УДК 517.1

<https://doi.org/10.36906/AP-2020/53>

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО КОМПЛЕКСНОЗНАЧНОГО СПЛАЙНА В ЗАДАЧЕ О БЫСТРОДЕЙСТВИИ ФУНКЦИЙ ЧЕРЕЗ ВНУТРЕННИЙ И ВНЕШНИЙ РАДИУСЫ КОЛЬЦА ЕЕ ЗНАЧЕНИЙ

Дмитриев Н. П.

канд. пед. наук

Нижневартровский государственный университет

г. Нижневартовск, Россия

Юмагулов Н. И.

канд. пед. наук

Нижневартровский государственный университет

г. Нижневартовск, Россия

Аннотация. В задаче о быстродействии комплекснозначных функций используется экстремальный параболический периодический по аргументу сплайн, с помощью которого были найдены соответствующие оценки быстродействия. В настоящей заметке рассчитываются параметры такого сплайна через внутренний и внешний радиусы кольца ее значений, необходимые для моделирования оптимальной траектории движения.

Ключевые слова: неравенство Адамара; сплайны Эйлера; оценки нормы производной; контактные точки; оценки быстродействия комплекснозначных функций.

На классе $\overline{W}^2$ заданных на всей числовой прямой R комплекснозначных дифференцируемых функций $f(t)$ действительного аргумента t с абсолютно непрерывной производной $f'(t)$ на любом отрезке из R с чебышевскими нормами функции и ее производных

$$\begin{aligned}\|f\| &= \sup_t |f(t)| = \sup_t (\operatorname{Re}^2 f(t) + \operatorname{Im}^2 f(t))^{1/2}, \\ \|f'\| &= \sup_t |f'(t)| = \sup_t (\operatorname{Re}^2 f'(t) + \operatorname{Im}^2 f'(t))^{1/2}, \\ \|f''\| &= \operatorname{ess\,sup}_t |f''(t)| = \operatorname{ess\,sup}_t (\operatorname{Re}^2 f''(t) + \operatorname{Im}^2 f''(t))^{1/2}\end{aligned}$$

рассчитаем параметры экстремального сплайна [1] через внутренний и внешний радиусы кольца значений функций $f(t)$.

Изучение свойств такого сплайна тесно связано с задачами оценки норм производных с ограничениями на норму функции и ее производной второго порядка. Так Ж. Адамар [2] получил точную оценку нормы производной действительной функции. А именно, пусть. Тогда верно, точное неравенство: $\|f'\| \leq \sqrt{2M_0 M_2}$. И. Шенберг [3] получил точную оценку нормы производной комплекснозначной функции. А именно, пусть $N_0 \leq \|f\| \leq M_0$, $\|f''\| \leq 1$. Тогда верно, точное неравенство: $\|f'\| \leq \sqrt{M_0 - \sqrt{M_0^2 - N_0^2}}$. Точные оценки, как правило, реализуются на специально построенных экстремальных функциях.

По определению комплекснозначный сплайн $g_r(t, \nu)$ ($r=0, 1, 2, \dots$) в случае $r=2$ имеет следующее каноническое представление [1]:

$$g_2(t, \nu) = (f_2(t) - \mu_2(\nu)) + i \mu_1(\nu) f_1(t) \quad (1)$$

где $f_1(t)$, $f_2(t)$ — идеальные сплайны Эйлера, $i = \sqrt{-1}$, $0 \leq \nu \leq \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, $\mu_1(\nu) = K_1 \operatorname{ctg} \nu$, $\mu_2(\nu) = K_1^2 \operatorname{ctg}^2 \nu$.

В [1] *контактные точки области изменения функции* $f \in \overline{W}^r$ с ограничением $\|f\| \leq M_0$ — это набор $D = \{D_1, D_2, \dots, D_p\}$ точек $D_1, D_2, \dots, D_p$ комплексной плоскости C таких, что

$$|D_1| = |D_2| = \dots = |D_p| = M_0$$

$$D_{j+1} = D_j e^{2\pi i / p} \quad (j=1, 2, \dots, p-1) \quad D_1 = D_p e^{2\pi i / p}$$

где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. Другими словами, контактные точки — точки, равномерно расположенные на окружности $\|f\| = M_0$. Порядок обхода контактных точек обозначим последовательностью их индексов. Ниже на рисунке 1 представлен сплайн в случае $p=5$ с порядком обхода $Q = \{1, 3, 5, 2, 4, 1\}$.

Рис. 1. Экстремальный комплекснозначный сплайн $g_2(t, \nu)$

Подставляя явные выражения функций, $f_2(t)$ в (1), получаем

$$g_2(t, \nu) = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{\pi^2}{8} \frac{1 + \cos^2 \nu}{\sin^2 \nu} \right) + i \frac{\pi \cos \nu}{2 \sin \nu} t \quad (2)$$

Найдем экстремальные значения модуля производной этого сплайна. Наибольшее значение модуль производной сплайна $g_2(t, \nu)$ достигает в точке $t=0$, а наименьшее — в точке $t = \frac{\pi}{2}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \|g_2(\cdot, \nu)\| &= |g_2(0, \nu)| = \frac{\pi^2}{8} \frac{1 + \cos^2 \nu}{\sin^2 \nu} \\ \diamond g_2(\cdot, \nu) \diamond &= \left| g_2\left(\frac{\pi}{2}, \nu\right) \right| = \left(\left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{8} \frac{1 + \cos^2 \nu}{\sin^2 \nu} \right)^2 + \left(\frac{\pi \cos \nu}{2 \sin \nu} \frac{\pi}{2} \right)^2 \right)^{1/2} = \\ &= \left(\frac{\pi^4}{64} \frac{4 \cos^4 \nu}{\sin^4 \nu} + \frac{\pi^4 \cos^2 \nu}{16 \sin^2 \nu} \right)^{1/2} = \frac{\pi^2 \cos \nu}{4 \sin^2 \nu} \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$K_2(\nu) = \|g_2(\cdot, \nu)\| = K_2 \frac{1 + \cos^2 \nu}{\sin^2 \nu} \quad (3)$$

$$L_2(\nu) = \diamond g_2(\cdot, \nu) \diamond = K_2 \frac{2 \cos \nu}{\sin^2 \nu} \quad (4)$$

Пусть M_0 и N_0 ($0 \leq N_0 \leq M_0$) означают внешний и внутренний радиусы кольца значений функции $f \in \overline{W}^r$. Найдем параметры λ, ν , при которых имеют место равенства

$$\|g_{\lambda,2}(\cdot, \nu)\| = M_0 \quad (5)$$

$$\diamond g_{\lambda,2}(\cdot, \nu) \diamond = N_0 \quad (6)$$

Положим

$$g_{\lambda,2}(t, \nu) = \frac{1}{\lambda^2} g_2(\lambda t, \nu) \quad (7)$$

Тогда

$$\|g_{\lambda,2}(\cdot, \nu)\| = \frac{1}{\lambda^2} \|g_2(\cdot, \nu)\| \quad (8)$$

$$\diamond g_{\lambda,2}(\cdot, \nu) \diamond = \frac{1}{\lambda^2} \diamond g_2(\cdot, \nu) \diamond \quad (9)$$

Подставляя (8) в (5), а (9) в (6), получаем

$$\frac{1}{\lambda^2} \|g_2(\cdot, \nu)\| = M_0 \quad \frac{1}{\lambda^2} \diamond g_2(\cdot, \nu) \diamond = N_0$$

С учетом (3), (4) выводим

$$\frac{1}{\lambda^2} K_2 \frac{1 + \cos^2 \nu}{\sin^2 \nu} = M_0 \quad (10)$$

$$\frac{1}{\lambda^2} K_2 \frac{2 \cos \nu}{\sin^2 \nu} = N_0 \quad (11)$$

Исключая λ из равенств (10), (11), приходим к следующему уравнению относительно $\cos \nu$:

$$\cos^2 \nu - \frac{2M_0}{N_0} \cos \nu + 1 = 0$$

Отсюда имеем:

$$\cos \nu = \frac{M_0 - \sqrt{M_0^2 - N_0^2}}{N_0} \quad (12)$$

С помощью равенств (10) или (11) получаем

$$\lambda = \sqrt{\frac{K_2}{M_0}} \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \nu}}{\sin \nu} \quad (13)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{K_2}{N_0}} \sqrt{\frac{2 \cos \nu}{\sin^2 \nu}} \quad (14)$$

Таким образом, если параметры λ, ν выбирать по формулам (12), (13), (14), то график значений параболического сплайна $g_{\lambda,2}(t, \nu)$ окажется вписанным в центральное кольцо $C(M_0, N_0)$ комплексной плоскости с внешним радиусом M_0 и внутренним радиусом N_0 .

Выразим константы $K_2(\nu)$ и $L_2(\nu)$ через заданные внешний M_0 и внутренний N_0 радиусы кольца $C(M_0, N_0)$:

$$K_2(\nu) = K_2 \frac{M_0}{\sqrt{M_0^2 - N_0^2}} \quad (15)$$

$$L_2(\nu) = K_2 \frac{N_0}{\sqrt{M_0^2 - N_0^2}} \quad (16)$$

Ясно, что если $N_0 \rightarrow M_0$, то $K_2(\nu) \rightarrow \infty$ и $L_2(\nu) \rightarrow \infty$. Если же $N_0 = 0$, то $K_2(\nu) = K_2$, $L_2(\nu) = 0$.

По определению параметр ν меняется на промежутке $[0, \frac{\pi}{2}]$, тогда $0 \leq \cos \nu \leq 1$. Эти же ограничения вытекают из (12) при изменении внутреннего радиуса кольца $C(M_0, N_0)$.

Очевидно, что в качестве управляющего параметра при изучении параболического сплайна $g_{\lambda,2}(\cdot, \nu)$ можно вместо параметра ν взять внутренний радиус кольца значений этого сплайна при условии, что внешний радиус зафиксирован. В этом случае получаем следующее представление сплайна $g_{\lambda,2}(\cdot, \nu)$ и его производной:

$$\bar{g}_2(t, N_0) = \left(\frac{t^2}{2} - M_0\right) + i\sqrt{M_0 - \sqrt{M_0^2 - N_0^2}}t \quad (17)$$

$$\bar{g}_1(t, N_0) = t + i\sqrt{M_0 - \sqrt{M_0^2 - N_0^2}} \quad (18)$$

$$0 < t < \sqrt{2}\sqrt{M_0^2 - N_0^2}$$

Правая граница промежутка изменения аргумента t найдена с помощью формул (15), (16). Отсюда имеем:

$$\|\bar{g}_1(t, N_0)\| = \sqrt{M_0 + \sqrt{M_0^2 - N_0^2}} \quad (19)$$

$$\diamond \bar{g}_1(t, N_0) \diamond = \sqrt{M_0 - \sqrt{M_0^2 - N_0^2}} \quad (20)$$

Заметим, что при фиксированном внешнем радиусе M_0 кольца $C(M_0, N_0)$ значений параболического комплекснозначного сплайна величина $\|\bar{g}_1(\cdot, N_0)\|$ монотонно убывает от $\sqrt{2M_0}$ до $\sqrt{M_0}$, а величина $\diamond \bar{g}_1(\cdot, \nu) \diamond$ возрастает от 0 до $\sqrt{M_0}$.

Формулы (19) и (20), в частности, указывают на то, что максимальная скорость движущегося по траектории $g_{\lambda,2}(t, \nu)$ объекта достигается в точке касания с внутренней границей кольца $C(M_0, N_0)$, а минимальная скорость - в точке касания с внешней границей кольца значений $f \in \bar{W}'$.

Литература

1. Дмитриев Н. П. Теоремы сравнения и оценки быстродействия комплекснозначных функций с ограничениями // Lap Lambert (Германия, Saarbrücken), 2014. 75 с.
2. Hadamard J. Sur le module maximum d'une function et de ses derives // Soc. Math. France. Comptes rendus des Seances. 914. 41. P. 68-72.
3. Schoenberg I. J. The Landau problem I. The case of motion on sets // Proc. Scand. Acad. Sci. 1978. Vol. 81. №2. P. 218-231.

©Дмитриев Н. П., Юмагулов Н. И., 2020