, 8, 9, 10], dando la primera formulación matemática moderna de estrategia mixta, de estrategia pura y de búsqueda de la solución minimax para juegos simétricos de dos jugadores con intereses completamente contrapuestos y con 3 o 5 estrategias para cada jugador. Posteriormente, en 1928 [80], el matemático austrohúngaro (nacionalizado estadounidense) John von Neumann (1903–1957) demuestra el teorema minimax independientemente del número de estrategias para cada jugador (que sí ha de ser una cantidad finita). Este trabajo incluye la definición formal de estrategia usada actualmente e introduce la forma extensiva de un juego como árbol lógico enraizado (lo que permitirá el tratamiento matricial del juego con las matrices de adyacencia e incidencia del árbol).

La siguiente aportación será la que se acepta como la obra clave y referencia básica de la Teoría de Juegos: el libro *Theory of Games and Economic Behavior* que von Neumann publica en 1944 [81] conjuntamente con el economista alemán Oskar Morgenstern (1902–1977). Esta obra aportó el primer tratamiento riguroso y exhaustivo de los conceptos de juego, estrategia y resolución del mismo, así como de la forma en que las preferencias de los jugadores podían ser representadas. Además de los juegos donde los jugadores tienen intereses completamente contrapuestos (i.e. juegos no cooperativos de suma nula), la obra también consideraba los juegos en los que la ganancia de un jugador no conlleva necesariamente pérdida para el otro (i.e. los juegos cooperativos de suma nula con recompensa transferible). Es más, la Teoría de Juegos permitió que la obra desarrollara una teoría axiomática de la utilidad.

Debido al impacto de esta obra entre matemáticos y economistas, las décadas de 1950 y 1960 fueron un período de investigación intensa y exhaustiva en Teoría de Juegos, con la aparición de numerosos artículos teóricos y aplicados (estos últimos sobre todo a cuestiones económicas). En este sentido, destaca la obra del matemático estadounidense John Forbes Nash Jr. (1928–2015) con el estudio de juegos no cooperativos comenzado en su tesis doctoral [59] en 1950, en la que se introdujo la noción de punto de equilibrio (ahora llamado equilibrio de Nash) probando su existencia, y la reducción del estudio de los juegos cooperativos mediante los juegos no cooperativos [60, 61]. También destaca el modelo teórico desarrollado por el matemático polaco-estadounidense Melvin Dresher (1911–1992) y el matemático estadounidense Merril Meeks Flood (1908–1991) en 1950 para el juego de cooperación y conflicto conocido como el "Dilema del Prisionero" (véase [24, 21]), cuyo formato actual y nombre lo recibió del matemático estadounidense Albert William Tucker (1905–1995) en 1950 [74].

Es más, la Teoría de Juegos fue clave durante la Guerra Fría, conllevando una amplia investigación que hoy en día es fundamental y referencia básica, como por ejemplo el desarrollo de los juegos repetidos o iterados desarrollados en el seno de la Agencia de Desarme y Control de Armas de los Estados Unidos para las negociaciones de control armamentístico (véase [2]).

Hoy en día el reconocimiento de la Teoría de Juegos se ha visto recompensado con la concesión del Premio del Banco de Suecia en Ciencias Económicas en memoria de Alfred Nobel a investigaciones en el campo del Análisis Económico que se basaban en el uso de la Teoría de Juegos. Así, en 1994, fueron premiados el economista húngaro John Charles Harsanyi (1920–2000), el ya mencionado John F. Nash y el economista alemán Reinhard Justus Reginald Selten (1930–2016) por sus aplicaciones de la Teoría de Juegos al estudio de los equilibrios generales de tipo Nash y sus usos en Economía. Posteriormente, en 2005, los premiados serían el economista estadounidense Thomas Crombie Schelling (1921–2016) y el matemático israelí Robert John Aumann (n. 1930): el primero por su estudio de modelos dinámicos para analizar la cooperación y conflicto, dando lugar a la Teoría de Juegos evolutiva; y el segundo por sus aportaciones al estudio de los equilibrios. Dos años después, en 2007, los matemáticos y economistas estadounidenses Leonid Hurwicz (1917–2008) y Roger Bruce Myerson (n. 1951) recibieron el galardón, junto con el economista estadounidense Eric Stark Maskin (n. 1950), por establecer los fundamentos de la teoría de diseño de mecanismos, una rama de la Teoría de Juegos que en ocasiones ha sido denominada Teoría de Juegos Inversa, pues busca establecer las reglas de un posible juego que sea compatible con las interacciones entre jugadores y las soluciones que se desean. Fue en 2012 cuando nuevamente la Teoría de Juegos fue premiada en las personas de los matemáticos y economistas estadounidenses Lloyd Stowell Shapley (1923–2016) y Alvin Elliot Roth (n. 1951) debido a sus contribuciones en la teoría de localizaciones estables y la práctica de diseño de mercados, basada en el uso de herramientas de juegos cooperativos y no cooperativos. En 2014, el economista francés Jean Tirole (n. 1953) recibió el Nobel por su análisis del poder de mercado de los oligopolios y cómo éstos debieran ser regulados, utilizando para ello la Teoría de Juegos, cuyo uso introdujo en la organización industrial. Nuevamente la Teoría de Juegos resultó premiada cuando el galardón fue concedido a los matemáticos y economistas Oliver Hart (n. 1948) y Bengt Holmström (n. 1949), estadounidense el primero y sueco el segundo, por sus aportaciones a la teoría de los contratos (Hart por sus aportes esenciales en la teoría de contratos incompletos, que permiten determinar cuál de los actores en el contrato ha de tomar la decisión en cada circunstancia acontecida estableciendo herramientas teóricas para ello y Holmström por establecer cómo diseñar un contrato óptimo para afrontar el problema del agente-principal y evitar que un agente realice acciones en contra de su jerarca). También en 2017, los trabajos del galardonado, el economista estadounidense Richard H. Thaler (n. 1945), se centraban en el campo de la teoría de juegos conductual, incorporando hipótesis psicológicas realistas para analizar la toma de decisiones en economía y mostrar el modo en que una serie de rasgos humanos afectan sistemáticamente tanto a las decisiones individuales como a los rendimientos del mercado. Los últimos galardonados con este premio en el ámbito de la teoría de juegos han sido el economista estadounidense Robert B. Wilson (n. 1937) y el matemático y economista estadounidense Paul R. Milgrom (n. 1948), ambos especialistas de esta disciplina y que fueron premiados por sus aplicaciones a la teoría de subastas (una subdisciplina de la teoría de juegos) y diseñar matemáticamente nuevos formatos de subasta.

En un juego, los jugadores deben hacer uso de estrategias, las cuales no son más que planes de acción para tomar decisiones en el futuro. Cada posible combinación de estrategias en el juego tiene asociado un peso indicando la recompensa (que se mide en beneficios o pérdidas) para los jugadores. La expresión tradicional de estas recompensas correspondía al uso de una matriz, denominada *matriz de pagos* o *de recompensas*, en las que se recogen todas las posibles estrategias que puede emplear un jugador con sus correspondientes recompensas. Esta forma, denominada *forma normal* o *estratégica* del juego, facilita la identificación tanto de las estrategias estrictamente dominadas (las que pierden siempre) como de los equilibrios de Nash en dichos juegos. Para usar este tipo de representación, se parte del hecho que los jugadores actúan en simultáneo desconociendo las elecciones que van a tomar los otros jugadores. De hecho, la formulación para N jugadores parte del hecho que cada combinación de estrategias de los N jugadores viene dada por una N-tupla en la que la recompensa del jugador i-ésimo aparece en la coordenada i-ésima de la tupla. En concreto, cuando tenemos dos jugadores, aparece una distribución matricial en el sentido habitual en el que las filas registran las estrategias del jugador 1 y las columnas, las del jugador 2; tal y como ilustra la Tabla 1.

Cuadro 1: Ejemplo de juego en forma normal (matricial) para dos jugadores.

Jugador 1 / Jugador 2	Estrategia A de Jugador 2	Estrategia B de Jugador 2
Estrategia A de Jugador 1	(4,4)	(2,3)
Estrategia B de Jugador 1	(3,2)	(1,1)

Si el juego considera más de dos jugadores, podemos volver a obtener una expresión normal (matricial) en la que las filas representan las estrategias de un jugador fijado y las columnas registran todas las combinaciones de estrategias que pueden realizar el resto de jugadores, tal y como puede observarse en la Tabla 2.

Cuadro 2: Matriz de un juego en forma normal desde la perspectiva de un jugador.

Jugador 1 / Resto Jugadores	Combinación A resto jugadores	Combinación B resto jugadores	Combinación C resto jugadores
Estrategia A de Jugador 1	(4,4,4)	(2,3,2)	(1,2,1)
Estrategia B de Jugador 1	(3,2,3)	(2,1,1)	(1,1,1)

Ejemplo de los juegos que pueden expresarse en forma normal es el caso de los juegos bipersonales finitos de suma nula: dos jugadores que disponen de un número finito de estrategias y tal que las coordenadas de toda 2-tupla en la matriz de pago suman 0. En estos juegos, solo un jugador puede salir beneficiado, obteniendo su beneficio a expensas del otro jugador. Ese es el caso del ajedrez, las damas, el go o el juego “piedra–papel–tijeras”. En este último juego existen tres estrategias posibles para cada jugador, siendo su expresión matricial la que aparece en la

Tabla 3.

Cuadro 3: Matriz de pagos para el juego "piedra–papel–tijeras".

Jugador 1 / Jugador 2	Jugador 2 saca PIEDRA	Jugador 2 saca TIJERAS	Jugador 2 saca PAPEL
Jugador 1 saca PIEDRA	(0,0)	(1,−1)	(−1,1)
Jugador 1 saca TIJERAS	(−1,1)	(0,0)	(1,−1)
Jugador 1 saca PAPEL	(1,−1)	(−1,1)	(0,0)

Este juego no tiene ningún equilibrio de estrategia pura de Nash ya que no existe estrategia que asegure minimizar las pérdidas, puesto que cualquier estrategia de este juego vence a una segunda estrategia y es vencida por una tercera. Esto puede observarse directamente en la matriz porque, para cada fila (resp. columna), la primera coordenada (resp. la segunda) de los pagos no es siempre mayor o igual que la segunda (resp. la primera). Por lo tanto, el jugador no puede elegir una estrategia que le asegure ganar o, al menos, que sus posibles ganancias sean mayores que sus posibles pérdidas.

Para disponer de equilibrios del tipo antes mencionado en un juego de las características ya vistas, sería necesario bien disponer de filas (y/o columnas) con una mayor cantidad de 1 que de -1 en la coordenada de ese jugador o bien tener pesos cuyas coordenadas no se limiten a valores de $\mathbb{Z}_3$; en este último caso, se podría ver si una estrategia es más o menos beneficiosa según le dé al jugador mayores o menores posibilidades de ganancias. Así, un ejemplo de estos últimos sería un juego cuya forma normal viniese dada por la Tabla 4.

Cuadro 4: Juego con pesos tomando valores enteros.

Jugador 1 / Jugador 2	Estrategia A de Jugador 2	Estrategia B de Jugador 2	Estrategia C de Jugador 2
Estrategia 1 de Jugador 1	(30,−30)	(−10,10)	(20,−20)
Estrategia 2 de Jugador 1	(10,−10)	(20,−20)	(−20,20)

En el caso de la estrategia 1 del jugador 1, tiene la opción de ganar 30 frente a la de perder 20; mientras que en la estrategia 2, ha de comparar una ganancia de 20 frente a una pérdida también de 20. En consecuencia, la estrategia 1 parece la más aconsejable, puesto que además presenta mismas posibilidades de ganar que de perder (2 a 1) y tiene mayor margen de ganancias. Sin embargo, el jugador 2 debería elegir la estrategia C, puesto que la opción B conlleva un menor margen de ganancias con el mismo margen de pérdidas y la opción A siempre le causa pérdidas. Por tanto, el punto de equilibrio usando estrategia pura vendría dado por la elección de la estrategia 1 por el jugador 1 y de la estrategia C por el jugador 2.

El ejemplo clásico para explicar los equilibrios puros en los juegos consiste en el "Dilema del Prisionero". En este juego, los jugadores son dos personas detenidas que están aisladas una de la otra y se les ofrece a cada una denunciar a la otra para reducir su condena, ya que sus testimonios son necesarios para sustentar las pruebas disponibles. Los dos detenidos podrían cooperar, con lo que sus condenas serían menores por ausencia de pruebas para el delito principal. La matriz de pagos de este juego sería la dada en la Tabla 5.

Cuadro 5: Forma normal del "Dilema del Prisionero", considerando la coordenada i como el número de años de condena que le corresponderían al jugador i.

Persona 1 / Persona 2	Persona 2 coopera	Persona 2 denuncia
Persona 1 coopera	(1,1)	(3,0)
Persona 1 denuncia	(0,3)	(2,2)

Ante esta situación, cada detenido tiene como opción callarse (y cooperar con su compañero) o denunciarlo. Si coopera, el detenido tendrá que ir a la cárcel entre 1 y 3 años, dependiendo respectivamente de que su compañero también se calle o de que, por el contrario, lo denuncie. Sin embargo, si el detenido denuncia, entonces podría quedar libre y toda la condena iría al otro detenido. Por tanto, la mejor opción para cualquiera de los dos detenidos es la denuncia, ya que: a) si el otro coopera, él se irá libre; y b) si el otro también denuncia, entonces verá reducida su condena de 3 años a solo 2. Es decir, el punto de equilibrio se tiene en la denuncia mutua.

4 Conclusiones

En este trabajo hemos hecho un recorrido por los principales eventos e hitos en la aparición y formalización de los conceptos de matriz y determinante, mostrando las dificultades que han acarreado la formalización y correcto uso de estos conceptos, mostrando además su aparición desde mucho tiempo atrás en varias civilizaciones antiguas y desde una perspectiva más aplicada y basada en la búsqueda de un procedimiento que les permitiese resolver ciertos problemas de índole económico. En este sentido, hemos visto que la aplicación de matrices (aunque no recibieran ese nombre) para la resolución de problemas económicos ya se llevaba a cabo en civilizaciones como las existentes en la Antigua India y China; aunque siempre usando dichas nociones de manera implícita. De este modo, hemos expuesto cómo una necesidad práctica conllevaba la aparición de un procedimiento matemático para su resolución basado en herramientas teóricas potentes y actuales; aunque sin formalizar su fundamentación. Hecho esto hemos revisado las distintas etapas históricas que han tenido lugar para el surgimiento de las nociones de determinante y matriz. Con ello, se ha podido constatar la consolidación de las matemáticas occidentales europeas desde la perspectiva del álgebra matricial y, por extensión, lineal, convirtiéndose en herramienta esencial para el conocimiento matemático (tanto teórico como aplicado) de los siglos XX y XXI.

Siguiendo a la exposición histórica del Álgebra Lineal, hemos descrito varios problemas económicos que pueden modelizarse por medio de la teoría de matrices y sus operaciones. En este sentido, hemos tratado tanto el Análisis input-output como la Teoría de Juegos para ejemplificar problemas económicos cuyo tratamiento estuviese fuertemente basado en el uso de matrices.

En vista de todo lo comentado, creemos que hemos mostrado la fuerte vinculación existente entre el álgebra matricial (y lineal) y un buen número de problemas económicos, resultando una herramienta esencial para el tratamiento de problemas en las Ciencias Económicas, en particular, y en las Sociales, en general.

Referencias

[1] Aitken, A.C. *Determinants and Matrices*, Oliver and Boyd, Edimburgo, 1939. MR0000217.

[2] Aumann, R.J.; Maschler, M.B.; Stearns, R.E. *Repeated games with incomplete information*, MIT Press, Cambridge, 1995. MR1342074.

[3] Bézout, E. *Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues, et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations*, Mém. Acad. Roy. Sci. Paris **1764** (1764), 288–338.

[4] Binet, J.P.M. *Mémoire sur un systeme de formules analytiques, et leur applications à des considerations géométriques*, J. Éc. Polytech. **9** (1813), 280–302.

[5] Bôcher, M. *Introduction to Higher Algebra*, Macmillan, Nueva York, 1907.

[6] Borda, J.C. *Memoire sur les elections au scrutin*, Hist. Acad. Roy. Sci. **1781** (1784), 657–664.

[7] Borel, E. *La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique*, Compt. Rend. Hebd. Séances Acad. Sci. **173** (1921), 1304–1308.

[8] Borel, E. *Sur les jeux où interviennent l'hasard et l'habileté des joueurs*, en: E. Borel, Éléments de la Théorie des Probabilités, 3e édition, Librairie Scientifique J. Hermann, París, 1924, pp. 204–224.

[9] Borel, E. *Un théorème sur les systèmes de formes linéaires a déterminant symétrique gauche*, C. R. Acad. Sci. **183** (1926), 925–927, 996.

[10] Borel, E. *Sur les systèmes de formes linéaires à déterminant symétrique gauche et la théorie générale du jeu*, Compt. Rend. Hebd. Séances Acad. Sci. **184** (1927), 52–54.

[11] Cardano, G. *Artis magnae, sive de regulis algebraicis*, Johannes Petreius, Nuremberg, 1545.

[12] Cauchy, A.L. *Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment*, J. Éc. Polytech. **10** (1815), 29–112.

[13] Cauchy, A.L. *Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes*, Exer. Math. **4** (1829), 140–160.

[14] Cayley, A. *A theorem in the geometry of position*, Cambridge Mathematical Journal **II** (1841), 267–271.

[15] Cayley, A. *Remarques sur la notations de fonctions algébriques*, Crelle's J. **50** (1855), 282–285. Doi: `10.1515/crll.1855.50.282`. MR1578946.

[16] Cayley, A. *A memoir on the theory of matrices*, Philos. Trans. Roy. Soc. London **148** (1858), 17–37, Doi: `10.1098/rstl.1858.0002`.

[17] Clasen, B.I. *Sur une nouvelle méthode de résolution des équations linéaires et sur l'application de cette méthode au calcul des déterminants*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles **12** (1888), 251–281.

[18] De Condorcet, M. *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, Imprenta Real, París, 1785.

[19] Cournot, A. *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, L. Hachette, París, 1838.

[20] Cramer, G. *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, Frères Cramer, Ginebra, 1750.

[21] Dresher, M. *The mathematics of games of strategy: Theory and applications*, Prentice-Hall, Nueva Jersey, 1961. MR0671740.

[22] Edgeworth, F.Y. *Mathematical Psychics*. Kegan Paul & Co., Londres, 1881.

[23] Fedriani, E.M.; Martín, A.M.; Tenorio, A.F. *Bases económicas en la constitución de los sistemas de numeración y sus operaciones*, en: V. Guirao & V.J. Cano (eds.), Anales de Economía Aplicada, Vol. XX, Delta Publicaciones, La Laguna, 2006, 25 pp.

[24] Flood, M.M. *Some experimental games*, Management Sci. **5** (1958), 5–26, Doi: `10.1287/mnsc.5.1.5`. MR0097986. Previamente publicado como memorandum en M.M. Flood, *Some experimental games*. Research Memorandum RM-789, RAND Corporation, Santa Mónica, 1952.

[25] Fröbenius, G. *Über lineare substitutionen und bilineare formen*, Crelle's J. **84** (1878), 1–63, Doi: `10.1515/crelle-1878-18788403`.

[26] Fröbenius, G. *Über vertauschbare matrizen*, Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin **1896** (1896), 601–614.

[27] Fröbenius, G. *Über Matrizen aus positiven Elementen, 1*, Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin **1908** (1908), 471–476.

[28] Fröbenius, G. *Über Matrizen aus positiven Elementen, 2*, Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin **1909** (1909), 514–519.

[29] Fröbenius, G. *Über Matrizen aus nicht negativen Elementen*, Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin **1912** (1912), 456–477.

[30] Gauss, C.F. *Disquisitiones Arithmeticae*, Apud G. Fleischer, Leipzig, 1801.

[31] Gauss, C.F. *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*, Perthes et Besser, Hamburgo, 1809.

[32] Gauss, C.F. *Disquisitio de elementis ellipticis palladis*, Commentat. Soc. Regiae Sci. Gott. Recent. **1** (1811), 3–26.

[33] Grcar, J.F. *How ordinary elimination became Gaussian elimination*, Historia Math. **38** (2011), 163–218, Doi: `10.1016/j.hm.2010.06.003`. MR2775854.

[34] Grcar, J.F. *Mathematicians of Gaussian elimination*, Notices Amer. Math. Soc. **58** (2011), 782–792. MR2839923.

[35] Hamilton, W.R. *Lectures on quaternions*, Hodge and Smith editors, Dublín, 1853.

[36] Harsanyi, J.C.; Selten, R. *A General Theory of Equilibrium Selection in Games*, MIT Press, Cambridge, 1988. MR0956053.

[37] Jacobi, C.G.J. *De Formatione et Proprietatibus Determinantium*, Crelle's J. **22** (1841), 285–318, Doi: 10.1515/crll.1841.22.285.

[38] Jacobi, C.G.J. *De Determinantibus functionalibus*, Crelle's J. **22** (1841), 319–359, Doi: 10.1515/crll.1841.22.319.

[39] Jacobi, C.G.J. *De functionibus alternantibus earumque divisione per productum e differentiis elementorum conflatum*, Crelle's J. **22** (1841), 360–371, Doi: 10.1515/crll.1841.22.360.

[40] Jordan, C. *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Gauthier-Villars, París, 1870. MR1188877.

[41] Jordan, W. *Handbuch der Vermessungskunde*, J.B. Metzler, Stuttgart, 1888.

[42] Joseph, G.G. *La Cresta del pavo real. Las Matemáticas y sus raíces no europeas*, Editorial Pirámide, Madrid, 1996.

[43] Kalmár, L. *Zur Theorie der abstrakten Spiele*, Acta Sci. Math. (Szeged) **4** (1928–1929), 65–85.

[44] Kline, M. *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Alianza Editorial, Madrid, 1992.

[45] König, D. *Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unendliche*, Acta Sci. Math. (Szeged) **3** (1927), 121–130.

[46] Krönecker, L. *Über Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen*, Monatsber. Akad. Wiss. Berlin **1874** (1874), 59–76.

[47] Krönecker, L. *Vorlesungen über die Theorie der Determinanten*, Teubner, Leipzig, 1903.

[48] Lacroix, S.F. *Complément des Éléments d'algèbre, a l'usage de l'École centrale des quatre-nations*, Courcier, París, 1804.

[49] Lagrange, J.L. *Sur l'attraction des spheroides elliptiques*, Mém. Acad. Roy. Sci. Berlin **1773** (1773), 121–148.

[50] Laplace, P.S. *Recherches sur le calcul integral et sur le systeme du monde*, Mém. Acad. Roy. Sci. Paris **1772**, 2e partie (1772), 267–376.

[51] Leibniz, G.W. *Letter to L'Hopital, VI, Hannover, 28 April 1693*, en: G.I. Gerhardt (ed.), Leibnizens mathematische Schriften, Part I, Volume 2, Berlin, 1850, pp. 238-241.

[52] Leontief, W.W. *Quantitative input-output relations in the economic system of the United States*, Rev. Econ. Statistics **18** (1936), 105–125, Doi: 10.2307/1927837.

[53] Leontief, W.W. *The Structure of the American Economy, 1919-1929*, Harvard University Press, Cambridge, 1941.

[54] Leontief, W.W. *Input-Output Economics*, Oxford University Press, Nueva York, 1966.

[55] Maclaurin, C. *Treatise of Algebra*, Millar & Nourse, Londres, 1748.

[56] Mirsky, L. *An Introduction to Linear Algebra*, Oxford University Press, Oxford, 1955. MR0074364.

[57] Montmort, P.R. *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, 2da. edición. Jacque Quillau, París, 1713.

[58] Myerson, R.B. *Game Theory: Analysis of Conflict*, Harvard University Press, Cambridge, 1991. MR1107301.

[59] Nash, J.F. *Non-cooperative games*, Ph.D. Thesis, Princeton University, 1950. MR2938064.

[60] Nash, J.F. *Equilibrium points in n-person games*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **36** (1950), 48–49, Doi: `10.1073/pnas.36.1.48`. MR0031701.

[61] Nash, J.F. *Non-cooperative games*, Annals of Mathematics **54** (1951), 286–295, Doi: `10.2307/1969529`. MR0043432.

[62] Newton, I. *Arithmeticae Universalis*, Universidad de Cambridge, Cambridge, 1707.

[63] Organización de Naciones Unidas, *A system of national accounts*, Studies in Methods Series F, n^o 2, Naciones Unidas, Nueva York, 1993.

[64] Organización de Naciones Unidas, *Handbook of input-output table compilation and analysis*, Studies in Methods Series F, n^o 74, Naciones Unidas, Nueva York, 1999.

[65] Organización de Naciones Unidas, *Handbook of integrated environmental and economic accounting*, Studies in Methods Series F, n^o 61, Naciones Unidas, Nueva York, 2003.

[66] Perron, O. *Zur Theorie der Matrizen*, Math. Ann. **64** (1907), 248–263, Doi: `10.1007/BF01449896`. MR1511438.

[67] Quesnay, F. *Le tableau économique*, 1758. Reimpreso en F. Quesnay, The Economical Table, University Press of the Pacific, Honolulu, 2004.

[68] Quesnay, F. *Analyse de la formule arithmétique du tableau économique de la distribution des dépenses annuelles d'une Nation agricole*, Journal de l'agriculture, du commerce et des finances **II**, 3ème partie (1766), 11–41.

[69] Rheinboldt, W.C.; Vandergraft, J.S. *A Simple Approach to the Perron-Frobenius Theory for Positive Operators on General Partially-Ordered Finite-Dimensional Linear Spaces*, Math. Comp. **27** (1973), 139–145, Doi: `10.1090/S0025-5718-1973-0325650-4`. MR0325650.

[70] Rolle, M. *Traité d'Algebre*, Estienne Michallet, París, 1690.

[71] Simpson, T. *A Treatise of Algebra*, John Nourse, Londres, 1745.

[72] Sylvester, J.J. *Additions to the articles: 'On a new class of theorems' and 'On Pascal's theorem'*, Phil. Mag. **37** (1859), 363–370.

[73] Sylvester, J.J. *On involutants and other allied species of invariants to matrix systems*, John Hopkins University Circulars **3** (1884), 34–35.

[74] Tucker, A.W. *On Jargon: The Prisoner's Dilemma. A Two Person Dilemma*, UAMP Journal **1** (1980), 101.

[75] Turnbull, H. *The Theory of Determinants, Matrices, and Invariants*, Blackie and Sons Ltd., Londres, 1928.

[76] Turnbull, H.; Aitken, A. *Introduction to the Theory of Canonical Matrices*, Blackie & Sons Ltd., Londres, 1932.

[77] Van Dammem, E.; Furth, D. *Game theory and the market*, en: P.Borm & H. Peters (eds.), Chapters in Game Theory, Kluwer Academic Publishers, Dordretch, 2002, pp. 51–81. MR2026212.

[78] Vandermonde, A.T. *Mémoire sur la résolution des équations*, Mém. Acad. Roy. Sci. Paris **1771** (1771), 365–416.

[79] Vandermonde, A.T. *Mémoire sur l'élimination*, Mém. Acad. Roy. Sci. Paris **1772**, 2e partie (1772), 516–525.

[80] Von Neumann, J. *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, Math. Ann. **100** (1928), 295–320, Doi: `10.1007/BF01448847`. MR1512486.

[81] Von Neumann, J.; Morgenstern, O. *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1944. MR0011937.

[82] Weierstrass, K. *Zur Theorie der quadratischen und bilinearen formen*, Monatsber. Akad. Wiss. Berlin **1868** (1868), 311–338.

[83] Walras, L. *Éléments d'économie politique pure*, Corbaz & Cie., Lausana, 1874.

[84] Weierstrass, K. *Zur Determinantentheorie*, notas basadas en las lecturas impartidas en 1886/1887 y publicadas póstumamente, en J. Knoblauch (ed.), Mathematiche Werke, Vol. III, Mayer & Müller, Berlin, 1903, pp. 271–286.

[85] Zermelo, E. *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels*, en E.W. Hobson, A.E.H. Love (eds.), Proceedings of the Fifth Congress of Mathematicians, Vol. II, Cambridge University Press, Cambridge, 1913 , pp. 501–504. MR0403902.