

*Mirko Milić*

# ELEKTRIČNO MODELOVANJE FIZIČKIH PROCESA

ANALOGNE MREŽE PROSTORNO DISKRETNIH FIZIČKIH SISTEMA  
ANALOGNE MREŽE RASPODELJENIH FIZIČKIH SISTEMA

BEOGRAD  
2004.

dr Mirko M. Milić  
Električno modelovanje  
fizičkih procesa

*Urednik:*  
Vladimir Janković

*Recenzent:*  
Profesor Dobrilo Tošić

*Izdavač:*  
Bit inženjering, Beograd  
Direktor: Vladimir Janković

*Dizajn korica:*  
Igor Kojić

*Priprema za štampu:*  
Profesor Dobrilo Tošić  
Nada Matić

*Štampa:*  
Bit inženjering, Beograd

*Tiraž:*  
300 primeraka

ISBN 86-7557-011-2

## PREDGOVOR

Prošlo je deset godina od kako nije sa nama dr MIRKO MILIĆ (1932–1993), redovni profesor Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu i dopisni član Srpske akademije nauka i umetnosti.

Izuzetan naučnik, istraživač i svetski priznat stručnjak iz blasti Teorije električnih kola i sistema, imao je dve, ili tri, velike preokupacije u životu: strast za naukom, strast za putovanjima i veliku ljubav za umetnošću. Igrom sudbine, upravo poslednje dane svoga života proveo je baš ispunjavanjem tih svojih želja: uprkos narušenom zdravlju, daleko od svog doma u Beogradu, boravio je u Davosu (Švajcarska), gde je delio svoje iskustvo i znanje sa stručnjacima iz celog sveta na konferenciji ECCTD (European Conference on Circuit Theory and Design). Posle konferencije obilazio je neka mesta u Švajcarskoj, ali je potom iznenada napustio ovaj svet, 9. septembra 1993.

MIRKO MILIĆ je rođen 21. aprila 1932. u Galace-u, Rumunija, malom mestu u delti Dunava, gde je njegov otac, rodom iz Dubrovnika, službovao kao brodski pilot. Njegova majka, austrijskog i italijanskog porekla, znatno je uticala na njegov interes za umetnost, što je ostavilo traga u celom njegovom životu. Posebno je voleo filozofiju i muziku, naročiti džez.

Nakon završene srednje škole u Beogradu, 1950. godine, MIRKO MILIĆ je studirao na Elektrotehničkom fakultetu (ETF) Univerziteta u Beogradu, gde je diplomirao 1956. godine sa izvanrednim uspehom. Nakon toga je zaposlen na ETF-u u Beogradu u svim zvanjima: od asistenta, preko docenta (1963), vanrednog profesora (1973), do redovnog profesora (1980). Od 1985. je član Srpskog naučnog društva, a 1988. godine je izabran za dopisnog člana Srpske akademije nauka i umetnosti. Bio je član velikog broja naučnih komiteta, društava i konferencija širom sveta i Stariji član (Senior Member) najvećeg međunarodnog udruženja elektrotehničkih i elektronskih inženjera (IEEE).

Teško je pisati predgovor knjige koja je trebalo da se pojavi pre deset godina. Još teže je pisati predgovor umesto autora koji nije stigao da objavi svoju knjigu. Rukopis knjige *Električno modelovanje fizičkih procesa* je bio gotovo spreman za štampu leta 1993. godine. Nažalost, prerana smrt profesora MILIĆA (9. septembra 1993.) sprečila je njen završetak i štampanje. Tek nedavno, igrom slučaja, profesor MIROSLAV LUTOVAC je saznao da je rukopis još uvek sačuvan. Nesebičnom pomoći više kolega, elektroinženjera, pre svega đaka profesora MILIĆA, ovaj rukopis je kompletiran i pripremljen za štampu. Izdavanje knjige, koja je aktuelna i pored jedne decenije zakašnjenja u publikovanju, a štampana je u znak sećanja na profesora MILIĆA, pomogli su Institut IRITEL, štamparija Bit Inženjering, i Elektrotehnički fakultet u Beogradu.

Knjiga *Električno modelovanje fizičkih procesa* je nastala kao rezultat dugogodišnjeg rada profesora MILIĆA u ovoj oblasti. Pored osnovnog predmeta, *Teorije električnih kola*, profesor MILIĆ je oformio i organizovao predmet *Električno modelovanje fizičkih procesa* koji se predavao na IX semestru studentima Odseka za tehničku fiziku Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu. Razni prob-

lemi u nauci i tehnici mogu se predstaviti odgovarajućim električnim ekvivalentima (modelima), a zatim se mogu rešavati metodama koje su izuzetno razvijene u analizi električnih kola i sistema. Profesor MILIĆ je svoje veliko znanje i iskustvo sistematizovao upravo u ovoj knjizi. Prva skripta iz ove oblasti profesor MILIĆ je objavio još 1976. godine, pri čemu su mu, u tehničkoj pripremi rukopisa, znatno pomogli ZORAN AVRAMOVIĆ, tadašnji student-saradnik pri Katedri za teorijsku elektrotehniku a sada redovni profesor na Saobraćajnom fakultetu u Beogradu, i ĐURĐE MILANOVIĆ, tadašnji student III godine. Ta skripta su analizirala modele sa koncentrisanim parametrima. Kasnije su ova skripta korigovana i prilagođavana progresu nauke, i dodata je cela nova oblast-modelovanje raspodeljenih fizičkih procesa. Prilikom sređivanja ovog novog obimnog materijala profesor MILIĆ je imao veliku pomoć svojih đaka, elektroinžinjera, pre svega mr DANKA ĐURIĆA, sa kojim je imao i više naučnih radova, mr SPIRE MATIĆA, i VLADIMIRA JANKOVIĆA, vlasnika štamparije Bit Inženjering, iz Beograda. Prilikom završne obrade teksta, što je učinjeno nedavno, posebno treba istaći nesebičnu pomoć dr DOBRILA TOŠIĆA, redovnog profesora ETF-a u Beogradu, ispisnika, kolege i prijatelja MIRKA MILIĆA, koji je svojim radom omogućio da ovaj rukopis bude kompletiran i estetski oblikovan za štampu.

Knjiga Električno modelovanje fizičkih procesa obrađuje široku lepezu raznih ne-električnih problema koji se, veoma uspešno, mogu analizirati i rešavati na osnovu analogija sa električnim ekvivalentima. Materija knjige je podeljena u dva osnovna dela: *Analogne mreže prostorno-diskretnih fizičkih sistema* i *Analogne mreže raspodeljenih fizičkih sistema*.

U prvom delu se uvode pojam i principi modelovanja fizičkih pojava i navode neki najčešće korišćeni fizički sistemi koji se uspešno mogu modelovati električnim ekvivalentnim mrežama: mehanički sistemi, fluidni sistemi, termički sistemi i energetski pretvarači. Takođe, daju se osnovne metode rešavanja električnih kola, kojima su modelovani fizički procesi.

Drugi deo se bavi analognim mrežama sa raspodeljenim parametrima. Diskretizacijom polaznih diferencijalnih jednačina, tj. prelaskom na diferencne jednačine, omogućava se električno modelovanje raspodeljenih fizičkih procesa pomoću diskretnih mreža u vidu prostorne rešetke i to pomoću: rezistivnih (R) mreža (u slučaju stacioniranog stanja, odnosno, statičkog procesa), ili pomoću rezistivno-kapacitivnih (RC), rezistivno-induktivnih (RL) ili (RLC) mreža (u slučaju modelovanja dinamičkih procesa). Pogodnim izborom topologije i vrednosti parametara ekvivalentnih električnih mreža mogu se uspešno modelovati linearni i nelinearni problemi i raznovrsni granični uslovi fizičkih procesa.

Beograd, juna 2003.

profesor *Branimir D. Reljin*

## PREDGOVOR AUTORA PRVOM DELU KNJIGE

Ova skripta predstavljaju prvi deo gradiva koje se predaje studentima IX semestra Odseka za tehničku fiziku Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu u okviru predmeta Električno modelovanje fizičkih procesa. Izdavanjem ovih skripata nastojalo se da se donekle nadoknadi nedostatak domaćih udžbenika iz ove oblasti i time olakša uvođenje studenata u osnovne metode gradnje i analize električnih modela za diskretne fizičke sisteme.

Električni modeli u obliku analognih električnih mreža su vrlo pogodno sredstvo za predstavljanje sistema i procesa najrazličitije fizičke prirode. Mnogi osnovni pojmovi i metode koji se koriste u Teoriji električnih mreža našli su široku primenu u modelovanju i analizi fizičkih sistema i procesa. Iz ovog razloga materija ovih skripata je u neku ruku neposredna ilustracija primene analize električnih mreža na sisteme druge fizičke prirode, te se u tom smislu može koristiti i kao dopuna redovnom kursu iz Teorije električnih kola.

Pored toga što omogućavaju tretiranje širokog kruga fizičko-tehničkih problema sa jedinstvenog stanovišta, električni modeli imaju i niz praktičnih prednosti nad modelima druge prirode (relativno jednostavna gradnja, brza i pouzdana merenja koja se mogu vršiti na njima, male dimenzije, niska cena, i dr.) koje ih čine vrlo prikladnim sredstvom za eksperimentalni rad.

Budući da je klasična analogija bila tradicionalno šire zastupljena od novije, tzv. mobilne analogije, posebna pažnja je posvećena rasvetljavanju ovog dualnog aspekta električnog modelovanja. Gde god se pokazalo korisnim, prednost je data električnim mrežama građenim na bazi mobilne analogije.

Mada najveći deo materije obuhvata obrazovanje analognih mreža za diskretne sisteme, dovoljno pažnje je posvećeno i analizi analognih mreža, posebno analizi pomoću mešovitog sistema jednačina nezavisnih promenljivih. Izložen je takođe i jedan koristan algoritam svođenja na sistem jednačina stanja. Metode rešavanja velikih mreža biće obrađene u drugom delu skripata.

U tehničkoj pripremi rukopisa dragocenu pomoć su pružili ZORAN AVRAMOVIĆ, student saradnik pri Katedri za teorijsku elektrotehniku, (čitanje rukopisa i izrada crteža) i ĐURĐE MILANOVIĆ, student III godine Odseka za tehničku fiziku, (pisanje formula).

Beograd, juna 1976.

profesor *Mirko M. Milić*

## SADRŽAJ

<b>1. UVOD</b>	1
<b>1.1. POJAM MODELA</b>	1
<b>1.2. FIZIČKO I MATEMATIČKO MODELOVANJE.</b>	
<b>ELEKTRIČNO MODELOVANJE</b>	1
<b>1.3. KLASIFIKACIJA MODELA</b>	3
<b>2. ANALOGNE MREŽE PROSTORNO DISKRETNIH</b>	
<b>FIZIČKIH SISTEMA</b>	8
<b>2.1. PRINCIPI OBRAZOVANJA MREŽA</b>	
<b>DISKRETNIH SISTEMA</b>	8
<b>2.2. MEHANIČKI SISTEMI</b>	9
<b>2.2.1. Osnovni elementi</b>	10
a) Inercioni elementi	10
b) Elementi naprezanja	12
c) Elementi trenja	15
d) Nezavisni mehanički izvori	17
e) Mehanički transformatori	18
<b>2.2.2. Mehaničke mreže</b>	21
<b>2.3. FLUIDNI SISTEMI</b>	29
<b>2.3.1. Osnovni elementi</b>	29
a) Hidraulični kondenzator	30
b) Fluidni otpornici	32
c) Fluidni kalemovi	34
d) Fluidni izvori	35
<b>2.3.2. Fluidne mreže</b>	35
<b>2.4. TERMIČKI SISTEMI</b>	41
<b>2.4.1. Osnovni elementi</b>	41
a) Termički kondenzator	41
b) Termički otpornik	42
c) Termički izvori	43
<b>2.4.2. Termičke mreže</b>	43
<b>2.5. RELACIJE IZMEĐU DUALNIH I ANALOGNIH MREŽA</b>	46
<b>2.6. DIMENZIONI FAKTORI</b>	51
<b>2.7. FORMULISANJE JEDNAČINA FIZIČKIH MREŽA</b>	57
<b>2.7.1. Sistem jednačina nezavisnih strujnih promenljivih</b>	58
<b>2.7.2. Sistem jednačina nezavisnih naponskih promenljivih</b>	60
<b>2.7.3. Mešoviti (hibridni) sistem nezavisnih promenljivih</b>	61
<b>2.7.4. Sistem jednačina stanja</b>	66

<b>2.8. ENERGETSKI PRETVARAČI</b>	70
<b>2.8.1. Osnovne jednačine energetskih pretvarača</b>	72
<b>2.8.2. Elektromehanički energetski pretvarači</b>	75
a) Električni E.P.	75
b) Magnetni energetski pretvarač	80
<b>2.8.3. Ekvivalentne mreže energetskih pretvarača</b>	83
a) $m$ -analogna transformacija	85
b) $k$ -analogna transformacija	86
<b>2.8.4. Ekvivalentne mreže elektromehaničkih sistema</b>	87
 BIBLIOGRAFIJA	93
 <b>3. ANALOGNE MREŽE RASPODELJENIH FIZIČKIH SISTEMA</b>	95
<b>3.1. OPŠTA KARAKTERISTIKA PARCIJALNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA</b>	95
a) Jednačine eliptičkog tipa	96
b) Jednačine paraboličnog tipa	99
c) Jednačine hiperboličnog tipa	100
<b>3.2. DISKRETIZACIJA JEDNAČINA RASPODELJENIH SISTEMA</b>	102
<b>3.2.1. Raspodeljeni statički sistemi</b>	103
a) Slučaj oblasti pravougaonog i paralelepipednog oblika	103
b) Diskretna ćelija i elementarna mreža	106
c) Granični uslovi	111
d) Kvalitet aproksimacije pri diskretizaciji raspodeljenih statičkih sistema	116
e) Slučaj oblasti proizvoljnog oblika	118
f) Nehomogena statička polja	123
g) Nelinearna jednačina eliptičnog tipa	125
<b>3.2.2. Raspodeljeni dinamički sistemi</b>	127
a) Difuzionu jednačina sa raspodeljenim izvorima	128
b) Talasna jednačina	129
c) Jednačina ustaljene difuzije čestica	131
d) Maxwellove jednačine	134
<b>3.2.3. Rezistivne analogne mreže za raspodeljene dinamičke sisteme</b>	136
a) Fourierova jednačina	137
b) Kvalitet aproksimacije	140
c) Analogne mreže za difuzionu jednačinu	143





# 1. UVOD

## 1.1. POJAM MODELA

U osnovi svih fizičko-tehničkih nauka leže *eksperimenti* i *merenja*. Na osnovu merenja u nekom eksperimentu na nekom realnom *fizičkom objektu*, istraživač pokušava da postulira izvesne zakone na kojima treba da gradi jednu *teoriju*. Ova teorija je verodostojna samo ukoliko uspe da *predvidi* rezultate koji se mogu potvrditi novim eksperimentima. Na osnovu rezultata ovih eksperimenata, istraživač potvrđuje svoju teoriju, modifikuje je, ukoliko nije zadovoljan postignutom saglasnošću, ili je čak potpuno odbacuje.

Sama reč "objekt" obuhvata najrazličitije fizičke sisteme (mehaničke, električne, akustične, elektromehaničke, i dr.) kao i procese (termičke, fluidne, hemijske, atomske, i dr.).

Prilikom analize ili projektovanja nekog objekta potrebno je najpre identifikovati *ulazne i izlazne veličine*. Ulazne veličine su pobudne sile (eksitacije ili stimulusi) koji deluju na objekt proizvodeći izlazne veličine ili odzive. Formulisanje zavisnosti između ulaznih i izlaznih veličina koje nam omogućava da se pod izvesnim uslovima iz poznatih ulaznih veličina odrede izlazne veličine, naziva se opštim imenom *modelovanje*. Za jedan dati fizički objekt moguće je formulisati razne zavisnosti između ulaznih i izlaznih veličina - razne *modele* - zavisno od konkretnog zadatka.

Značaj modelovanja je veliki jer se o ponašanju stvarnog fizičkog objekta sudi samo posredstvom modela kojim se on predstavlja. Pošto predstavljanje modelom neminovno uključuje niz idealizacija osobina objekta, važno je da model bude dovoljno tačan, ali u isto vreme i dovoljno prost, kako bi se rezultati njegove analize mogli dobiti sa relativno jednostavnim matematičkim aparatom.

## 1.2. FIZIČKO I MATEMATIČKO MODELOVANJE. ELEKTRIČNO MODELOVANJE

Metode modelovanja se mogu podeliti u dve osnovne grupe:

### 1) Fizičko (slično) modelovanje i 2) Matematičko modelovanje.

Fizičko modelovanje polazi od istovetnosti fizičke *prirode* objekta i modela. Ulazne i izlazne veličine modela su takođe iste fizičke prirode kao i objekta. Razlika je jedino u tome što je obično model manje razmere od originala (zajedno sa ulaznim i izlaznim veličinama), na primer 10 : 1. Stoga se ovo modelovanje naziva i *slično*. Ono se primenjuje, na primer, za ispitivanje brodova u bazenima, aviona u aerodinamičkim tunelima, raznih građevinskih objekata, kao i velikih električnih mašina. Glavne su mu prednosti u tome što dopušta pregledno praćenje procesa i što mu tačnost može biti prilično velika. Međutim, fizičko modelovanje ima osnovni nedostatak što je strogo namensko, tj. za svaki novi objekt potrebno je graditi novi model. Pored toga, promene parametara

objekta zahtevaju preradu (adaptaciju) modela ili čak njegovu zamenu, a isto tako modeli složenijih objekata (kotlovi, nuklearni reaktori) su teško izvodljivi i vrlo skupi.

Činjenica što se pri fizičkom modelovanju koristi *identično* matematičko karakterisanje objekta i modela koji imaju *istu fizičku prirodu* upućuje na pomisao da bi se objekt mogao predstaviti modelom *različite fizičke prirode* koji ima *identično* matematičko karakterisanje kao sam objekt. I zaista, poznato je da postoji niz različitih fizičkih pojava koje su opisane istim matematičkim relacijama. Ovo se jasno odražava i u dijalektičko-materijalističkom gledištu o tome “da se jedinstvo prirode ispoljava u upadljivoj analogiji diferencijalnih jednačina koje opisuju razne pojave.”<sup>1</sup> To znači da možemo u principu izučavati fizičke pojave još nedovoljno proučene, izučavanjem nama dobro poznatih fizičkih pojava koje su režirane jednačinama istog oblika. Na ovoj ideji *analogije* upravo i počivaju metode matematičkog modelovanja. Za razliku od fizičkog modelovanja, ove metode omogućavaju da se rešavanje jedne široke klase problema svede na rešavanje odgovarajućeg *matematičkog modela* jedne jedine klase. Kada su dva ili više modela opisana jednačinama istog matematičkog oblika, kažemo da su ona *analogna*.

Kao model-analogon koji reprezentuje neki dati fizički sistem pogodno je usvojiti onaj čija se struktura može dekomponovati na prostije podsisteme čije su osobine u jasnoj uzajamno-jednoznačnoj korespondenciji sa pojedinim fizičkim osobinama datog sistema. Osim toga, pošto model-analogon treba da služi ne samo dobijanju analitičkih i numeričkih rešenja problema koji se proučava (u tom smislu on obavlja funkciju računara), već treba da služi i kao *eksperimentalno sredstvo* na kojem se mogu vršiti merenja pri raznim režimima rada, poželjno je da se on može konstruisati iz jednostavnih (i jeftinih) komponenata čiji se parametri mogu lako menjati.

Od svih mogućnih modela-analogona - *električne mreže* suvereno zadovoljavaju sve gore pomenute zahteve. One su matematički modeli električnih sistema, i najprostiji podsistemi na koji se može dekomponovati su njeni *elementi* ( $R, L, C$  elementi i drugi). Interakcija između pojedinih elemenata je opisana grafom mreže i KIRCHHOFFovim zakonima. Videćemo da se veliki broj fizičkih objekata može svesti na model električne mreže. Postupak svodenja nekog objekta na električnu mrežu naziva se *električno modelovanje*.

Kako su osobine i rešavanje električnih mreža dobro proučene u Teoriji električnih mreža, to nam metode ove teorije uspešno koriste za analizu jedne široke klase fizičkih objekata.

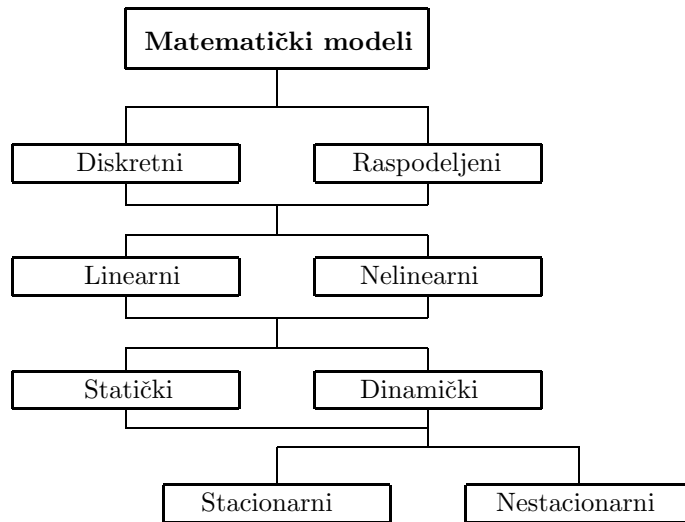
### 1.3. KLASIFIKACIJA MODELA

Prema vrsti jednačina kojima su opisani svi matematički modeli, pa prema tome i električne mreže, mogu se klasifikovati shodno dijagramu na Sl. 1.1. Osnovna podela je na prostorno *diskretne* i *raspodeljene modele*. Diskretni mode-

<sup>1</sup>V. I. Lenjin, Poln. sobr. soč., t.18, str. 306, 1961, Moskva

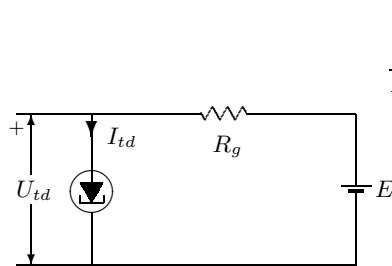
li, ili još nazvani *modeli sa koncentrisanim parametrima*, opisani su ili algebarskim jednačinama (statički modeli) ili običnim diferencijalno - integralnim jednačinama čije su promenljive funkcije vremena (dinamički modeli).

Raspodeljeni modeli, ili *modeli sa raspodeljenim parametrima*, su karakterisani parcijalnim diferencijalnim jednačinama čije su promenljive funkcije od prostornih koordinata (statički modeli) ili funkcije od prostornih koordinata i vremena (dinamički modeli).

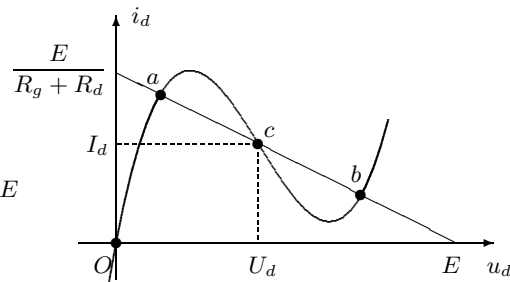


Sl. 1.1.1. Osnovna klasifikacija modela

Svaki model može biti linearan ili nelinearan prema tome da li su odgovarajuće jednačine linearne ili nelinearne. Jedna dalja podela dinamičkih modela - linearnih i nelinearnih - je na stacionarne, ili vremenski nepromenljive i nestacionarne, ili vremenski promenljive. Kod prvih diferencijalne jednačine ne sadrže eksplicitno vreme, dok kod drugih one sadrže eksplicitno vreme.



Sl. 1.2a. Fizičko kolo sa tunel diodom



Sl. 1.2b. Karakteristika tunel diode

Polazeći od nekog objekta, moguće je postaviti razne matematičke modele zavisno od konkretnog zadatka odnosno *cilja* istraživanja. S druge strane, jedan isti model može imati više matematičkih *predstavljanja*.

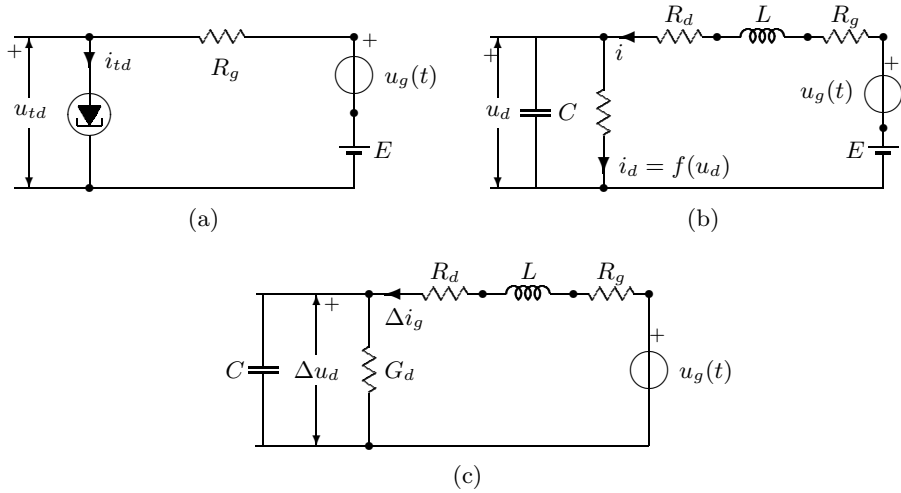
Da bismo ovo ilustrovali, posmatrajmo objekt koji obrazuje fizičko kolo na Sl. 1.2a sastavljeno od konstantnog izvora, otpornika i tunnel diode čija je karakteristika prikazana na Sl. 1.2b.

Recimo da je potrebno odrediti napon  $U_d$  i struju  $I_d$ , tj. tzv. radnu tačku tunnel diode. Električna mreža-model za naš objekat - su u ovom slučaju može predstaviti kao na Sl. 1.3. Pored elementa  $R_g$  i  $E$ , ova mreža sadrži statički model tunnel diode koji se sastoji od jednog linearnog i stacionarnog otpornika otpornosti  $R_d$  (otpornost poluprovodnog materijala) i jednog nelinearnog i stacionarnog  $i$ -otpornika karakteristike  $i_d = f(u_d)$  (otpornost p-n spoja).

Iz jednačina za ovo kolo

$$(1) \quad I_d = \frac{E - U_d}{R_d + R_g}, \quad (2) \quad I_d = f(U_d),$$

vidimo da je model u ovom slučaju *diskretan*, *statički* i *nelinearan*.



Sl. 1.4 (a) Fizičko kolo na Sl. 1.2.

(a) sa jednim dodatnim izvorom (b) Nelinearni model pri visokim učestanostima (c) Linearni model pri visokim učestanostima

Položaj radne tačke se dobija u preseku prave (1), i krive (2) i može se nalaziti u jednoj od triju tačaka karakteristike na Sl. 1.2b. U tačkama  $a$  i  $b$  nelinearni element ima pozitivnu inkrementalnu provodnost  $f'(u_d) = \frac{df(u_d)}{du_d}$ , dok je u tački  $c$  diferencijalna provodnost negativna.

Posmatrajmo sada isto kolo koje je pobuđeno još naponskim izvorom prostoperiodičnog napona  $u_g(t)$ , Sl. 1.4a. Ako je njegova učestanost dovoljno visoka, tada se tunnel dioda mora modelovati kao u mreži na Sl. 1.4b. Dodati kondenzator predstavlja ekvivalentnu kapacitivnost p-n spoja, a kalem induktivnosti  $L_d$  predstavlja induktivnost izvoda. Mada je kondenzator nelinearan (q-tipa), radi uprošćenja smo pretpostavili da je linearan i stacionaran.

Prema našoj klasifikaciji model na Sl. 1.4b. je diskretan, dinamički, nelinearan i stacionaran. Ovaj model možemo predstaviti na više načina.

Predstavimo ga u dva oblika:

a) Jednačine stanja

$$(3) \quad \frac{du_d}{dt} = -\frac{1}{C} f(u_d) + \frac{1}{C} i,$$

$$(4) \quad \frac{di}{dt} = -\frac{1}{L} u_d - \frac{R_d + R_g}{L} i + \frac{E + u_g(t)}{L},$$

gde je  $u_d(0) = U_0$ ,  $i(0) = I_0$ , dobijaju se neposredno.

b) Relacija ulaz-izlaz za napon tunnel diode

$$(5) \quad \frac{d^2 u_d}{dt^2} + \left( \frac{R_d + R_g}{L} + \frac{f'(u_d)}{C} \right) \frac{du_d}{dt} + \frac{u_d + (R_d + R_g)f(u_d)}{LC} = \frac{E + u_g(t)}{LC}$$

dobija se iz (3) i (4) eliminisanjem struje  $i_g$ .

Da bismo odredili približno ponašanje nelinearne mreže na Sl. 1.4b, pretpostavićemo da naponi i struje relativno malo odstupaju od njihovih vrednosti u statičkom režimu koji zadovoljavaju (1) i (2), tj. pišaćemo

$$(6) \quad u_d = U_d + \Delta u_d, \quad (7) \quad i_d = I_d + \Delta i_d, \quad (8) \quad i = I + \Delta i = I_d + \Delta i.$$

Razvijanjem karakteristike tunnelne diode u TAYLORov red i zadržavanjem prva dva člana, tj.

$$(9) \quad i_d = f(u_d) = f(U_d + \Delta u_d) = f(U_d) + f'(U_d)\Delta u_d,$$

a zatim primenom (1), (2), (6), (7), (8), jednačine stanja i relacija ulaz-izlaz se svode, respektivno, na

$$(10) \quad \frac{d\Delta u_d}{dt} = -\frac{G_d}{C} \Delta u_d + \frac{1}{C} \Delta i, \quad \frac{d\Delta i}{dt} = -\frac{1}{L} \Delta u_d - \frac{R_d + R_g}{L} \Delta i + \frac{u_g(t)}{L},$$

$$(11) \quad \Delta u_d(0) = U_0 - U_d, \quad \Delta i_g(0) = I_0 - I_d,$$

$$(12) \quad \frac{d^2 \Delta u_d}{dt^2} + \left( \frac{R_d + R_g}{L} + \frac{G_d}{C} \right) \frac{d \Delta u_d}{dt} + \frac{1 + (R_d + R_g)G_d}{LC} \Delta u_d = \frac{u_g(t)}{LC},$$

gde je

$$(13) \quad G_d = f'(U_d)$$

tzv. diferencijalna provodnost tunel diode u radnoj tački.

Jednačine (10), (11) i (13) predstavljaju *linearizovani model* tunel diode. One pokazuju da se u okolini statičke radne tačke nelinearna mreža na Sl. 1.4b. može zameniti linearnom i stacionarnom mrežom na Sl. 1.4c.

Ukoliko bi učestanost  $f$  izvora bila vrlo visoka, reda  $v_0/d$ , gde je  $d$  dužina izvoda tunel diode a  $v_0 = 3 \cdot 10^8$  m/s, tada diskretni model koji smo do sada razmatrali ne bi više bio adekvatan, pa je potrebno zameniti ga raspodeljenim modelom koji bi bio predstavljen jednim vodom, kao što je pokazano na Sl. 1.5.

Jednačine za ovaj model su

$$(14) \quad \begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= ri + \ell \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= gu + c \frac{\partial u}{\partial t}, \end{aligned}$$

gde su  $r$ ,  $\ell$ ,  $g$ ,  $c$  podužni parametri voda, sa graničnim uslovima

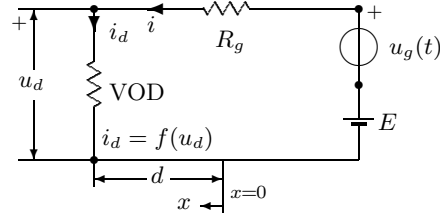
$$(15) \quad R_g i(0, t) + u(0, t) = E + u_g(t), \quad i(d, t) - f(u(d, t)) = 0$$

i početnim uslovima

$$(16) \quad u(x, 0) = U_0(x), \quad i(x, 0) = I_0(x).$$

Mada su jednačine voda (14) linearne, granični uslovi (15) su nelinearni, tako da je naš dinamički model u suštini nelinearan. Traženi napon  $u_d$  se dobija rešavanjem  $u(d, t)$  iz gornjih jednačina.

U posmatranom primeru, raspodeljeni nelinearni dimamički model je najopštiji i najtačniji model za tunel diodu. Pošto ne postavlja ograničenja na visinu učestanosti izvora ni na vrednosti napona i struja on obuhvata sve ranije modele kao specijalne slučajeve. Međutim, u mnogim situacijama to je suviše složen model. Računanje sa takvim modelom može biti dugo i skupo čak uz primenu računara. Ako je učestanost  $f$  nekoliko puta manja od  $v_0/d$ , odnosno



Sl. 1.5. Raspodeljeni model tunel diode na Sl. 1.2a.

ako je pri radnoj učestanosti  $f$  linijska dimenzija kola  $d \ll v_0/f$ , tada se vod može aproksimirati kaskadnom vezom nekoliko T-ili  $\Pi$ -mreža za dva para krajeva, čime dobijamo mrežu sa koncentrisanim parametrima. Isto tako, ako je poznato da su vrednosti napona i struja male u odnosu na njihove vrednosti u statičkom režimu, tada se nelinearna mreža može aproksimirati linearnom mrežom čime se model još više uprošćava. Uopšte, uprošćavanje modela pri datim radnim uslovima objekta bez značajnog gubitka tačnosti, predstavlja važan problem u modelovanju.

## 2. ANALOGNE MREŽE PROSTORNO DISKRETNIH FIZIČKIH SISTEMA

U ovoj glavi pokazaćemo da se neelektrični diskretni fizički sistemi mogu tretirati ravnopravno sa električnim diskretnim sistemima. Pošto se ovi predstavljaju električnom mrežom, uvešćemo najpre za nekoliko sistema elemente koji su analogni elementima električne mreže, a zatim ćemo pokazati da *mreža* dobijena međusobnim vezivanjem elemenata zadovoljava zakone koji su analogni KIRCHHOFFOVIM zakonima. Najzad, razmotrićemo dualni aspekt električnog modelovanja i diskutovaćemo problem dimenzionih faktora.

### 2.1. PRINCIPI OBRAZOVANJA MREŽA DISKRETNIH SISTEMA

Za jedan fizički sistem kazaćemo da ima *strukturu mreže* ako se on može smatrati međusobnom vezom nekih *osnovnih elemenata*. Osnovni elementi su najmanji delovi na koje se sistem može dekomponovati tako da jedna njihova određena osobina bude matematički opisana sa zadovoljavajućom tačnošću. Svaki element se karakteriše nekom funkcionalnom relacijom između jednog ili više pari promenljivih čiji je proizvod po prirodi energija ili snaga. Ove promenljive zadovoljavaju *dva zakona međusobnog vezivanja* (interkonekcije).

Tako, na primer, dolazimo do modela električne mreže prilikom razmatranja jedne posebne klase fizičkih sistema, električnih sistema, koji se sastoje od raznih *električnih naprava* koje su na izvestan način međusobno povezane posredstvom svojih krajeva (terminala). Svaka takva naprava je opisana nekom relacijom između *struja* (ili opterećenja) i *napona* (ili fluksa) na njenim krajevima. Pored ovih relacija, struje i naponi zadovoljavaju zakone međusobnog vezivanja, tzv. *Kirchhoff-ove zakone*. Ovi zakoni su nezavisni od relacija koji opisuju naprave. Da bismo odredili napone i struje ovih naprava mi postupamo na sledeći način:

1) *Definišemo skup osnovnih elemenata*  $E_e$  pomoću izvesnih relacija između struja (ili opterećenja) i napona (ili fluksa) tzv. *karakteristika elemenata*, i smatramo da je svaka naprava predstavljena ili jednim elementom skupa  $E_e$  ili kombinacijom više elemenata, tako da stvarna karakteristika naprave bude aproksimirana sa zadovoljavajućom tačnošću u određenim radnim uslovima, na primer u željenom opsegu napona, struja i učestanosti.

2) Povezujemo osnovne elemente pomoću svojih krajeva na vrlo sličan način kao što su same naprave povezane u stvarnom električnom sistemu,  $S_e$ . Ovi elementi su međusobno povezani i obrazuju ono što nazivamo *električnom mrežom*  $M_e$  koja modeluje naš električni sistem  $S_e$ . Važno je istaći da se za električnu mrežu  $M_e$  pretpostavlja da KIRCHHOFFOVI zakoni važe kao i za sâm električni sistem  $S_e$ . Na taj način *matematički model* mreže  $M_e$ , koji se sastoji od karakteristika elemenata i KIRCHHOFFOVIH zakona, aproksimira dati električni sistem



$S_e$  u meri u kojoj su karakteristike stvarnih električnih naprava aproksimirane karakteristikama osnovnih elemenata mreže. Matematički model mreže se može predstaviti pomoću raznih sistema jednačina kao što su, na primer, jednačine napona čvorova, jednačine stanja i dr., na razne načine, što zavisi od mnogih činilaca. Bitno je da se svaki od ovih modela izvodi na jedan organizovani (sistematski) način.

Postupak koji smo primenili za obrazovanje električne mreže  $M_e$  koja modeluje neki električni sistem  $S_e$  možemo proširiti na proizvoljne fizičke sisteme. U tu svrhu, za neki fizički sistem  $S$ , potrebno je najpre definisati promenljive koje igraju istu ulogu kao struje (ili opterećenja) i naponi (ili fluksevi) u električnim sistemima. Ove promenljive ćemo, respektivno, zvati *strujne* i *naponske promenljive*. Drugi nazivi za ove promenljive su, respektivno, *radne* ili *ekstenzivne* i *otočne* ili *intenzivne* promenljive. Potom je potrebno definisati skup osnovnih elemenata  $E$  pomoću relacija između strujnih i naponskih promenljivih. Mreža  $M$  koja modeluje sistem  $S$  dobija se međusobnim vezivanjem osnovnih elemenata.

Pošto se mreža  $M$  za neki fizički sistem  $S$  formira po istim pravilima kao električna mreža, odmah se postavlja pitanje korespondencije između ove mreže  $M$  i električne mreže  $M_e$  koja ima isti matematički model kao mreža  $M$ . Takve mreže nazvaćemo *električne analogne mreže*.

U narednim odeljcima, pozabavićemo se formiranjem mreža za neke diskretne fizičke sisteme koji se najčešće sreću. Slično diskretnim električnim mrežama (mrežama sa koncentrisanim parametrima u kojima postoje tri vrste energije koje se smatraju usredsređene, odnosno nezavisno od prostornih koordinata kojima odgovaraju tri osnovna elementa: kalem, kondenzator i otpornik) i za druge diskretne fizičke sisteme koji imaju strukturu mreže, možemo uvesti elemente koji u suštini odgovaraju osnovnim elementima električne mreže. Svaki od ovih elemenata biće središte samo jedne vrste energije: kinetičke ili potencijalne ili energije disipacije. Međusobno vezivanje osnovnih elemenata daje odgovarajuću prostorno diskretnu mrežu. Međusobno vezivanje se analitički izražava linearnim zavisnostima između strujnih promenljivih i naponskih promenljivih ponaosob. Ove zavisnosti su analogne KIRCHHOFFovim zakonima.

Radi jednostavnosti, posmatraćemo samo linearne i stacionarne mreže obrazovane uglavnom od elemenata *sa jednim parom krajeva*.

## 2.2. MEHANIČKI SISTEMI

Ovde ćemo posmatrati samo najjednostavnije mehaničke sisteme koji vrše pravolinijsko (translatorno) kretanje i obrtno (rotaciono) kretanje oko jedne osovine. Poznato je da se svako kretanje u jednoj ravni može razložiti na ova dva vida kretanja. Za svako od ova dva kretanja uvešćemo najjednostavnije osnovne elemente.

### 2.2.1 OSNOVNI ELEMENTI

#### a) Inercioni elementi

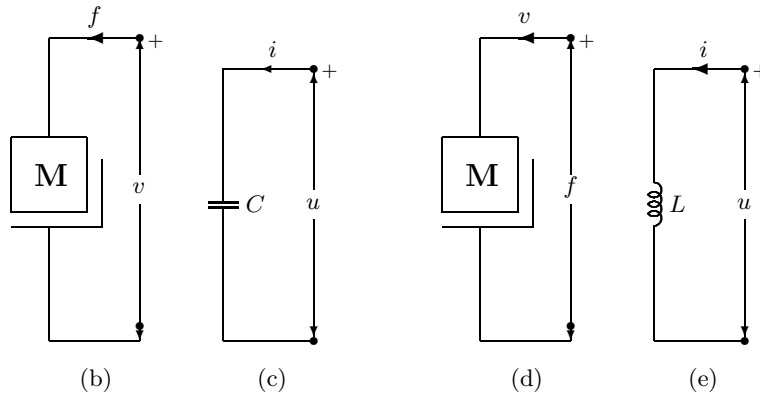
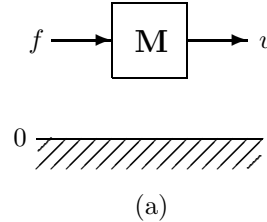
Za neku koncentrisanu materiju *mase*  $M$  koja se kreće pravolinijski *brzi-  
nom*  $v$  u odnosu na neki koordinatni sistem koji miruje ili se kreće jednoliko i  
pravolinijski (inercioni koordinatni sistem), Sl. 2.1a, drugi NEWTONov zakon

$$(1a) \quad f = M \frac{dv}{dt} = MDv, \quad v(0) = v_0, \text{ ili } (1b) \quad v = \frac{1}{MD} f = \frac{1}{M} \int_0^t f(z) dz + v_0,$$

koji povezuje *silu inercije*  $f$  i *ubrzanje*  $a = Dv = D^2x$  ( $x$  = pomeranje), može  
se shvatiti kao definiciona karakteristika jednog elementa sa dva kraja. Ovaj  
element se naziva *element - masa*.

Relacija (1) za element - masu pokazuje  
da je ona analogna karakteristici jednog elek-  
tričnog linearnog (i stacionarnog) kondenzatora  
(Sl. 2.1b i c) ako se uspostavi sledeća korespo-  
ndencija:

silu $f$	$\longleftrightarrow$	struja $i$
brzina $v$	$\longleftrightarrow$	napon $u$
masa $M$	$\longleftrightarrow$	kapacitivnost $C$



Sl. 2.1. Element masa

- a) Fizičko predstavljanje   b) Simboličko  $M$ -predstavljanje  
c)  $M$ -analogni električni element   d) Simboličko  $K$ -predstavljanje  
e)  $K$ -analogni električni element

Relacija (1) se, takođe, može interpretirati kao karakterisanje jednog line-  
arnog (i stacionarnog) kalema (Sl. 2.1d i e) ako se uspostavi sledeća korespon-  
dencija:

silu $f$	$\longleftrightarrow$	napon $u$
brzina $v$	$\longleftrightarrow$	struja $i$
masa $M$	$\longleftrightarrow$	induktivnost $L$

Prva analogija se naziva *mobilna analogija* ili *M-analogija* (prema F. A. FIRESTONE)<sup>1</sup>, a druga, uvedena još od MAXWELLA, naziva se *klasična* ili *K-analogija*.<sup>2</sup>

U daljem radu najviše ćemo koristiti *M-analogiju*.

Kraj označen sa 0 na Sl. 2.1b označava *inercijalnu referencu* u odnosu na koju je definisana masa. Na Sl. 2.1a inercijalna referenca je predstavljena kao zemlja. Važno je napomenuti da ako bismo imali više masa koje bi se kretale u istom pravcu i u odnosu na isti inercijalni koordinatni sistem, tada bi svaki element - masa imao svoj kraj 0 vezan za jedan zajednički čvor, ako bi se posmatralo *M*-predstavljanje.

Pozitivni smerovi za silu  $f$  i brzinu  $v$  na Sl. 2.1b i 1d<sup>3</sup> odgovaraju u potpunosti fizičkoj predstavi na Sl. 2.1a i promena smera neke od veličina na jednoj slici povlači za sobom promenu smera iste veličine na drugoj slici.

Kod obrtanja oko jedne osovine zamajca polarnog *momenta inercije*  $J$ , Sl. 2.2a, sa *ugaonom brzinom*  $\omega$ , NEWTONov zakon glasi

$$(2a) \quad \tau = J \frac{d\omega}{dt} = JD\omega; \quad \omega(0) = \omega_0,$$

ili

$$(2b) \quad \omega = \frac{1}{JD} \tau = \frac{1}{J} \int_0^t \tau(z) dz + \omega_0,$$

gde je  $\tau$  obrtni moment.

Veličina  $a = D\omega = D^2\theta$  ( $\theta$  = ugao obrtanja) predstavlja ugaono ubrzanje.

Relacija (2) definiše *element - moment inercije* čiji je simbol isti kao za element - masu, s tom razlikom što je  $f$  zamenjeno sa  $\tau$  a  $v$  sa  $\omega$ .

Iz relacije (2) se vidi da možemo ostvariti ove 2 analogije:

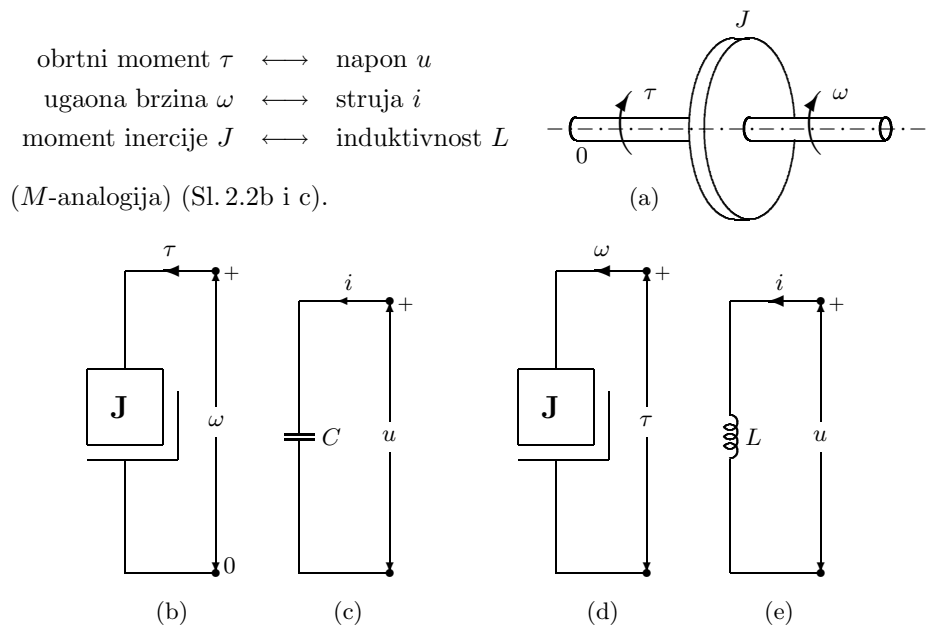
obrotni moment $\tau$	$\longleftrightarrow$	struja $i$
ugaona brzina $\omega$	$\longleftrightarrow$	napon $u$
moment inercije $J$	$\longleftrightarrow$	kapacitivnost $C$

(*K* = analogija) (Sl. 2.2d i e) i

<sup>1</sup>F. A. FIRESTONE: *A new analogy between mechanical and electrical systems*, J. Acoust, Soc. America, **4**, 249-267, 1933.

<sup>2</sup>J. C. MAXWELL: *Treatise on Electricity and Magnetism*, vol. I, II, Oxford, 1873.

<sup>3</sup>Pozitivni smer za pomeranje  $x$  i ubrzanje  $a$  se uzima isti kao i za brzinu



Sl. 2.2. Element - moment inercije

- a) Fizičko predstavljanje   b) Simboličko  $M$ -predstavljanje  
 c)  $M$ -analogni električni element   d) Simboličko  $K$ -predstavljanje  
 e)  $K$ -analogni električni element

Kraj označen sa 0 na Sl. 2.2b predstavlja inercionu referencu, tj. nepomičnu osu obrtanja na Sl. 2.2a. Ako se posmatra  $M$ -predstavljanje, tada svi elementi - moment inercije moraju imati jedan zajednički čvor.

#### b) Elementi naprezanja

Elementi naprezanja služe za modelovanje elastičnih osobina opruga. Na Sl. 2.3a prikazana je jedna *translaciona opruga*. Ako sa  $x_1$  i  $x_2$  označimo rastojanje kraja 1 i kraja 2 od neke utvrđene tačke 0, tada je, prema HOOKEOVOM zakonu, mala deformacija (istezanje ili sabijanje) opruge određena jednakošću

$$(3) \quad x = C_t f,$$

gde je

$$(4) \quad x = x_1 - x_2$$

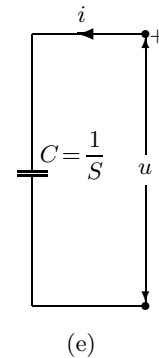
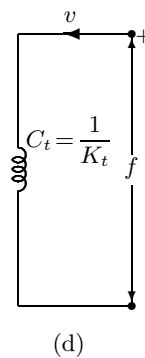
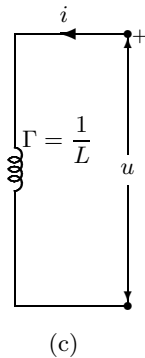
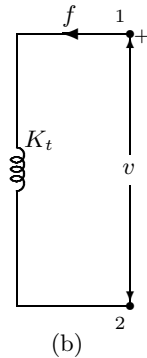
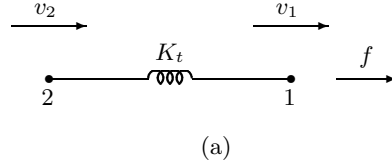
promena dužine opruge,  $f$  sila u opruzi, a  $C_t$  je *koeficijent elastičnosti* (= kompliansa).

Ako se krajevi 1 i 2 pomeraju brzinama  $v_1$  i  $v_2$ , tada je razlika brzina krajeva

$$(5) \quad v = v_1 - v_2,$$

izražena kao

$$(5a) \quad v = C_t \frac{df}{dt} = C_t Df, \quad f(0) = f_0.$$



### Sl. 2.3 Element - translaciona opruga

- a) Fizičko predstavljanje   b) Simboličko  $M$ -predstavljanje  
c)  $M$ -analogni električni element   d) Simboličko  $K$ -predstavljanje  
e)  $K$ -analogni električni element

Relacija (5a) se može pisati u obliku

$$(5b) \quad F = \frac{K_t}{D} v = K_t \int_0^t v(z) dz + f_0,$$

gde je

$$(6) \quad K_t = \frac{1}{C_t}.$$

Relacije (5) su definiciona karakteristika *elementa - translaciona opruga*. Ako uspostavimo  $M$ -analogiju:

$$\begin{aligned} \text{sil}a \ f &\longleftrightarrow \text{struj}a \ i \\ \text{translaciona brzina } v &\longleftrightarrow \text{napon } u \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} &\text{koeficijent krutosti } K_t = 1/C_t \\ &(C_t = \text{translaciona kompliansa}) \end{aligned} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{aligned} &\text{recipročna induktivnost } \Gamma = 1/L \\ &(L = \text{induktivnost}) \end{aligned} \right.$$

vidimo da je opruga analogna kalemu (Sl. 2.3b i c).

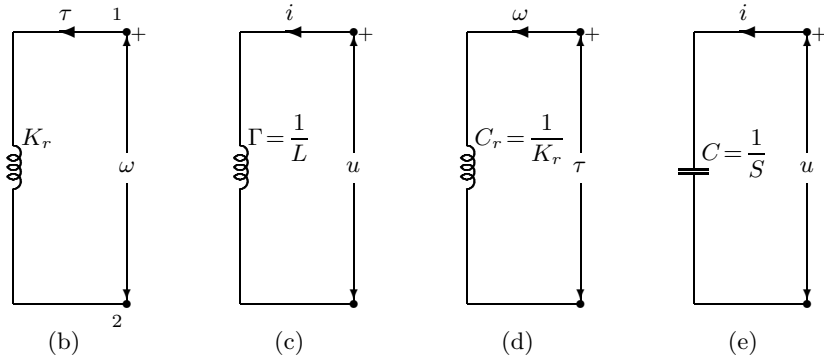
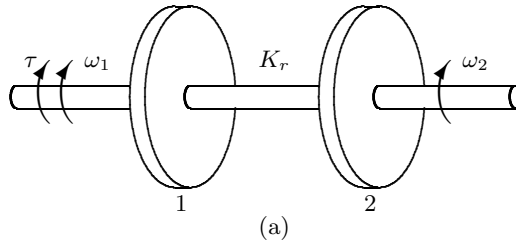
Promenljiva  $v$  između krajeva 1 i 2 označava da je to *relativna brzina* kraja 1 u odnosu na kraj 2. Stoga, za razliku od elementa - masa, koja se uvek definiše u odnosu na neki inercijalni koordinatni sistem koji je i u fizičkoj i u simboličkoj predstavi uvek jasno označen sa O, u definiciji elementa - opruga inerciona referenca je irelevantna pa u fizičkoj i u simboličkoj predstavi opruge dovoljno je označiti samo krajeve između kojih je vezana opruga.

Međutim, u  $K$ -analogiji:

$$\begin{aligned} \text{sil}a \ f &\longleftrightarrow \text{napon} \ u \\ \text{translaciona brzina} \ v &\longleftrightarrow \text{struja} \ i \\ \left. \begin{array}{l} \text{koeficijent krutosti } K_t = 1/C_t \\ (C_t = \text{kompliansa}) \end{array} \right\} &\longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{elastansa } S = 1/C \\ (C = \text{kapacitivnost}) \end{array} \right. \end{aligned}$$

opruga je analogna kondenzatoru (Sl. 2.3d i e).

*Torziona (rotaciona) opruga* je element koji je fizički predstavljen na Sl. 2.4a.



Sl. 2.4. Element - torziona opruga

- a) Fizičko predstavljanje   b) Simboličko  $M$ -predstavljanje  
c)  $M$ -analogni električni element   d) Simboličko  $K$ -predstavljanje  
e)  $K$ -analogni električni element

Ako se poprečni preseki 1 i 2 uvrću za uglove  $\theta_1$  i  $\theta_2$  u odnosu na neki početni ugao, tada je prema HOOKEovom zakonu za mala uvrtaanja

$$(7) \quad \theta = \theta_1 - \theta_2 = C_r \tau,$$

gde je  $C_r$  *koeficijent torzione elastičnosti* (= torziona kompliansa), a  $\tau$  obrtni moment uvrtnja. Važi jednakost

$$(8a) \quad \omega = \omega_1 - \omega_2 = C_r \frac{d\tau}{dt} = C_r D\tau; \quad \tau(0) = \tau_0,$$

ili

$$(8b) \quad \tau = \frac{K_r}{D} \omega = K_r \int_0^t \omega(z) dz + \tau_0,$$

gde je  $\omega$  relativna ugaona brzina, a

$$(9) \quad K_r = 1/C_r$$

*koeficijent torzione krutosti* (= torziona elastansa).

Definiciona karakteristika elementa - torziona opruga može se shvatiti kao karakteristika jednog linearnog (i stacionarnog) kalema, ako se uspostavi analogija:

$$\begin{aligned} \text{obrotni moment } \tau &\longleftrightarrow \text{struja } i \\ \text{ugaona brzina } \omega &\longleftrightarrow \text{napon } u \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{koef. torzione krutosti } K_r = 1/C_r \\ (C_r = \text{torziona kompliansa}) \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{recipročna induktivnost} \\ \Gamma = 1/L \text{ (} L = \text{induktivnost)} \end{array} \right\}$$

(*M*-analogija) (Sl. 2.4b i c).

Međutim u *K*-analogiji (Sl. 2.4d i e):

$$\begin{aligned} \text{obrotni moment } \tau &\longleftrightarrow \text{napon } u \\ \text{ugaona brzina } \omega &\longleftrightarrow \text{struja } i \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{koeficijent torzione krutosti } K_r = 1/C_r \\ (C_r = \text{torziona kompliansa}) \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{elastansa } S = 1/C \\ (C = \text{kapacitivnost}) \end{array} \right\}$$

torziona opruga je analogna kondenzatoru.

### c) Elementi trenja

Ovi elementi se uvode za modelovanje pojave trenja koje zavisi od brzine (kinetičkog ili viskoznog trenja) između kliznih površina koje su odvojene nekom viskoznom tečnošću (na primer, trenja između klipa i cilindra motora) ili između nekog tela koje se kreće kroz neki fluid (na primer, raketa koja se kreće kroz guste slojeve atmosfere, brodski propeler, itd.).

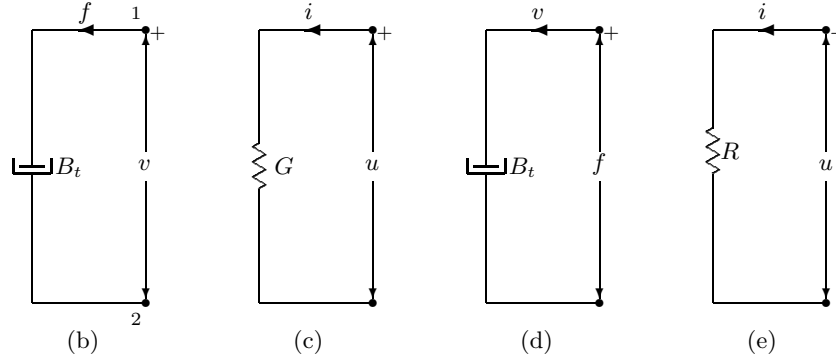
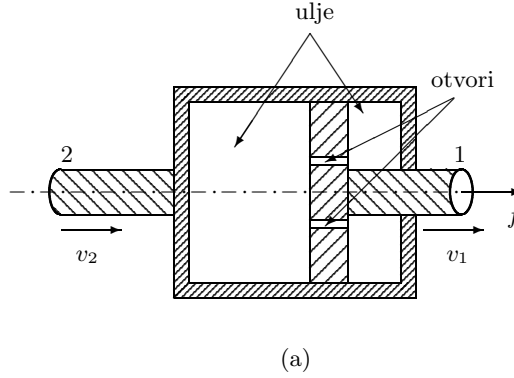
Pojava viskoznog trenja pri pravolinijskom kretanju predstavlja se slikovito kao jedan cilindar napunjen uljem u kojem se kreće jedan klip sa malim otvorima Sl. 2.5a, tzv. *prigušivač*.

Pomeranje klipa u cilindru pokreće ulje iz jedne komore u drugu. Ako sa  $v = v_1 - v_2$  označimo relativnu brzinu klipa u odnosu na cilindar, tada, *pri malim brzinama*, veza između sile viskoznog trenja  $f$  koja se prenosi kroz klip i brzine je

$$(10a) \quad f = B_t v$$

ili

$$(10b) \quad v = \frac{1}{B_t} f,$$



Sl. 2.5. Element - translatorno trenje a) Fizičko predstavljanje  
b) Simboličko  $M$ -predstavljanje c)  $M$ -analogni električni element  
d) Simboličko  $K$ -predstavljanje e)  $K$ -analogni električni element

gde je  $B_t$  konstanta prigušenja (za pravolinijsko kretanje).

*Element - translatorno trenje* čija je karakteristika data jednačinom (10) simbolički je predstavljen na Sl. 2.5b i d. Znak plus na kraju 1 znači i ovde da je  $v$  brzina kraja 1 u odnosu na kraj 2.

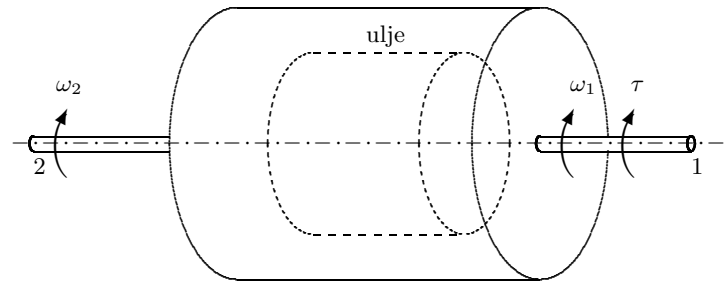
Na sličan način, torziono trenje kod obrtnog kretanja se fizički predstavlja, na primer, kao na Sl. 2.6a. Manji cilindar vezan za osovinu 1 okreće se unutar većeg cilindra koji je vezan za osovinu 2. Prostor između cilindara ispunjen je nekim viskoznom fluidom, na primer uljem. Obrtanje manjeg cilindra se prenosi posredstvom sile torzionog trenja na veći cilindar. Ako se ograničimo na male relativne brzine obrtanja  $\omega = \omega_1 - \omega_2$ , tada je relacija između  $\omega$  i torzionog momenta  $\tau$  koji deluje na osovinu 1

$$(11a) \quad \tau = B_r \omega \quad \text{ili} \quad (11b) \quad \omega = \tau / B_r,$$

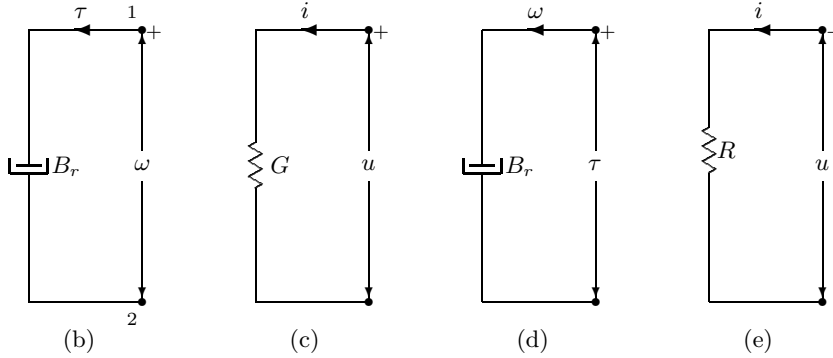
gde je  $B_r$  konstanta prigušenja (za rotaciono kretanje).



Sl. 2.6b i d prikazuje simbol za *element - torziona trenje*, gde oznake imaju isti smisao kao one za element - translatorno trenje.



(a)



Sl. 2.6. Element torziona trenje a) Fizičko predstavljanje  
b) Simboličko *M*-predstavljanje c) *M*-analogni električni element  
d) Simboličko *K*-predstavljanje e) *K*-analogni električni element

Iz karakteristika elemenata - trenje zaključuje se da su svi elementi analogni linearnim otpornicima za obe analogije. Međutim, dok je u *M*-analogiji

$$\left. \begin{array}{l} \text{konstanta prigušenja} \\ B_t \\ B_r \end{array} \right\} \longleftrightarrow \text{provodnost } G$$

u *K*-analogiji je

$$\left. \begin{array}{l} \text{konstanta prigušenja} \\ B_t \\ B_r \end{array} \right\} \longleftrightarrow \text{otpornost } R$$

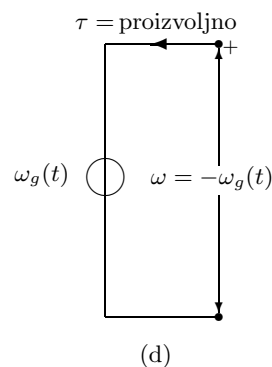
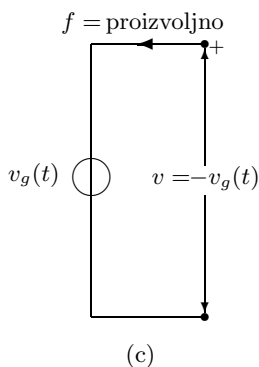
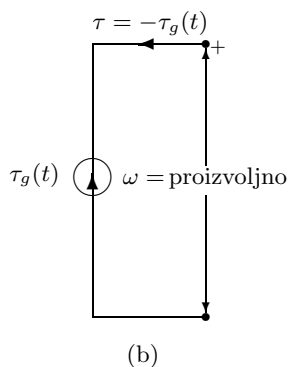
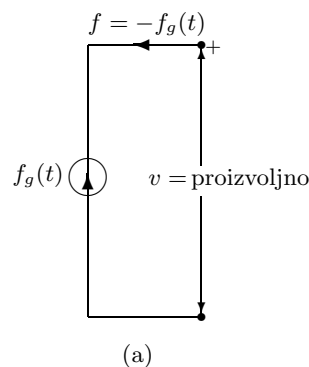
#### d) Nezavisni mehanički izvori

Kada je neka sila  $f$  ili moment  $\tau$  poznata funkcija vremena koja ne zavisi od brzina ili koordinata kretanja, kažemo da imamo model *izvora sile* ili *izvora*

*momenta*. Ovi izvori su predstavljeni na slikama 2.7a,b.

Isto tako, ako linijska ili ugaona brzina ne zavise od sila, momenata ili koordinata kretanja, kažemo da imamo model *izvora linijske brzine* ili *izvora ugaone brzine*. Ovi izvori su simbolično predstavljeni na Sl. 2.7c,d.

PRIMEDBA. Primećujemo da su simboli za izvor sile i izvor momenta isti kao za strujni izvor a simboli za izvor linijske brzine i izvor ugaone brzine su isti kao naponski izvori. Ovo je učinjeno u skladu sa *M*-analogijom kojom ćemo se u daljem radu najviše koristiti.



Sl. 2.7. Nezavisni mehanički izvori

a) Izvor sile b) Izvor momenta c) Izvor linijske brzine d) Izvor ugaone brzine

#### e) Mehanički transformatori

Poluge i zupčanci se koriste u mehanizmima za transformisanje sila i momenata odnosno linearnih i ugaonih brzina na manje ili veće vrednosti.

*Idealna poluga* (Sl. 2.8a) je model za fizičku polugu, pri čemu se pretpostavlja da je poluga savršeno kruta, zanemarljive mase i da je trenje u ležištu 0 zanemarljivo. Takođe se pretpostavlja da su ugaona pomeranja krajeva 1 i 2 od horizontalnog položaja mala. Pod ovom pretpostavkom, pod dejstvom koncentrisanih sila  $f_1$  i  $f_2$  krajevi 1 i 2 se pomeraju *vertikalno* brzinama  $v_1$  i  $v_2$ . Stvarna poluga se može modelovati kombinacijom elemenata - idealna poluga, - masa, - opruga i - trenje.

Iz jednakosti ugaone brzine krajeva 1 i 2

$$(12) \quad \frac{v_1}{d_1} = -\frac{v_2}{d_2}$$

i jednačine ravnoteže momenata u odnosu na oslonac 0

$$(13) \quad f_1 d_1 - f_2 d_2 = 0$$

dobijamo karakteristiku elementa - idealna poluga u obliku

$$(14) \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -m \\ m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

gde je

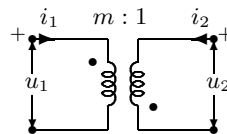
$$(15) \quad m = \frac{d_1}{d_2}$$

tzv. *prenosni odnos* poluge.

Iz (12) i (13) se vidi da idealna poluga predstavlja *mehanički transformator* u smislu što su sile i brzine transformisane u recipročnom odnosu. Ona je mehanički *element sa dva pristupa*, simbolički predstavljen na Sl. 2.8b.

U  $M$  - analogiji ( $f \leftrightarrow i$ ,  $v \leftrightarrow u$ ) idealna poluga predstavljena je jednim *idealnim transformatorom*, Sl. 2.9. istog odnosa prenosa  $m$ .

Sl. 2.9. Idealni transformator analogon za idealnu polugu;  $M$ -analogija

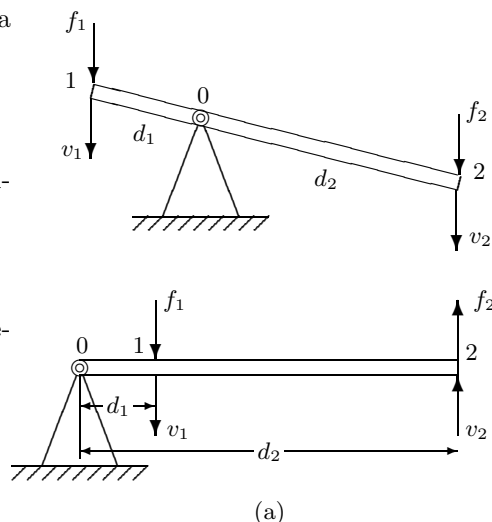


## Vežbanje

### 2.1. Odrediti $K$ - analogon za idealnu polugu.

Idealna poluga ima mehaničke osobine analogne električnim osobinama idealnog transformatora.

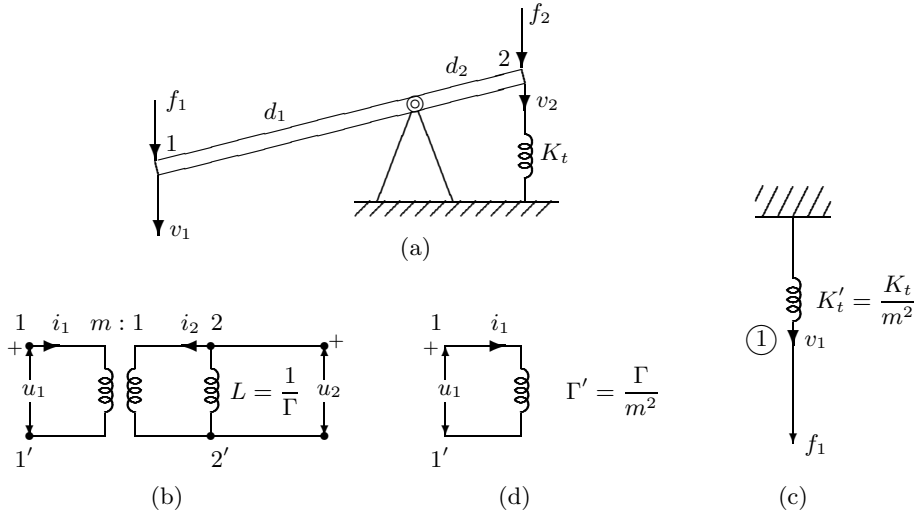
PRIMER 2.1. Posmatrajmo idealnu polugu čiji je kraj 2 opterećen jednom oprugom, Sl. 2.10a.



Sl. 2.8. Idealna poluga

a) Fizičko predstavljanje

b) Simboličko  $M$ -predstavljanje



Sl. 2.10. a) Idealna poluga opterećena oprugom b) Idealni transformator zatvoren kalemom c) Ekvivalentni mehanički element d) Ekvivalentni električni element

Ako je odnos prenosa poluge  $m$ , a koeficijent krutosti opruge  $K_t$ , tada je

$$(16) \quad f_2 = K_t \frac{1}{D} (0 - v_2) = -K_t \frac{1}{D} v_2,$$

pa se iz (14) dobija

$$(17) \quad f_1 = \frac{K_t}{m^2} \frac{1}{D} v_1$$

što pokazuje da je gledano sa pristupa 1 ovaj sistem ekvivalentan jednoj translatornoj opruzi krutosti  $K'_t = K_t/m^2$  (Sl. 2.10c).

To znači da, ako bi se pod dejstvom prostoperiodične sile  $f_1(t) = F_1 \cdot \cos \omega t$  krajevi poluge pomerili po prostoperiodičnom zakonu, i ako je  $m > 1$ , tada bi odnos  $F_1/v_1$  bio manji od odnosa  $F_2/v_2$ , gde su  $F_i$  i  $v_i$  amplitude odgovarajućih veličina.

Kaže se još da kraj 1 ima manju mehaničku admitansu (veću mehaničku impedansu) od kraja 2. U  $K$ -analogiji bilo bi obratno (proveriti!).

Lako je videti da se analogni zaključci mogu izvesti iz kola sa idealnim transformatorom i kalemom na sl. 2.10b.

### Vežbanja

**2.2.** Uporediti mehaničke admitanse krajeva 1 i 2 idealne poluge prenosnog odnosa  $m$ , opterećene na kraju 2 masom  $M$ .

**2.3.** Isto pitanje ako kraj 2 pokreće klip u cilindru sa uljem koeficijenta prigušenja  $B_t$ .

Pri obrtnom kretanju, *idealni zupčani prenosnik* (Sl. 2.11a) predstavlja model za jedan par zupčanika savršeno krutih, zanemarljive mase i trenja.

Karakteristika elementa - *idealni zupčani prenosnik* (Sl. 2.11b) je

$$(18) \quad \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -m \\ m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix},$$

gde je

$$(19) \quad m = N_2/N_1$$

*prenosni odnos* (odnos broja zubaca).

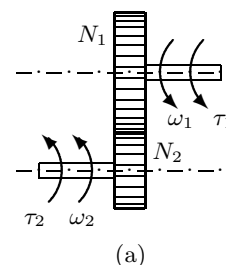
Karakteristika (18) pokazuje da je element - idealni zupčani prenosnik  $M$ -analogan idealnom transformatoru prenosnog odnosa  $m$ .

**Vežbanja**

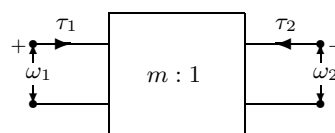
**2.4.** Izvesti karakteristiku (18) idealnog zupčanog prenosnika.

**2.5.** Odrediti ekvivalentni moment inercije osovine 1 idealnog zupčanog prenosnika ako se na osovini 2 nalazi zamajac momenta inercije  $J$ .

**2.6.** Izvesti karakteristiku idealnog zupčanog prenosnika u  $K$ -analogiji.



(a)



(b)

Sl. 2.11. Idealni zupčani prenosnik

a) Fizičko predstavljanje

b) Simboličko  $M$ -predstavljanje

### 2.2.2. MEHANIČKE MREŽE

Pošto smo definisali osnovne elemente mehaničkih sistema za pravolinijsko i obrtno kretanje, možemo pristupiti obrazovanju mehaničke mreže. Pri tome zadržaćemo se na  $M$ -predstavljanju. Da bismo prešli sa fizičko-slikovite predstave sistema na mehaničku mrežu, postupaćemo na sledeći način:

a) Postavićemo onoliko čvorova koliko ima različitih brzina više jedan čvor 0-predstavnik inercijalne reference. Svaki čvor ima za promenljivu odgovarajuću brzinu (linijsku ili ugaonu). Čvor 0 (referentni čvor) ima brzinu koja je jednaka nuli.

b) Svaki element - masa odnosno element - moment inercije vezaćemo jednim krajem za čvor 0 a drugim krajem za čvor čija je promenljiva brzina tog elementa.

c) Elemente - opruga, elemente - trenje i izvore vezaćemo između čvorova čije su promenljive brzine njihovih krajeva.

d) Mehaničke transformatore vezaćemo tako što ćemo svaki pristup shvatiti kao jedan element sa jednim pristupom.

*Zakoni međusobnog vezivanja* za mehaničke mreže su *d'Alambert-ov princip* i *Trentov-ov zakon*.

Za pravolinijsko (odnosno obrtno) kretanje *d'Alambert-ov* princip glasi:

*Algebarska suma sila (odnosno obrtnih momenata) u svakom čvoru i u svakom trenutku jednaka je nuli.*

*Trent-ov zakon utvrđuje da je algebarska suma relativnih brzina (linijskih odnosno ugaonih) duž bilo koje konture i u svakom trenutku jednaka nuli.*

TRENT-ov zakon je neposredna posledica činjenice da je duž svake konture algebarski zbir relativnih pomeranja (linijskih odnosno ugaonih) jednak nuli u svakom trenutku.

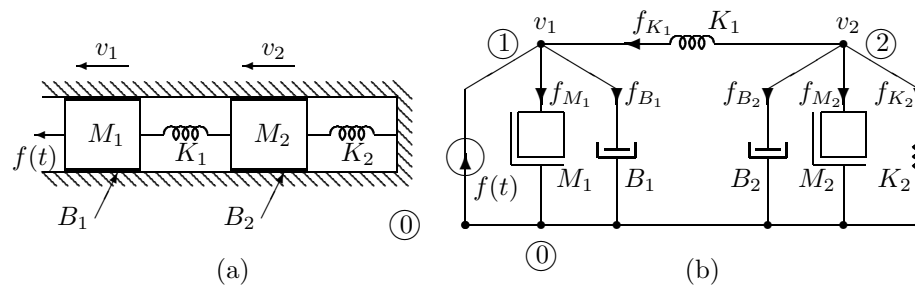
Vidimo da je D'ALAMBERT-ov princip analogan 1. KIRCHHOFF-ovom zakonu a TRENT-ov zakon je analogan 2. KIRCHHOFF-ovom zakonu. U vezi s tim potvrđujemo da su *sile i obrtni momenti strujne* (redne, ekstenzivne) *promenljive*, a *linijske i ugaone brzine su naponske* (otočne, intenzivne) *promenljive*.

Matematički model mreže (u  $M$ -analogiji) obrazuju D'ALAMBERT-ov princip, TRENT-ov zakon i karakteristike elemenata.

PRIMER 2.2. Odrediti mrežu za mehanički translatorni sistem koji se sastoji od elastične veze dva klipa sa trenjem u cilindru, Sl. 2.12a.

Usvojimo najpre pozitivni smer kretanja u smeru sile  $f(t)$ . Kako ovde postoje dve različite brzine:  $v_1$  mase  $M_1$  i  $v_2$  mase  $M_2$ , to ćemo imati dva čvora i jedan referentni čvor. Element-masa  $M_1$  je vezan jednim krajem za čvor 1 sa brzinom  $v_1$  a drugim krajem za referentni čvor 0, a element-masa  $M_2$  je vezan jednim krajem za čvor 2 sa brzinom  $v_2$  a drugim krajem za referentni čvor. Na isti način su vezani i elementi-trenje sa koeficijentima prigušenja  $B_1$  i  $B_2$ . Ovo stoga što postoji viskozno trenje između klipova i cilindra, pri čemu se ovi kreću brzinama  $v_1$  i  $v_2$ .

Između čvorova 2 i 1 vezan je element-opruga koeficijenta krutosti  $K_1$  zato što se desni kraj opruge kreće brzinom  $v_2$ , a levi se kreće brzinom  $v_1$ . Isto tako, pošto se levi kraj opruge koeficijenta krutosti  $K_2$  kreće brzinom  $v_2$ , a desni kraj je nepomičan, između čvora 2 i referentnog čvora vezan je element-opruga koeficijenta krutosti  $K_2$ . Najzad, pobudna sila  $f(t)$  je predstavljena izvorom sile. On je vezan između čvora 1 i referentnog čvora zato što ovoj sili drži ravnotežu zbir sile reakcije mase  $M_1$ , sile usled trenja ove mase i sile elastičnosti usled njene veze za oprugu elastanase  $K_1$ . Ovim postupkom dobijena je mehanička mreža prikazana na Sl. 2.12b.



Sl. 2.12. Mehanički translatorni sistem

a) Fizičko predstavljanje b) Mehanička mreža ( $M$ -predstavljanje)

D' ALAMBERTOV princip daje

$$(20) \quad \begin{aligned} \text{Čvor 1 : } & -f(t) + f_{M_1} + f_{B_1} - f_{K_1} = 0, \\ \text{Čvor 2 : } & f_{K_1} + f_{B_2} + f_{M_2} + f_{K_2} = 0, \end{aligned}$$

a TRENTOV zakon:

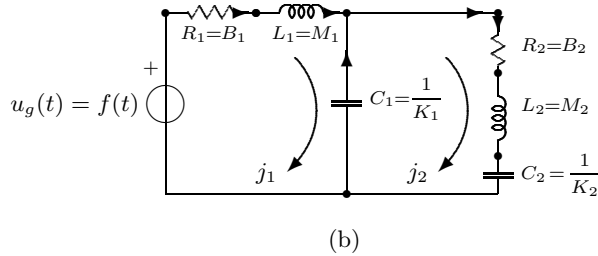
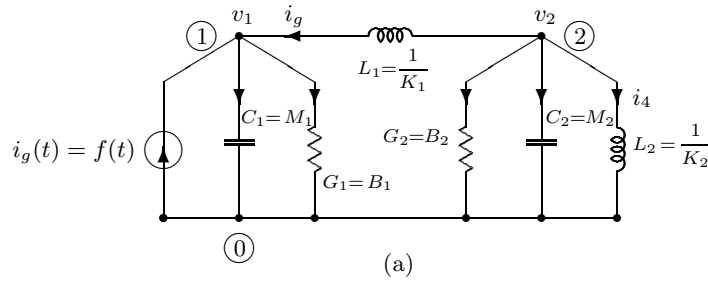
$$(21) \quad \begin{aligned} \text{kontura } M_1 B_1 : & v_{M_1} - v_{S_1} = 0, \\ \text{kontura } B_1 K_1 B_2 : & -v_{S_1} + v_{S_2} - v_{K_1} = 0, \\ \text{kontura } B_2 M_2 : & v_{S_2} - v_{M_2} = 0, \\ \text{kontura } M_2 K_2 : & v_{M_2} - v_{K_2} = 0. \end{aligned}$$

Karakteristike elemenata su:

$$(22) \quad \begin{aligned} f_{M_1} &= M_1 D v_{M_1}, \quad v_{M_1}(0) = v_{10}, \quad f_{S_1} = B_1 v_{S_1}, \\ f_{K_1} &= \frac{K_1}{D} v_{K_1}, \quad f_{K_1}(0) = f_{10}, \quad f_{S_2} = B_2 v_{S_2}, \\ f_{M_2} &= M_2 D v_{M_2}, \quad v_{M_2}(0) = v_{20}, \quad f_{K_2} = \frac{K_2}{D} v_{K_2}, \quad f_{K_2}(0) = f_{20}. \end{aligned}$$

Jednačine (20), (21) i (22) predstavljaju matematički model naše mehaničke mreže.

Neposredno se proverava da ako se koristi  $M$ -analogija ( $f \longleftrightarrow i$ ), električna mreža, čiji je matematički model predstavljen jednačinama (20), (21) i (22), ona na Sl. 2.13a. Ova električna mreža  $M_e$  čiji je matematički modela analogan po  $M$ -analogiji matematičkom modelu date mehaničke mreže  $M_m$  naziva se  $M$ -analogna mreža.



Sl. 2.13. Električne analogne mreže za mehaničku mrežu na Sl. 2.12b

a)  $M$ -analogna mreža b)  $K$ -analogna mreža

Da bismo dokazali da je mreža na Sl. 2.13a  $M$ -analogna mehaničkoj mreži na Sl. 2.12b, eliminisćemo iz (20), (21) i (22) sve promenljive, osim  $v_1 = v_{B_1} = v_{M_1}$  i  $v_2 = v_{B_2} = v_{M_2} = v_{K_2}$ .

Kao rezultat dobija se

$$(23) \quad \left( M_1 D + B_1 + \frac{K_1}{D} \right) v_1 - \frac{K_1}{D} v_2 = f(t), \quad -\frac{K_1}{D} v_1 + \left( M_2 D + B_2 + \frac{K_1}{D} + \frac{K_2}{D} \right) v_2 = 0.$$

Sa oznakama na Sl. 2.13a, jednačine (23) predstavljaju jednačine napona čvorova električne mreže na Sl. 2.13a.

Ako bismo koristili  $K$ -analogiju ( $f \longleftrightarrow u$ ), tada bi matematički model (20), (21), (22) bio analogan matematičkom modelu mreže na Sl. 2.13b. Ova električna mreža  $M_e^k$  čiji je matematički model analogan po  $K$ -analogiji matematičkom modelu date mehaničke mreže  $M_m$ , naziva se  $K$ -analogna mreža.

Zaista, prema oznakama na Sl. 2.13b jednačine struja ćelija

$$(24) \quad \left( M_1 D + B_1 + \frac{K_1}{D} \right) j_1 - \frac{K_1}{D} j_2 = f(t), \quad -\frac{K_1}{D} j_1 + \left( M_2 D + B_2 + \frac{K_1}{D} + \frac{K_2}{D} \right) j_2 = 0$$

analogne su jednačinama (23).

Vidimo da su mreže na Sl. 2.13 *dualne*. Međutim, iz posmatranog primera se vidi prednost  $M$ -analogije u odnosu na  $K$ -analogiju:  $M$ -analogna mreža je identične konfiguracije sa mehaničkom mrežom koju reprezentuje. Ovu činjenicu je prvi primenio FIRESTONE 1933. godine. Klasična analogija, koja potiče još od MAXWELLA je, međutim, bila toliko odomaćena da je mobilna analogija nije mogla potpuno zameniti.  $K$ -analogija se i danas dosta koristi. Interesantno je da je jedan usavršeni fonograf bio konstruisan na bazi ove analogije u SAD.

Ako se u (23) uvedu pomenljive  $i_3$  i  $i_4$ , koje su struje u induktivnostima  $L_1$  i  $L_2$ , pomoću relacija

$$(25) \quad \frac{1}{K_1} D i_3 = v_2 - v_1, \quad (26) \quad \frac{1}{K_2} D i_4 = v_2,$$

sistem (23) postaje

$$(27) \quad (M_1 D + B_1) v_1 - i_3 = f(t), \quad i_3 + (M_2 D + B_2) v_2 + i_4 = 0.$$

Jednačine (25), (26) i (27) pisane u obliku

$$(28a) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{B_1}{M_1} & 0 & \frac{1}{M_1} & 0 \\ 0 & -\frac{B_2}{M_2} & -\frac{1}{M_2} & -\frac{1}{M_2} \\ -K_1 & K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{M_1} f(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

uz početne uslove

$$(28b) \quad v_1(0) = V_{10}, \quad v_2(0) = V_{20}, \quad i_3(0) = I_{30}, \quad i_4(0) = I_{40},$$



predstavljaju model stanja mreže.

PRIMER 2.3. Na Sl. 2.14a prikazan je mehanički obrtni sistem koji se sastoji od vratila, jednog para idealnih zupčanika i dva zamajca. Sl. 2.14b prikazuje mehaničku mrežu prema kojoj je konstruisana  $M$ -analogna mreža na Sl. 2.15a.

Ako se deo mreže levo od otpornika  $G_2$  predstavi NORTONovim ekvivalentnim kolom, dobija se mreža na Sl. 2.15b.

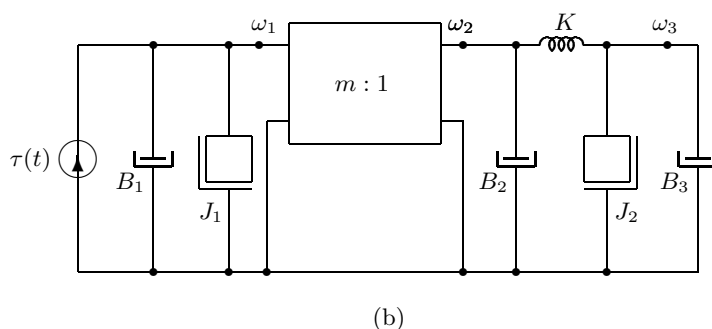
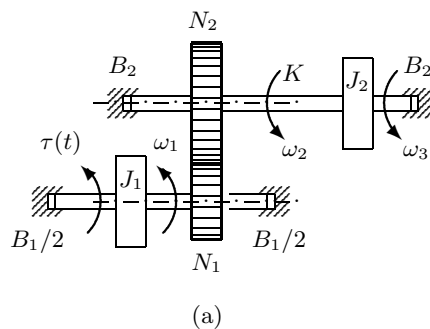
Jednačine napona čvorova za ovu mrežu su

$$(29) \quad \begin{aligned} \left( m^2 J_1 D + B_2 + m^2 B_1 + \frac{K}{D} \right) \omega_2 - \frac{K}{D} \omega_3 &= -m\tau(t), \\ -\frac{K}{D} \omega_2 + \left( J_2 D + B_3 + \frac{K}{D} \right) \omega_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ako uvedemo torzioni moment vratila  $\tau_1$  pomoću relacije

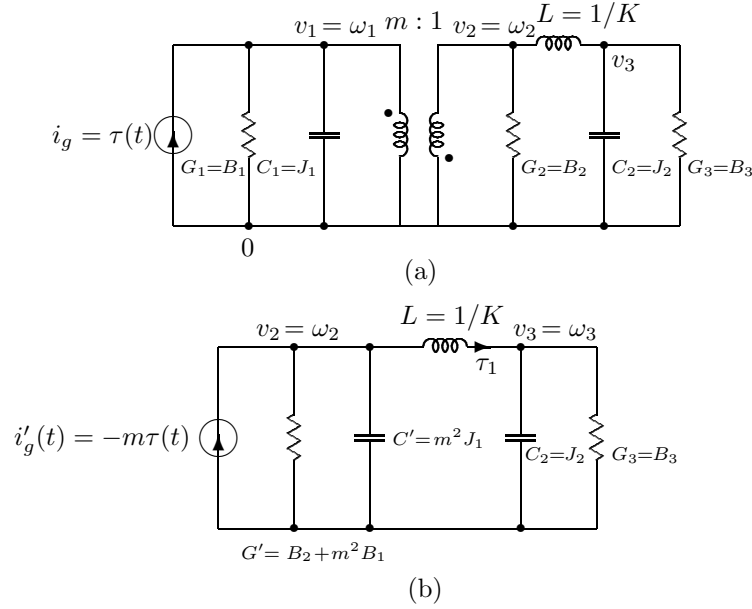
$$(30) \quad \frac{1}{K} D \tau_1 = \omega_2 - \omega_3,$$

i zamenimo u (29), jednačine (29) i (30) možemo pisati u normalnom obliku



Sl. 2.14. Mehanički obrtni sistem

a) Fizičko predstavljanje b) Mehanička mreža ( $M$ -predstavljanje)

Sl. 2.15. a)  $M$ -analogna mreža za mehaničku mrežu na Sl. 2.14. b) Svedena mreža

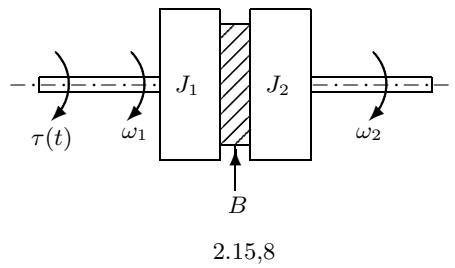
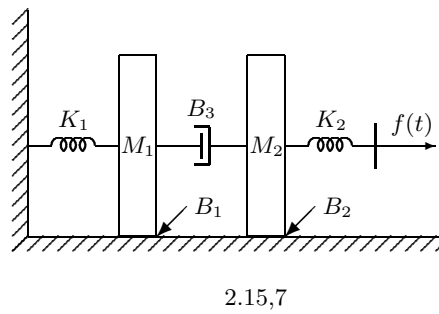
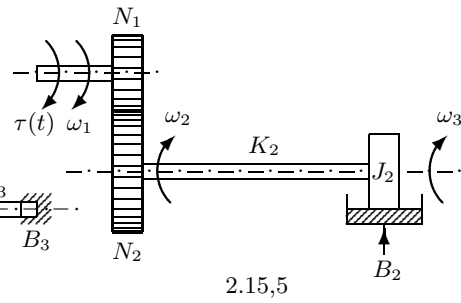
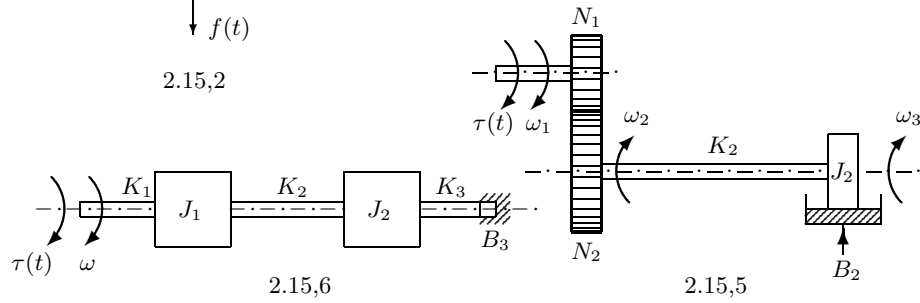
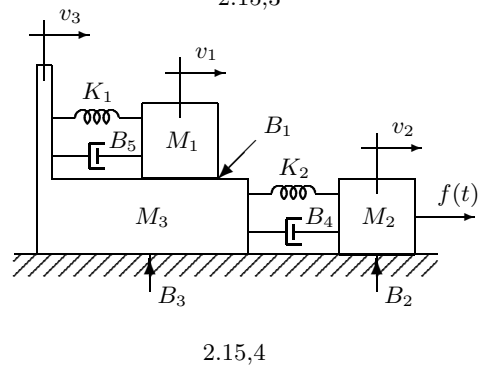
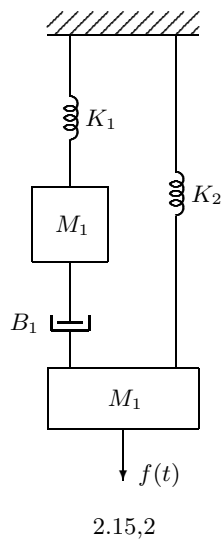
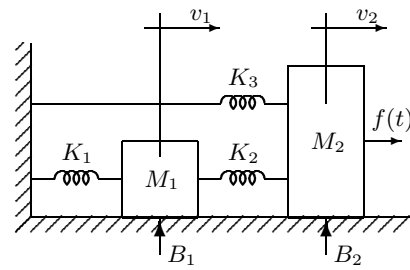
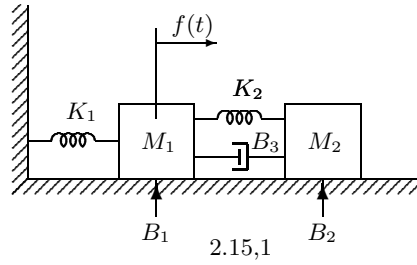
$$(31a) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K & -K \\ -\frac{1}{m^2 J_1} & -\frac{B_2 + m^2 B_1}{m^2 J_1} & 0 \\ \frac{1}{J_2} & 0 & -\frac{B_3}{J_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\tau(t)}{m J_1} \\ 0 \end{bmatrix},$$

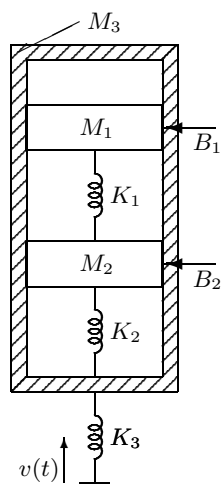
$$(31b) \quad \tau_1(0) = \tau_{10}, \quad \omega_2(0) = \omega_{20}, \quad \omega_3(0) = \omega_{30}.$$

### Vežbanja

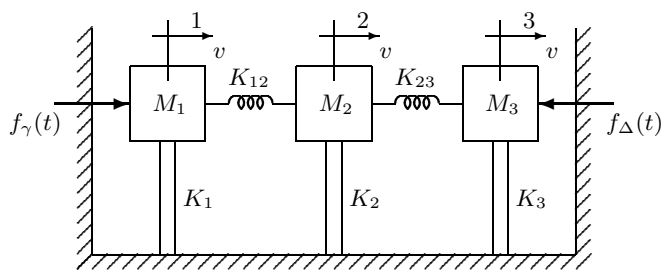
**2.7.** Odrediti  $K$ -analognu mrežu za mehaničku mrežu na Sl. 2.14b. (Uputstvo: Korištiti rezultat vežbanja 2.6. ili naći dualnu mrežu za svedenu mrežu na Sl. 2.15b).

**2.8.** Odrediti mehaničku mrežu i  $M$ -analognu mrežu za svaki mehanički sistem na slici.

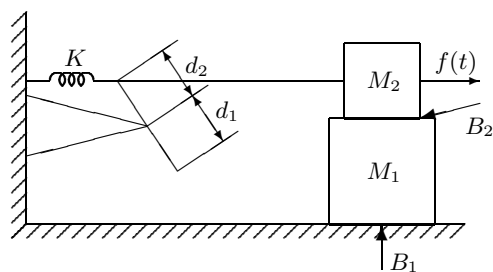




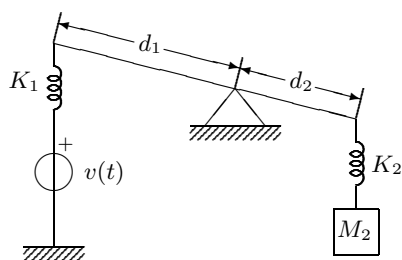
2.15,9



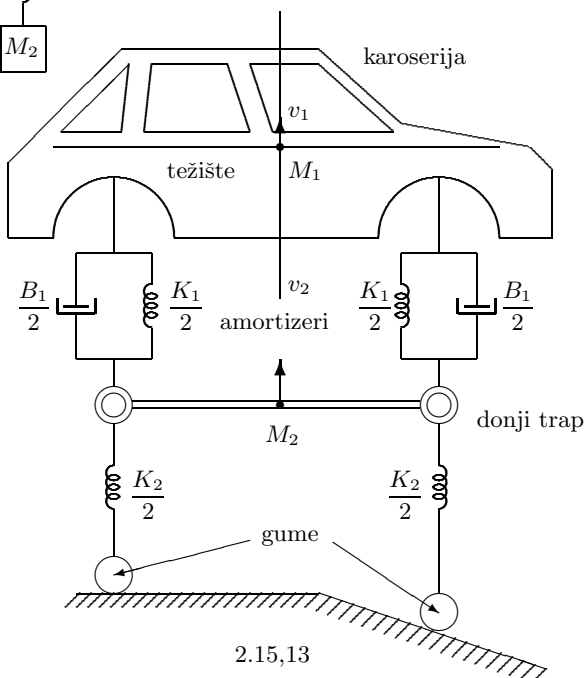
2.15,12



2.15,11



2.15,10



2.15,13

### 2.3. FLUIDNI SISTEMI

Fluidne sisteme podelićemo na sisteme koji prenose tečnosti (hidraulični sistemi) i one koji prenose gasove (pneumatski sistemi).

Pod *hidrauličnim sistemima* ovde ćemo podrazumevati uređaje sastavljene od rezervoara punjene nestišljivom tečnošću, cevovode, ventile (slavine) i pumpe. Pretpostavićemo da svi rezervoari sa tečnošću imaju jednu slobodnu površinu i da su svi cevovodi potpuno ispunjeni tečnošću. Takođe ćemo pretpostaviti da su brzine strujanja približno konstantne, odnosno da je strujanje približno ustaljeno.

U hidrauličnim sistemima moguća su *laminarna* i *turbulentna* strujanja što zavisi od oblika strujnih linija. Kod laminarnih strujanja one su paralelne zidovima cevovoda dok su kod turbulentnih strujanja nepravilnog oblika. Za približnu procenu karaktera strujanja služi tzv. *Reynolds-ov* broj  $Re = D\rho v/\eta$ , gde je  $D$  unutrašnji prečnik cevovoda,  $\rho$  gustina tečnosti,  $v$  brzina strujanja, a  $\eta$  apsolutna viskoznost. Eksperimentalno je ustanovljeno da je za  $Re < 2000$  strujanje laminarno, a pri  $Re > 4000$  ono je turbulentno. Za  $2000 < Re < 4000$  karakter strujanja nije predvidljiv i zavisi od mnogih faktora kao što su oblik i dimenzije površine, njene rapavosti, pritiska i dr.

Pod *pneumatskim sistemima* podrazumevaćemo rezervoare sa gasovima pod pritiskom, cevovode, ventile i pumpe. Pretpostavićemo da su procesi u gasovima *adiabatski*, tj. da se gasovi šire u uslovima toplotne izolacije, odnosno da važi zakon  $p \cdot V^\gamma = \text{const}$ , gde je  $p$ -pritisak,  $V$ -zapremina i  $\gamma = C_p/C_v$ -odnos specifičnih toplota. Pod ovom pretpostavkom pneumatski sistemi obuhvataju i *akustične sisteme*.

I ovde ćemo uvesti elemente koji su analogni  $C$ ,  $L$ ,  $R$  - elementima i izvorima električnih sistema.

#### 2.3.1. OSNOVNI ELEMENTI<sup>4</sup>

Na slici 2.16a prikazan je rezervoar kroz koji protiče tečnost. Ako sa  $\dot{q} = \dot{q}_1 - \dot{q}_2$  označimo *zapreminsku brzinu proticanja* (protok), sa  $h$ -nivo tečnosti meren od nekog početnog položaja  $h_0$  i sa  $A$ -površinu poprečnog preseka rezervoara, tada je količina tečnosti koja se izmeni u sudu za vreme  $dt$

$$(32a) \quad \dot{q} dt = A dh,$$

pa je veza između protoka i nivoa

$$(32b) \quad \dot{q} = A \frac{dh}{dt} = ADh = C_h Dh, \quad h(0) = h_0,$$

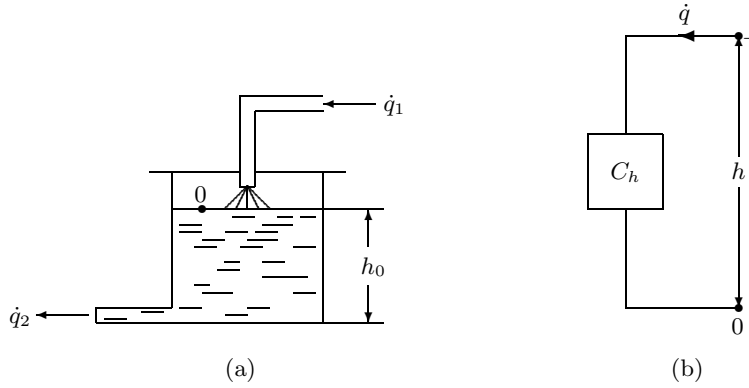
ili

$$(32c) \quad h = \frac{1}{C_h D} \dot{q} = \frac{1}{C_h} \int_0^t \dot{q}(z) dz + h_0.$$

<sup>4</sup>U daljem radu korišćićemo se  $M$ -predstavljanjem i to nećemo posebno naglašavati. Kada se budemo koristili  $K$ -predstavljanjem, to ćemo posebno naglasiti.

### a) Hidraulični kondenzator

Relacije (32b i c) se mogu interpretirati kao karakteristika jednog elementa sa dva kraja, simbolički predstavljen na Sl. 2.16b. Ovaj element ćemo nazvati *hidraulični kondenzator*, a parametar  $C_h = A$  *kapacitivnost tečnosti*. Kapacitivnost tečnosti u rezervoaru jednaka je površini njegovog poprečnog preseka. Ovaj parametar karakteriše sposobnost rezervoara da uskladišti tečnost.



Sl. 2.16. Hidraulični kondenzator

a) Fizičko predstavljanje b) Simboličko  $M$ -predstavljanje

Potrebno je uočiti da su  $\dot{q}$  i  $h$  algebarske veličine pri čemu je nivo  $h$  meren u odnosu na slobodnu površinu tečnosti 0 (Sl. 2.16a) koja služi kao *hidraulična referenca*. U simboličkom predstavljanju hidrauličnog kondenzatora na Sl. 16b, hidraulična referenca se uvek označava referentnim krajem 0. Ako u sistemu postoji više rezervoara, tada svi hidraulični kondenzatori imaju svoj referentni kraj vezan za jedan zajednički čvor.

Ako se definiše  $M$ -analogija prema korespondenciji

$$\begin{aligned} \text{hidraulični protok } \dot{q} &\longleftrightarrow \text{struja } i \\ \text{nivo } h &\longleftrightarrow \text{napon } u \\ \text{kapacitivnost tečnosti } C_n &\longleftrightarrow \text{kapacitivnost } C \end{aligned}$$

tada se vidi da je hidraulični kondenzator  $M$ -analogan električnom kondenzatoru.

*Pneumatski kondenzator* (Sl. 2.17a) sastoji se od šupljine (obično cilindra) koja se završava jednom cevi koja se zatvara klipom. Ako je u nekom položaju klipa zapremina  $V_0$  i pritisak  $P_0$  i ako se pri adiabatskoj promeni zapremina i pritisak menjaju za  $V$  i  $p$ , tada, s obzirom na to da povećanje pritiska izaziva smanjenje zapremine i obratno, imaćemo nove vrednosti pritiska i zapremine

$$(33a) \quad p' = P_0 + p, \quad V' = V_0 + V,$$

tako da možemo pisati

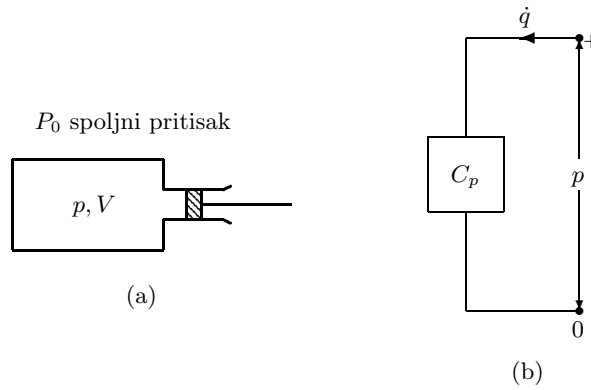
$$(33b) \quad p'V'^\gamma = P_0V_0^\gamma = \text{const.}$$

Iz (33a) i (33b) dobijamo iznos

$$(34) \quad 1 + \frac{p}{P_0} = \left(1 + \frac{V}{V_0}\right)^{-\gamma},$$

koji se, pod pretpostavkom da je  $V \ll V_0$ , može približno pisati kao

$$(35) \quad \frac{p}{P_0} \cong \gamma \frac{V}{V_0}.$$



Sl. 2.17. Pneumatski kondenzator

a) Fizičko predstavljanje b) Simboličko  $M$ -predstavljanje

Iz (35) sledi da je relacija između *zapreminske brzine proticanja* (protoka)

$$(36) \quad \dot{q} \cong \frac{dv}{dt} = Dv$$

i pritiska oblika

$$(37a) \quad \dot{q} = C_p \frac{dp}{dt} = C_p Dp, \quad p(0) = P_0,$$

$$(37b) \quad p = \frac{1}{C_p D} \dot{q} = \frac{1}{C_p} \int_0^t \dot{q}(z) dz + P_0,$$

gde je

$$(38) \quad C_p = \frac{V_0}{\gamma P_0}$$

tzv. *kapacitivnost gasa*.

Relacija (37) je definiciona karakteristika pneumatskog kondenzatora. Ovaj element, simbolički predstavljen na Sl. 2.17b, ima jedan kraj 0 koji označava

*pneumatsku referencu*. Uobičajeno je da se za pneumatsku referencu uzme spoljni (na primer atmosferski) pritisak. Na taj način, svi pneumatski kondenzatori imaju svoj referentni kraj vezan za jedan zajednički čvor.

Pneumatski kondenzator je u  $M$ -analogiji definisanoj korespondencijom

$$\begin{array}{lll} \text{pneumatski protok } \dot{q} & \longleftrightarrow & \text{struja } i \\ \text{pritisak } p & \longleftrightarrow & \text{napon } u \\ \text{kapacitivnost gasa } C_p & \longleftrightarrow & \text{kapacitivnost } C \end{array}$$

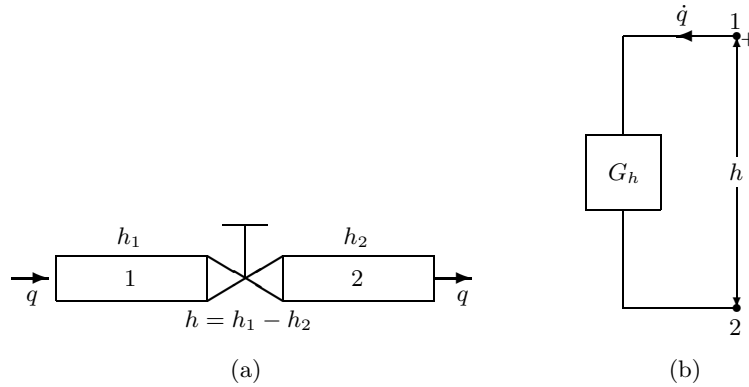
$M$ -analogan električnom kondenzatoru.

### b) Fluidni otpornici

Turbulentno strujanje kroz cevovode i ventile, Sl. 2.18a se određuje iz *Bernoulli-evog* zakona

$$(39) \quad \dot{q}' = \mu A \sqrt{2gh'},$$

gde je  $\dot{q}'$  zapreminska brzina (protok),  $A$  - površina poprečnog preseka,  $h' = h'_1 - h'_2$  - nivo tečnosti,  $g$  - ubrzanje zemljine teže ( $= 9.81 \text{ m/sec}^{-2}$ ),  $\mu$  - koeficijent rashoda protoka ( $\approx 0.6$ ).



Sl. 2.18. Hidraulični otpornik

a) Fizičko predstavljanje b) Simboličko  $M$ -predstavljanje

Jednačina (39) je oblika karakteristike jednog nelinearnog hidrauličnog otpornika. Ako se nivo tečnosti relativno malo menja za  $h$  oko svoje ustaljene vrednosti  $H$ , tj. ako stavimo

$$(40) \quad h' = H + h,$$

gde je  $h \ll H$ , tada je

$$(41) \quad \dot{q}' = \mu A \sqrt{2gH} \left( 1 + \frac{h}{H} \right)^{1/2} \cong \dot{Q} + \dot{q},$$

gde je



$$(42) \quad \dot{Q} = \mu A \sqrt{2gH}$$

ustaljena vrednost protoka, a

$$(43) \quad \dot{q} = \mu A \sqrt{\frac{g}{2H}} h = \frac{\dot{Q}}{2H} h = G_h h$$

mali priraštaj protoka.

Jednačina (43) predstavlja linearizovanu karakteristiku hidrauličnog otpornika. Veličina  $G_h$  predstavlja *provodnost* (turbulentnog) *strujanja*. Njena recipročna vrednost

$$(44) \quad R_h = 1/G_h$$

naziva se *otpornost strujanja*. Zavisi od ustaljenog protoka i ustaljene visine proticanja. Za nove radne uslove potrebno je novo  $R_h$ .

Pri *laminarnom strujanju*, provodnost strujanja se određuje iz *Pouissuille-Hagen*-ovog zakona (ovaj tip strujanja nije čest u praksi)

$$(45) \quad h = \frac{128\eta d}{\pi D^4} \dot{q} = R_h \dot{q},$$

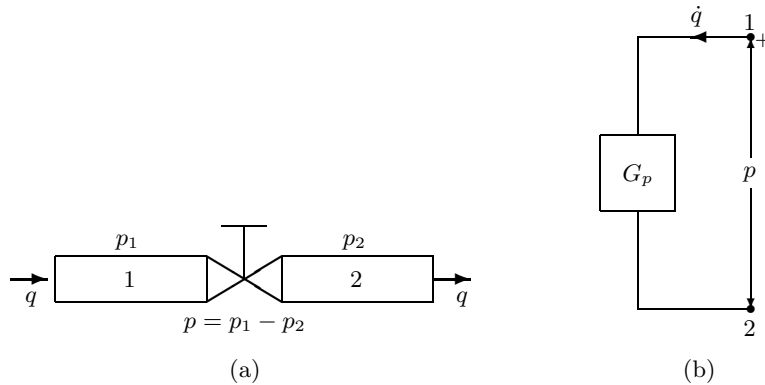
gde je  $\eta$  - koeficijent apsolutne viskoznosti [Ns/m<sup>2</sup>],  $d$  - dužina cevi [m],  $D$  - unutrašnji prečnik cevovoda [m],  $h$  - nivo tečnosti [m],  $\dot{q}$  - protok [m<sup>3</sup>/s].

Na Sl. 2.18b prikazan je simbol za hidraulični otpornik.

U  $M$ -analogiji imamo korespondenciju:

$$\text{Provodnost strujanja } G_h \longleftrightarrow \text{Provodnost } G$$

*Pneumatski otpornik*, Sl. 2.19a, modeluje pojavu trenja pri proticanju gasa kroz neobrađene cevi i ventile.



Sl. 2.19. Pneumatski otpornik

a) Fizičko predstavljanje b) Simboličko  $M$ -predstavljanje

Zavisnost protoka od pritiska je nelinearna, ali za male razlike pritisaka  $p = p_1 - p_2$  ona se može linearizovati odnosno pisati u obliku

$$(46) \quad \dot{q} = G_p p, \quad (47) \quad p = R_p \dot{q},$$

gde je  $G_p$  *pneumatska provodnost*, a  $R_p = 1/G_p$  *pneumatska otpornost*. Element - pneumatski otpornik, simbolički predstavljen na Sl. 2.19b, *M-analogan* je električnom otporniku pri čemu važi korespondencija:

$$\text{pneumatska provodnost } G_p \longleftrightarrow \text{provodnost } G$$

### c) Fluidni kalemovi

Ako kroz homogenu cev dužine  $d$  i poprečnog preseka  $A$  struji *fluid* (*tečnost ili gas*) gustine  $\rho$ , Sl. 2.20a, tada je sila potrebna da ubrza masu  $\rho Ad$  jednaka  $(\rho Ad) \frac{dv}{dt}$ , gde je  $v$  brzina proticanja. S druge strane, zanemarujući otpor protoka, ova sila je jednaka  $pA$  gde je  $p = p_1 - p_2$  razlika pritisaka. Kako je protok  $\dot{q} = Av$ , dobijamo

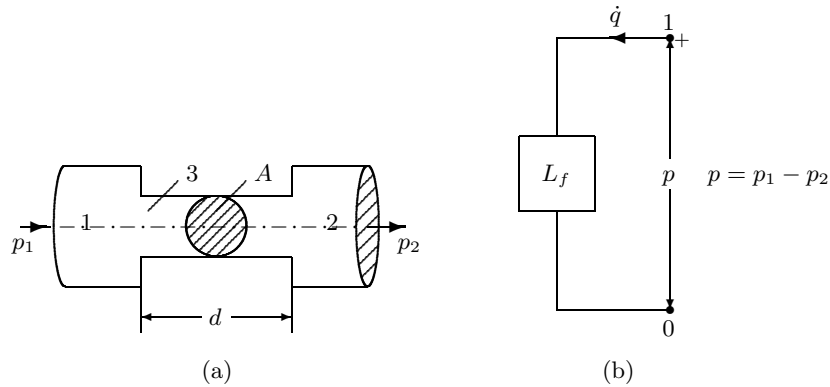
$$(48) \quad pA = \rho Ad \frac{dv}{dt} = \rho d \frac{d\dot{q}}{dt},$$

odnosno

$$(48b) \quad p = L_f D \dot{q}, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0, \quad (49b) \quad \dot{q} = \frac{1}{L_f D} p = \frac{1}{L_f} \int_0^t p(z) dz + \dot{q}_0,$$

gde je

$$(50) \quad L_f = \rho d / A.$$



Sl. 2.20. Fluidni kalem

a) Fizičko predstavljanje b) Simboličko *M*-predstavljanje

Relacija (49) definiše karakteristiku *fluidnog kalema*. Parametar  $L_f$  naziva se *induktivnost fluida*. Fluidni kalem je simbolički predstavljen na Sl. 2.20b. Korespondencija u  $M$ -analogiji je:

$$\begin{array}{lll} \text{protok } \dot{q} & \longleftrightarrow & \text{struja } i \\ \text{pritisak } p & \longleftrightarrow & \text{napon } u \\ \text{induktivnost fluida } L_f & \longleftrightarrow & \text{induktivnost } L \end{array}$$

#### d) Fluidni izvori

Postoje dve vrste hidrauličnih izvora: *izvori protoka* i *izvori nivoa pritiska*. Prvi su modeli za pumpe koje daju konstantan protok pri velikim rasponima nivoa tečnosti, a drugi održavaju konstantni nivo pri velikim promenama protoka. Isto tako u pneumatskim sistemima postoje *izvori protoka* koji generišu protok nezavisan od pritiska i *izvori pritiska* koji održavaju pritisak nezavisno od protoka.

Fluidni izvori protoka su  $M$ -analogni strujnim izvorima, a izvori nivoa i izvori pritiska su  $M$ -analogni naponskim izvorima.

### 2.3.2. FLUIDNE MREŽE

Fluidne mreže konstruišu se na isti način kao mehaničke mreže. Potrebno je postaviti za svaki različiti nivo odnosno pritisak po jedan čvor i jedan čvor 0 referentni čvor - koji predstavlja fluidnu referencu (površina tečnosti odnosno spoljni pritisak). Kraj svakog fluidnog kondenzatora treba vezati za referentni čvor a drugi kraj treba vezati za odgovarajući čvor - nivo odnosno čvor - pritisak. Ostale elemente vezati između čvorova čiji nivoi odnosno pritisci odgovaraju nivoima odnosno pritiscima krajeva elemenata.

*Zakoni međusobnog vezivanja* za fluidne sisteme su analogni 1. i 2. KIRCHHOFFovom zakonu. Prvi zakon međusobnog vezivanja, nazvan još *princip nestišljivosti protoka*, glasi:

*Algebarska suma protoka za svaki čvor fluidne mreže i u svakom trenutku jednaka je nuli.*

Drugi zakon međusobnog vezivanja glasi:

*Algebarska suma nivoa, odnosno razlika pritiska, duž svake konture i u svakom trenutku jednaka je nuli.*

Iz zakona međusobnog vezivanja možemo zaključiti da su *protoci strujne* (redne, ekstenzivne) *promenljive* a *nivoi i pritisci* su *naponske* (otočne, intenzivne) *promenljive*.

Narednim primerima ilustroćemo formulisanje matematičkog modela fluidnih mreža.

PRIMER 2.4. Za hidraulični sistem na Sl. 2.21a konstruisati hidrauličnu mrežu,  $M$ -analognu mrežu i izvesti jednačine napona čvorova i jednačine stanja.

Hidraulična mreža prikazana je na Sl. 2.21b. Jednačine međusobnog vezivanja su

$$\begin{aligned}
 \text{Čvor 1 : } \quad & \dot{q}_1 + \dot{q}_3 - \dot{q}_0(t) = 0, \\
 \text{Čvor 2 : } \quad & -\dot{q}_3 + \dot{q}_2 = 0, \\
 \text{Kontura } A_1 A_2 G_{h_3} : \quad & h_1 - h_2 - h_3 = 0,
 \end{aligned}
 \tag{51}$$

a karakteristike elemenata

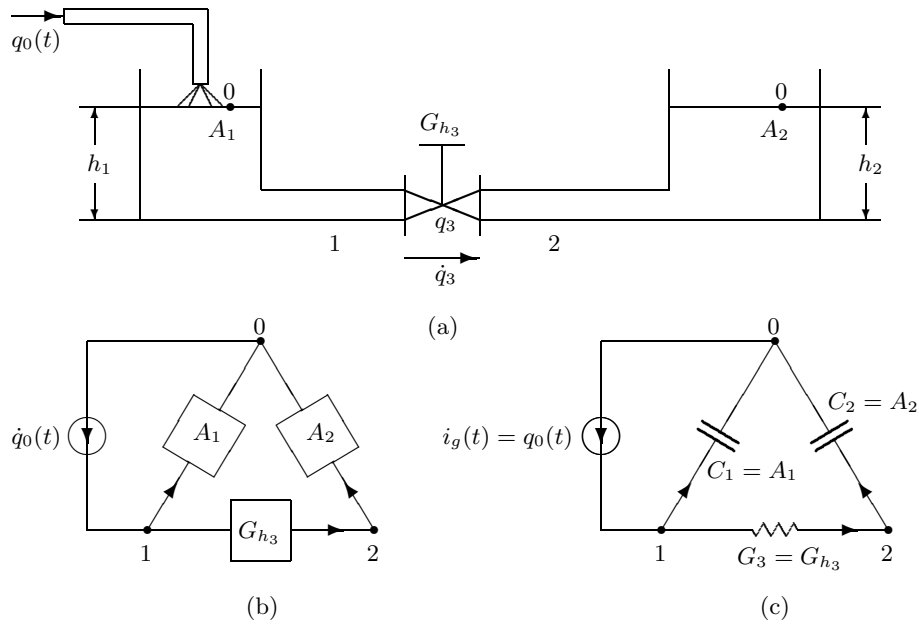
$$\dot{q}_1 = A_1 D h_1, \quad h_1(0) = h_{10}, \quad \dot{q}_2 = A_2 D h_2, \quad h_2(0) = h_{20}, \quad \dot{q}_3 = G_{h_3} h_3.
 \tag{52}$$

Eliminisanjem  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$  i  $h_3$  iz (51) i (52) dobijamo matematički model mreže u obliku

$$\begin{aligned}
 (A_1 D + G_{h_3}) h_1 - G_{h_3} h_2 &= \dot{q}_0(t), \quad -G_{h_3} h_1 + (A_2 D + G_{h_3}) h_2 = 0, \\
 h_1(0) &= h_{10}, \quad h_2(0) = h_{20}.
 \end{aligned}
 \tag{53}$$

$M$ -analogna mreža koja odgovara sistemu (53) prikazana je na Sl. 2.21c. Jednačine napona čvorova za ovu mrežu su identične ovim jednačinama ako se naponi  $v_1$  i  $v_2$  čvorova 1 i 2 uzmu brojno jednaki nivoima  $h_1$  i  $h_2$ .

Jednačine stanja dobijamo neposredno iz (53) ako jednačine rešimo po prvim izvodima

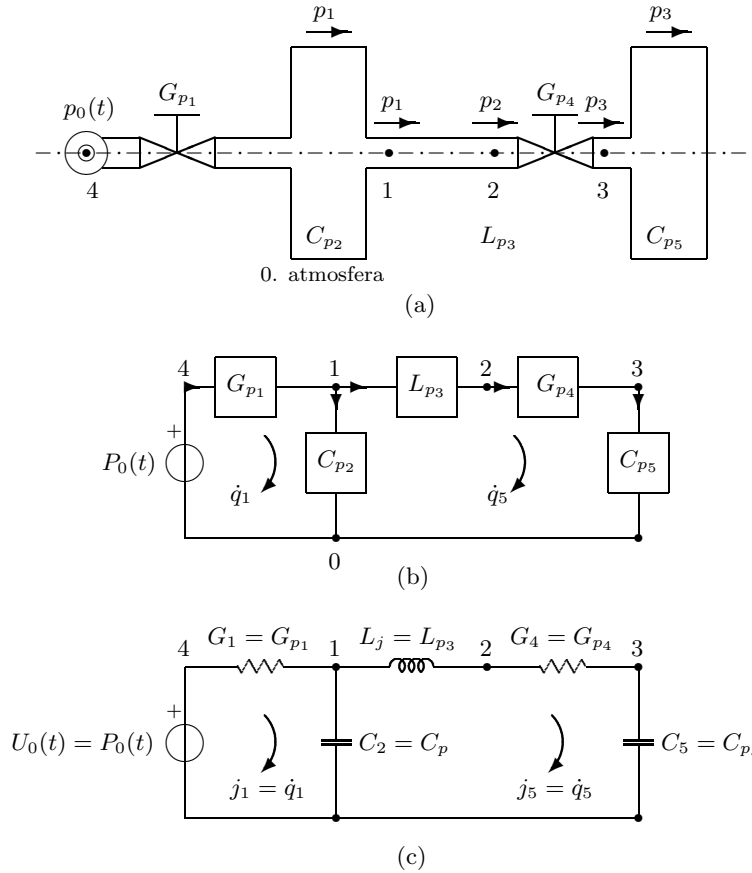


Sl. 2.21. Hidraulični sistem

a) Fizičko predstavljanje b) Hidraulična mreža ( $M$ -predstavljanje)  
c)  $M$ -analogna mreža

$$(54) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{G_{h3}}{A_1} & \frac{G_{h3}}{A_1} \\ \frac{G_{h3}}{A_2} & -\frac{G_{h3}}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\dot{q}_0(t)}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(0) \\ h_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{10} \\ h_{20} \end{bmatrix}.$$

PRIMER 2.5. Za pneumatski sistem na Sl. 2.22a koji se sastoji od dva rezervoara, dva ventila, jedne cevi i jedne pumpe pritiska, odrediti pneumatsku mrežu,  $M$ -analognu mrežu i funkciju mreže



Sl. 2.22. Pneumatski sistem a) Fizičko predstavljanje  
b) Pneumatska mreža ( $M$ -predstavljanje) c)  $M$ -analogna mreža

Mesta različitih pritisaka u sistemu (spojna mesta) označena su ciframa 1, 2, 3, 4. Njima odgovaraju pritisci  $p_1, p_2, p_3, p_4$  ( $p_4 = p_0(t)$ ). Svakom spojnem mestu odgovara jedan čvor u pneumatskoj mreži. Pneumatski kondenzatori  $C_{p2}$  i  $C_{p5}$  imaju jedan kraj vezan za referentni čvor 0 koji predstavlja atmosferski pritisak. Pneumatska mreža prikazana je na Sl. 2.22b.

Matematički model se sastoji od jednačina međusobnog vezivanja:

$$\begin{aligned}
 (55) \quad & \text{Čvor 1 :} & -\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 = 0, & \dot{q}_1 = G_{p_1} p_1, \\
 & \text{Čvor 2 :} & -\dot{q}_3 + \dot{q}_4 = 0, \\
 & \text{Čvor 3 :} & -\dot{q}_4 + \dot{q}_5 = 0, \\
 & \text{kontura } p_0, G_{p_1}, C_{p_2} : & -p_0(t) + p_1 + p_2 = 0, \\
 & \text{kontura } C_{p_2}, L_{p_3}, G_{p_4}, C_{p_5} : & -p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 0
 \end{aligned}$$

i karakteristika elemenata

$$\begin{aligned}
 (56) \quad & \dot{q}_1 = G_{p_1} p_1, \\
 & \dot{q}_2 = C_{p_2} D p_2, \quad p_2(0) = p_{20}, \\
 & \dot{q}_3 = \frac{1}{L_{p_3} D} p_3, \quad q_3(0) = q_{30}, \\
 & \dot{q}_4 = G_{p_4} p_4, \\
 & \dot{q}_5 = C_{p_5} D p_5, \quad p_5(0) = p_{50}.
 \end{aligned}$$

NAPOMENA. Jednačinu za čvor 4 nismo pisali jer ona samo izražava činjenicu da je protok  $\dot{q}_1$  jednak protoku kroz pumpu. Ova jednačina nam nije dalje potrebna, jer se protok kroz pumpu ne javlja u ostalim jednačinama sistema (55) i (56).

Isti matematički model u  $M$ -analogiji ima i električna mreža na Sl. 2.22c, što znači da je ona  $M$ -analogna pneumatskoj mreži na Sl. 2.22b.

Eliminisanjem svih promenljivih osim  $\dot{q}_1$  i  $\dot{q}_5$  dobijamo sistem

$$\begin{aligned}
 (57) \quad & \left( \frac{1}{G_{p_1}} + \frac{1}{G_{p_2} D} \right) \dot{q}_1 - \frac{1}{C_{p_2} D} \dot{q}_5 = p_0(t), \\
 & -\frac{1}{C_{p_2} D} \dot{q}_1 + \left( \frac{1}{C_{p_2} D} + L_{p_3} D + \frac{1}{G_{p_4}} + \frac{1}{C_{p_5} D} \right) \dot{q}_5 = 0,
 \end{aligned}$$

koji predstavlja jednačine “konturnih protoka” pisane za označene konture, pneumatske mreže odnosno za osnovne konture definisane spojnica  $G_{p_1}$  i  $G_{p_5}$ .

Jednačine stanja možemo izvesti ako iz (55) i (56) eliminišemo sve promenljive osim  $p_2$ ,  $p_5$ , i  $\dot{q}_3$ .

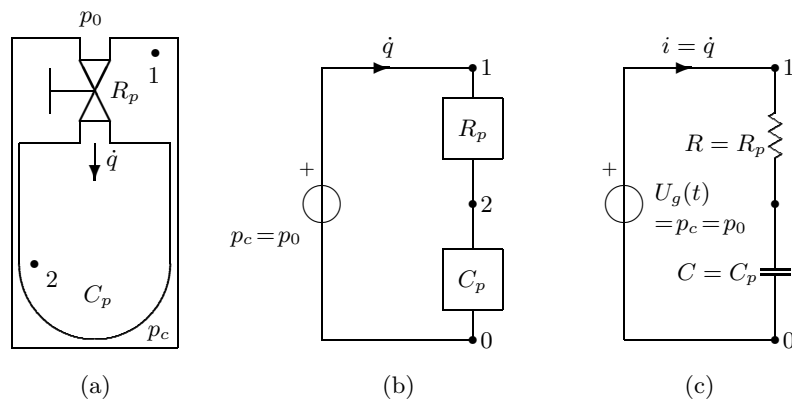
Iz LAPLACEove transformacije jednačina (57) pri nula početnim uslovima

$$\begin{aligned}
 (58) \quad & \left( \frac{1}{G_{p_1}} + \frac{1}{C_{p_2} s} \right) \dot{Q}_1(s) - \frac{1}{C_{p_2} s} \dot{Q}_5(s) = P_0(s), \\
 & -\frac{1}{C_{p_2} s} \dot{Q}_1(s) + \left( \frac{1}{C_{p_2} s} + L_{p_3} s + \frac{1}{G_{p_4}} + \frac{1}{C_{p_5} s} \right) \dot{Q}_5(s) = 0,
 \end{aligned}$$

dobijamo traženu funkciju mreže

$$\begin{aligned}
 (59) \quad & T_{50}(s) = \frac{\dot{Q}_5(s)}{P_0(s)} = \frac{\frac{1}{C_{p_2} s}}{\left( \frac{1}{G_{p_1}} + \frac{1}{C_{p_2} s} \right) \left( \frac{1}{C_{p_2} s} + L_{p_3} s + \frac{1}{G_{p_4}} + \frac{1}{C_{p_5} s} \right) - \frac{1}{C_{p_2}^2 s^2}} \\
 & = \frac{G_{p_1} G_{p_4} C_{p_5} s}{L_{p_3} G_{p_4} C_{p_2} C_{p_5} s^3 + C_{p_2} C_{p_5} s^2 + (G_{p_1} C_{p_5} + G_{p_4} C_{p_2} + G_{p_4} C_{p_5}) s + G_{p_1} G_{p_4}}.
 \end{aligned}$$

PRIMER 2.6. Na Sl. 2.23a prikazan je jedan uprošćen pneumatski model pluća. Oblast 1 koja predstavlja grudnu šupljinu ima pritisak  $p_c$ . Ovaj pritisak je ujedno i pritisak u alveolama. U oblasti 2 stišljivost vazduha i elastičnost plućnog i grudnog tkiva su modelovane pneumatskim kondenzatorom kapacitivnosti  $C_p$ .



Sl. 2.23. Pneumatski model za pluća a) Slikovito predstavljanje  
b) Pneumatska mreža ( $M$ -predstavljanje) c)  $M$ -analogna mreža

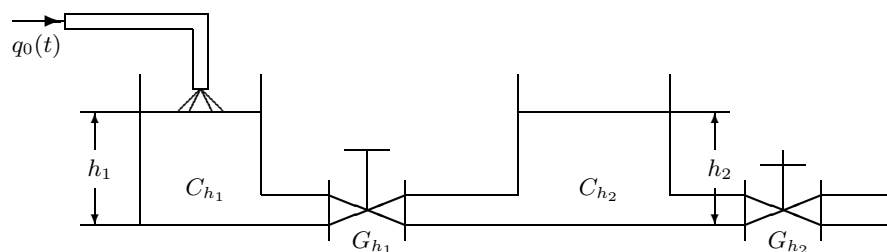
Pneumatski otpornik otpornosti  $R_p$  predstavlja otpor vazduha pri prolazu kroz bronhije. Ako sa  $\dot{q}$  označimo protok vazduha u plućima, sa  $p_0$  spoljni pritisak, tada pneumatska mreža izgleda kao na Sl. 2.23b.  $M$ -analogna mreža prikazana je na Sl. 2.23c.

Jednačina konturnih struja u ovom slučaju je

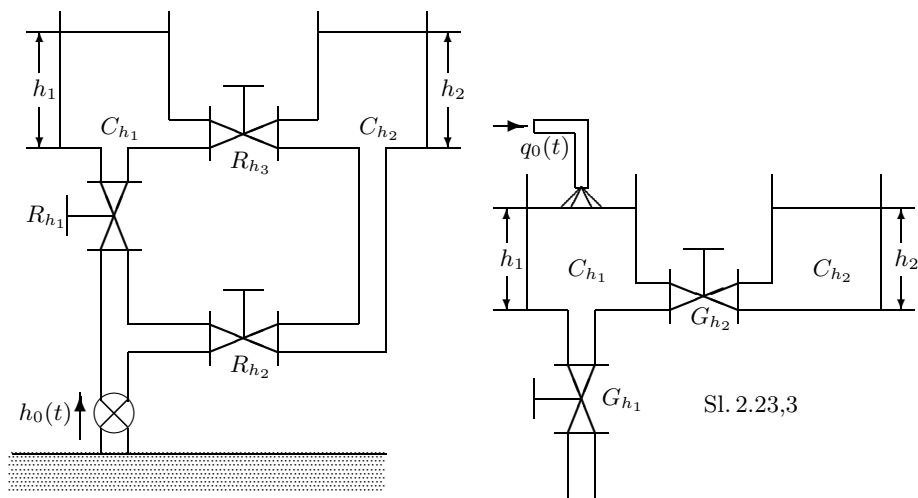
$$(60) \quad \left( R_p + \frac{1}{C_p D} \right) \dot{q} = p_c - p_0.$$

### Vežbanja

**2.9.** Za hidraulične sisteme na slici odrediti hidraulične mreže i  $M$ -analogne mreže. Izvesti relaciju ulaz-izlaz za nivo  $h_2$ .



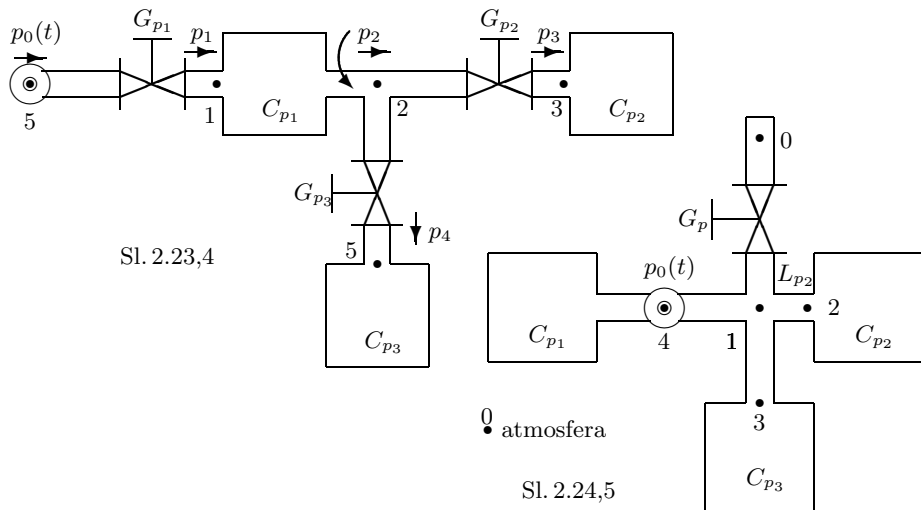
Sl. 2.23,1



Sl. 2.23,2

**2.10.** U prethodnom zadatku, odrediti nivo  $h_2(t)$  ako je  $q_0(t) = Q_0 \cdot h(t)$  odnosno  $h_0(t) = H_0 \cdot h(t)$ . ( $h(t)$  - HEAVISIDEOVA jedinična funkcija.)

**2.11.** Za pneumatske sisteme na slici odrediti pneumatske mreže i  $M$ -analogne mreže. Izvesti jednačine stanja.



Sl. 2.23,4

Sl. 2.24,5

**2.12.** U prethodnom zadatku ako je  $p_0(t) = p_h \cdot h(t)$  odrediti početnu i krajnju vrednosti pritiska u rezervoaru 2.



## 2.4. TERMIČKI SISTEMI

Pod termičkim sistemima podrazumevamo sisteme u kojima se prenosi toplotna energija. Kako svaki deo sistema poseduje i *osobine uskladištavanja i osobine prenošenja toplotne energije*, takav sistem je u *opštem slučaju raspodeljen*. Međutim, u mnogim slučajevima sistem se može smatrati diskretnim, tj. izvesni delovi materije imaju veliku sposobnost akumulisanja toplotne energije uz vrlo male gubitke (na primer bakarni blokovi) dok drugi imaju malu akumulativnu sposobnost uz malu provodnost pri prenošenju toplote (na primer izolacione materije kao što su azbest i pluta).

U diskretnim termičkim sistemima mogu se definisati osnovni elementi koji karakterišu akumulaciju i disipaciju toplotne energije. Promenljive od interesa u termičkim sistemima obično su *toplotna snaga*  $q$  i *temperatura*  $\theta$ .

### 2.4.1. OSNOVNI ELEMENTI

#### a) Termički kondenzator

Termički kondenzator se uvodi za modelovanje pojave *akumuliranja toplote*. Posmatrajmo telo težine  $G$ , specifične toplotne energije  $C_p$ , koje je termički izolovano i uniformno zagrevano, Sl. 2.24a.

Eksperimentalno je ustanovljeno da je relacija između toplotne snage i temperature oblika

$$(61) \quad q = C_t \frac{d\theta}{dt} = C_t D \theta, \quad \theta(0) = \theta_0,$$

$$(62) \quad \theta = \frac{1}{C_t D} q = \frac{1}{C_t} \int_0^t q(z) dz + \theta_0,$$

gde je

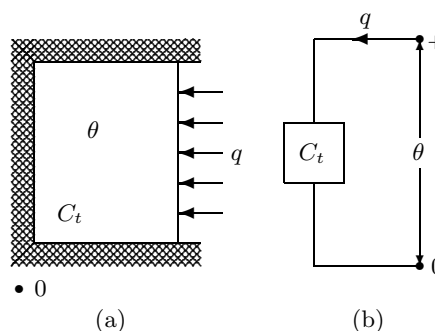
$$(63) \quad C_t = G C_p$$

tzv. *termička kapacitivnost*.

Relacije (61) i (62) definišu karakteristiku *termičkog kondenzatora*. Ovaj element je simbolički predstavljen na Sl. 2.24b. Kraj označen sa 0 predstavlja *termičku referencu*, tj. referentnu vrednost temperature (na primer apsolutna nula, nula CELSIUSOVE skale, temperatura okoline, i dr.). Oblik karakteristika (61) i (62) pokazuje da u  $M$ -analogiji

$$\begin{aligned} \text{toplotna snaga } q &\longleftrightarrow \text{struja } i \\ \text{temperatura } \theta &\longleftrightarrow \text{napon } u \\ \text{termička kapacitivnost } C_t &\longleftrightarrow \text{kapacitivnost } C \end{aligned}$$

termički kondenzator je  $M$ -analogan električnom kondenzatoru.



Sl. 2.24 Termički kondenzator

a) Fizičko predstavljanje

b) Simboličko  $M$ -predstavljanje

U K-analogiji, međutim,

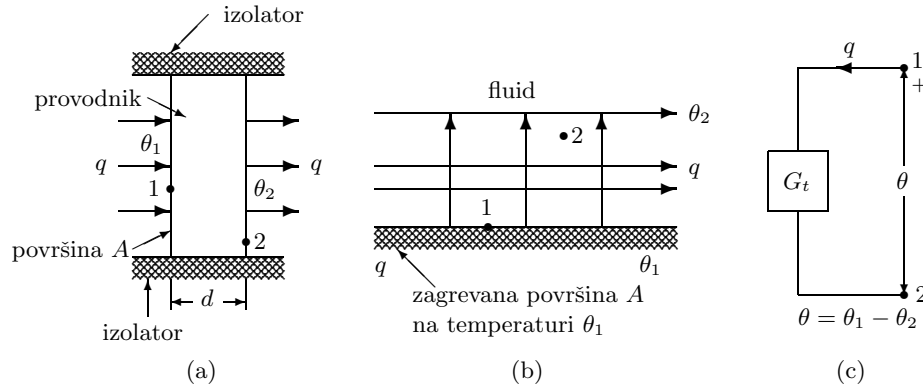
$$\begin{array}{lll} \text{toplotna snaga } q & \longleftrightarrow & \text{napon } u \\ \text{temperatura } \theta & \longleftrightarrow & \text{struja } i \\ \text{termička kapacitivnost } C_t & \longleftrightarrow & \text{induktivnosti } L \end{array}$$

on je  $K$ -analogan električnom klemu.

### b) Termički otpornik

Osobine prenošenja toplote kroz materije mogu se modelovati uvođenjem termičkog otpornika. Posmatraćemo samo prenošenje toplote *provođenjem* i *strujanjem*.

Posmatrajmo jednu ploču prizmatičnog oblika površine osnove  $A$  i debljine  $d$ , Sl. 2.25a.



Sl. 2.25. Termički otpornik

- a) Fizičko predstavljanje (prenošenje provođenjem)
- b) Fizičko predstavljanje (prenošenje strujanjem)
- c) Simboličko  $M$ -predstavljanje

Pod pretpostavkom da je *akumuliranje toplote zanemarljivo* i da se toplota prenosi upravo na površinu osnove, tada je prema *Fourier-ovom zakonu* veza između gradijenta temperature i toplotne snage koja se prenosi

$$(64) \quad q = KA \frac{\theta}{d} = G_t \theta,$$

gde je  $K$  - termička provodnost materijala, a  $\theta = \theta_1 - \theta_2$  razlika temperatura ulazne površine 1 i izlazne površine 2 (smer prenošenja je od površine više temperature ka površini niže temperature).

Veličina  $G_t$  naziva se *termička provodnost* (pri provođenju), a njena recipročna vrednost  $R_t = 1/G_t$  - *termička otpornost*.

Relacija (64) predstavlja karakteristiku termičkog otpornika pri prenošenju toplote provođenjem. Ovaj element je simbolički predstavljen na Sl. 2.25c.

Termička provodnost je  $M$ -analogna veličina električnoj provodnosti. Interesantno je primetiti da su materije koje su dobri toplotni provodnici - imaju veliko  $G_t$  - i dobri električni provodnici - imaju veliko  $G_e$ .

Pri prenošenju strujanjem, površina  $A$  zagrejana na temperaturi  $\theta_1$  prenosi na fluid toplotnu snagu  $q$ . Ako je temperatura fluida  $\theta_2$ , Sl. 2.25b, tada je prema *Newton-ovom zakonu* hlađenja veza između toplotne snage i temperaturne razlike  $\theta = \theta_1 - \theta_2$

$$(65) \quad q = cA\theta = G_t\theta,$$

gde je  $c$  - koeficijent strujanja.

Smer prenošenja toplote je od površine ka fluidu, ako je  $\theta_1 > \theta_2$ , ili od fluida ka površini, ako je  $\theta_2 > \theta_1$ . *Termička provodnost* (pri strujanju)  $G_t$  (termička otpornost  $R_t = 1/G_t$ ) zavisi u opštem slučaju od uslova strujanja, ali u mnogim praktičnim slučajevima  $G_t$  se može smatrati konstantnim.

Termička provodnost je  $M$ -analogna veličina električnoj provodnosti, tj. važi

$$\text{termička provodnost } G_t \longleftrightarrow \text{provodnost } G$$

### c) Termički izvori

*Izvori toplote* proizvode toplotnu snagu nezavisno od temperature i oni su  $M$ -analogni strujnim izvorima. *Izvori temperature* održavaju konstantnu temperaturu ili temperaturu koja se menja po nekoj vremenskoj funkciji nezavisno od toplotne snage. Ovi izvori su  $M$ -analogni naponskim izvorima.

PRIMEDBA 1. Primećujemo da kod termičkih sistema nije uveden treći element: termički kalem. Uvođenje ovog elementa pored termičkog kondenzatora fizički bi značilo postojanje dve vrste akumulativnih energija: potencijalne i kinetičke. Može se, međutim, pokazati da u tom slučaju ponašanje termičkog sistema ne bi bilo u skladu sa drugim principom termodinamike.

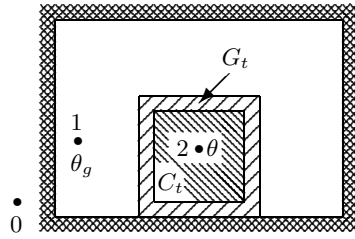
PRIMEDBA 2. Pored činjenice što ne postoji korespondentna veličina za električnu induktivnost u  $M$ -analogiji, specifičnost termičkih sistema je i u tom što je za razliku od drugih fizičkih sistema ovde snaga  $M$ -analogna struji, a ne električnoj snazi.

#### 2.4.2. TERMIČKE MREŽE

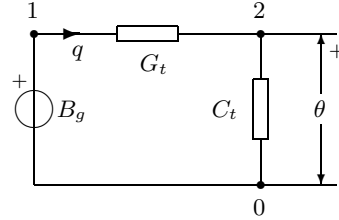
Za obrazovanje termičke mreže za jedan termički sistem potrebno je predstaviti spojna mesta (mesta različitih temperatura) čvorovima. Promenljiva svakog čvora je temperatura spojnog mesta merena u odnosu na istu referencu. Važno je istaći da se termički kondenzatori uvek vezuju jednim krajem za referentni čvor a drugim krajem za odgovarajuće čvorove - predstavnike temperature spojnog mesta.

*Zakoni međusobnog vezivanja* za termičke sisteme koji su, respektivno, analogni prvom i drugom KIRCHHOFFovom zakonu su: Algebarska suma toplotnih snaga za svaki čvor i u svakom trenutku jednaka je nuli, i algebarska suma temperaturnih razlika duž svake konture i u svakom trenutku jednaka je nuli.

PRIMER 2.7. U jednoj peći u kojoj se održava konstantna temperatura  $\theta_g$  nalazi se bakarni blok termičke kapacitivnosti  $C_t$  i velike termičke provodnosti. Blok je obložen vatrostalnim materijalom termičke provodnosti  $G_t$ , zanemarljive termičke kapacitivnosti, Sl.2.26a. Odrediti termičku mrežu,  $M$ -analognu mrežu i temperaturu  $\theta(t)$  ako je  $\theta(0) = \theta_0$ .



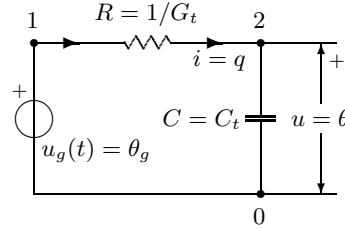
(a)



(b)

Sl. 2.26. Termički sistem (provođenje)

- Fizičko predstavljanje
- Termička mreža ( $M$ -predstavljanje)
- $M$ -analogna mreža.



(c)

Mesta različite temperature su unutrašnjost peći i bakarni blok. Ona su predstavljena čvorovima 1 i 2.

Temperatura peći  $\theta_g$  je predstavljena konstantnim izvorom temperature koji ima jedan kraj vezan za referentni čvor a drugi kraj vezan za čvor 1. *Zbog zanemarljive termičke otpornosti*, bakarni blok se može modelovati jednim termičkim kondenzatorom koji ima jedan kraj vezan za referentni čvor 0 a drugi kraj za čvor 2. Najzad, između čvorova 1 i 2 vezan je termički otpornik koji modeluje termički izolator. Termička mreža i  $M$ -analogna mreža prikazane su na Sl. 2.26b i 2.26c.

Jednačina konturne struje za termičku mrežu je

$$(66) \quad \left( \frac{1}{G_t} + \frac{1}{C_t D} \right) q = C_t D \theta,$$

a jednačina stanja

$$(67) \quad \dot{\theta} = -\frac{G_t}{C_t} \theta + \frac{G_t}{C_t} \theta_g \quad \theta(0) = \theta_0.$$

Njeno potpuno rešenje je:

$$(68) \quad \theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{G_t}{C_t} t} + \theta_g \left( 1 - e^{-\frac{G_t}{C_t} t} \right)$$

PRIMER 2.8. Jedan toplotno izolovan sud sa tečnošću podeljen je metalnom pregradom na dve komore, Sl. 2.27a. U jednoj komori nalazi se grejač konstantne toplotne snage

$q_0$ . U svakoj komori nalaze se mešalice koje obezbeđuju uniformnu raspodelu toplote u komorama. Ako su termičke kapacitivnosti komora i pregrade  $C_{t1}$ ,  $C_{t2}$  i  $C_{t3}$  i ako su termičke provodnosti strujanja na granicama pregrade  $G_{t1}$  i  $G_{t2}$ , odrediti termičku mrežu i  $M$ -analognu mrežu. Izvesti jednačine stanja i odrediti funkciju mreže  $\check{T}_{30} = \check{\theta}_3(\check{s}) / \check{\theta}_0(\check{s})$ .

Termička mreža i odgovarajuća  $M$ -analogna mreža predstavljene su na Sl. 2.27b i 2.27c. Jednačine napona čvorova su

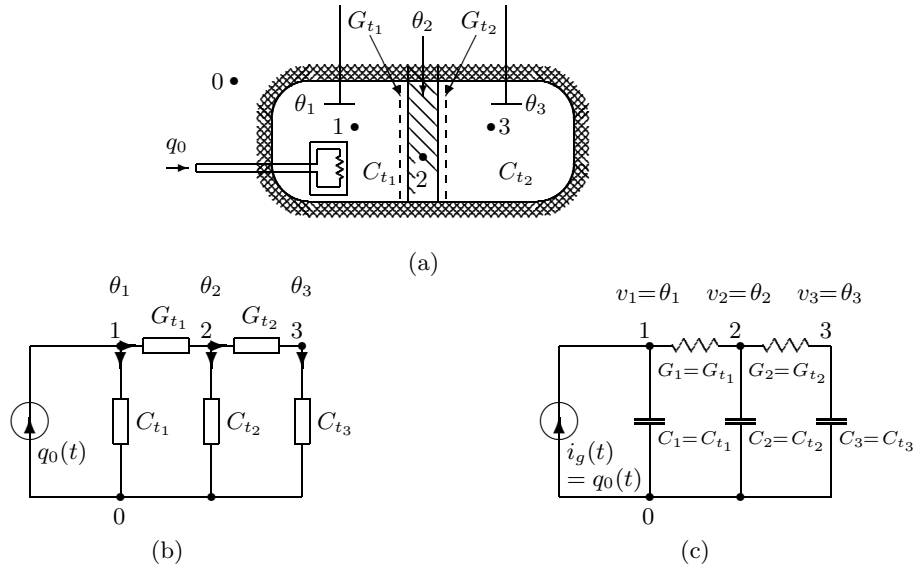
$$(69) \quad \begin{aligned} (C_{t1}D + G_{t1})\theta_1 - G_{t1}\theta_2 &= q_0(t), \\ -G_{t1}\theta_1 + (C_{t2}D + G_{t1} + G_{t2})\theta_2 - G_{t2}\theta_3 &= 0, \\ -G_{t2}\theta_2 + (C_{t3}D + G_{t2})\theta_3 &= 0, \end{aligned}$$

a jednačine stanja

$$(70) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{G_{t1}}{C_{t1}} & \frac{G_{t1}}{C_{t1}} & 0 \\ \frac{G_{t1}}{C_{t2}} & -\frac{G_{t1} + G_{t2}}{C_{t2}} & \frac{G_{t2}}{C_{t2}} \\ 0 & \frac{G_{t2}}{C_{t3}} & -\frac{G_{t2}}{C_{t3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{q_0(t)}{C_{t1}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

sa početnim uslovima

$$\begin{bmatrix} \theta_1(0) \\ \theta_2(0) \\ \theta_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{10} \\ \theta_{20} \\ \theta_{30} \end{bmatrix}.$$



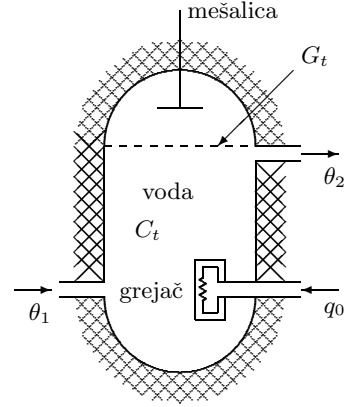
Sl. 2.27. Termički sistem (strujanje) a) Fizičko predstavljanje  
 b) Termička mreža ( $M$ -predstavljanje) c)  $M$ -analogna mreža

Iz LAPLACEovih transformacija jednačine (69) ili (70) pri nula početnim uslovima, neposredno dobijamo traženu funkciju mreže:

$$(71) \quad \begin{aligned} \check{T}_{30}(\check{s}) = \frac{\check{\theta}_3(\check{s})}{\check{\theta}_0(\check{s})} = & \left( C_{t_2} C_{t_3} \check{s}^2 + (C_{t_3} G_{t_1} \right. \\ & \left. + C_{t_3} G_{t_2} + C_{t_2} G_{t_2}) \check{s} + G_{t_1} G_{t_2} \right) \\ & : \left( \check{s} (C_{t_1} C_{t_2} C_{t_3} \check{s}^2 + (C_{t_1} C_{t_3} G_{t_1} \right. \\ & \left. + C_{t_1} C_{t_3} G_{t_2} + C_{t_1} C_{t_2} G_{t_2} + C_{t_2} C_{t_3} G_{t_1}) \check{s} \right. \\ & \left. + C_{t_1} G_{t_1} G_{t_2} + C_{t_3} G_{t_1} G_{t_2} + C_{t_2} G_{t_1} G_{t_2}) \right). \end{aligned}$$

Vežbanja

2.13. Odrediti termičku mrežu za bojler na slici.



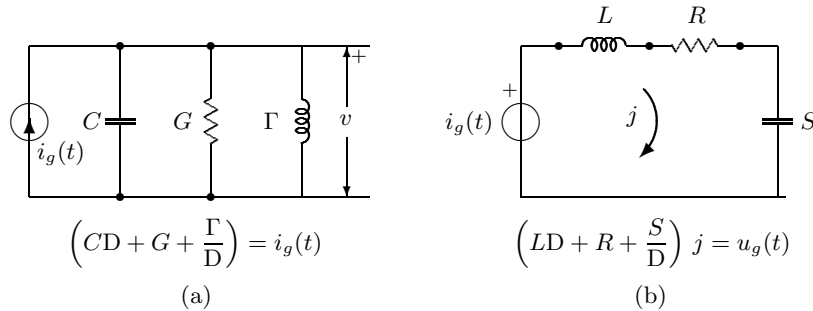
## 2.5. RELACIJE IZMEĐU DUALNIH I ANALOGNIH MREŽA

Mreže koje su opisane analognim jednačinama, tj. jednačinama istog matematičkog oblika nazvali smo *analogne mreže*. Od klase analognih mreža posebno se izdvaja važna subklasa *dualnih mreža*.

Poznato je da u električnim mrežama koncept dualnosti igra značajnu ulogu u upoznavanju strukturalnih osobina mreža.

Na primer, paralelna i redna mreža na Sl. 2.28 su *analogne* jer su opisane jednačinama istog oblika. Naime, jednačina nezavisnih napona za paralelnu mrežu na Sl. 2.28a i jednačina nezavisnih struja za rednu mrežu na Sl. 2.28b su istog oblika

$$(72) \quad \left( aD + b + \frac{c}{D} \right) y = f(t).$$



Sl. 2.28. Dualne električne mreže a) Paralelna mreža b) Redna mreža

Međutim, ove dve mreže su ujedno i dualne zato što ako se naponi jedne mreže zamene strujama druge mreže, tada grafovi postaju dualni (paralelna veza grana prelazi u rednu vezu i obratno) i elementi postaju dualni (svakom kondenzatoru jedne mreže odgovara jedan kalem druge mreže i obratno, svakom otporniku jedne mreže odgovara jedan otpornik druge mreže i obratno, i svakom strujnom izvoru jedne mreže odgovara jedan naponski izvor druge mreže i obratno). Određivanjem napona i struja *polazne* mreže mi smo ujedno odredili struje i napone, respektivno, dualne mreže.

Poznato je da jedna mreža ima dualnu mrežu ako i samo ako su ispunjena dva uslova: a) graf mreže je planaran, i b) svi elementi mreže su dvokrajni ( $R$ ,  $L$ ,  $C$  i izvori). Pri tome je postupak za konstrukciju dualne mreže  $B$  za jednu datu polaznu mrežu  $A$  (dualizacija) sledeći:

1. U svakoj ćeliji (uključujući i spoljnu ćeliju) mreže  $A$  postavi se po jedan čvor.
2. Svaka dva čvora se spajaju po jednom granom  $\beta$  koja preseca samo jedan element  $\alpha$  mreže  $A$ .
3. Grana  $\beta$  se zamenjuje dualnim elementom za element prema Tablici 1.

TABLICA 1.  
(Zamena dualnih elemenata)

Kalem induktivnosti $L$ zamenjuje se kondenzatorom kapacit. $C = \frac{L}{R_0^2}$
Kondenzator kapacit. $C$ zamenjuje se kalemom induktivnosti $L$
Otpornik otpornosti $R$ zamenjuje se otpornikom provodnosti $G$
Naponski izvor napona $u_g(t)$ zamenjuje se strujnim izvorom struje $i_g(t)$
Strujni izvor struje $i_g(t)$ zamenjuje se naponskim izvorom napona $u_g(t)$

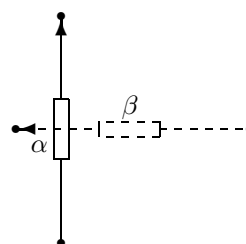
4. Svaki element  $\beta$  mreže  $B$  se orijentise tako da se njegovom rotacijom u smeru satne kazaljke dovede do poklapanja sa pozitivnom orijentacijom elementa  $\alpha$  mreže  $A$  (videti Sl. 2.29)

Ako je mreža  $B$  dualna za mrežu  $A$ , tada važi i obratno: mreža  $A$  je dualna mreži  $B$ .

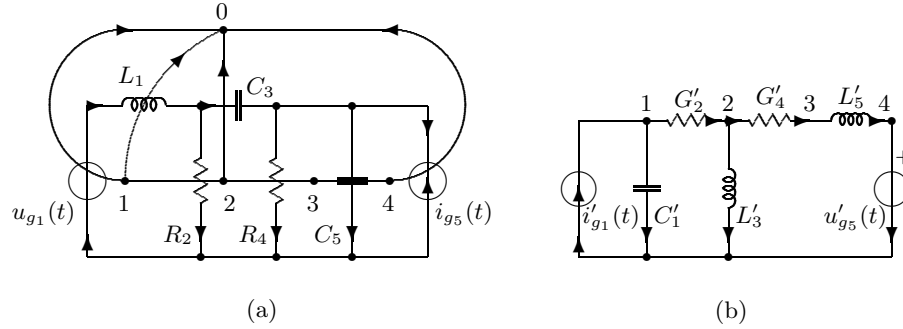
Na primer, prema opisanom postupku, izvršena je dualizacija mreže  $A$  u mrežu  $B$  na Sl. 2.30. Čitalac će se uveriti da su jednačine struja ćelija za mrežu  $A$  pisane za označene

ćelije koje su sve orijentisane u smeru satne kazaljke istog oblika kao jednačine napona čvorova za mrežu  $B$  u odnosu na označeni referentni čvor 0.

Videli smo da svakoj mehaničkoj mreži odgovaraju dve analogne električne mreže od kojih jedna ( $M$ -analogna) ima identičnu strukturu sa polaznom mehaničkom mrežom a druga ( $K$ -analogna) je dualna  $M$ -analognoj mreži ukoliko je ova planarna.



Sl. 2.29. Orijehtacija dualnih elemenata

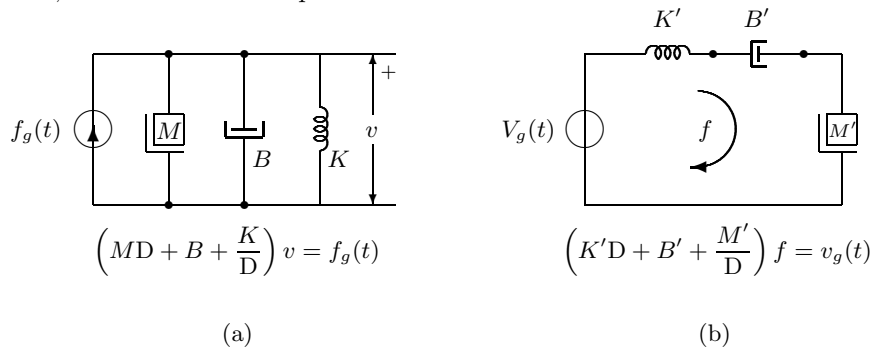


Sl. 2.30. Dualne električne mreže

Postavlja se sada opšte pitanje: ako se jedna data planarna mehanička mreža  $A_m$  dualizuje u mehaničku mrežu  $B_m$ , u kakvom odnosu stoje odgovarajuće analogne električne mreže sa mrežama  $A_m$  i  $B_m$ ? U odgovoru na ovo pitanje važno je da li se posmatra  $M$ -analogija ili  $K$ -analogija.

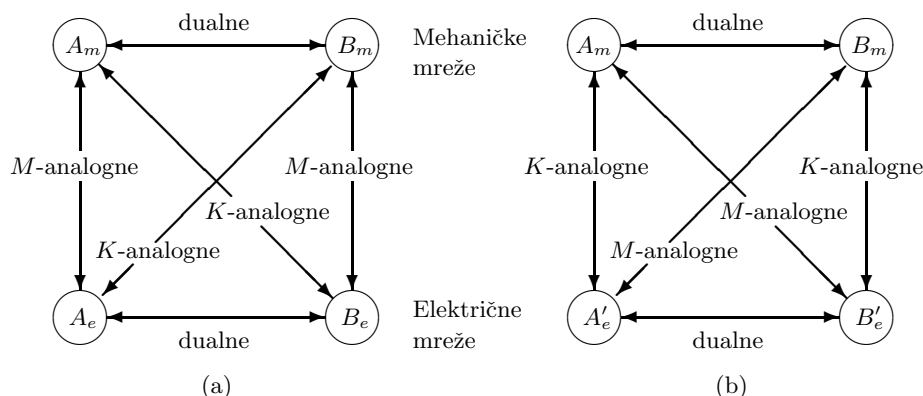
Očigledno je da ako se posmatra samo jedna analogija ( $M$ - ili  $K$ -analogija), tada električne mreže  $A_e$  i  $B_e$  koje su respektivno analogne dualnim mehaničkim mrežama  $A_m$  i  $B_m$  su i same međusobno dualne. Ako su  $A_e$  i  $B_e$   $M$ -analogne mreže, tada je  $B_e$   $K$ -analogna za mrežu  $A_m$ , a  $A_e$  je  $K$ -analogna za mrežu  $B_m$ . Obratno, ako su  $A'_e$  i  $B'_e$   $K$ -analogne mreže za dualne mehaničke mreže  $A_m$  i  $B_m$ , respektivno, tada je  $B'_e$   $M$ -analogna mreža za mrežu  $A_m$ , tj. ona je identična sa mrežom  $A_e$ , a  $A'_e$  je  $M$ -analogna mreža za mrežu  $B_m$ , tj. ona je identična sa mrežom  $B_e$ .

Na primer, električna  $M$ -analogna mreža za mehaničku mrežu na Sl. 2.31a je mreža na Sl. 2.28a, dok je električna  $K$ -analogna mreža za istu mehaničku mrežu ona na Sl. 2.28b. Isto tako je električna mreža na Sl. 2.28b  $M$ -analogna za mehaničku mrežu na Sl. 2.31b, a električna mreža na Sl. 2.28a je  $K$ -analogna za ovu istu mehaničku mrežu. Prema tome, mehaničke mreže na Sl. 2.31 su dualne, u šta se možemo neposredno uveriti.



Sl. 2.31. Dualne mehaničke mreže a) Paralelna mreža b) Redna mreža





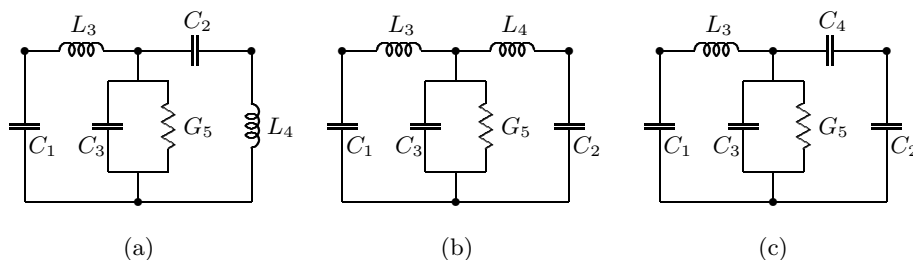
Sl. 2.32 Relacije između analognih i dualnih mreža

Na Sl. 2.32 su prikazane sve moguće relacije između analognih i dualnih mreža za jedan mehanički i jedan električni sistem.

Jasno je da relacije između analognih i dualnih mreža nisu ograničene samo na mehaničke i električne sisteme. One važe za bilo koja dva fizička sistema koja imaju strukturu mreže.

PRIMEDBA. Prethodna razmatranja ne uzimaju u obzir fizičku realizabilnost mreža. Uslovi fizičke realizabilnosti nameću izvesna topološka ograničenja. Naime, za mreže fizičkih sistema koje su sagrađene na bazi  $M$ -predstavljanja potrebno je da svi elementi - kondenzatori imaju jedan zajednički kraj. To znači da njima dualne mreže, koje su sagrađene na bazi  $K$ -predstavljanja moraju imati odgovarajuće dualne elemente (kalemove) u jednoj zajedničkoj konturi. Na primer, u mehaničkim mrežama svi elementi - masa i elementi - moment inercije imaju jedan zajednički kraj ako su mreže sagrađene po  $M$ -predstavljanju. Dualne mreže, sagrađene po  $K$ -predstavljanju, imaju ove elemente u jednoj zajedničkoj konturi. U električnim  $M$ -analognim mrežama svi kondenzatori su vezani na referentni čvor, a u električnim  $K$ -analognim mrežama svi kalemovi se nalaze u jednoj zajedničkoj konturi. Ovo nam omogućava da utvrdimo da li je neka električna mreža *potencijalno analogna* nekoj fizičkoj mreži.

Posmatrajmo, na primer, električnu mrežu na Sl. 2.33a.



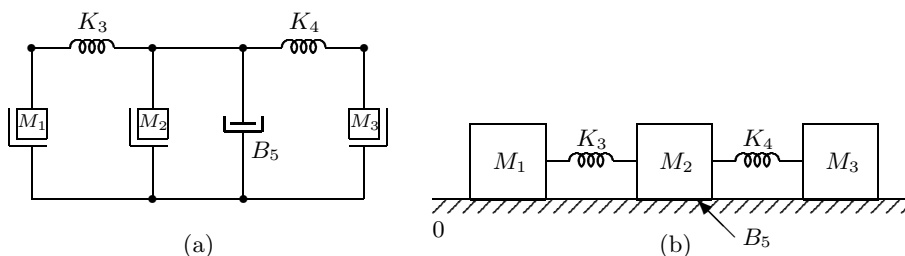
Sl. 2.33. Potencijalno analogne električne mreže

a), b) Mreže potencijalno  $M$ -i  $K$ -analogne c) Mreža samo potencijalno  $K$ -analogna

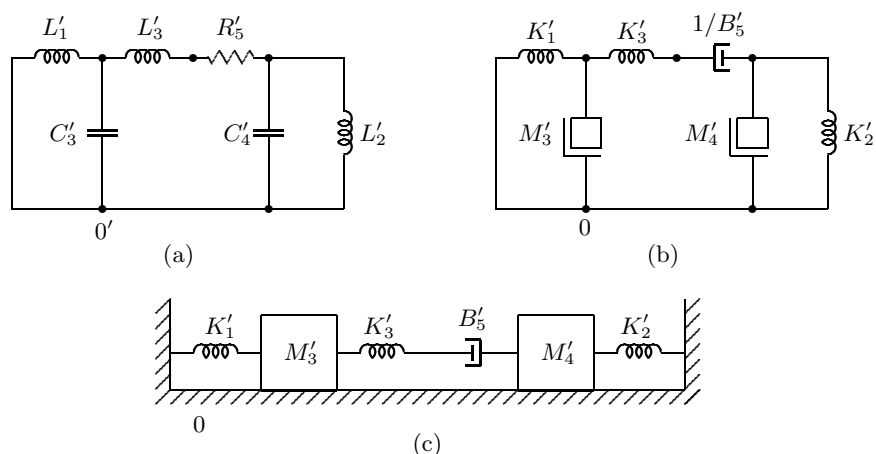
Pošto kalemovi leže u jednoj konturi, ona je očigledno potencijalno  $K$ -analogna nekoj mehaničkoj mreži. Međutim, ona je isto tako i potencijalno  $M$ -analogna, jer je dovoljno da se kondenzator  $C_2$  premesti kao na Sl. 2.33b pa da topološko ograničenje bude zadovoljeno. S druge strane, mreža na Sl. 2.33c ne može biti potencijalno  $M$ -analogna nekoj mehaničkoj mreži ni za jedan izbor referentnog čvora. Međutim, sve mreže na Sl. 2.33 ispunjavaju uslov da budu potencijalno  $K$ -analogne.

Mehanička  $M$ -analogna mreža za pravolinijsko kretanje koja odgovara mreži na Sl. 2.33b prikazana je na Sl. 2.34a. Na Sl. 2.34b dat je mehanički sistem predstavljen ovom mrežom.

Ako konstruišemo dualnu mrežu za električnu mrežu na Sl. 2.33b, dobijamo mrežu na Sl. 2.35a. Njoj  $M$ -analogna mehanička mreža je predstavljena na Sl. 2.35b. Ova mreža je dualna mehaničkoj mreži na Sl. 2.34a, a  $K$ -analogna mehaničkoj mreži na Sl. 2.33b. Isto tako, električna mreža na Sl. 2.35a je  $K$ -analogna mehaničkoj mreži na Sl. 2.34a.



Sl. 2.34. a) Mehanička  $M$ -analogna mreža za pravolinijsko kretanje koja odgovara električnoj mreži na Sl. 2.33b  
b) Mehanički sistem koji odgovara mehaničkoj mreži na Sl. 2.34a



Sl. 2.35. a) Dualna mreža za električnu mrežu na Sl. 2.33b  
b)  $M$ -analogna mehanička mreža c) Mehanička realizacija mreže na Sl. 2.35b

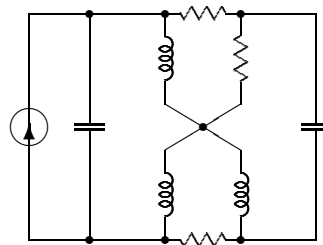
Na sl. 2.35c data je mehanička realizacija mreže na Sl. 2.35b. Mehanički sistemi na Sl. 2.34b i 35c nazivaju se *dualni* jer su predstavljeni dualnim mehaničkim mrežama.

Relacije između analognih i dualnih mreža su korisne jer nam omogućavaju da sagledamo zajedničke osobine svih fizičkih sistema koji imaju strukturu mreže. One su korisne i sa gledišta *sinteze* fizičkih sistema jer, pružajući nam razne mogućnosti analognog predstavljanja jednog istog fizičkog sistema pomoću sistema iste ili različite fizičke prirode, omogućavaju nam da odaberemo onaj koji najbolje odgovara našim ciljevima. Tako na primer mehanički sistem na Sl. 2.34b sadrži tri mase i dve opruge, dok onaj na Sl. 2.35c ima dve mase i tri opruge. S druge strane, drugi sistem zahteva savršene klizne površine.

### Vežbanja

**2.14.** Da li električna mreža na slici može da bude potencijalno analogna za mrežu nekog fizičkog sistema? Obrazložiti.

**2.15.** Konstruisati fluidne i *termičke* mreže na bazi *M*-analogije za električnu mrežu na Sl. 2.33b. Odrediti odgovarajuće fizičke sisteme.



## 2.6. DIMENZIONI FAKTORI

Osnovni cilj električnog modelovanja jeste da se fizički objekt (sistem ili proces) simulira pomoću analogne električne mreže na kojoj se mogu vršiti merenja električnih veličina - obično napona i struja koje su *srazmerne* odgovarajućim fizičkim - najčešće neelektričnim veličinama. Na taj način određivanjem odziva električne mreže (merenjem ili računskim putem) mi faktički određujemo odziv fizičkog objekta koji je modelovan odgovarajućom fizičkom mrežom odnosno analognom električnom mrežom.

Prilikom razmatranja analognih električnih mreža, mi smo do sada izjednačavali promenljive i parametre fizičkih mreža sa korespondentnim promenljivama i parametrima analogne električne mreže, ne vodeći pri tome računa o pitanjima vezanim za njihove dimenzije. Ovo je učinjeno samo iz razloga jednostavnosti. U stvari, direktno izjednačavanje brojnih vrednosti fizičkih veličina od interesa sa brojnim vrednostima analognih električnih veličina, ove mogu dobiti sasvim nepraktične vrednosti koje su ili van domašaja mernih instrumenata ili se teško fizički ostvaruju. Tako, na primer, neki procesi kao što su mehanička kretanja odvijaju se znatno sporije od promena napona i struja električnih analognih mreža za ceo opseg vrednosti komponenata koji je uslovljen njihovom konstrukcijom. Stoga će često biti potrebno posmatrati pojave u analognim električnim mrežama u drugom vremenu od onog koji teče u fizičkom objektu. Za naš konkretni slučaj, vreme u mehaničkom sistemu mora biti "komprimovano" da bi

se pojave mogle lako posmatrati u analognoj električnoj mreži. Isto tako, napone bioloških i nekih elektrohemijskih procesa treba “proširiti” nekoliko hiljada puta u analognoj električnoj mreži.

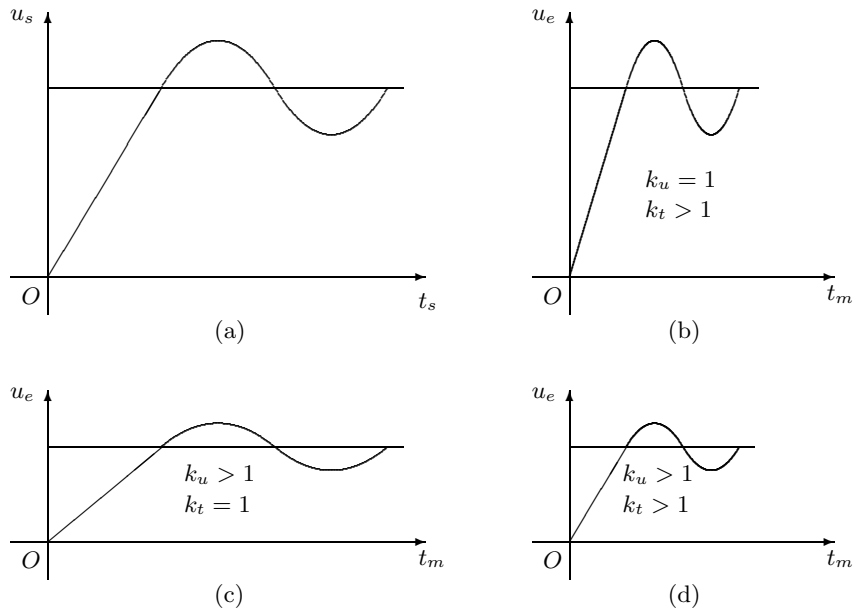
Odnos neke fizičke veličine i odgovarajuće analogne veličine naziva se *dimenzioni faktor* te veličine. Ako strujne promenljive, naponske promenljive i vreme nekog fizičkog sistema  $S$  respektivno označimo sa  $\psi_s$ ,  $\varphi_s$  i  $t_s$  a struju, napon i vreme električnog  $M$ -analognog modela sa  $i_e$ ,  $u_e$  i  $t_e$ , tada su *dimenzioni faktori*

$$(73) \quad k_\psi = \frac{\psi_s}{i_e}, \quad k_\varphi = \frac{\varphi_s}{u_e}, \quad k_t = \frac{t_s}{t_e}.$$

Ako su strujne i naponske promenljive - struje i naponi, tj. ako je  $\psi_s = i_s$  i  $\varphi_s = u_s$ , tada se dimenzioni faktori

$$(74) \quad k_i = \frac{i_s}{i_e}, \quad k_u = \frac{u_s}{u_e}, \quad k_t = \frac{t_s}{t_e}$$

često nazivaju *faktori razmere* ili *normalizujući faktori*.



Sl. 2.36. Ilustracija faktora razmere

- a) Proces u prirodi   b) Proces vremenski komprimovan  
c) Proces sažiman i u realnom vremenu   d) Proces sažiman i vremenski komprimovan

Kada je  $k_u > 1$  naponi električnog modela su smanjeni, tj. sistem je sažiman, kada je  $k_u < 1$  naponi električnog modela su povećani, tj. sistem je proširen, a kada je  $k_u = 1$  oni su nepromenjeni u odnosu na napone sistema. Ako je

$k_t > 1$  vreme električnog modela teče brže od vremena sistema, tj. sistem je vremenski komprimovan, ako je pak  $k_t < 1$  ono teče sporije, tj. sistem je vremenski produžen. Najzad, ako je  $k_t = 1$  pojave u sistemu i u modelu odvijaju se istovremeno. Kaže se još da model radi u *realnom vremenu* ili da radi *izohrono* sa sistemom. Na sl. 2.36 ilustrovani su faktori razmere.

Pored dimenzionih faktora odnosno faktora razmere za *promenljive*, uvode se i dimenzioni faktori odnosno faktori razmere za *parametre*. Ako sa  $C_s$ ,  $G_s$  i  $L_s$  označimo parametre osnovnih elemenata fizičkog sistema S i sa  $C_e$ ,  $G_e$  i  $L_e$  označimo korespondentne parametre električne analogne mreže, tada su *dimenzioni faktori za parametre*

$$(75) \quad k_{C_s} = \frac{C_s}{C_e}, \quad k_{G_s} = \frac{G_s}{G_e}, \quad k_{L_s} = \frac{L_s}{L_e}.$$

Na sličan način se mogu definisati i dimenzioni faktori za recipročne parametre  $S_s$ ,  $R_s$  i  $\Gamma_s$ . Oni su, respektivno,  $1/k_{C_s}$ ,  $1/k_{G_s}$  i  $1/k_{L_s}$ .

Ako su  $C_s$ ,  $G_s$  i  $L_s$  električni parametri, tada se  $k_{C_s}$ ,  $k_{G_s}$  i  $k_{L_s}$  nazivaju *faktori razmere za parametre*.

Između 6 dimenzionih faktora (73) i (75) postoje veze koje možemo naći ako posmatramo jednačine za neku fizičku mrežu i jednačine za električnu analognu mrežu. Posmatraćemo jednu fizičku mrežu 2. reda,  $A_s$ , i njoj  $M$ -analognu mrežu,  $A_e$ . Međutim, razmatranja ostaju u važnosti za mrežu bilo kog reda (zašto?).

Jednačina naponske promenljive za mrežu  $A_s$  je

$$(76a) \quad C_s \frac{d\varphi_s}{dt_s} + G_s \varphi_s + \frac{1}{L_s} \int_{-\infty}^{t_s} \varphi_s(\tau) d\tau = \psi_s,$$

ili

$$(76b) \quad C_s \frac{d^2 \varphi_s}{dt_s^2} + G_s \frac{d\varphi_s}{dt_s} + \frac{1}{L_s} \varphi_s = \frac{d\psi_s}{dt_s},$$

a za mrežu  $A_e$  je

$$(77) \quad C_e \frac{d^2 u_e}{dt_e^2} + G_e \frac{du_e}{dt_e} + \frac{1}{L_e} u_e = \frac{di_e}{dt_e}.$$

Unošenjem dimenzionih faktora (73) i (76b) dobijamo jednačinu

$$(78) \quad \frac{C_s k_\varphi}{k_t^2} \frac{d^2 u_e}{dt_e^2} + \frac{G_s k_\varphi}{k_t} \frac{du_e}{dt_e} + \frac{k_\varphi}{L_s} u_e = \frac{k_\psi}{k_t} \frac{di_e}{dt_e},$$

koja posle množenja sa  $k_t/k_\psi$  postaje

$$(79) \quad \frac{C_s k_\varphi}{k_t k_\psi} \frac{d^2 u_e}{dt_e^2} + \frac{G_s k_\varphi}{k_\psi} \frac{du_e}{dt_e} + \frac{k_\varphi k_t}{L_s k_\psi} u_e = \frac{di_e}{dt_e}.$$

Vidimo da će ova jednačina biti identična sa (77) ako su i samo ako parametri mreža  $A_s$  i  $A_e$  vezani relacijama

$$(80) \quad C_e = C_s \frac{k_\varphi}{k_t k_\psi}, \quad G_e = G_s \frac{k_\varphi}{k_\psi}, \quad L_e = L_s \frac{k_\psi}{k_\varphi k_t},$$

što prema (75) daje traženu vezu između dimenzionih faktora

$$(81) \quad k_{C_s} = \frac{k_\psi k_t}{k_\varphi}, \quad k_{G_s} = \frac{k_\psi}{k_\varphi}, \quad k_{L_s} = \frac{k_\varphi k_t}{k_\psi}.$$

Zaključujemo da od ukupno 6 dimenzionih faktora  $k_\psi$ ,  $k_\varphi$ ,  $k_t$ ,  $k_{C_s}$ ,  $k_{G_s}$  i  $k_{L_s}$  svega 3 su nezavisna i kao takva se mogu birati proizvoljno. Ostali dimenzioni faktori se izračunavaju iz relacija (81) pomoću nezavisnih.

U slučaju koji smo posmatrali za nezavisne dimenzione faktore mi smo usvojili  $k_\psi$ ,  $k_\varphi$  i  $k_t$ , ali je lako videti da smo isto tako mogli da usvojimo i tri druga dimenziona faktora. Ukupan broj mogućnih izbora jednak je broju kombinacija od po 3 elementa od ukupno 6, tj.  $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$ . Međutim, sve ove kombinacije nisu nezavisne. Na primer, kombinacija  $(k_{G_s}, k_\varphi, k_\psi)$  nije nezavisna što se neposredno vidi iz (81). Isto tako zavisne su još i sledeće kombinacije:  $(k_{C_s}, k_{L_s}, k_t)$ ,  $(k_{C_s}, k_{L_s}, k_{G_s})$ ,  $(k_{G_s}, k_{L_s}, k_t)$  i  $(k_{C_s}, k_{G_s}, k_t)$ . Prema tome postoji svega 15 mogućih izbora nezavisnih dimenzionih faktora. Na primer, ako se usvoji kombinacija  $(k_{C_s}, k_{L_s}, k_\varphi)$ , tada iz (81) dobijamo ostale dimenzione faktore

$$(82) \quad k_\psi = k_\varphi \sqrt{\frac{k_{C_s}}{k_{L_s}}}, \quad k_{G_s} = \sqrt{\frac{k_{C_s}}{k_{L_s}}}, \quad k_t = \sqrt{k_{C_s} k_{L_s}}$$

Čitalac će sam izvesti ostale kombinacije nezavisnih dimenzionih faktora.

PRIMEDBA 1. Pored dimenzionih faktora (73) mogu se uvesti i dimenzioni faktori za izvode i integrale strujnih i naponskih promenljivih. Oni se, međutim, mogu izraziti pomoću dimenzionih faktora (73). Na primer, budući da u  $M$ -analogiji važi korespondencija

$$\begin{aligned} \text{“pomeranje” } \delta_s &= \int_{-\infty}^t \varphi_s dt_s \longleftrightarrow \text{fluks } \lambda_e = \int_{-\infty}^t u_e dt_e \\ \text{“ubrzanje” } a_s &= \frac{d\varphi_s}{dt_s} \longleftrightarrow \ddot{\lambda} = \frac{du_e}{dt_e} \end{aligned}$$

odgovarajući dimenzioni faktori biće

$$(83) \quad K_\delta = \frac{\delta_s}{\lambda_e} = \frac{\int_{-\infty}^t k_\varphi u_e k_t dt_e}{\int_{-\infty}^t u_e dt_e} = k_\varphi k_t, \quad K_a = \frac{a_s}{\ddot{\lambda}} = \frac{\frac{k_\varphi}{k_s} \frac{du_e}{dt_e}}{\frac{du_e}{dt_e}} = \frac{k_\varphi}{k_t}.$$

PRIMEDBA 2. Često se, naročito u analizi mreža u frekvencijskom domenu, na mesto vremena  $t_s$  i  $t_e$  uvode odgovarajuće kružne učestanosti  $\omega_s$  i  $\omega_m$ . Ako se uzmu jednake

ugaone promenljive za oba sistema, tj.  $\theta = \omega_s t_s = \omega_e t_e$ , tada dimenzioni faktori za vreme i učestanost stoje u obrnutoj srazmeri

$$(84) \quad k_\omega = \frac{\omega_s}{\omega_e} = \frac{t_e}{t_s} = \frac{1}{k_t}.$$

PRIMEDBA 3. Normalizujući faktori koji se najčešće upotrebljavaju u analizi i sintezi električnih mreža su  $k_u$ ,  $k_r$  i  $k_\omega$  pri čemu se redovno uzima  $k'_u = 1$ . Pomoću faktora  $k_r$  i  $k_\omega$  vrši se normalizacija impedansi i kružne (ili kompleksne) učestanosti. Lako je videti da su ovi faktori nezavisni i da se normalizujući faktori za kapacitivnost, induktivnost i struju izražavaju na sledeći način:

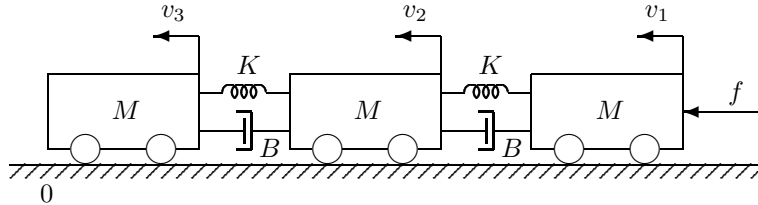
$$(85) \quad k_c = \frac{1}{k_r k_\omega}, \quad k_l = \frac{k_r}{k_\omega}, \quad k_i = \frac{1}{k_r}.$$

PRIMEDBA 4. Iz praktičnih razloga vrlo je povoljno podesiti dimenzione faktore i faktore razmene da budu celi multipli od  $10^{\pm N}$ , gde je  $N$  ceo broj ili nula.

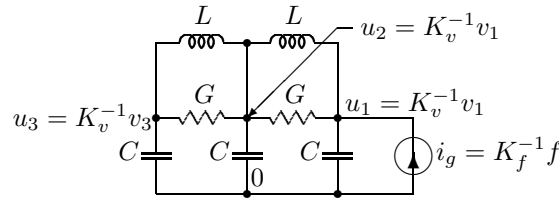
Upotrebu dimenzionih faktora ilustrovaćemo sledećim primerom.

PRIMER 2.9. Na Sl. 2.37a predstavljen je šinobus koji se sastoji od tri identična vagona. Poznata je masa  $M$  svakog vagona, koeficijent krutosti svakog odbojnika  $K$  kao i pogonska sila  $f$  koju razvija prvo vozilo neposredno po ubrzavanju. Klizanje vagona je zanemarljivo.

$$M = 15 \cdot 10^3 \text{ kg}, \quad K = 3 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad f = 2 \cdot 10^4 \text{ N}$$



(a)



(b)

Sl. 2.37. Šinobus a) Fizičko predstavljanje b)  $M$ -analogna mreža

Primenom  $M$ -analogne mreže, Sl. 2.37b, možemo eksperimentalno snimiti krive odziva  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  i  $u_3(t)$  ( $K_v^{-1}v_1(t)$ ,  $K_v^{-1}v_2(t)$  i  $K_v^{-1}v_3(t)$ ) i na taj način odrediti vrednost koeficijenta prigušenja  $B$  odbojnika koji će dati zadovoljavajući vremenski odziv, na primer da relativno pomeranje vagona pod dejstvom udarne sile  $f$  bude zadovoljavajuće prigušeno.

Ako bismo date mehaničke veličine  $M$ ,  $K^{-1}$  i  $f$  direktno izjednačili sa odgovarajućim  $M$ -analognim veličinama, dobijene vrednosti za kapacitivnost, induktivnost i struju izvora

$$C = 15 \cdot 10^3 \text{ F}, \quad L = \frac{1}{3} \cdot 10^{-6} \text{ H}, \quad i_g = 20\,000 \text{ A}$$

bile bi nepraktične.

Da bismo dobili pogodnije vrednosti parametara, koristićemo dimenzione faktore

$$k_M = \frac{M}{C} \left[ \frac{\text{kg}}{\text{F}} \right], \quad k_{K^{-1}} = \frac{K^{-1}}{L} \left[ \frac{\text{m}}{\text{NH}} \right], \quad k_f = \frac{f}{i_g} \left[ \frac{\text{N}}{\text{A}} \right]$$

za koje je lako proveriti da su nezavisni.

Ako usvojimo

$$k_M = 10^{12} \frac{\text{kg}}{\text{F}}, \quad k_{K^{-1}} = 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{NH}}, \quad k_f = 10^6 \frac{\text{N}}{\text{A}},$$

tada električne analogne veličine su

$$C = 15 \cdot 10^{-8} \text{ F} = 15 \text{ nF}, \quad L = \frac{10^{-4}}{3} \text{ H} = \frac{100}{3} \mu\text{H}, \quad i_g = 2 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 2 \text{ mA},$$

koje su pogodnije za merenja od prethodnih.

Za usvojenu kombinaciju ( $k_M$ ,  $k_{K^{-1}}$ ,  $k_f$ ), ostali dimenzioni faktori  $k_B$ ,  $k_V$ ,  $k_t$  se izračunavaju iz (81)

$$(81') \quad k_M = \frac{k_f k_t}{k_v}, \quad k_B = \frac{k_f}{k_v}, \quad k_{K^{-1}} = \frac{k_v k_t}{k_f}.$$

Dobijamo<sup>5</sup>

$$k_B = \sqrt{\frac{k_M}{k_{K^{-1}}}} = 10^7, \quad k_v = k_f \sqrt{\frac{k_{K^{-1}}}{k_M}} = 10^{-1}, \quad k_t = \sqrt{k_M k_{K^{-1}}} = 10^5,$$

iz čega se vidi da vreme u mehaničkom sistemu (realno vreme) teče  $10^5$  puta sporije od vremena u električnom modelu (eksperimentalno vreme).

Pošto se eksperimentalno odredi najpogodnija vrednost za  $G$ , traženi faktor prigušenja se dobija množenjem  $G$  sa  $k_B$ , tj.,  $B = G \cdot k_B = G \cdot 10^7$  u SI.

Primitićemo da, s obzirom da je red složenosti mreže na Sl. 2.37. jednak  $\sigma = 5$ , analitičko određivanje optimalne vrednosti  $G$  bilo bi vrlo složeno.

---

<sup>5</sup>u jedinicama sistema SI



## 2.7. FORMULISANJE JEDNAČINA FIZIČKIH MREŽA

U ovom poglavlju izvešćemo osnovne sisteme jednačina fizičkih mreža. Videli smo da za svaki diskretni fizički sistem  $S$  možemo definisati strujne (redne ili ekstenzivne) promenljive  $\psi$  i naponske (otočne ili intenzivne promenljive)  $\varphi$ . Elementi fizičke mreže  $M$  koja modeluje sistem  $S$  definišu se relacijama između promenljivih tipa  $\psi$  i  $\varphi$ . Osnovno obeležje promenljivih tipa  $\psi$

električna struja  $i$ , sila  $f$ , obrtni moment  $\tau$ , zapreminski protok  $\dot{q}$ , toplotna snaga  $q$ ,

jeste što one imaju istu vrednost na oba kraja (terminala) elementa.

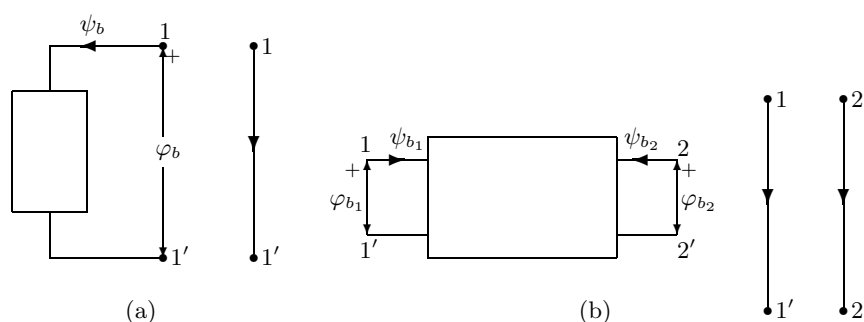
S druge strane, osnovno obeležje promenljivih tipa  $\varphi$

električni napon  $u$ , linijska brzina  $v$ , ugaona brzina  $\omega$ , pritisak  $p$ , temperatura  $\theta$ , nivo  $h$

jeste u tome što su one određene *razlikom* dveju skalarnih veličina na krajevima elementa. Za definisanje naponskih promenljivih uvek je potrebno naznačiti *fizičku referencu* u odnosu na koju se računaju skalarna veličina krajeva elementa.

Fizičko merenje strujnih promenljivih vrši se tako što se odgovarajući merač, na primer ampermetar ili merač protoka, uvek postavi “na red” sa elementom. Obrnuto, kod naponskih promenljivih merač se vezuje “otočno” elementu, tj. između njegovih krajeva (na primer voltmetar, brzinomer, ili manometar).

Za formulisanje jednačina međusobnog vezivanja elemenata u mrežu njihove karakteristike su irelevantne. Potrebno je samo neki element predstaviti *terminalnim* grafom, koji je za dvokrajne elemente (elemente sa jednim pristupom) jedan orijentisani linijski segment koji povezuje krajeve elementa, Sl. 2.38a. Ori-jentacija terminalnog grafa je identična sa orijentacijom elementa prema standardnoj konvenciji, kada je trenutna snaga elementa  $p = \varphi \psi$  pozitivna<sup>6</sup>



Sl. 2.38. Elementi mreže

- a) Element sa jednim pristupom i njegov terminalni graf  
b) Element sa dva pristupa i njegov terminalni graf

<sup>6</sup>Jedini izuzetak su termički sistemi, gde je  $\psi$  po dimenziji snaga.

Terminalni graf elementa sa dva para krajeva (sa dva pristupa) sačinjavaju linijski segmenti 11' i 22' koji predstavljaju pristupe, Sl. 2.38b.

Graf mreže  $G$  se dobija na taj način što se terminalni grafovi elemenata povezuju svojim krajevima na isti način kako su odgovarajući elementi međusobno povezani.

Označimo sa  $\tilde{A}$  i  $\tilde{B}$  matrice nezavisnih snopova (ili nezavisnih čvorova) i nezavisnih kontura grafa  $G$ . Ako je graf povezan i ako ima  $c$  čvorova i  $b$  grana, tada su matrice  $\tilde{A}$  i  $\tilde{B}$  dimenzija  $n \times b$  i  $m \times b$ , gde je  $n = c - 1$  i  $m = b - c + 1$  ( $n = \text{rang}$ ,  $m = \text{nultost}$  grafa).

Ako sa  $\tilde{\psi}_b$  i  $\tilde{\varphi}_b$  označimo kolona-matrice strujnih i naponskih promenljivih elemenata (strujnih i naponskih promenljivih grana grafa  $G$ ), tada su zakoni međusobnog vezivanja

$$(86) \quad \tilde{A}\tilde{\psi}_b = \tilde{0}, \quad (87) \quad \tilde{B}\tilde{\varphi}_b = \tilde{0}.$$

Ekvivalentni način formulisanja ovih zakona jeste da se strujne promenljive elemenata izraze pomoću *nezavisnih strujnih promenljivih*  $\tilde{\psi}$ , i da se naponske promenljive elemenata izraze pomoću *nezavisnih naponskih promenljivih*  $\tilde{\varphi}$

$$(88) \quad \tilde{\psi}_b = \tilde{B}^t \tilde{\psi}, \quad (89) \quad \tilde{\varphi}_b = \tilde{A}^t \tilde{\varphi}.$$

Najčešće se kao nezavisne strujne promenljive uzimaju strujne promenljive kontura, a kao nezavisne naponske promenljive uzimaju se naponske promenljive snopova.

Za formiranje sistema jednačina nezavisnih promenljivih mreža bitnu ulogu igra oblik u kome su zadate karakteristike elemenata. Posmatraćemo stoga tri moguća slučaja.

### 2.7.1. SISTEM JEDNAČINA NEZAVISNIH STRUJNIH PROMENLJIVIH

U ovom slučaju karakteristike elemenata, tzv.  $\varphi$  - karakteristike, moraju imati izražene naponske promenljive u funkciji strujnih promenljivih.

U najopštijem slučaju svaki element sa jednim pristupom može se predstaviti kao na Sl. 2.39.

Svaki element koji nije izvor ima vezan na red jedan  $\varphi$  - izvor (izvor čija je promenljiva  $\varphi$  poznata funkcija vremena  $\varphi_g(t)$  a promenljiva  $\psi$  je proizvoljna) a u paraleli sa ovom radnom vezom nalazi se jedan  $\psi$  izvor (izvor čija je promenljiva  $\psi$  poznata funkcija vremena  $\psi_g(t)$  a promenljiva  $\varphi$  je proizvoljna). Element na Sl. 2.39. naziva se *standardni element* mreže. Ako su izvori u mreži proizvoljno raspodeljeni, oni se uvek mogu premestiti tako da se obrazuju standardni elementi.

U mreži sa premeštenim izvorima zakoni međusobnog vezivanja ostaju isti kao u mreži pre premeštanja.

Za jedan standardni element sa jednim parom krajeva  $\varphi$  - karakteristika se može pisati u obliku

$$(90) \quad \varphi_b + \varphi_g(t) = Z_s(D) [\psi_b + \psi_g(t)],$$

gde je  $Z_s(D)$  operatorska impedansa elementa.

Za jedan standardni element sa dva ili više pari krajeva svaki pristup se može predstaviti jednim standardnim elementom kao na Sl. 2.39. Ako je broj pristupa  $p$  karakteristika je oblika

$$(91) \quad \varphi_{b,k} + \varphi_{g,k} = \sum_{v=1}^p Z_{skv}(D) [\psi_{b,v} + \psi_{g,v}(t)] \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

gde je  $Z_{skk}(D)$  sopstvena operatorska impedansa a  $Z_{skl}(D)$  međusobne operatorske impedanse.

Karakteristike pojedinih standardnih elemenata mogu se pisati u matičnom obliku

$$(92) \quad \varphi_b + \varphi_g(t) = \tilde{Z}_s(D) [\psi_b + \psi_g(t)]$$

gde su  $\varphi_g(t)$  i  $\psi_g(t)$  kolona matice  $\varphi$  - i  $\psi$  - izvora a  $\tilde{Z}_s(D)$  je matrica operatorskih impedansi pojedinih elemenata. Ako se grane numerišu tako da najpre budu uključeni kalemovi (koji mogu biti i spregnuti) zatim otpornici (koji takođe mogu biti spregnuti, čime su u stvari automatski obuhvaćene transimpedanse kontrolisanih izvora tipa SKNI) i najzad kondenzatori, tada se  $\tilde{Z}_s(D)$  može predstaviti u obliku<sup>7</sup>

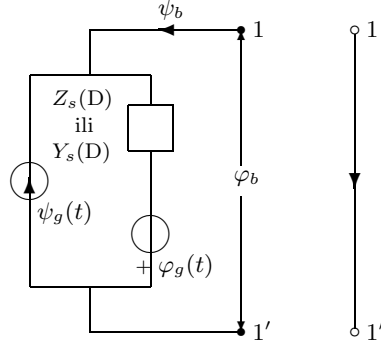
$$(93) \quad \tilde{Z}_s(D) = \tilde{L}_s D + \tilde{R}_s + \frac{1}{D} \tilde{S}_s S_s$$

gde su  $\tilde{L}_s$ ,  $\tilde{R}_s$  i  $\tilde{S}_s$  respektivno, matrice induktivnosti, otpornosti i elastanse.

Kombinujući (87), (92) i (88) dobijamo

$$(94) \quad \tilde{B} \tilde{Z}_s(D) \tilde{B}^t \psi = \tilde{B} [\varphi_g(t) - \tilde{Z}_s(D) \psi_g(t)]$$

što predstavlja sistem jednačina nezavisnih strujnih promenljivih. Pošto se iz (94), uz date početne uslove, odredi  $\psi(t)$ , iz (88) se određuje  $\psi_b(t)$  a iz (92) i  $\varphi_b(t)$ , čime je analiza mreže završena.



Sl. 2.39. Standardni element i njegov terminalni graf

<sup>7</sup>  $\dagger$  označava direktnu sumu matrica, na primer  $\tilde{A} \dagger \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & \tilde{B} \end{bmatrix}$

### 2.7.2. SISTEMI JEDNAČINA NEZAVISNIH NAPONSKIH PROMENLJIVIH

Ako su karakteristike standardnih elemenata date u  $\psi$  - obliku, tj. ako je za jedan element sa jednim pristupom

$$(95) \quad \psi_b + \psi_g(t) = Y_s(D) \left[ \varphi_b + \varphi_g(t) \right],$$

gde je  $Y_s(D)$  operatorska admitansa elementa, a za jedan element sa  $p$  pristupa

$$(96) \quad \psi_{b,k} + \psi_{g,k}(t) = \sum_{v=1}^p Y_{skv}(D) \left[ \varphi_{b,v} + \varphi_{g,v}(t) \right] \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

gde je  $Y_{skk}(D)$  sopstvena admitansa  $Y_{skl}(D)$  međusobne admitanse, tada se one mogu pisati u matričnoj formi

$$(97) \quad \psi_b + \psi_g(t) = Y_s(D) \left[ \varphi_b + \varphi_g(t) \right],$$

gde je  $Y_s(D)$  matrica operatorskih admitansi elemenata.

Sa numeracijom elemenata kao u 2.7.1, matrica  $Y_s(D)$  je oblika

$$(98) \quad Y_s(D) = \frac{1}{D} \Gamma_s + G_s + C_s D,$$

gde su  $\Gamma_s$ ,  $G_s$  i  $C_s$ , respektivno, matrice recipročnih (sopstvenih i međusobnih) induktivnosti, (sopstvenih i međusobnih) provodnosti i kapacitivnosti. U  $G_s$  su uključene transadmitanse kontrolisanih izvora tipa NKSI.

Ako su svi elementi  $\varphi$ -tipa i ako matrice  $L_s$ ,  $R_s$  i  $S_s$  su nesusingularne, tada važi

$$(99) \quad \Gamma_s = L_s^{-1}; \quad G_s = R_s^{-1}; \quad C_s = S_s^{-1}.$$

Iz (86), (97) i (89) neposredno dobijamo sistem jednačina nezavisnih naponskih promenljivih

$$(100) \quad A Y_s(D) A^t \varphi = A \left[ \psi_g(t) - Y_s(D) \varphi_g(t) \right].$$

Pošto se iz (100) uz date početne uslove nađe  $\varphi(t)$ , pomoću (89) se odredi  $\varphi_b(t)$  a iz (97) i  $\psi_b(t)$ .

### 2.7.3. MEŠOVITI (HIBRIDNI) SISTEM NEZAVISNIH PROMENLJIVIH

Ukoliko se karakteristike elemenata ne mogu izraziti u  $\varphi$ - ili u  $\psi$ -obliku, tada se ni sistemi (94) i (100) ne mogu direktno upotrebiti, pa je potrebno primeniti mešovitu (hibridnu) formulaciju sistema jednačina mreže. Ovaj slučaj nastaje, na primer, u mehaničkim mrežama koje sadrže idealne poluge ili idealne zupčaste prenosnike, ili u električnim mrežama koje sadrže idealne transformatore i kontrolisane izvore tipa SKSI i NKNi ili tipa SKNI i NKSI (pored mogućnih SKSI i NKNi).

Pretpostavimo, naime, da su elementi mreže dve osnovne vrste:  $\varphi$ -elementi i  $\psi$ -elementi, pri čemu su karakteristike elemenata

$$(101) \quad \begin{bmatrix} \varphi_{b1} + \varphi_{g1}(t) \\ \dots\dots\dots \\ \psi_{b2} + \psi_{g2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{11}(D) & \vdots & \tilde{H}_{12}(D) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \tilde{H}_{21}(D) & \vdots & \tilde{H}_{22}(D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{b1} + \psi_{g1}(t) \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_{b2} + \varphi_{g2}(t) \end{bmatrix},$$

gde su  $\tilde{H}_{11}(D)$  i  $\tilde{H}_{22}(D)$  oblika  $\tilde{Z}_s(D)$  i  $\tilde{Y}_s(D)$ , respektivno, a  $\tilde{H}_{12}(D)$  i  $\tilde{H}_{21}(D)$  su bezdimenzione matrice (najčešće numeričke matrice) koje karakterišu spregu između elemenata tipa 1 i 2. Kada ne bi postojala sprega između elemenata tipa 1 i 2, ove matrice bi bile nula - matrice.

Karakteristike (101) nazivaju se *hibridne karakteristike*. Svi ranije nabrojani elementi, koji nemaju ni impedansno ni admitansno karakterisanje, očigledno imaju bar jednu hibridnu karakteristiku.

Ako sada matrice  $\tilde{A}$  i  $\tilde{B}$  podelimo na blokove saobrazno podeli elemenata, tj.

ako pišemo  $\tilde{A} = [\tilde{A}_1 : \tilde{A}_2]$  i  $\tilde{B} = [\tilde{B}_1 : \tilde{B}_2]$ , gde blokovi sa indeksom 1 odgovaraju elementima tipa 1 a oni sa indeksom 2 - elementima tipa 2, i ako to isto uradimo sa kolona - matricama promenljivih elemenata  $\psi_b$  i  $\varphi_b$ , tada (86), (87), (88) i (89) postaju

$$(102) \quad \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 : \tilde{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{b1} \\ \psi_{b2} \end{bmatrix} = 0, \quad (103) \quad \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 : \tilde{B}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{b1} \\ \varphi_{b2} \end{bmatrix} = 0,$$

$$(104) \quad \begin{bmatrix} \psi_{b1} \\ \psi_{b2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1^t \\ \tilde{B}_2^t \end{bmatrix} \varphi, \quad (105) \quad \begin{bmatrix} \varphi_{b1} \\ \varphi_{b2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1^t \\ \tilde{A}_2^t \end{bmatrix} \psi.$$

Eliminisanjem  $\psi_{b1}$  i  $\psi_{b2}$  iz (101), (102) i (103) i zamenom u dobijenim jednačinama  $\varphi_{b1}$  i  $\varphi_{b2}$  iz (104) i (105) dolazimo do mešovitog sistema nezavisnih jednačina

$$(106) \quad \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \tilde{H}_{11}(D) \tilde{B}_1^t & \vdots & \tilde{B}_1 \tilde{H}_{12} \tilde{A}_2^t + \tilde{B}_2 \tilde{A}_2^t \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \tilde{A}_2 \tilde{H}_{21} \tilde{B}_1^t + \tilde{A}_1 \tilde{B}_1^t & \vdots & \tilde{A}_2 \tilde{H}_{22}(D) \tilde{A}_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \dots \\ \varphi \end{bmatrix}$$



Karakteristike elemenata možemo pisati u obliku

$$(108) \quad v_1 = \frac{1}{K_1} D f_1, \quad v_2 = \frac{1}{K_2} D f_2, \quad v_3 = \frac{1}{K_3} D f_3, \quad f_4 = B_4 v_4, \quad M_5 g + f_5 = M_5 D v_5.$$

Upoređenjem sa (101) nalazimo da je

$$(109) \quad \begin{aligned} \tilde{H}_{11}(D) &= \begin{matrix} & \overset{1}{\frac{1}{K_1} D} & \overset{2}{0} & \overset{3}{0} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{K_1} D & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K_2} D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{K_3} D \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix} & \quad \begin{matrix} H_{12} = 0 \\ \\ H_{21}(D) = 0 \end{matrix} & \quad \tilde{H}_{22}(D) = \begin{matrix} \overset{4}{B_4} & \overset{5}{0} \\ \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} B_4 & 0 \\ 0 & M_5 D \end{bmatrix} \end{matrix} \\ \varphi_{b_1} &= \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad \varphi_{g_1}(t) = 0, \quad \psi_{b_1} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \quad \psi_{g_1}(t) = 0, \\ \psi_{b_2} &= \begin{bmatrix} f_4 \\ f_5 \end{bmatrix}, \quad \psi_{g_2}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ M_5 g \end{bmatrix}, \quad \varphi_{b_2} = \begin{bmatrix} v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}, \quad \varphi_{g_2}(t) = 0. \end{aligned}$$

Ako kao sistem nezavisnih kontura i snopova usvojimo ćelije označene sa 1 i 2 i snopove oko čvorova 3, 4 i 5 (Sl. 2.40c), tada ćemo matrice  $\tilde{A}$  i  $\tilde{B}$  pisati ovako

$$(110) \quad \begin{aligned} \tilde{B} &= [\tilde{B}_1 : \tilde{B}_2] = \begin{matrix} & \overset{1}{1} & \overset{2}{-1} & \overset{3}{0} & \overset{4}{0} & \overset{5}{0} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}, \\ \tilde{A} &= [\tilde{A}_1 : \tilde{A}_2] = \begin{matrix} & \overset{1}{-1} & \overset{2}{-1} & \overset{3}{0} & \overset{4}{0} & \overset{5}{0} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}. \end{aligned}$$

Prema (106) i (107) imamo

$$(111) \quad \begin{aligned} Z_m(D) &= \tilde{B}_1 \tilde{H}_{11}(D) \tilde{B}_1^t = \begin{matrix} & \overset{1}{\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right) D} & \overset{2}{-\frac{1}{K_2} D} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right) D & -\frac{1}{K_2} D \\ -\frac{1}{K_2} D & \left(\frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3}\right) D \end{bmatrix} \end{matrix}, \\ Y_n(D) &= \tilde{A}_2 \tilde{H}_{22}(D) \tilde{A}_2^t = \begin{matrix} & \overset{3}{0} & \overset{4}{0} & \overset{5}{0} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & -B_4 \\ 0 & -B_4 & M_5 D + B_4 \end{bmatrix} \end{matrix} \end{aligned}$$

$$(112) \quad \begin{aligned} K_{mn} = -\underset{\sim}{B}_1 \underset{\sim}{A}_1^t &= \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}, \\ K_{nm} = -\underset{\sim}{A}_2 \underset{\sim}{B}_2^t = \underset{\sim}{A}_1 \underset{\sim}{B}_1^t = -K_{mn}^t &= \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}. \end{aligned}$$

PRIMEDBA. Ovo sledi iz činjenice što je  $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}^t = 0$ , odnosno

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{A}_1 & \underset{\sim}{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{B}_1^t \\ \underset{\sim}{B}_2^t \end{bmatrix} = \underset{\sim}{A}_1 \underset{\sim}{B}_1^t + \underset{\sim}{A}_2 \underset{\sim}{B}_2^t = 0, \quad \text{tj.} \quad \underset{\sim}{A}_2 \underset{\sim}{B}_2^t = -\underset{\sim}{A}_1 \underset{\sim}{B}_1^t.$$

Na isti način se dobija i

$$(113) \quad \underset{\sim}{Q}_m(t) = \underset{\sim}{Q} \quad \underset{\sim}{Q}_n(t) = +\underset{\sim}{A}_2 \underset{\sim}{\psi}_{g2}(t) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_5 g \end{bmatrix} = \begin{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_5 g \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Prema tome, mešoviti nezavisni sistem je

$$(114) \quad \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right) D & -\frac{1}{K_2} D & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{K_2} D & \left(\frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3}\right) D & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & B_4 & -B_4 \\ 0 & 0 & 0 & -B_4 & M_5 D + B_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_5 g \end{bmatrix},$$

ili posle izostavljanja treće jednačine,

$$(115) \quad \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right) D & -\frac{1}{K_2} D & \vdots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{K_2} D & \left(\frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3}\right) D & \vdots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & \vdots & B_4 & -B_4 \\ 0 & 0 & \vdots & -B_4 & M_5 D + B_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \dots \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ M_5 g \end{bmatrix}.$$

PRIMEDBA. U slučaju  $\underset{\sim}{H}_{12}(D) = 0$  i  $\underset{\sim}{H}_{21}(D) = 0$ , mešoviti sistem se može tumačiti na sledeći način. Označimo sa  $G_{\varphi}$  graf mreže u kojoj su sažimani (kratko - spojeni) svi  $\psi$ -elementi. Tada  $\underset{\sim}{Z}_m(D)$  predstavlja matricu operatorskih impedansi nezavisnih kontura mreže sa grafom  $G_{\varphi}$ . Isto tako, označimo sa  $G_{\psi}$  graf mreže u kojoj su uklonjeni svi  $\varphi$ -elementi. Tada je  $\underset{\sim}{Y}_n(D)$  - matrica operatorskih admitansi nezavisnih snopova mreže sa grafom  $G_{\psi}$ .



Matrica  $\tilde{M}_{mn}$  izražava doprinos nezavisnih napona  $\varphi$  u nezavisnim konturama mreže. To su naponi zamišljenih naponskih izvora koji zatvaraju nezavisne konture sa  $\psi$ -elementima. Elementi  $K_{ij}$  matrice  $\tilde{K}_{mn}$  definisani su ovako:

$$K_{ij} = \begin{cases} +1(-1) & \text{ako je napon } \varphi_j \text{ sadržan u konturi } i, \text{ i ako se njegova} \\ & \text{orijentacija slaže (ne slaže) sa orijentacijom konture;} \\ 0 & \text{ako napon } \varphi_j \text{ nije sadržan u konturi } i. \end{cases}$$

Matrica  $\tilde{K}_{mn} = -\tilde{K}_{mn}^t$  izražava doprinos nezavisnih struja  $\psi$  u nezavisnim snopovima mreže. To su struje zamišljenih strujnih izvora koji su sadržani u nezavisnim snopovima definisanim  $\varphi$ -elementima.

Elementi  $K_{ji}$  matrice  $\tilde{K}_{nm}$  su očigledno:

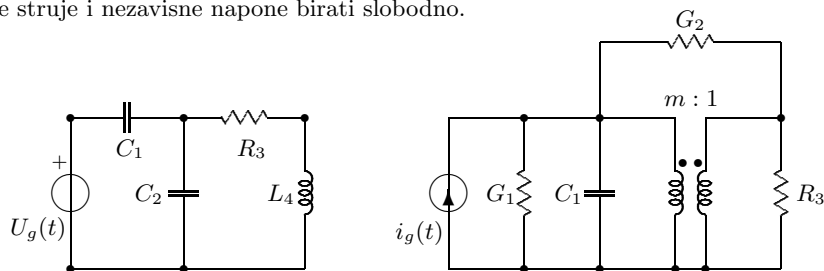
$$\begin{cases} +1(-1), & \text{ako je konturna struja } \psi_i \text{ "sadržana" u snopu } j, \text{ i ako se njena} \\ & \text{orijentacija slaže (ne slaže) sa orijentacijom snopa;} \\ 0, & \text{ako konturna struja } \psi_i \text{ nije "sadržana" u konturi } j. \end{cases}$$

Kolona matrica  $\tilde{Q}_m(t)$  predstavlja sumu napona naponskih izvora (datih i dobijenih transformacijom strujnih izvora u naponske) u nezavisnim konturama mreže, a  $\tilde{Q}_n(t)$  predstavlja sumu struja strujnih izvora (datih i dobijenih transformacijom naponskih izvora u strujne) u nezavisnim snopovima mreže.

#### VEŽBANJA

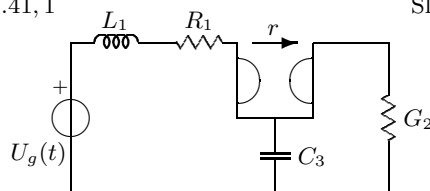
**2.16.** Proveriti pravilo za pisanje mešovitog sistema nezavisnih jednačina za sistem (115).

**2.17.** Izvesti mešoviti sistem nezavisnih jednačina za električne mreže na slici. Nezavisne struje i nezavisne napone birati slobodno.



Sl. 2.41, 1

Sl. 2.40, 2



Sl. 2.40, 3

**2.18.** Izvesti mešoviti sistem za mrežu na Sl. 2.40b uzimajući za nezavisne konture i snopove osnovne konture i snopove za stablo  $K_3B_4M_5$ .

**2.19.** Isto pitanje za mrežu na Sl. 2.14b.

#### 2.7.4. SISTEM JEDNAČINA STANJA

Pored već rečene potrebe za mešovitim sistemom kada mreža sadrži elemente koji ne poseduju impedansno ili admitansno karakterisanje, iz mešovitog sistema se uvek može izvesti sistem jednačina stanja.

Pretpostavimo, naime, da smo elemente podelili tako da su svi kalemovi tretirani kao  $\varphi$ -elementi i svi kondenzatori kao  $\psi$ -elementi. Tada je jasno da će matrice  $\tilde{H}_{11}(D)$  i  $\tilde{H}_{22}(D)$  biti oblika

$$(116) \quad \tilde{H}_{11}(D) = \tilde{L}_s D + \tilde{R}_s, \quad \tilde{H}_{22}(D) = \tilde{C}_s D + \tilde{G}_s,$$

a matrice  $\tilde{H}_{12}(D)$  i  $\tilde{H}_{21}(D)$  će biti *numeričke* matrice. Posledica toga je da mešoviti sistem (106) sada predstavlja sistem diferencijalnih jednačina prvog reda i algebarskih jednačina. Ovaj se sistem uvek može napisati u obliku

$$(117) \quad \tilde{M}\dot{\tilde{W}} + \tilde{N}\tilde{W} = \tilde{P}q(t),$$

gde su  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{N}$  i  $\tilde{P}$  numeričke matrice,  $\tilde{W} = \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi \end{bmatrix}$ , a  $q(t)$  je kolona matrica koja zavisi od nezavisnih izvora.

Na primer, za mešoviti sistem (115) imamo

$$(118) \quad \tilde{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} & -\frac{1}{K_2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{K_2} & \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_5 \end{bmatrix}, \quad \tilde{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & B_4 & -B_4 \\ 0 & 0 & -B_4 & B_4 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{W} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \end{bmatrix}, \quad q(t) = M_5 g.$$

Ako bi matrica  $\tilde{M}$  bila nesingularna, tada bi se jednačine stanja neposredno dobile množenjem leve i desne strane (117) sa  $\tilde{M}^{-1}$  i prebacivanjem člana  $\tilde{M}^{-1}\tilde{N}\tilde{W}$  na desnu stranu. Vektor stanja bio bi tada  $\tilde{W}$ .

U opštem slučaju, međutim, matrica  $\tilde{M}$  nije nesingularna. Na primer, matrica  $\tilde{M}$  u (118) je singularna jer sadrži jedan nula-red (i jednu nula-kolonu).

Bez obzira na to da li je matrica  $\tilde{M}$  (a isto tako i matrica  $\tilde{N}$ ) singularna ili ne, možemo sigurno da tvrdimo da je matrica  $\tilde{R}(\check{s}) = \tilde{M}\check{s} + \tilde{N}$  nesingularna za  $\check{s}$  proizvoljno. Ovo se može odmah videti ako se uzme LAPLACEova transformacija jednačine (117) za nula-početne uslove.

$$(119) \quad (\tilde{M}\check{s} + \tilde{N})\check{W}(\check{s}) = \tilde{P}\check{Q}(\check{s}).$$

Da bi rešenje  $W(t) = \mathcal{L}^{-1}\check{W}(\check{s}) = \mathcal{L}^{-1}(\tilde{M}\check{s} + \tilde{N})^{-1}\tilde{P}\check{Q}(\check{s})$  postojalo, potrebno je i dovoljno da  $\check{R}(\check{s}) = \tilde{M}\check{s} + \tilde{N}$  bude nesingularna za  $\check{s}$  proizvoljno. Pri tome, naravno, matrice  $\tilde{M}$  i  $\tilde{N}$  mogu biti singularne.

Recimo da je  $(b \times b)$  - matrica  $\tilde{M}$  singularna i da je njen rang  $b - d_1$ , gde je  $d_1$  njena nultost ( $1 \leq d_1 \leq b$ ). Tada, ako se na redovima matrice  $\tilde{M}$  vrše elementarne transformacije: promena dva reda i dodavanjem nekog reda koji je pomnožen nekom konstantom drugom redu, matrica  $\tilde{M}$  se svodi na ekvivalentni oblik koji ima  $d_1$  nula redova. Ovim svođenjem se dobija jedan sistem diferencijalno-algebarskih jednačina koji je *ekvivalentan* sistemu (117) i koji sadrži tačno  $d_1$  algebarskih jednačina. Ovak sistem je oblika

$$(120) \quad \begin{bmatrix} \tilde{M}_1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\tilde{W}} + \begin{bmatrix} \tilde{N}_1 \\ \cdots \\ \tilde{N}_2 \end{bmatrix} \tilde{W} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_1 \\ \cdots \\ \tilde{P}_2 \end{bmatrix} \tilde{q}(t).$$

Poznato je iz algebre da je vršenje elementarnih operacija na redovima matrice ekvivalentno njenim množenjem s leve strane nekom nesingularnom matricom  $\tilde{T}$  rezultujućih transformacija  $T = \tilde{T}_k \tilde{T}_{k-1} \cdots \tilde{T}_2 \tilde{T}_1$ . Pošto je matrica  $\check{R}(\check{s}) = \tilde{M}\check{s} + \tilde{N}$  nesingularna, nesingularna je i matrica  $\tilde{T}\check{R}(\check{s}) = \tilde{T}\tilde{M}\check{s} + \tilde{T}\tilde{N} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_1 \\ \cdots \\ \tilde{Q} \end{bmatrix} \check{s} + \begin{bmatrix} \tilde{N}_1 \\ \cdots \\ \tilde{N}_2 \end{bmatrix}$ . To znači da u matrici  $\tilde{N}_2$  mora postojati jedan minor maksimalnog ranga  $d_1$ , što ima za posledicu da od  $b$  promenljivih u  $\tilde{W}$  tačno  $d_1$  njih,  $\tilde{W}_{d_1}$ , se mogu eksplicitno izraziti u funkciji ostalih promenljivih  $\tilde{W}_{b-d_1}$  i vektora  $\tilde{q}(t)$ , tj. može se pisati

$$(121) \quad \tilde{W}_{d_1} = \tilde{U}^{(1)} \tilde{W}_{b-d_1} + \tilde{U}_0^m \tilde{q}_h(t).$$

Promenljive  $\tilde{W}_{d_1}$  se mogu eliminisati iz preostalih  $b-d_1$  diferencijalnih jednačina u (120) korišćenjem relacije (121) i njenog izvoda

$$(122) \quad \dot{\tilde{W}}_{d_1} = \tilde{U}^{(1)} \dot{\tilde{W}}_{b-d_1} + \tilde{U}^{(1)} \dot{\tilde{q}}(t),$$

nakon čega se dobija novi sistem

$$(123) \quad \tilde{M}^{(1)} \dot{\tilde{W}}_{b-d_1} + \tilde{N}^{(1)} \tilde{W}_{b-d_1} = \tilde{P}_0^{(1)} \tilde{q}(t) + \tilde{P}_1^{(1)} \dot{\tilde{q}}(t).$$

Ukoliko je matrica  $\tilde{M}^{(1)}$  nesingularna, jednačine stanja se dobijaju množenjem (123) njenom inverznom matricom. Vektor stanja je pri tome  $\tilde{W}_{b-d_1}$  a izlazni vektor  $\tilde{W}_{d_1}$  izražen je u (121) pomoću  $\tilde{W}_{b-d_1}$  i ulaznog vektora  $\tilde{q}(t)$ .

Ako je matrica  $\tilde{M}^{(1)}$  singularna, tada se (123) može dalje redukovati na opisani način svaki put izdvajajući algebarske jednačine od čisto diferencijalnih, koje su, posle  $k$ -tog stupnja redukcije, oblika

$$(124) \quad \tilde{M}^{(k)} \dot{\tilde{W}}_{b-d_k} + \tilde{N}^{(k)} \tilde{W}_{b-d_k} = \tilde{P}_0^{(k)} \tilde{q}(t) + \tilde{P}_1^{(k)} \dot{\tilde{q}}(t) + \cdots + \tilde{P}_k^{(k)} \tilde{q}^{(k)}(t).$$

Pošto je po pretpostavci polazna matrica sistema  $\tilde{R}(\tilde{s}) = \tilde{M}\tilde{s} + \tilde{N}$  nesingularna, ovaj proces redukcije će se završiti ili sa matricom  $\tilde{M}^{(k)}$  nesingularnom ili sa  $\tilde{M}^{(k)} = 0$ . U prvom slučaju, sistem jednačina stanja se dobija kao

$$(125a) \quad \dot{\tilde{W}}_{b-d_1} = -(\tilde{M}^{(k)})^{-1} \tilde{N}^{(k)} \tilde{W}_{b-d_1} + (\tilde{M}^{(k)})^{-1} \left( \tilde{P}_0^{(k)} \tilde{q}(t) + \tilde{P}_1^{(k)} \dot{\tilde{q}}(t) + \cdots + \tilde{P}_k^{(k)} \tilde{q}^{(k-1)}(t) \right),$$

$$(125b) \quad \tilde{W}_{d_k} = \tilde{U}^{(k)} \tilde{W}_{b-d_k} + \tilde{V}_0^{(k)} \tilde{q}(t) + \tilde{V}_1^{(k)} \dot{\tilde{q}}(t) + \cdots + \tilde{V}_k^{(k)} \tilde{q}^{(k-1)}(t),$$

gde (125b) rezultira u procesu eliminacije, a  $d_k = \sum_{\nu=1}^k d\nu$  označava smanjenje dimenzije vektora  $\tilde{W}$  posle  $k$ -tog stupnja redukcije.

U slučaju  $\tilde{M}^{(k)} = 0$ , eliminacija posle  $k$ -tog stupnja daje samo sistem algebarskih jednačina.

Sistem (125) je oblika

$$(126a) \quad \dot{\tilde{x}} = \tilde{F}\tilde{x} + \tilde{G}(\mathbf{D})\tilde{q}(t) \quad (126b) \quad \tilde{y} = \tilde{H}\tilde{x} + \tilde{J}(\mathbf{D})\tilde{q}(t),$$

gde su  $\tilde{F}$  i  $\tilde{H}$  konstantne matrice a

$$\tilde{G}(\mathbf{D}) = \tilde{G}_0 + \tilde{G}_1 \mathbf{D} + \cdots + \tilde{G}_k \mathbf{D}^k, \quad \tilde{J}(\mathbf{D}) = \tilde{J}_0 + \tilde{J}_1 \mathbf{D} + \cdots + \tilde{J}_k \mathbf{D}^k$$

matrični polinomi operatora  $\mathbf{D} = d/dt$ .

Opisani postupak svodenja sistema diferencijalno-algebarskih jednačina na sistem jednačina stanja je prvi dao A. DERVIŠOĞLU<sup>1-3</sup> i naziva se *Dervižoĝlov*

1. A. DERVIŠOĞLU: *State models of active RLC networks*. Coordinated Science Lab., Report R-237, Urbana, 1964.

2. O. TOSUN, A. DERVIŠOĞLU: *Formulation of state equations of active RLC networks*. IProc. Second Intern. Sympos. Network Theory, Herceg-Novi, 1972, pp. 27 - 36.

3. A. DERVIŠOĞLU, C. A. DESOER: *Degenerate networks and minimal differential equations*. IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. CAS-22, pp. 769-775, Oct. 1975.

*algoritam.* Pošto je iterativan, on je vrlo pogodan za postavljanje na digitalnoj računskoj mašini.<sup>4</sup>

PRIMER 2.11. Izvesti sistem jednačina stanja za mrežu na Sl.2.40 pomoću DERVI-ŠOČLUVog algoritma za date posebne vrednosti parametara:  $K_1 = K_2 = K_3 = 1 \text{ N/m}$ ,  $B_4 = 1 \text{ Ns/m}$ ,  $M_5 = 1 \text{ kg}$ .

**Rešenje.** Matrična jednačina (115) može se pisati u obliku (117), gde su matrice  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{N}$ ,  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{W}$  i  $\tilde{q}(t)$  date u (118). Ako u ovom sistemu zamenimo mesta 4. i 5. jednačine, čemu odgovara zamena 4. i 5. reda matrica  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{N}$  i  $\tilde{P}$ , i unesemo posebne vrednosti dobijamo sistem (120), odnosno

$$(127) \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \\ \dot{\varphi}_4 \\ \dot{\varphi}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} g.$$

Iz poslednje jednačine dobijamo  $\varphi_5$

$$(128) \quad \varphi_5 = -\psi_2 + \psi_4$$

čije unošenje u preostale tri jednačine daje

$$(129) \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \\ \dot{\varphi}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} g.$$

Jednačine (129) i (128) respektivno, odgovaraju jednačinama (123) i (121). Kako je u našem slučaju matrica  $\tilde{M}^{(1)}$  nesingularna, jer je

$$(130) \quad \det \tilde{M}^{(1)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \neq 0,$$

to je redukcija sistema (127) ovim jednim postupkom završena. Sistem jednačina stanja je

$$(131) \quad \begin{bmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \\ \dot{\varphi}_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} g,$$

$$\varphi_5 = [0 \quad -1 \quad 1] \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \varphi_4 \end{bmatrix},$$

---

4. C. POTTLE: *Comprehensive active network analysis by digital computer: A state - space approach.* Proc. 3 rd Allerton Conference on Circuit and System Theory, Univ. of Illinois, Urbana, 1965, pp. 659-667.

ili

$$(132) \quad \begin{bmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \\ \dot{\varphi}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.33 \\ 0 & 0 & -0.67 \\ 0 & 1 & -0.67 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.81 \end{bmatrix}, \quad \varphi_5 = [0 \quad -1 \quad 1] \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \varphi_4 \end{bmatrix}.$$

PRIMEDBA 1. Za mreže koje sadrže samo elemente sa jednim pristupom kao i u nekim slučajevima mreža koje sadrže i elemente sa više pristupa (na primer kalemovi nesa-vršeno spregnuti) jednačine stanja se mogu izvesti i na drugi način. Pri tome se pretpostavlja da su promenljive stanja naponi kondenzatora i struje kalemova. Ostale promenljive se tada izražavaju pomoću ovih. Pri upotrebi algebarske metode redukcije, na primer pomoću DERVIŠOĞLUOVOG algoritma, mi obično ne možemo da a priori identifikujemo promenljive stanja. S druge strane algebarska metoda je vrlo opšta. Važno je takođe istaći da polazne jednačine ne moraju biti date u obliku (106) kao što smo mi ovde radili; svaki sistem jednačina mreže u kome su karakteristike elemenata izražene samo u diferencijalnom i algebarskom obliku će odgovarati.

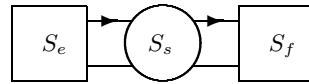
PRIMEDBA 2. Primećujemo da usled redukcije javljaju se viši izvodi ulaznog vektora u jednačinama stanja. Ovo je nepovoljno sa računске tačke gledišta kao i sa gledišta simuliranja na analognom računaru. Viši izvodi se javljaju usled topoloških i algebarskih degeneracija mreže. Može se pokazati da se viši izvodi od prvog neće javiti ako je mreža pasivna.<sup>5</sup>

## 2.8. ENERGETSKI PRETVARAČI

U dosadašnjim izlaganjima posmatrali smo fizičke sisteme u kojima su sve promenljive (koordinate) bile jedne iste fizičke prirode. Ovde ćemo razmotriti modelovanje sistema koji sadrže *komponente (naprave) dve različite fizičke prirode*. Posebno važnu klasu ovih sistema sačinjavaju sistemi koji pored električnih komponentata sadrže još mehaničke komponente (elektromehanički sistemi), termičke komponente (elektrotermički sistemi), akustične komponente (elektroakustični sistemi), optičke komponente (fotoelektrični sistemi) i dr.

Na Sl. 2.41. predstavljen je jedan takav fizički sistem.

On se sastoji od jednog električnog pod-sistema  $S_e$ , jednog podsistema druge fizičke prirode  $S_f$  i jednog podsistema za spregu između njih  $S_s$ . Prevashodna funkcija ovog podsistema jeste da uspostavi jedan mehanizam kojim se dovedena električna energija pretvara u energiju druge fizičke prirode i obratno.



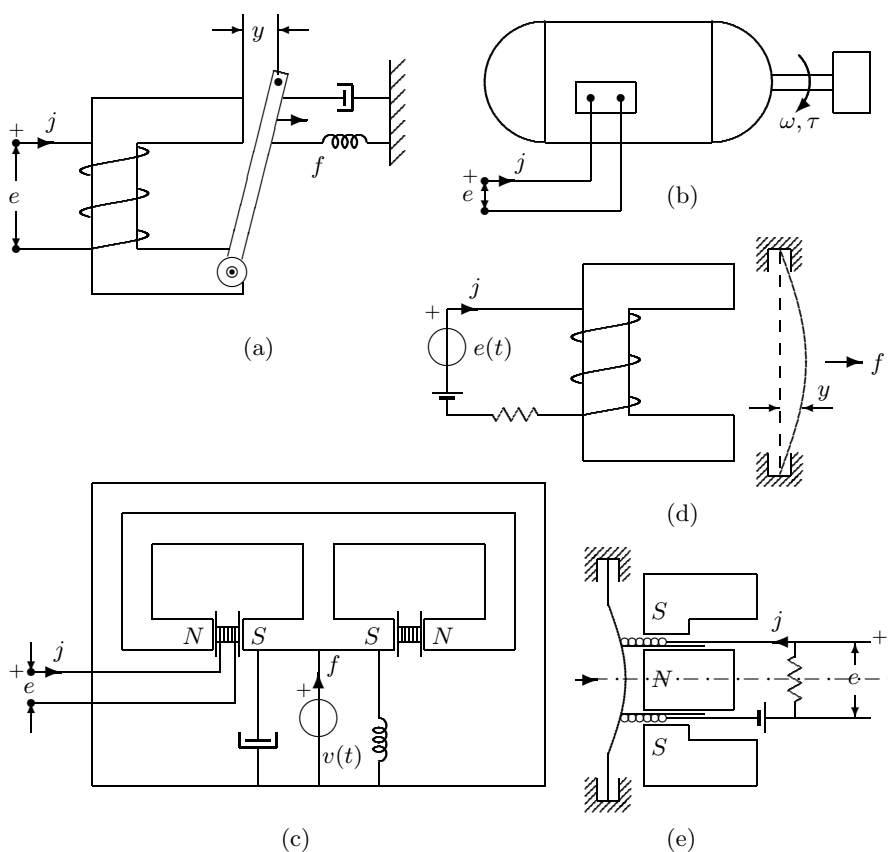
Sl. 2.41. Fizički sistem  $S$  koji se sastoji od električnog podsistema  $S_e$ , podsistema druge fizičke prirode  $S_f$  i energetskog pretvarača  $S_s$

5. M. M. MILIĆ: *Source derivatives in the state model of general passive networks*. Proc. IEEE, vol. 60, No. 5, pp. 641-642, May 1972.

Kao posrednik pri ovom pretvaranju javlja se jedno polje, najčešće električno ili magnetno, koje se naziva *polje sprege*.

Promena akumulirane energije u ovom polju sprege u stvari i omogućava proces pretvaranja jedne vrste energije u drugu. Iz ovog razloga podsistem  $S_s$  se često naziva *energetski pretvarač* (E.P.).

U praksi se sreće veliki broj fizičkih procesa koji se mogu tretirati kao procesi pretvaranja jednog vida energije u drugi. Takvi procesi se dešavaju, na primer, u releima, obrtnim električnim mašinama, akceleratorima, elektrodinamičkim mernim instrumentima, mikrofonima, telefonskim slušalicama, zvučnicima, raznim elektromehaničkim i piezoelektričnim filtrima, termoelektričnim spregovima, fotoelektričnim ćelijama i dr. Statičke električne mašine, kao što su transformatori, takođe spadaju u ovu vrstu sistema u kojima je podsistem  $S_f$  električni kao i  $S_e$ . Neki elektromehanički sistemi prikazani su na Sl. 2.42.



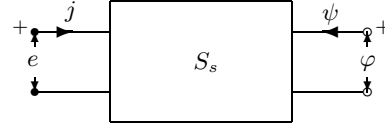
Sl. 2.42. Razni elektromehanički sistemi  
a) rele b) električna obrtna mašina c) akcelerator  
d) telefonska slušalica e) elektrodinamički mikrofon

### 2.8.1. OSNOVNE JEDNAČINE ENERGETSKIH PRETVARAČA

Energetski pretvarač ćemo predstaviti kao jednu mrežu sa dva pristupa. Električni pristup je karakterisan naponom  $e$  i strujom  $j$ , odnosno odgovarajućim fluksom  $\lambda$  i opterećenjem  $q$

$$(133a) \quad \lambda = D^{-1}e, \quad (133b) \quad q = D^{-1}j,$$

a drugi pristup naponskom (*intenzivnom*) promenljivom  $\varphi$  i strujnom (*ekstenzivnom*) promenljivom  $\psi$ , odnosno odgovarajućim integralima ovih promenljivih



Sl. 2.43. Energetski pretvarač

$$(134a) \quad \tau = D^{-1}\psi, \quad (134b) \quad \alpha = D^{-1}\varphi.$$

Kao ranije, pozitivni smerovi promenljivih na pristupima su *usaglašeni* (standardna konvencija). Sa ovom konvencijom je energija koju E.P. prima preko električnog pristupa,  $eq$  odnosno  $\lambda_j$ . Isto tako je i energija koju E.P. prima preko drugog pristupa  $\varphi\tau$  odnosno  $\alpha\psi$ .

Prilikom postavljanja osnovnih jednačina E.P. pretpostavićemo da je polje sprege *kvazi-statično*, *konzervativno*, i da odgovara samo *jednoj vrsti energije*. Takođe ćemo pretpostaviti da unutar polja *ne postoje izvori* i da se akumulirana energija polja može jednoznačno odrediti samo u funkciji promenljivih na pristupima: Ove pretpostavke su zadovoljene u većini radnih uslova E.P. i one odgovaraju situaciji pri kojoj se E.P. može smatrati diskretnim sistemom koji je karakterisan samo jednom vrstom akumulirane energije.

Neka je zavisnost  $e$  i  $\psi$  od  $q$  i  $\alpha$  izražena kao

$$(135) \quad e = E(q, \alpha), \quad \psi = \Psi(q, \alpha),$$

pri čemu je

$$(136) \quad \Psi(q_0, \alpha) = 0.$$

Jednačine (135) nazivaju se  $(e, \psi)$  - *karakteristika* E.P.

Ako se usled promena  $q$  i  $\alpha$ ,  $dq$  i  $d\alpha$ , akumulirana *energija* E.P.,  $W_s$ , promeni za  $dW_s$ , tada je prema zakonu o održanju energije

$$(137) \quad dW_s = e dq + \psi d\alpha.$$

Da bi energija  $W_s$  bila jednoznačna funkcija promenljivih pristupa,  $q$ ,  $\alpha$ , tj. da bi integral

$$(138) \quad W_s = \int_{(q_0, \alpha_0)}^{(q, \alpha)} dW_s(q, \alpha)$$

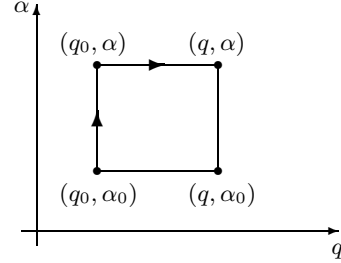
bio nezavisan od puta integracije, a zavisio samo od granica  $\{q_0, \alpha_0\}$  i  $\{q = \hat{q}(t), \alpha = \hat{\alpha}(t)\}$ , potrebno je i dovoljno da  $dW_s$  bude potpuni diferencijal, odnosno da je



$$(139) \quad e = \frac{\partial W_s}{\partial q}, \quad \psi = \frac{\partial W_s}{\partial \alpha},$$

odnosno

$$(140) \quad \frac{\partial e}{\partial \alpha} = \frac{\partial \psi}{\partial q}.$$



Sl. 2.44. Putanje integracije

Ako su uslovi (140) zadovoljeni, integral (138) se može izračunati kao zbir integrala duž putanje na Sl. 2.44.

$$(141) \quad W_s = \int_{(q_0, \alpha_0)}^{(q, \alpha)} \Psi(q_0, \alpha) d\alpha + \int_{(q_0, \alpha)}^{(q, \alpha)} E(q, \alpha) dq + W_{s0},$$

gde je  $W_{s0}$  vrednost energije  $W_s$  pri  $q = q_0$  i  $\alpha = \alpha_0$ .

Kako je na osnovu (136) prvi integral jednak nuli, sledi da je

$$(142) \quad W_s(q, \alpha) = W_{s0} + \int_{q_0}^{\hat{q}(t)} E(q, \alpha) dq.$$

Na isti način, ako bi bila data  $(q, \psi)$ -karakteristika *E.P.* oblika:

$$(143) \quad q = Q(e, \alpha), \quad \psi = \Psi(e, \alpha),$$

pri čemu je

$$(144) \quad \Psi(e_0, \alpha) = 0$$

uslov da tzv. *ko-energija*  $W'_s = qe - W_s$  bude potpuni diferencijal, tj. da bude određena samo početnim i krajnjim vrednostima promenljivih pristupa,  $\{e_0, \alpha_0\}$  i  $\{e = \hat{e}(t), \alpha = \hat{\alpha}(t)\}$  dao bi

$$(145) \quad q = \frac{\partial W'_s}{\partial e}, \quad -\psi = \frac{\partial W'_s}{\partial \alpha},$$

odnosno

$$(146) \quad \frac{\partial q}{\partial \alpha} = -\frac{\partial \psi}{\partial e}.$$

Izraz za ko-energiju u funkciji promenljivih pristupa je sada

$$(147) \quad W'_s(e, \alpha) = W'_{s0} + \int_{e_0}^{\hat{e}(t)} Q(e, \alpha) de.$$

## Vežbanje

**2.17.** Izvesti sve relacije od (137) do (147) za slučaj da su poznate *dualne* karakteristike:

$$(j, \psi) - \text{karakteristika:} \quad \begin{aligned} j &= J(\lambda, \alpha) \\ \psi &= \Psi(\lambda, \alpha), \quad \Psi(\lambda_0, \alpha) = 0, \end{aligned}$$

$$\text{odnosno } (\lambda, \psi) - \text{karakteristika:} \quad \begin{aligned} \lambda &= \Lambda(j, \alpha) \\ \psi &= \Psi(j, \alpha), \quad \Psi(j_0, \alpha) = 0. \end{aligned}$$

PRIMER 2.12. Posmatrajmo jedan pločasti kondenzator, koji se može deformisati, ispunjen čvrstim dielektrikom, Sl. 2.45. Pretpostavimo da je električno polje koje stvara napon  $e$  između obloga homogeno, i da se jedna ploča može pomeriti translatorno u odnosu na drugu. Tada je jačina polja

$$(148) \quad K = \frac{e}{x_0 + x}.$$

Neka je dielektrik *izotropan*, homogen i neka je zavisnost jačine polja od opterećenja nelinearna

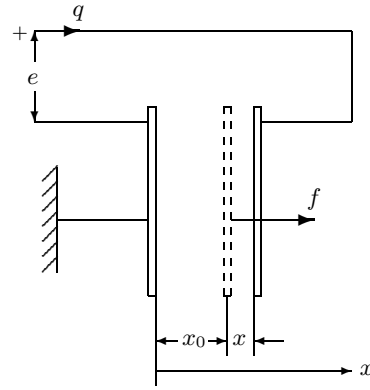
$$(149) \quad K = K_s \operatorname{arth} \frac{q}{q_0},$$

gde su  $K_s$  i  $q_0$  konstante.

Unošenjem (148) u (149) dobijamo  $e$  - karakteristiku kondenzatora

$$(150) \quad e = E(q, x) = (x_0 + x) K_s \operatorname{arth} \frac{q}{q_0}.$$

Na osnovu (142) elektrostatička energija je



Sl. 2.45. Deformabilni kondenzator

$$(151) \quad \begin{aligned} W_s(q, x) &= W_{s0} + (x_0 + x) K_s \int_0^q \operatorname{arth} \frac{y}{q_0} dy = W_{s0} + (x_0 + x) K_s q_0 \int_0^{q/q_0} \operatorname{arth} z dz \\ &= W_{s0} + (x_0 + x) K_s q_0 \left( z \operatorname{arth} z + \frac{1}{2} \ln(1 - z^2) \right) \Big|_0^{q/q_0}. \end{aligned}$$

Prema tome,

$$(152) \quad W_s(q, x) = W_{s0} + (x_0 + x) K_s \left( q \operatorname{arth} \frac{q}{q_0} + \frac{q_0}{2} \ln \left( 1 - \frac{q^2}{q_0^2} \right) \right).$$

Mehanička sila koja prouzrokuje priraštaj ove energije, prema (139), je s obzirom na usvojenu orijentaciju ose  $x$  i sile  $f$

$$(153) \quad f = \frac{\partial W_s(q, x)}{\partial x} = K_s \left( q \operatorname{arth} \frac{q}{q_0} + \frac{q}{2} \ln \left( 1 + \frac{q^2}{q_0^2} \right) \right),$$

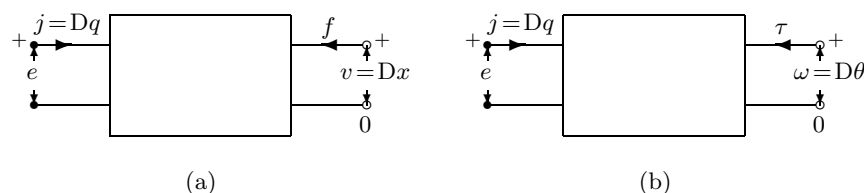
dok je elektrostatička sila koja je uravnotežava  $f_e = -f$ .

## 2.8.2. ELEKTROMEHAČKI ENERGETSKI PRETVARAČI

Kod elektromehaničkih E.P. promenljive mehaničkog pristupa su sila  $f$  i brzina  $v$  (ili linijsko pomeranje  $x = D^{-1}v$ ) za translatorno kretanje, Sl. 2.46a, odnosno obrtni moment  $\tau$  i ugaona brzina  $\omega$  (ili ugaono pomeranje  $\theta = D^{-1}\omega$ ) za rotaciono kretanje, Sl. 2.46b.

Jedan od krajeva mehaničkog pristupa označen je sa 0 i on predstavlja mehaničku (inercijalnu) referencu. Ovaj kraj, naravno, mora biti zajednički sa referentnim čvorom mehaničke mreže koja je vezana za mehanički pristup.

Prema prirodi polja sprege elektromehanički E.P. se dele na *električne* E.P. čije je polje sprege kvazi - elektrostatičko i *magnetne* E.P. u kojima je polje sprege kvazi - magnetostatičko.



Sl. 2.46. Elektromehanički E.P.

a) za translatorno kretanje b) za rotaciono kretanje

## a) Električni E.P.

Prema (143),  $(q, \psi)$  - karakteristika električnog E.P. za translatorno kretanje je

$$(154) \quad \hat{q} = Q(\hat{e}, \hat{x}), \quad \hat{f} = F(\hat{e}, \hat{x}), \quad *)$$

gde smo sve veličine označili sa cirkomfleksom da bismo istakli da su to *ukupne* trenutne vrednosti, koje ćemo kasnije razlikovati od njihovih *promena* u odnosu na neke fiksirane vrednosti.

Ovu karakteristiku nazvaćemo  $(q, f)$  - *karakteristikom*. Lako je videti da je ona *nelinearna* bez obzira na zavisnost opterećenja od napona.

PRIMER 2.13. Ako je kondenzator na Sl. 2.45. linearan (i stacionaran), tj. ako je

$$(155) \quad \hat{e} = \frac{\hat{q}}{C(\hat{x})} = \frac{\hat{q}}{\varepsilon S} (x_0 + x),$$

gde je  $\varepsilon$  - dielektrična konstanta a  $S$  - površina jedne obloge, tada je elektrostatička energija

$$(156a) \quad W_s(\hat{q}, \hat{x}) = W_{s0} + \int_0^{\hat{q}} \frac{y}{C(\hat{x})} dy = W_{s0} + \frac{\hat{q}^2}{2C(\hat{x})} = W_{s0} + \frac{\hat{q}^2}{2\varepsilon S} (x_0 + x),$$

\*) U slučaju rotacionog kretanja na mesto ovih jednačina imamo  $\hat{q} = Q(\hat{e}, \hat{\theta})$ ,  $\hat{\tau} = T(\hat{e}, \hat{\theta})$

a elektrostatička ko-energija

$$(156b) \quad W'_s(\hat{e}, \hat{x}) = W'_{s0} + \int_0^{\hat{e}} C(\hat{x}) \hat{e} d\hat{e} = W'_{s0} + \frac{C(\hat{x}) \hat{e}^2}{2} = W'_{s0} + \frac{\hat{e}^2 \varepsilon S}{2(x_0 + x)}.$$

Mehanička sila pri konstantnom opterećenju je

$$(157a) \quad \hat{f} = \frac{\partial W_s(\hat{q}, \hat{x})}{\partial \hat{x}} = -\frac{\hat{q}^2}{2C^2(\hat{x})} \frac{dC(\hat{x})}{d\hat{x}} = \frac{\hat{q}^2}{2\varepsilon S},$$

a mehanička sila pri konstantnom naponu

$$(157b) \quad \hat{f} = -\frac{\partial W'_s(\hat{e}, \hat{x})}{\partial \hat{x}} = -\frac{\hat{e}^2}{2} \frac{dC(\hat{x})}{d\hat{x}} = +\frac{\hat{e}^2 \varepsilon S}{2(x_0 + x)^2}.$$

Na osnovu (155) ova dva izraza za silu su jednaka. Oba izraza su *kvadratne, dakle nelinearne, funkcije* električnih promenljivih.

*Linearizovanu* ( $q, f$ ) - *karakteristiku* dobićemo ako posmatramo male promene veličine  $\hat{e}$  i  $\hat{x}$  oko radne tačke  $(e_0, x_0)$ . Razvijanjem (154) u TAYLORov red i zadržavanjem samo prvih parcijalnih izvoda dobijamo

$$(158) \quad q = \left. \frac{\partial Q}{\partial \hat{e}} \right|_{\substack{\hat{x}=x_0 \\ \hat{e}=e_0}} e + \left. \frac{\partial Q}{\partial \hat{x}} \right|_{\substack{\hat{e}=e_0 \\ \hat{x}=x_0}} x, \quad f = \left. \frac{\partial F}{\partial \hat{e}} \right|_{\substack{\hat{x}=x_0 \\ \hat{e}=e_0}} e + \left. \frac{\partial F}{\partial \hat{x}} \right|_{\substack{\hat{e}=e_0 \\ \hat{x}=x_0}} x,$$

pri čemu smo sa  $q, f, e, x$  označili *promene* veličina  $\hat{q}, \hat{f}, \hat{e}, \hat{x}$  u odnosu na  $q_0, f_0, e_0, x_0$  [ $q_0 = Q(e_0, x_0), f_0 = F(e_0, x_0)$ ], tj.  $q = \hat{q} - q_0, f = \hat{f} - f_0, e = \hat{e} - e_0, x = \hat{x} - x_0$ .

Parcijalni izvodi u (158) se mogu lako interpretirati kao:

$$(159) \quad C_s = \left. \frac{\partial Q}{\partial \hat{e}} \right|_{\substack{\hat{x}=x_0 \\ \hat{e}=e_0}} = \left. \frac{\partial Q}{\partial e} \right|_{\substack{x=0 \\ e=0}} = \text{kapacitivnost električnog pristupa pri ukočenom mehaničkom pristupu}$$

$$(160) \quad K_s = \left. \frac{\partial F}{\partial \hat{x}} \right|_{\substack{\hat{e}=e_0 \\ \hat{x}=x_0}} = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{\substack{e=0 \\ x=0}} = \text{krutost mehaničkog pristupa pri otvorenom električnom pristupu *)}$$

$$(161) \quad T_s = -\left. \frac{\partial Q}{\partial \hat{x}} \right|_{\substack{\hat{e}=e_0 \\ \hat{x}=x_0}} = -\left. \frac{\partial F}{\partial \hat{e}} \right|_{\substack{\hat{x}=x_0 \\ \hat{e}=e_0}} = \text{prenosni koeficijent, ili koeficijent elektrostatičke sprege}$$

$$= -\left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{\substack{e=0 \\ x=0}} = -\left. \frac{\partial F}{\partial e} \right|_{\substack{x=0 \\ e=0}}$$

gde jednakost parcijalnih izvoda u (161) sledi iz (146).

\*)Podrazumevamo da je električni pristup otvoren budući da je promena količine elektriciteta jednaka nuli.

Definicije parametara  $C_s$ ,  $K_s$  i  $T_s$  omogućavaju i njihovo eksperimentalno određivanje.

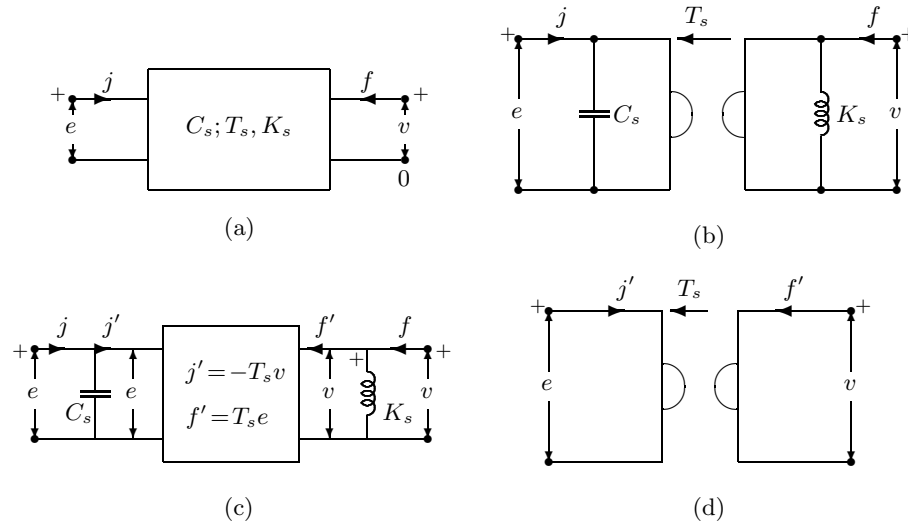
Sada se linearizovana  $(q, f)$  - karakteristika električnog E.P. može pisati

$$(162) \quad q = C_s e - T_s x, \quad f = T_s e + K_s x,$$

a  $(i, f)$  - karakteristika

$$(163) \quad j = C_s D e - T_s v, \quad f = T_s e + K_s D^{-1} v, \quad ^1)$$

koja pokazuje da se električni E.P. može predstaviti kao na Sl. 2.47a,b, gde  $T_s$  označava "provodnost" elektromehaničkog žiratora. Često se električni kondenzator pridodaje električnoj mreži a element - opruga mehaničkoj mreži. Tada se električni E.P. predstavlja kao na Sl. 2.47c,d.



Sl. 2.47. Elektromehanička mreža električnog E.P.

PRIMER 2.14. Parametre elektromehaničke mreže električnog E.P. iz primera 2.13. dobijamo iz (155) i (157b)

$$(164) \quad \hat{q} = \frac{\varepsilon S \hat{e}}{x_0 + x} = \frac{\varepsilon S (e_0 + e)}{x_0 + x} = Q(\hat{e}, \hat{x}), \quad \hat{f} = \frac{\varepsilon S (e_0 + e)^2}{2(x_0 + x)^2} = F(\hat{e}, \hat{x}).$$

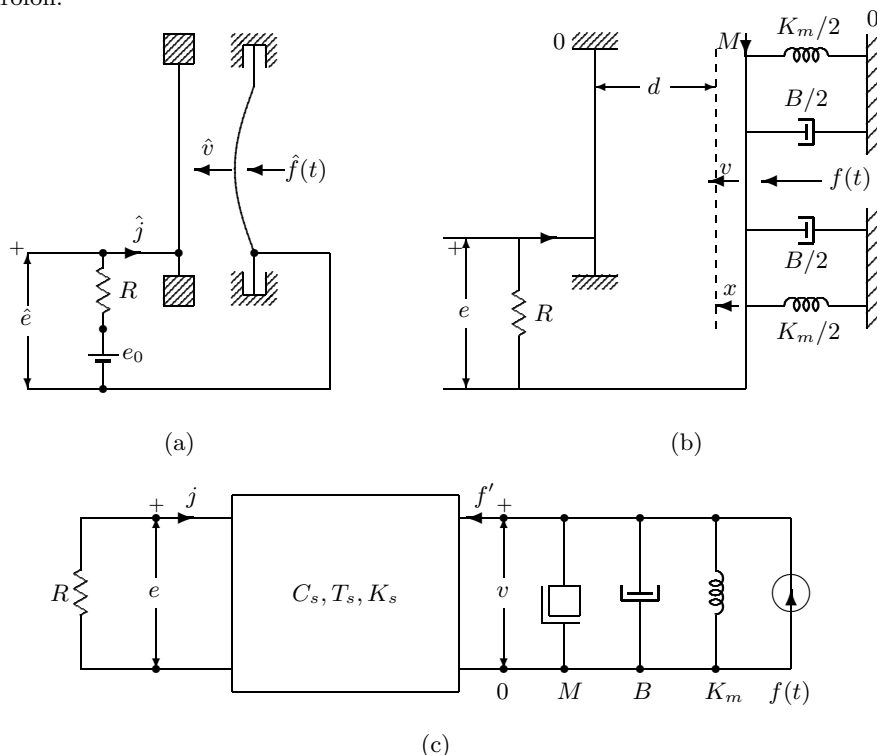
Primenom (159), (160) i (161) dobijamo

$$(165) \quad C_s = \frac{\varepsilon S}{x_0}, \quad K_s = -\frac{\varepsilon S e_0^2}{x_0^3} = -\frac{C_s e_0^2}{x_0^2}, \quad T_s = \frac{\varepsilon S e_0}{x_0^2}.$$

<sup>1)</sup> Na sličan način se definiše i karakteristika  $(i, \tau)$  za elektromehanički E.P. za rotaciono kretanje.

Vidimo da je električna kapacitivnost uvek pozitivna a mehanička krutost uvek negativna. Ako su parametri ostalih elemenata elektromehaničke mreže pozitivni, da bi mreža bila sastavljena samo od pasivnih elemenata, potrebno je da paralelno sa  $K_s$  bude element - opruga čija je krutost  $K_m < |K_s|$ . Rezultujuća elektromehanička mreža je tada *pasivna*.

PRIMER 2.15. (Kondenzatorski mikrofون) Na slici 48 prikazan je kondenzatorski mikrofون.



Sl. 2.48. Kondenzatorski mikrofون a) fizičko predstavljanje  
b) model za određivanje promena veličina c) elektromehanička mreža

Pokretna metalna obloga mase  $M$  treperi pod dejstvom sile  $\hat{f}(t)$  akustičkog pritiska. Ovo treperenje menja kapacitivnost kondenzatora što ima za posledicu protok količine elektriciteta u električnom kolu, odnosno stvaranje napona  $\hat{e}$  na otporniku  $R$ .

Na Sl. 2.48c predstavljena je elektromehanička mreža za određivanje promena napona otpornika i brzine odnosno pomeranja obloge. Parametri  $C_s$ ,  $T_s$  i  $K_s$  dati su u (165), gde namesto  $x_0$  treba staviti  $d$  = rastojanje između ploča pod dejstvom konstantnog napona polarizacije  $e_0$ , kada na pokretnu oblogu ne deluje nikakva sila, odnosno kada je  $v = 0$ .

Parametri  $K_m$  i  $B$  predstavljaju krutost obloga i koeficijent prigušenja usled trenja u ležištu.

Jednačine mreže dobijamo kombinujući jednačine elektromehaničkog E.P. sa ter-

minalnim jednačinama na električnom i mehaničkom pristupu

$$(166) \quad j = -\frac{e}{R} = C_s D e - T_s v, \quad f'(t) = f(t) - (MD + B + K_m D^{-1}) v = T_s e + K_s D^{-1} v,$$

odnosno

$$(167) \quad \left(C_s D + \frac{1}{R}\right) e - T_s v = 0, \quad T_s e + (MD + B + K D^{-1}) v = f(t),$$

gde je

$$(168) \quad K = K_m + K_s.$$

Uzimajući LAPLACEovu transformaciju pri nula - početnim uslovima, dobijamo funkciju mreže  $\frac{\check{X}(\check{s})}{\check{F}(\check{s})}$

$$(169) \quad \check{T}(\check{s}) = \frac{\check{X}(\check{s})}{\check{F}(\check{s})} = \frac{\check{V}(\check{s})}{\check{s}\check{F}(\check{s})} = \frac{C_s \check{s} + \frac{1}{R}}{\left(C_s \check{s} + \frac{1}{R}\right)(M\check{s}^2 + B\check{s} + K) + T_s^2 \check{s}},$$

ili

$$(170) \quad \check{T}(\check{s}) = \frac{1}{M} \frac{\check{s} + \frac{1}{RC}}{\check{s}^3 + \left(\frac{B}{M} + \frac{1}{CR}\right)\check{s}^2 + \left(\frac{K}{M} + \frac{B}{RMC} + \frac{T_s^2}{CM}\right)\check{s} + \frac{K}{RMC}}.$$

PRIMER 2.16. (Piezoelektrični pretvarač) Poznato je da se izvesne materije (kvarc, segnetova so, piezoelektrična keramika) pri deformaciji u pravcu kristalografskih osa naelektrišu. Ta pojava naziva se *direktni piezoelektrični efekat*. Obratno, ako se ove materije podvrgnu dejstvu električnog polja, one se deformišu, i ova pojava se naziva *inverzni piezoelektrični efekat* ili *elektrostrikcija*.

Mada su piezoelektrični materijali u osnovi raspodeljeni sistemi, pod izvesnim pretpostavkama oni se mogu tretirati kao diskretni sistemi.

Jedan (diskretni) piezoelektrični pretvarač se na taj način može shvatiti kao jedan električni E.P. Pokazuje se<sup>1)</sup> da za jednu ploču debljine  $d$  i površine  $S$ , Sl. 2.49, izrazi za parametre  $C_s$ ,  $K_s$ , i  $T_s$  su

$$(171) \quad C_s = \frac{\varepsilon S}{d}, \quad K_s = \sigma \frac{d}{S}, \quad T_s = \frac{d}{eS},$$

gde je  $\sigma$  konstanta elastičnosti materijala, a  $e$  je jedna piezoelektrična konstanta.

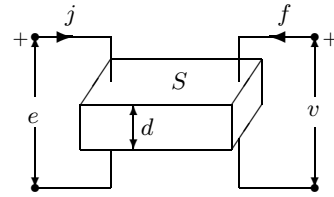
Tipične vrednosti reda veličine za  $\varepsilon$ ,  $\sigma$  i  $e$  za kvarc su:  $5\varepsilon_0$ ,  $13 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$ ,  $0.2 \text{ As}/\text{m}^2$ , a za

piezokeramiku:  $700\varepsilon_0$ ,  $16 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$  i  $20 \text{ As}/\text{m}^2$  ( $\varepsilon_0$  = dielektrična konstanta slobodnog prostora).

Jednu od najinteresantnijih primena piezoelektrični pretvarači nalaze u električnim filtrima<sup>2)</sup>.

1. W. P. MASON: *Piezoelectric crystals and their application to ultrasonics*. Van Nostrand Co., New York, 1956.

2. G. S. MOSCHYTZ: *Inductorless filters: A survey. I. Electromechanical filters*, IEEE Spectrum, vol. 7, No. 8 August 1970.



Sl. 2.49. Piezoelektrični pretvarač

### b) Magnetni enetgetski pretvarač

Ako je poznata  $(\lambda, f)$  - karakteristika magnetnog E.P. za translatorno kretanje

$$(172) \quad \hat{\lambda} = \Lambda(\hat{j}, \hat{x}), \quad \hat{f} = F(\hat{j}, \hat{x}),$$

gde, kao i ranije, sve veličine sa cirkomfleksom označavaju ukupne trenutne vrednosti, tada ako se (172) razvija u TAYLORov red u okolini radne tačke  $(j_0, x_0)$  i zanemaruju viši izvodi od prvog, dobijamo linearizovanu  $(\lambda, \psi)$  - karakteristiku za male promene u obliku

$$(173) \quad \lambda = L_m j + T_m x, \quad f = T_m j + K_m x.$$

Parametri  $L_m, K_m$  i  $T_m$  su definisani kao

$$(174) \quad L_m = \left. \frac{\partial \Lambda}{\partial \hat{j}} \right|_{\substack{\hat{x} = x_0 \\ \hat{j} = j_0}} = \left. \frac{\partial \Lambda}{\partial j} \right|_{\substack{x = 0 \\ j = 0}} = \text{induktivnost električnog pristupa pri ukočenom mehaničkom pristupu}$$

$$(175) \quad K_m = \left. \frac{\partial F}{\partial \hat{x}} \right|_{\substack{\hat{j} = j_0 \\ \hat{x} = x_0}} = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{\substack{j = 0 \\ x = 0}} = \text{krutost mehaničkog pristupa pri kratko - spojenom električnom pristupu}^2)$$

$$(176) \quad T_m = \left. \frac{\partial \Lambda}{\partial \hat{x}} \right|_{\substack{\hat{j} = j_0 \\ \hat{x} = x_0}} = - \left. \frac{\partial F}{\partial \hat{j}} \right|_{\substack{\hat{x} = x_0 \\ \hat{j} = j_0}} = \text{prenosni koeficijent, ili koeficijent elektromagnetske sprege}$$

$$= \left. \frac{\partial \Lambda}{\partial x} \right|_{\substack{j = 0 \\ x = 0}} = - \left. \frac{\partial F}{\partial j} \right|_{\substack{x = 0 \\ j = 0}}$$

Ako u (173) zamenimo  $e = D\lambda$ ,  $v = Dx$ , dobijamo  $(e, f)$  - karakteristiku

$$(177) \quad e = L_m D j + T_m v, \quad f = -T_m j + K_m D^{-1} v.$$

Elektromehanička mreža koja je predstavljena ovom karakteristikom data je na Sl. 2.50, gde  $T_m$  označava prenosni odnos *elektromehaničkog idealnog transformatora*. I ovde se  $L_m$  može pripisati električnoj mreži, a  $K_m$  mehaničkoj mreži, tako da se magnetni E.P. predstavlja kao elektromehanički idealni transformator prenosnog odnosa  $T_m$ , Sl. 2.50c.

Na isti način se uvode i parametri  $L_m, K_m$  i  $T_m$  magnetnog E.P. za rotaciono kretanje, kada je poznata  $(\lambda, \tau)$  - karakteristika

$$(178) \quad \hat{\lambda} = \Lambda(\hat{j}, \hat{\theta}), \quad \hat{\tau} = T(\hat{j}, \hat{\theta}).$$

<sup>2)</sup> Podrazumevamo da je električni pristup kratko - spojen budući da je promena fluksa jednaka nuli.

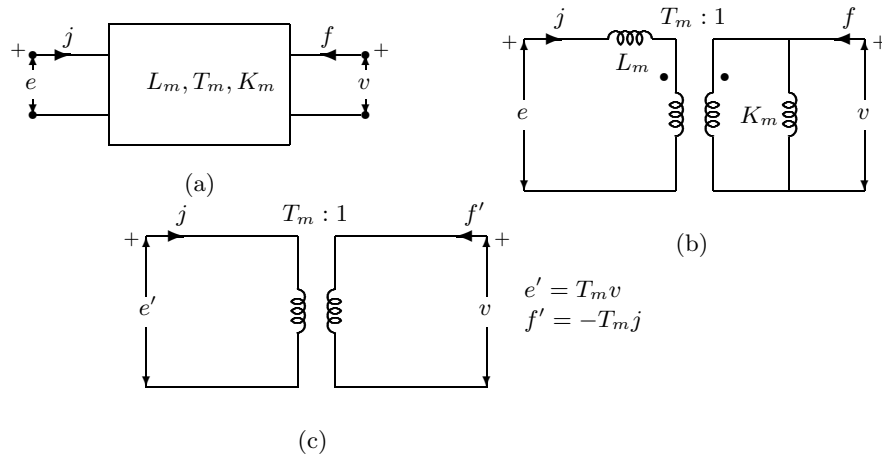


Linearizovana  $(j, \tau)$  - karakteristika je ovde oblika

$$(179) \quad e = L_m D j + T_m \omega, \quad \tau = -T_m j + K_m D^{-1} \omega,$$

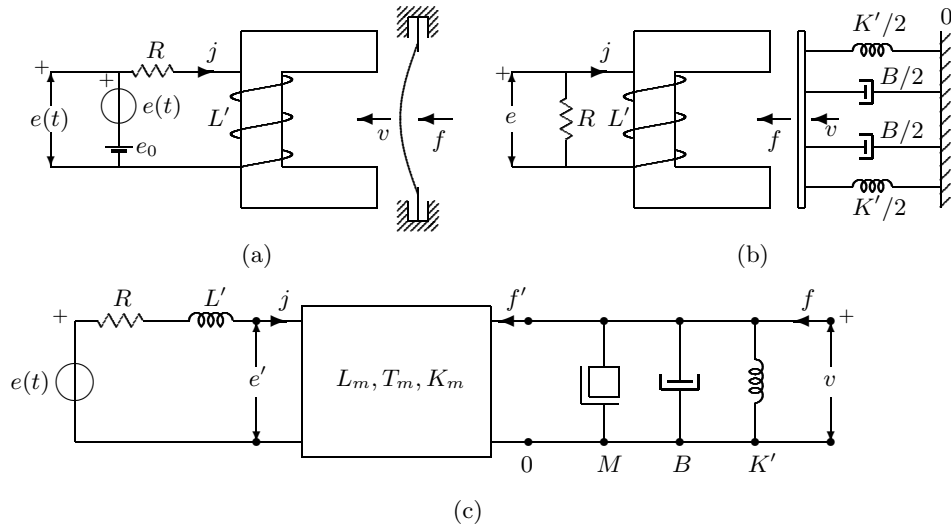
gde je

$$(180) \quad L_m = \left. \frac{\partial \Lambda}{\partial j} \right|_{\substack{\theta=0 \\ j=0}}, \quad K_m = \left. \frac{\partial F}{\partial \theta} \right|_{\substack{j=0 \\ \theta=0}}, \quad T_m = \left. \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} \right|_{\substack{j=0 \\ \theta=0}} = - \left. \frac{\partial F}{\partial j} \right|_{\substack{\theta=0 \\ j=0}}.$$



Sl. 2.50. Elektromehanička mreža magnetnog energetskeg pretvarača

PRIMER 2.16. (Telefonska slušalica)



Sl. 2.51. Telefonska slušalica a) fizičko predstavljanje  
b) model za određivanje promena  $\hat{f}$ ,  $\hat{v}$ ,  $\hat{j}$  c) elektromehanička mreža

Telefonska slušalica Sl. 2.51a se sastoji od jednog elektromagneta (solenoida) i membrane. Treperenje membrane je izazvano strujom u kolu solenoida. Pobudni napon  $\hat{e}(t)$  predstavlja zbir napona zvučnog signala  $e(t)$  i konstantnog prednapona  $e_0$ . Pod pretpostavkom da je  $e(t)$  poznato i da su pomeranje membrane  $x$  i promena struje  $\hat{j}$  u odnosu na ustaljenu vrednost  $j_0 = e_0/R$  male veličine, možemo upotrebiti linearizovani model. Elektromehanička mreža za ovaj model data je na Sl. 2.51c. Parametri  $L_m$ ,  $T_m$  i  $K_m$  magnetnog E.P. mogu se odrediti eksperimentalno prema njihovim definicionim izrazima.

Jednačine mreže dobijamo ako leve strane u (177) izrazimo pomoću terminalnih jednačina električnog i mehaničkog završetka

$$(181) \quad \begin{aligned} e'(t) &= e(t) - (L'D + R)j = L_m D j + T_m v, \\ f'(t) &= f - (MD + B + K'D^{-1})v = -T_m j + K_m D^{-1}v, \end{aligned}$$

ili

$$(182) \quad e(t) = (LD + R)j + T_m v, \quad f = -T_m j + (MD + B + KD^{-1})v,$$

gde je

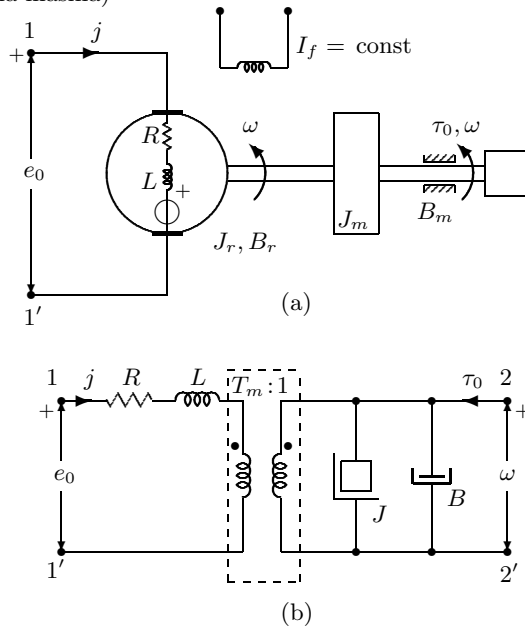
$$(183) \quad L = L' + L_m, \quad K = K' + K_m.$$

Isti model ima i elektromagnetno rele, Sl. 2.42a, kao i elektrodinamički mikrofoni (mikrofon sa kretnim kalemom), Sl. 2.42e.

PRIMER 2.17. (Jednosmerna obrtna mašina)

Na Sl. 2.52. prikazana je jedna jednosmerna obrtna mašina čije magnetno polje pobude održava konstantna struja  $I_f$  u odvojenom namotaju statora. Namotaj rotora inuktivnosti  $L$  i otpornosti  $R$  vezan je preko priključaka 11' na napon  $e_0$ . Rotor, momenta inercije  $J_r$  i koeficijenta prigušenja  $B_r$ , vezan je preko osovine na mehaničko opterećenje. Na osovine nalazi se i mehanički motor koji je predstavljen izvorom momenta  $\tau_0$ . Sa  $J_m$ ,  $B_m$  označeni su ekvivalentni parametri osovine i opterećenja. Ako električna mašina radi kao motor, tada je  $\tau_0 = 0$ , a ako radi kao generator,  $e_0$  predstavlja napon prijemnika vezanog između priključaka 11'.

Na taj način, sistem na Sl. 2.52. predstavlja jednu elektromehaničku mrežu sa dva pristupa.



Sl. 2.52. Jednosmerna obrtna mašina  
a) fizičko predstavljanje  
b) elektromehanička mreža

Promenljive električnog pristupa su  $e_0$ ,  $j$  ( $j$  = struja u rotoru), a promenljive mehaničkog pristupa  $\tau_0$ ,  $\omega$  ( $\omega$  = ugaona brzina rotora i osovine).

Indukovana elektromotorna sila u namotaju rotora usled njegovog obrtanja pod uslovom da je struja  $j = 0$  jednaka je

$$(184) \quad e_s = T_m \omega,$$

gde je  $T_m$  koeficijent elektromagnetne sprege. U našem slučaju  $T_m = A \cdot I_f$ , gde je  $A$  jedna konstanta koja zavisi od konstrukcije mašine.

Prema tome, jednačina električnog dela sistema je

$$(185) \quad e_0 - e_s = (LD + R)j.$$

Mehanički obrtni moment usled međusobnog dejstva struje  $j$  i struje  $I_f$  pobude, pri ukočenom rotoru ( $\omega = 0$ ) jednak je

$$(186) \quad \tau_s = -T_m j.$$

Ako sa  $J$  i  $B$  označimo rezultujućii moment inercije i koeficijent prigušenja rotora i mehaničkog opterećenja, tj.

$$(187) \quad J = J_r + J_m, \quad B = B_r + B_m,$$

tada je jednačina ravnoteže momenata

$$(188) \quad \tau_0 - \tau_s = (JD + B)\omega.$$

Iz (184), (185), (186) i (188) dobijamo jednačine elektromehaničke mreže

$$(189) \quad e_0 = (LD + R)j + T_m \omega, \quad \tau_0 = -T_m j + (JD + B)\omega.$$

Ovim jednačinama odgovara mreža na Sl. 2.52b.

### 2.8.3. EKVIVALENTNE MREŽE ENERGETSKIH PRETVARAČA

Opšte jednačine za male promene terminalnih veličina nekog E.P. mogu se pisati u obliku<sup>1</sup>.

$$(190) \quad e = H_{11}(D)j + H_{12}(D)\varphi, \quad \psi = H_{21}(D)j + H_{22}(D)\varphi,$$

gde su  $e, j$  promenljive na električnom pristupu,  $\varphi, \psi$  korespondentne promenljive na pristupu druge fizičke prirode Sl. 2.43, a koeficijenti  $H_{ij}(D)$  su oblika  $a, b \cdot D$  ili  $c \cdot D^{-1}$ , gde su  $a, b, c$  konstantne.

Na primer, kod magnetnog E.P.  $\varphi = v, \psi = f, H_{11}(D) = L_s D, H_{12}(D) = -H_{21}(D) = T_m, H_{22}(D) = K_m D^{-1}$  (videti (177)).

Sistem (190) je samo jedan od ukupno 6 različitih mogućnih načina pisanja relacija između terminalnih promenljivih  $e, j, \varphi, \psi$ . Budući da E.P. predstavlja

<sup>1</sup>Ovo je jedan od mogućih 6 oblika pisanja sistema jednačina. Diskusija koja sleduje, međutim, neće zavistiti od forme u kojoj se pišu sistemi jednačina.

mrežu sa dva pristupa koji su *različite* fizičke prirode, iskursava pitanje njegovog modelovanja mrežom sa dva pristupa koji su *iste* fizičke prirode, na primer električne.

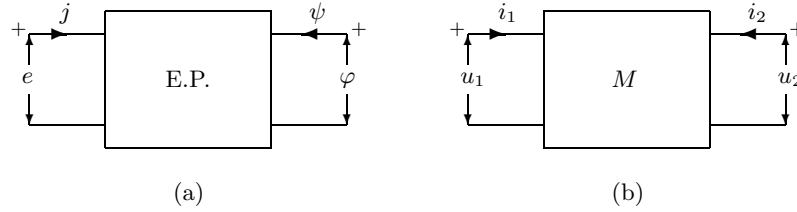
Pri modelovanju E.P. električnom mrežom sa dva pristupa  $M$ , zahtevaćemo da terminalne promenljive na električnoj strani E.P. budu jednake odgovarajućim promenljivima na jednom pristupu (na primer pristupu 1) električne mreže  $M$ , tj.

$$(191) \quad e = u_1, \quad j = i_1,$$

a isto tako zahtevaćemo da trenutna snaga na drugom pristupu obe mreže budu jednake, tj.

$$(192) \quad \varphi\psi = u_2i_2.$$

Ako su uslovi (191) i (192) zadovoljeni, kazaćemo da je električna mreža sa dva para krajeva  $M$  *ekvivalentna* E.P. (Sl. 2.53a).



Sl. 2.53. Ekvivalentna mreža E.P.

Jasno je da iz (191) i (192) sledi da E.P. i njegova ekvivalentna električna mreža  $M$  imaju istu trenutnu snagu  $p$

$$(193) \quad p = ej + \varphi\psi = u_1i_1 + u_2i_2.$$

Proučićemo sada karakter ekvivalentne mreže  $M$  za jedan E.P. čije su opšte jednačine (190).

Očigledno je da se uslovu (192) može zadovoljiti na dva mogućna načina

$$(194) \quad \varphi = mu_2, \quad \psi = \frac{1}{m} i_2,$$

gde je  $m$  dimenzioni faktor za promenljivu  $\varphi$ , ili

$$(195) \quad \varphi = \frac{1}{k} i_2, \quad \psi = ku_2,$$

gde je  $k$  dimenzioni faktor za promenljivu  $\psi$ .

Relacije (194) transformišu promenljive  $\varphi, \psi$  u  $m$ -analogne električne promenljive, a relacije (195) transformišu promenljive  $\varphi, \psi$  u  $k$ -analogne električne

promenljive. Pri ovim transformacijama trenutna snaga E.P. ostaje invarijantna. Ove relacije se nazivaju  $m$ -analogna transformacija odnosno  $k$ -analogna transformacija.

### a) $m$ -analogna transformacija

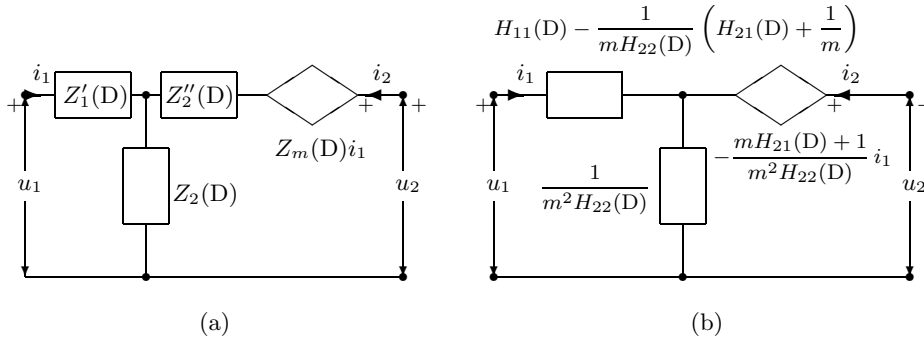
Ako (191) i (194) unesemo u (190) i dobijene jednačine sredimo dobićemo

$$(196) \quad \begin{aligned} u_1 &= \left[ H_{11}(D) - \frac{H_{12}(D)H_{21}(D)}{H_{22}(D)} \right] i_1 + \frac{1}{m} \frac{H_{12}(D)}{H_{22}(D)} i_2. \\ u_2 &= -\frac{H_{21}(D)}{mH_{22}(D)} i_1 + \frac{1}{m^2 H_{22}(D)} i_2. \end{aligned}$$

(Pošto su po pretpostavci operatori  $H_{ij}(D)$  oblika,  $a, b \cdot D$  i  $c \cdot D^{-1}$ , svaki inverzni operator, pa i  $\frac{1}{H_{22}(D)}$  je dobro definisan, tj. ima smisla).

Jednačine (196) predstavljaju  $z$ -sistem u vremenskom domenu mreže  $M$

$$(197) \quad u_1 = z_{11}(D) i_1 + z_{12}(D) i_2, \quad u_2 = z_{21}(D) i_1 + z_{22}(D) i_2.$$



Sl. 2.54. Ekvivalentna  $T$  - mreže E.P.

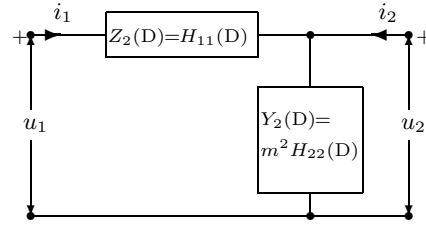
a) Opšti slučaj b) Uprošćena mreža pri  $m = 1/H_{12}$

Korespondentna ekvivalentna  $T$ -mreža, prikazana je na Sl. 2.54a. U opštem slučaju to je aktivna i neregipročna mreža koja sadrži jedan SKNI. Operatorske impedanse ove mreže su

$$(198) \quad \begin{aligned} Z'_1(D) &= z_{11}(D) - z_{12}(D) = H_{11}(D) - \frac{H_{12}(D)}{H_{22}(D)} \left[ H_{21}(D) + \frac{1}{m} \right], \\ Z''_2(D) &= z_{22}(D) - z_{12}(D) = \frac{1}{mH_{22}(D)} \left[ \frac{1}{m} - H_{12}(D) \right], \\ Z_2(D) &= \frac{H_{12}(D)}{mH_{22}(D)}, \\ Z_m(D) &= z_{21}(D) - z_{12}(D) = -\frac{H_{21}(D) + H_{12}(D)}{mH_{22}(D)} \end{aligned}$$

Kako su kod svih E.P. operatori  $H_{12}(D)$  i  $H_{21}(D)$  *konstantni*, tj. nezavisni od  $D$ , može se uvek  $m$  odabrati tako da bude jednak recipročnoj vrednosti jednog od njih čime se ekvivalentna  $T$ -mreža znatno uprošćava. Na Sl. 2.54b prikazana je uprošćena  $T$ -mreža za slučaj kada je  $m = 1/H_{12}$ .

Kako je  $H_{21}(D) = -H_{12}(D) = T_s = 1/m$  (slučaj električnog E.P. (videti (163)), tada je  $z_{12}(D) = z_{21}(D)$  pa je električna mreža *recipročna*. U ekvivalentnoj  $T$ -mreži SKNI je kratko - spojen. Kažemo da je i ekvivalentni E.P. koji je predstavljen ovom mrežom *recipročan*. Magnetni E.P. je primer recipročnog E.P. (pri  $m$ -analognoj transformaciji). Kako je još  $H_{12}(D) = H_{12} = \text{konstantna}$ , električna mreža dobija prosti izgled prikazan na Sl. 2.55.



Sl. 2.55. Ekvivalentna uprošćena mreža recipročnih E.P. pri  $m$ -analognoj transformaciji i  $m = 1/H_{12}$ .

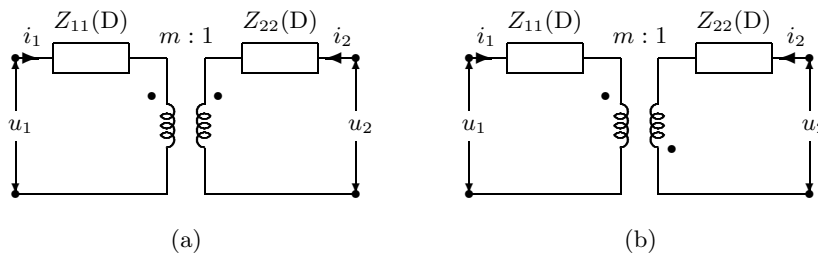
#### b) $k$ -analogna transformacija

Unošenjem (191) i (195) u (190) i preuređivanjem rezultujućih jednačina,  $z$ -sistem postaje

$$(199) \quad u_1 = H_{11}(D) i_1 + \frac{1}{k} H_{12}(D) i_2, \quad u_2 = \frac{1}{k} H_{21}(D) i_1 + \frac{1}{k^2} H_{22}(D) i_2.$$

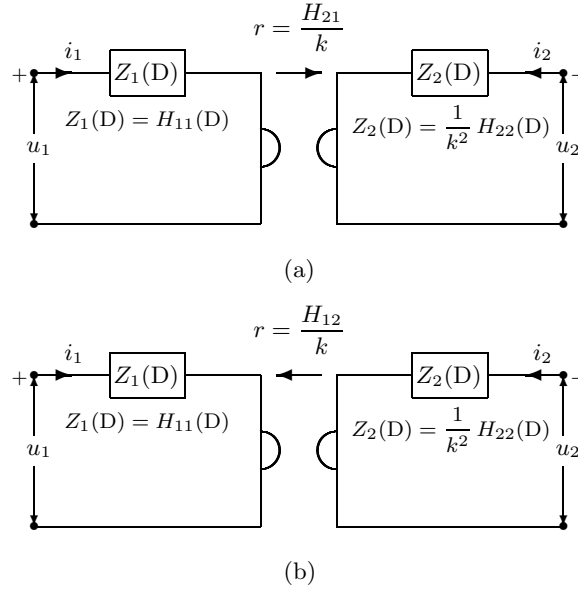
Na isti način možemo dobiti i ostalih 5 sistema ( $y$ -,  $h$ -,  $k$ -,  $a$ -,  $b$ -sistem).

$$(200) \quad Z_{11}(D) = H_{11}(D), \quad Z_{22}(D) = \frac{1}{k^2} H_{22}(D), \quad m = \frac{T_s}{k}.$$



Sl. 2.56. Ekvivalentna  $T$  - mreža recipročnih E.P. pri  $k$ -analognoj transformaciji  
a) Slučaj električnog E.P. b) Slučaj magnetnog E.P.

Kako je  $H_{12}(D) = -H_{21}(D) = -H_{21} = \text{const}$ , tada je  $Z_{12}(D) = -Z_{21}(D) = -\frac{H_{21}}{k} = -r = \text{const}$ , pa se ekvivalentna mreža može predstaviti kao na Sl. 2.56, gde  $r$  predstavlja otpornost idealnog žiratora.

Sl. 2.57. Ekvivalentna mreža E.P. pri  $k$ -analognoj transformaciji(slučaj  $H_{12} = -H_{21} = \text{const}$ )

a) Slučaj električnog E.P. b) Slučaj magnetnog E.P.

#### 2.8.4. EKVIVALENTNE MREŽE ELEKTROMECHANIČKIH SISTEMA

Ako elektromehanički sistem ima jedan električni i jedan mehanički pristup, tada pošto se napišu jednačine u LAPLACEovoj transformaciji i eliminišu sve promenljive osim terminalnih, dobija se sistem jednačina istog oblika kao (190)

$$(201) \quad \begin{aligned} \check{E}(\check{s}) &= \check{H}_{11}(\check{s})\check{J}(\check{s}) + \check{H}_{12}(\check{s})\check{\Phi}(\check{s}), \\ \check{\Psi}(\check{s}) &= \check{H}_{21}(\check{s})\check{J}(\check{s}) + \check{H}_{22}(\check{s})\check{\Phi}(\check{s}), \end{aligned}$$

gde su sada koeficijenti  $\check{H}_{ij}(\check{s})$  u opštem slučaju racionalne funkcije promenljive  $\check{s}$ .

Posle uvođenja  $m$ - ili  $k$ -transformacije, (194) ili (195), one dobijaju oblik (196) ili (200), gde na mestu trenutnih vrednosti i operatora  $H_{ij}(D)$  stoje LAPLACEove transformacije (kompleksni likovi) i koeficijenti  $\check{H}_{ij}(\check{s})$ . Cela diskusija u vezi sa ekvivalentnom električnom mrežom za E.P. se u potpunosti proširuje i na elektromehaničke mreže.

U rezimeu istaknimo važnije električne osobine E.P. i elektromehaničkih mreža.

1) Vid upotrebljene analogne transformacije ( $m$ - ili  $k$ -tipa) elektromehaničke mreže određuje da li će ekvivalentna mreža sa dva pristupa biti recipročna ili

ne. Pri  $m$ -transformaciji ekvivalentna električna mreža sa dva pristupa za neku elektromehaničku mrežu koja sadrži dvokrajne elemente i jedan E.P. uvek je recipročna. Međutim pri  $k$  - transformaciji, i ekvivalentna električna mreža sa dva pristupa za elektromehaničku mrežu koja sadrži dvokrajne elemente i jedan E.P. uvek je nerekipročna.

Prema tome, govoriti o nekom E.P. ili o nekoj elektromehaničkoj mreži kao o recipročnim mrežama ima smisla samo ako se specificira tip analogne transformacije terminalnih promenljivih.

Karakter recipročnosti elektromehaničkih mreža je shematski prikazan

TABLICA 2  
Recipročnost elektromehaničkih mreža

Analogna transformacija	Recipročnost
$m$ –	+
$k$ –	–

2) Bez obzira na recipročnost, u opštem slučaju, sve elektromehaničke mreže su *potencijalno aktivne*. To znači da one nisu pasivne za sve moguće vrednosti parametara elemenata. Kao što je poznato, jedna mreža sa dva pristupa je pasivna ako je energija koja se dovodi preko pristupa u vremenskom intervalu  $(-\infty, t)$

$$(202) \quad W(t) = \int_{-\infty}^t (e(\tau)j(\tau) + \varphi(\tau)\psi(\tau)) d\tau$$

nenegativna za svako  $t$  i za sve vrednosti terminalnih promenljivih koje zadovoljavaju terminalne jednačine (190).

Može se dokazati da je mreža sastavljena samo od pasivnih elemenata (pozitivnih  $RLC$  - elemenata, idealnih transformatora i rezistivnih žiratora) i sama pasivna.

3) Na ekvivalentne mreže elektromehaničkih sistema mogu se primeniti sve teoreme analize električnih mreža: THEVENIN–NORTONova teorema, teorema superpozicije, teorema o varijaciji parametara i dr. U ustaljenom prostoperiodičnom režimu poseban značaj ima teorema o prenosu maksimalne snage. Naime, u praksi se vrlo često postavlja problem da se između dva podsistema različite fizičke prirode, Sl.2.41, umetne jedan energetski pretvarač koji će omogućiti da aktivna snaga koja se predaje iz jednog podsistema u drugi bude maksimalna. Pri tome ovaj uslov mora biti ostvaren ne samo za jednu učestanost, već za jedan širi opseg učestanosti.



Problem optimiziranja sistema sa gledišta prenosa maksimalne snage u širem opsegu učestanosti ima veliki praktični značaj.<sup>2), 3), 4)</sup>

PRIMER 2.18. Odrediti ekvivalentne mreže za kondenzatorski mikrofonski, Sl. 2.48.

Ako za terminalne promenljive uzmemo  $(e, j)$  na električnom pristupu i  $(f, v)$  na mehaničkom pristupu, prema (166) možemo pisati

$$(203) \quad j = C_s D e - T_s v, \quad f = T_s e + (MD + B + K_r D^{-1}) v.$$

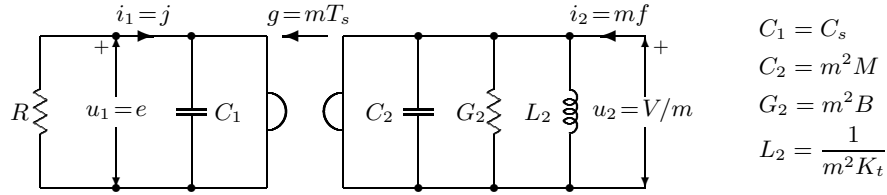
Uvođenjem  $m$ -analogne transformacije

$$(204) \quad \begin{aligned} j &= i_1, & e &= u_1, \\ f &= \frac{1}{m} i_2, & v &= m u_2 \end{aligned}$$

jednačine (204) postaju

$$(205) \quad \begin{aligned} i_1 &= C_s D u_1 - m T_s u_2, \\ i_2 &= m T_s u_1 + (m^2 MD + m^2 B + m^2 K_r D^{-1}) u_2, \end{aligned}$$

iz čega se zaključuje da se ekvivalentna mreža može predstaviti kao na Sl. 2.58. Ona je uvek pasivna.



Sl. 2.58. Ekvivalentna mreža ( $m$ -analogna transformacija) za kondenzatorski mikrofonski na Sl. 2.48.

Pri  $k$ -analognoj transformaciji

$$(206) \quad \begin{aligned} j &= i_1, & e &= u_1, \\ f &= k u_2, & v &= \frac{1}{k} i_2 \end{aligned}$$

jednačine (204) dobijaju oblik

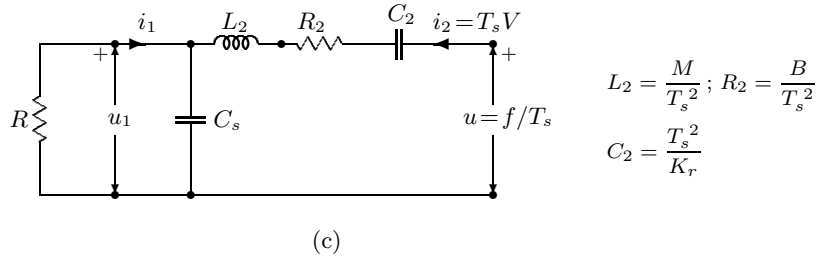
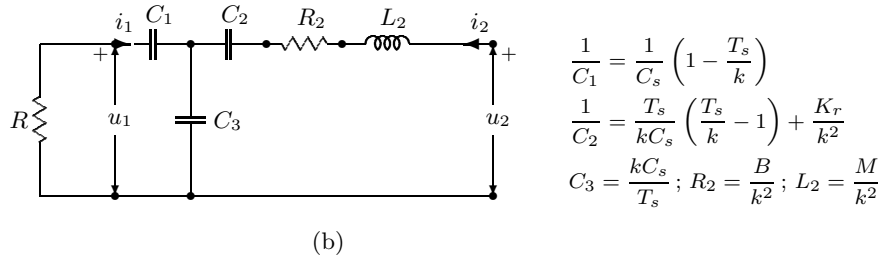
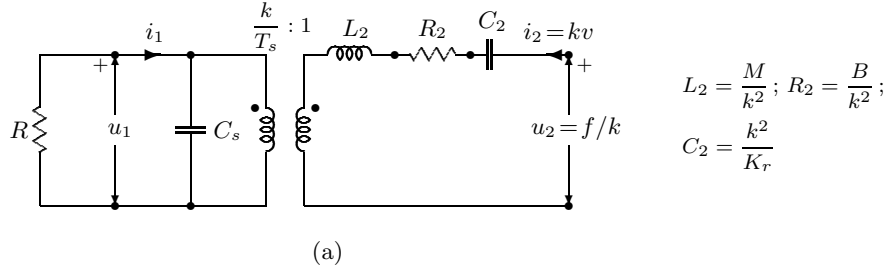
$$(207) \quad \begin{aligned} i_1 &= C_s D u_1 - \frac{T_s}{k} i_2, \\ u_2 &= \frac{T_s}{k} u_1 + \left( \frac{M}{k^2} D + \frac{B}{k^2} + \frac{K_r}{k^2} D^{-1} \right) i_2. \end{aligned}$$

2. D. C. YOULA: *A new theory of broadband matching*. IEEE Trans. on Circuit Theory, vol. CT-11, no. 1, pp. 30–49, 1964.

3. M. R. WOHLERS: *On gain-bandwidth limitation for physically realizable systems*. IEEE Trans. on Circuit Theory, vol. CT-12, no. 3, pp. 329–333, 1965.

4. WAI - KAI CHEN: *Theory and Design of Broadband Matching Networks*. Pergamon Press.

Ekvivalentna mreža koja odgovara ovim jednačinama prikazana je na Sl. 2.59a. Radi jednostavnosti pretpostavljeno je da su svi dimenzioni faktori jednaki 1.



Sl. 2.59. Ekvivalentne mreže ( $k$ -analogna transformacija) za kondenzatorski mikrofonski na Sl. 2.48

Ako se (207) napiše u obliku

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{1}{C_s D} i_1 + \frac{T_s}{k C_s D} i_2 \\
 u_2 &= \frac{T_s}{k C_s D} i_1 + \left[ \left( \frac{T_s^2}{k^2 C_s} + \frac{K_r}{k^2} \right) \frac{1}{D} + \frac{M}{k^2} D + \frac{B}{k^2} \right] i_2,
 \end{aligned}
 \tag{208}$$

odnosno posle oduzimanja i dodavanja desnoj strani prve jednačine  $\frac{T_s}{k C_s D} \cdot i_1$  i desnoj strani druge jednačine  $\frac{T_s}{k C_s D} i_2$  dobija se

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \left( \frac{1}{C_s} - \frac{T_s}{k C_s} \right) \frac{1}{D} i_1 + \frac{T_s}{k C_s D} (i_1 + i_2), \\
 u_2 &= \frac{T_s}{k C_s D} (i_1 + i_2) + \left[ \left( \frac{T_s^2}{k^2 C_s} - \frac{T_s}{k C_s} + \frac{K_r}{k^2} \right) \frac{1}{D} + \frac{M}{k^2} D + \frac{B}{k^2} \right] i_2.
 \end{aligned}
 \tag{209}$$

Ovim jednačinama odgovara  $T$  - ekvivalentna mreža data na Sl. 59b. Isti rezultat se dobija korišćenjem formula (200).

Primetićemo da ako je  $K_r > 0$ , mreža sa idealnim transformatorom je uvek pasivna. Međutim,  $T$  - mreža pod ovim uslovom će takođe biti pasivna (zašto?) ali kapacitivnosti kondenzatora mogu biti negativne. Da bi one bile nenegativne, potrebno je da budu zadovoljeni uslovi

$$(210) \quad 0 < T_s \leq k, \quad K_4 > \left(1 - \frac{T_s}{k}\right) \frac{kT_s}{C_s}.$$

Ako se usvoji  $k = T_s$ , ekvivalentna mreža izgleda kao na Sl. 2.59c i ona je pasivna ako je  $K_r > 0$ .

PRIMER 2.19. Odrediti ekvivalentnu mrežu pri  $m$ -analognoj transformaciji za jednosmernu obrtnu mašinu na Sl. 2.52. Pod pretpostavkom da mašina radi kao generator, odrediti THEVENINovo ekvivalentno kolo ako je  $\tau_0(t) = T_0 = \text{const}$  i svi početni uslovi su jednaki nuli.

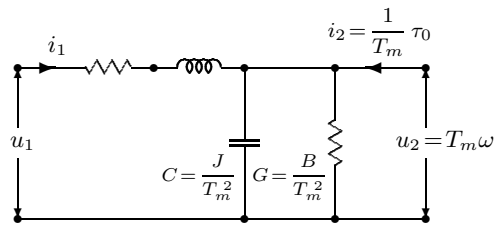
U ovom slučaju  $m$ -analogna transformacija je

$$(211) \quad \begin{aligned} j &= i_1, & e_0 &= u_1, \\ \tau_0 &= \frac{1}{m} i_2, & \omega &= m u_2. \end{aligned}$$

Ako se ove jednačine unesu u (189) dobija se

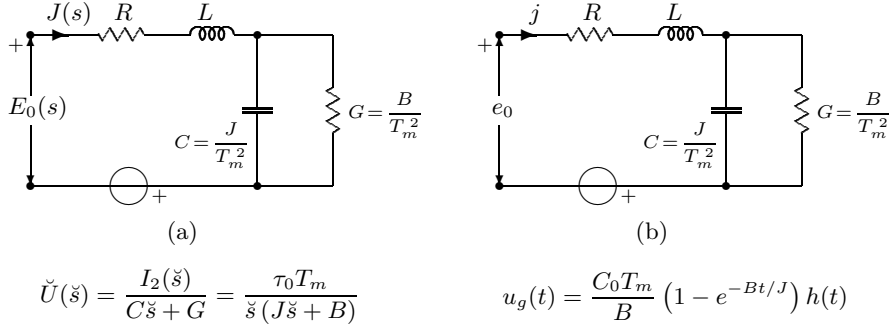
$$(212) \quad \begin{aligned} u_1 &= (LD + R) i_1 + m T_m u_2, \\ i_2 &= -m T_m i_1 + (m^2 JD + m^2 B) u_2 \end{aligned}$$

Ako se usvoji  $m = 1/T_m$ , tada je na osnovu Sl. 2.55. ekvivalentna mreža predstavljena na Sl. 2.60.



Sl. 2.60. Ekvivalentna mreža ( $m$ -analogna transformacija) za obrtnu mašinu na Sl. 2.52.

THEVENINovo ekvivalentno kolo ćemo dobiti ako drugi pristup zatvorimo strujnim izvorom čija je struja  $i_2 = T_m \cdot \tau_0 \cdot h(t)$ . Posle transformacije strujnog izvora u naponski izvor, THEVENINovo kolo u  $s$  i  $t$ -domenu gledano sa priključaka mašine kada ona radi kao generator, prikazano je na Sl. 2.61.



Sl. 2.61. THEVENINOVO ekvivalentno kolo za mrežu na Sl. 2.60.  
zatvorenu strujnim izvorom

a) Kolo u  $\check{s}$  - domenu b) Kolo u  $t$ -domenu

#### Vežbanja

**2.18.** Izvesti ekvivalentnu mrežu pri  $k$ -analognoj transformaciji za obrtnu mašinu na Sl. 2.52.

**2.19.** Odrediti  $m$  - i  $k$  - ekvivalentne mreže za elektromehanički žirator i elektromehanički idealni transformator.

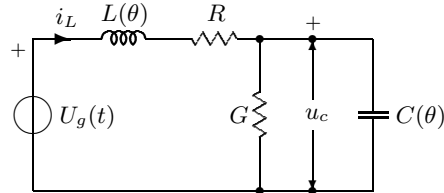
**2.20.** Jednačine jedne elektromehaničke mreže su

$$e = -\frac{Q_0}{\varepsilon S} x + \frac{q}{C_0},$$

$$f = (MD^2 + K) x - \frac{Q_0}{\varepsilon S} q.$$

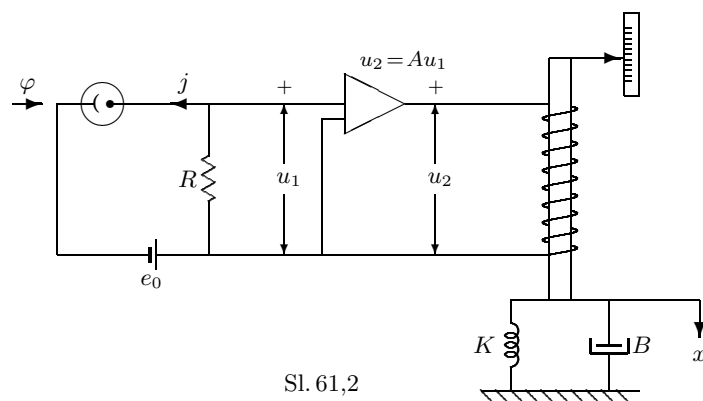
Odrediti sve ekvivalentne električne mreže.

**2.21.** Jedan elektromehanički E.P. je predstavljen kolom na Sl. 2.61.1, gde je  $\theta$  ugao obrtanja. Izvesti jednačine stanja.



Sl. 2.61,1

2.22 Na slici 2.61.2. predstavljen je fotoelektrični E.P. Karakteristika fotoćelije je  $j = S \cdot \varphi$  gde je  $\varphi$  osvetljenost, a  $S$  konstanta. Parametri elektromagneta su  $L_m$ ,  $K_m$  i  $T_m$ . Izvesti  $R.U.I.$   $A(D)x = B(D)\varphi$  za pomeranje igle indikatora.



## BIBLIOGRAFIJA

1. W. A. BLACKWELL: *Mathematical Modeling of Physical Network*, MacMillan Co., New York, 1968.
2. C. M. CLOSE: *The Analysis of Linear Circuits*, Harcourt Brace Jovanovitch, New York, 1966.
3. M. F. GARDNER, J. L. BARNES: *Transients in Linear Systems*, Wiley, New York, 1942. Ruski prevod: M. F. GARDNER I DŽ. L. BERNES: *Perehodnyeprocessy v lineinyh sistemah*, Gos. Izd. Fiz. mat. Lit., 1961.
4. S. FIFER: *Analogue Computation*, vol. 1-4, McGraw-Hill, 1961.
5. L.I. GUTENMACHER: *Elektricheskie modeli*, Izd. Tehnika, Kiev, 1975.
6. H. E. KOENIG, W. A. BLACKWELL: *Electromechanical System Theory*, McGraw-Hill, 1961. Ruski prevod: G. KENIG I V. BLEKUELL: *Teorija elektromechanicheskikh sistem*, Energija, 1965.
7. A. LENK: *Elektromechanische Systeme*, Band 1: *Systeme mit konzentrierten Parametern*, VEB Verlag Technik, Berlin, 1973.
8. B. J. LEY, S. G. LUTZ, C. F. REHBERG: *Linear Circuit Analysis*, McGraw-Hill, 1959.
9. A. J. LJVOVICH: *Osnovy teorii elektromechanicheskikh sistem*, Izd. Leningrad. Univ., 1973.
10. C. W. MERRIAM III: *Analysis of Lumped Electrical Systems*, J. Wiley, New York, 1969.
11. M. M. MILIĆ: *Teorija električnih kola*, II deo, Izd. FOSS Elektrotehn.fak., Beograd, 1974.
12. *Physical Structure in System Theory - Network Approaches to Engineering and Economics*, J. J. van Dixhoorn and F. J. Evans, Eds., Academic Press, London, 1974.
13. S. SEELY: *Electromechanical Energy Conversion*, McGraw-Hill, 1962. Ruski prevod: S. SILI: *Elektromechanicheskoe preobrazovanie energii*, Energija, 1968.

14. S. SEELY: *An Introduction to Engineering Systems*, Pergamon Press Inc., 1972.
15. G. F. PASKUSZ, B. BUSSELL: *Linear Circuit Analysis*, Prentice-Hall Inc., 1963.
16. I. M. TETELJBAUM: *Elektricheskoe modelirovanie*, Gos. Izd. Fiz. mat. Lit., 1959.
17. W. R. PERKINS, J. B. CRUZ JR.: *Engineering of Dynamics Systems*, J. Wiley, New York, 1969.
18. H. H. WOODSON, J. R. MELCHER: *Electromechanical Dynamics*, Part I: *Discrete Systems*, J. Wiley, New York, 1968.
19. P. E. WELLSTEAD: *Introduction to Physical System Modelling*, Academic Press, 1980.

### 3. ANALOGNE MREŽE RASPODELJENIH FIZIČKIH SISTEMA

Osnovna odlika diskretnih fizičkih sistema jeste nezavisnost promenljivih koje karakterišu sistem od prostornih koordinata. U izvesnom smislu ovi sistemi se mogu shvatiti kao lokalna aproksimacija nekih kontinualnih sredina odnosno fizičkih polja čije promenljive, pored moguće zavisnosti od vremena, menjaju se od tačke do tačke prostora. Za razliku od diskretnih sistema koji su opisani običnim diferencijalnim ili algebarskim jednačinama, raspodeljeni sistemi su uvek opisani parcijalnim diferencijalnim jednačinama.

Parcijalne diferencijalne jednačine opisuju najraznovrsnije fizičke procese kao što su vibracije membrana, strujanje fluida u raznim sredinama, kretanje čestica u električnom i magnetskom polju, raspodela šupljina i elektrona u poluprovodnim materijalima, elektromagnetsko zračenje, raspodela temperatura, difuzija čestica, i dr.

Fizičke promenljive koje se javljaju u ovim jednačinama su strujne (redne) ili naponske (otočne). Njihova priroda je posebno jasna u poljima koja se izvode iz *skalarnog potencijala*. U ovim poljima je skalarni potencijal naponska promenljiva, dok su strujne promenljive komponente vektora koji karakteriše polje i one se dobijaju kao parcijalni izvodi (gradijent) skalarnog potencijala. Na primer, komponente vektora jačine električnog polja u provodnoj sredini su strujne promenljive, a sâm vektor jačine električnog polja jednak je negativnom gradijentu električnog potencijala-naponske promenljive.

Za razliku od diskretnih sistema, u kojima je svaki element mreže sedište samo jedne određene vrste akumulativne energije - potencijalne ili kinetičke - odnosno disipativne energije, kod raspodeljenih sistema svaki elementarni delić prostora u kojem deluje neko fizičko polje sadrži obe vrste akumulativne energije, a isto tako i disipira energiju. Parametri koji karakterišu ove vrste energije u ovom elementarnom delu prostora su iste prirode kao induktivnost, kapacitivnost i otpornost i pomoću njih se izražavaju relacije između strujnih i naponskih promenljivih i njihovih parcijalnih izvoda po prostornim koordinatama i vremenu. Kao i kod diskretnih sistema, odsustvo neke od energija vodi do uprošćavanja karakterisanja raspodeljenih sistema.

#### 3.1. OPŠTA KARAKTERISTIKA PARCIJALNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

Mnogi fizički procesi u raspodeljenim sistemima mogu se *karakterisati linearnim parcijalnim diferencijalnim jednačinama drugog reda* opšteg oblika

$$(1) \quad A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + E \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} + F \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} + G \frac{\partial \varphi}{\partial x} + H \frac{\partial \varphi}{\partial y} + I \frac{\partial \varphi}{\partial z} = J + K \frac{\partial \varphi}{\partial t} + L \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + M \varphi,$$

gde koeficijenti  $A, B, \dots, M$  mogu biti funkcije od prostornih koordinata  $x, y, z$  i vremena  $t$ . Raspodeljeni sistemi kod kojih su ovi koeficijenti (osim  $J$ ) nezavisni od  $t$  nazivaju se *linearni i stacionarni*, a oni kod kojih oni zavise od  $t$  - *linearni i nestacionarni*.

Poznato je da parcijalnu diferencijalnu jednačinu u opštem slučaju zadovoljava beskonačno mnogo rešenja  $\varphi(x, y, z, t)$ . Na primer, svaka funkcija oblika  $\varphi(x, t) = \varphi_1(x - ct) + \varphi_2(x + ct)$ , gde su  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  proizvoljne dva puta diferencijabilne funkcije zadovoljava tzv. jednodimenzionalnu talasnu jednačinu  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ .

Za rešavanje fizičkog problema koji dovodi do neke parcijalne diferencijalne jednačine potrebno je zadovoljiti izvesne *granične i početne uslove* koji se jednim imenom nazivaju *pridruženi uslovi*. Oni zavise od konkretnog fizičkog problema odnosno od oblika parcijalne diferencijalne jednačine. Granični uslovi se odnose na fiksne koordinate sistema, obično na rubu polja, dok se početni uslovi odnose na početni trenutak. Zavisnost pridruženih uslova od oblika jednačine može nam ilustrovati primer jednačine  $A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$ . Ako su  $A$  i  $B$  istog znaka, tada ova jednačina zahteva poznavanje funkcije  $\varphi(x, y)$  u svim graničnim tačkama neke oblasti. Međutim, ako su  $A$  i  $B$  suprotnog znaka priroda rešenja je drugačija i poznavanje vrednosti funkcije  $\varphi(x, y)$  na rubu oblasti ne dovodi ni do kakvog rešenja jednačine.

Za opšte jednačine (1) izdvojimo tri osnovna tipa koji su od posebnog značaja. Takođe ćemo definisati i pridružene uslove za svaki tip jednačine. Podela jednačine na tri osnovna tipa je u tesnoj vezi sa vrstama energije koje su vezane za sistem, odnosno sa činjenicom što su sa gledišta modelovanja metode različite za svaku grupu.

#### a) Jednačine eliptičkog tipa

To su jednačine oblika

$$(1a) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = J(x, y, z, t),$$

ili

$$(1b) \quad \nabla^2 \varphi = J(x, y, z, t),$$

gde je

$$(2) \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

LAPLACEov operator u Dekartovim koordinatama. Jednačina (1) se često naziva *Poisson-ova jednačina*. Ako je  $J(x, y, z, t) = 0$  za svako  $x, y, z$  iz oblasti gde ona važi i za svako  $t$ , jednačina (1) dobija oblik

$$(3) \quad \nabla^2 \varphi = 0$$



i naziva se *Laplace-ova jednačina*.

LAPLACEovom jednačinom se opisuju statička potencijalna polja i polja pri stacionarnim procesima u skoro svim oblastima prirodnih nauka i tehnike. Promenljiva u jednačini (3) ili (1) je potencijal polja. Primeri takvih polja su: elektrostatičko i magnetsko polje permanentnih magnetata, električno polje provodne sredine, gravitaciono polje, statička polja naprezanja membrana zanemarljive mase, bezvrtložna polja nestišljivih fluida zanemarljive viskoznosti, statička ili stacionarna temperaturna polja, i dr. Sva ova polja imaju *jednu jedinu vrstu energije* (akumulativnu ili disipativnu) čiji izvori su raspoređeni na granici samog polja.

Polja koja su karakterisana POISSONovom jednačinom su iste prirode kao i polja opisana LAPLACEovom jednačinom. Jedina je razlika u tome što pored izvora na granici polja, postoje još i izvori raspoređeni u samom polju. Ovi izvori su karakterisani desnom stranom jednačine (1).

Prema tome, pridruženi uslovi i za LAPLACEovu i za POISSONovu jednačinu su samo *granični uslovi* koji se u najopštijem slučaju mogu dati u obliku

$$(4) \quad K_1 \varphi_\Gamma + K_2 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_\Gamma = F(x, y, z).$$

U ovoj jednačini  $\varphi_\Gamma$  označava vrednost rešenja  $\varphi(x, y, z)$  na granici oblasti u kojoj se nalazi polje,  $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_\Gamma$  označava vrednost normalnog izvoda (gradijenta), tj. izvoda u smislu normale na granici oblasti,  $F(x, y, z)$  je poznata funkcija, a  $K_1$  i  $K_2$  su konstante od kojih je bar jedna različita od nule. U posebnom slučaju, kada je  $K_1 = 1$  i  $K_2 = 0$ , granični problem se naziva *Dirichlet-ov*, ili granični problem prve vrste. Kada je  $K_1 = 0$  i  $K_2 = 1$  imamo *Neumann-ov* granični problem, ili granični problem druge vrste, a kada je  $K_1 \neq 0$  i  $K_2 \neq 0$  imamo *mešoviti* granični problem, ili granični problem treće vrste.

Za svaku koordinatu broj graničnih uslova mora biti jednak 2, tako da je za prostorne sisteme on jednak 6, za planarne 4, a za linijske 2.

Dokazuje se da je za dati problem rešenje  $\varphi(x, y, z)$ , koje zadovoljava granične uslove, jedinstveno.

PRIMER 3.1. Posmatrajmo pravougaonu metalnu homogenu ploču na Sl. 3.1. Jačina električnog polja  $\vec{K}$  i potencijal  $\varphi(x, y)$  neke tačke ploče vezani su relacijom

$$(5a) \quad \vec{K} = -\text{grad } \varphi = -\nabla \varphi,$$

odnosno

$$(5b) \quad K_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad K_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad K_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

a gustina struje  $\vec{J}$  i  $\vec{K}$  relacijom

$$(6) \quad \vec{J} = \sigma \vec{K},$$

gde je  $\sigma$  specifična provodnost ploče.

Kako je

$$(7) \quad \operatorname{div} \vec{J} = 0,$$

odnosno

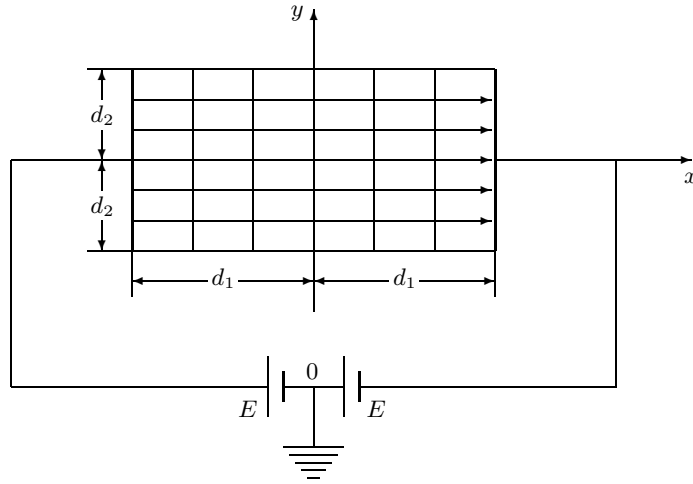
$$(8) \quad \operatorname{div} \vec{K} - \nabla \vec{K} = 0,$$

dobijamo

$$(9) \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi = 0,$$

ili

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$



Sl. 3.1. Metalna ploča

Ako potencijal  $\varphi(x, y)$  merimo u odnosu na središte  $O$  baterije, tada su granični uslovi

$$(11a) \quad \varphi(-d_1, y) \Big|_{|y| \leq d_2} = E, \quad (11b) \quad \varphi(d_1, y) \Big|_{|y| \leq d_2} = -E,$$

za vertikalne strane ploče, a za horizontalne strane

$$(12a) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{\substack{|x| \leq d_1 \\ y = -d_2}} = 0, \quad (12b) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{\substack{|x| \leq d_1 \\ y = d_2}} = 0.$$

Uslovi (12) proističu iz činjenice što nema odvođenja struje kroz horizontalne strane ploče.

Pošto se iz datih graničnih uslova (11) i (12) odredi potencijal  $\varphi(x, y)$ , jačina električnog polja i gustina struje se određuju iz (5) i (6).

Na isti način se daju i granični uslovi za trodimenzionalna polja.

**b) Jednačine paraboličnog tipa**

Glavna odlika jednačina paraboličnog tipa jeste što se u njima pored drugih parcijalnih izvoda po prostornim koordinatama *uvek* javlja i *prvi parcijalni izvod po vremenu*.

Osnovna jednačina paraboličnog tipa je

$$(13) \quad \nabla^2 \varphi = K \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

i ona je poznata pod nazivom *Fourier-ova jednačina, jednačina prenošenja toplote ili difuziona jednačina*.

Granični uslovi za ovu jednačinu su istog oblika kao za eliptičku jednačinu, tj.

$$(14) \quad K_1 \varphi_\Gamma + K_2 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_\Gamma = F(x, y, z, t).$$

Za određivanje jedinstvenog rešenja  $\varphi(x, y, z, t)$  jednačine potrebno je pored graničnih uslova raspolagati još i početnim uslovom

$$(15) \quad \varphi(x, y, z, 0) = G(x, y, z),$$

gde je  $G(x, y, z)$  neka poznata funkcija koordinata koja karakteriše raspodelu potencijala  $\varphi$  u početnom trenutku  $t = 0$ .

Polja koja su opisana jednačinom paraboličnog tipa sadrže dve vrste energije. Jedna je akumulativna (potencijalna ili kinetička) a druga je disipativna.

Jednačinom (13) se opisuju mnogi fizički procesi u kojima se akumulirana energija ne menja kao kod LAPLACEove jednačine, već usporeno usled prisutne disipacije.

Pri razmatranju tehničkih procesa, jednačinom (13) se opisuje raspodela temperature u toplotnom polju pri datoj temperaturi, odnosno njenog gradijenta na granici polja i pri datoj raspodeli temperature u trenutku  $t = 0$ .

PRIMER 3.2. Temperatura  $\theta(x, t)$  na nekom mestu  $x$  ( $0 \leq x \leq d$ ), i u trenutku  $t$  pri prenošenju toplote duž tankog homogenog štapa dužine  $d$  koji je po svojoj dužini termički izolovan, rešenje je jednodimenzionalne parabolične jednačine

$$(16) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = K \frac{\partial \theta}{\partial t},$$

gde je  $K$  konstanta koja zavisi od fizičkih osobina štapa.

Pored početne raspodele temperature

$$(17) \quad \theta(x, 0) = G(x),$$

moramo poznavati još i dva granična uslova.

S obzirom na prirodu problema, oni mogu biti dati u ova tri oblika:

a) Jedan kraj štapa, na primer  $x = d$ , održava se na datoj temperaturi  $f(t)$ , tj.

$$(18) \quad \theta(d, t) = f(t).$$

b) Kraj štapa  $x = d$  je termički izolovan, tj. ne postoji odvod toplote u okolnu sredinu

$$(19) \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{\substack{x=d \\ t \geq 0}} = 0.$$

c) Na jednom kraju štapa odvodi se toplota u okolnu sredinu čija se temperatura menja po datom zakonu

$$(20) \quad K_1 \theta(d, t) + K_2 \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{\substack{x=d \\ t \geq 0}} = F(t).$$

Istom jednačinom (16) se opisuje raspodela napona ili struje duž jednog homogenog  $RC$ -voda. U ovom slučaju  $K = rc$ , gde je  $r$  podužna otpornost a  $c$  podužna kapacitivnost voda.

### Vežbanje

**3.1.** Pokazati šta izražavaju pridruženi uslovi (17), (18), (19) i (20) u slučaju homogenog  $RC$ -voda kada je  $\theta$  napon.

Istom jednačinom (16) se opisuje i koncentracija nekog fluida pri difuziji (raznošenju) u nekom drugom *nepokretnom* fluidu (na primer koncentracija ugljen-monoksida u zatvorenim prostorijama).

U slučaju kada polje nije homogeno i sadrži unutrašnje izvore, difuzionu jednačinu je opštijeg oblika

$$(21) \quad \nabla^2 \varphi = K(x, y, z, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + J(x, y, z, t).$$

U posebnom slučaju kada je proces statičan ili stacionaran, (21) se svodi na POISSONovu jednačinu (1).

Procesi difuzije čestica u *pokretnim* sredinama (tzv. *procesi turbulentne difuzije*) su složeniji od obične molekularne difuzije. Ovi procesi su opisani modifikovanom difuzionom jednačinom

$$(22) \quad \nabla^2 \varphi + G \frac{\partial \varphi}{\partial x} + H \frac{\partial \varphi}{\partial y} + I \frac{\partial \varphi}{\partial z} = K \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Ovom jednačinom se opisuje, na primer, gustina zagađenosti vazduha, pri čemu funkcije  $G$ ,  $H$ ,  $I$  zavise od brzine vetra.

### c) Jednačine hiperboličkog tipa

U ovim jednačinama, pored drugih parcijalnih izvoda po prostornim koordinatama, uvek je prisutan i *drugi parcijalni izvod po vremenu*.

Tipična jednačina hiperboličkog tipa jeste *talasna jednačina* koja opisuje prostiranje talasa u nedisperzionim sredinama (sredinama bez disipacije koje sadrže *dve vrste akumulativne energije*)

$$(23) \quad \nabla^2 \varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

gde je  $c$  brzina prostiranja.

Granični uslovi za rešenje  $\varphi(x, y, z, t)$  su isti kao za paraboličnu jednačinu, (14), međutim, početni uslovi su ovde oblika

$$(24a) \quad \varphi(x, y, z, 0) = G_1(x, y, z),$$

$$(24b) \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0} = G_2(x, y, z).$$

U dvodimenzionalnom slučaju talasna jednačina

$$(25) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

opisuje, na primer, oscilacije membrana, a u jednodimenzionalnom slučaju

$$(26) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

oscilacije konzola, raspodelu napona i struje u vodovima bez gubitaka, prostiranje elektromagnetnih talasa u slobodnom prostoru, i dr.

U slučaju disperzionih sredina, u kojima postoji disipacija energije, talasna jednačina je opšteg oblika

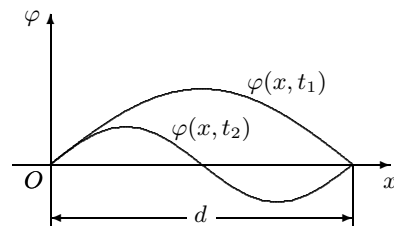
$$(27) \quad \nabla^2 \varphi = J + K \frac{\partial \varphi}{\partial t} + L \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + M \varphi.$$

PRIMER 3.3. Slobodno treperenje homogene žice dužine  $d$ , Sl. 3.2, opisano je talasnom jednačinom (26), gde je  $\varphi(x, t)$  pomeranje tačke sa apscisom  $x$  u trenutku  $t$ , a  $c$  je konstanta koja zavisi od materijala.

Početni uslovi

$$(28a) \quad \varphi(x, 0) = G_1(x),$$

$$(28b) \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0} = G_2(x)$$



Sl. 3.2. Žica koja treperi

predstavljaju oblik žice i raspodelu brzina njenih tačaka u trenutku  $t = 0$ .

Mogućni granični uslovi su ovde:

a) jedan ili oba kraja žice su kruto učvršćeni

$$(29a) \quad \varphi(0, t) = 0, \quad (29b) \quad \varphi(d, t) = 0;$$

b) jedan kraj žice je slobodan

$$(30a) \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (30b) \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=d} = 0.$$

c) jedan ili oba kraja su elastično učvršćeni

$$(31a) \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} - a\varphi(0, t) = 0, \quad \text{ili} \quad (31b) \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=d} - a\varphi(d, t) = 0.$$

### 3.2. DISKRETIZACIJA JEDNAČINA RASPODELJENIH SISTEMA

Jedan od najpoznatijih metoda približnog rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina jeste metoda diskretizacije pomoću *konačnih razlika*. Suština metode se sastoji u zameni parcijalnih izvoda po prostornim koordinatama količnicima konačnih priraštaja. Na ovaj način se parcijalne diferencijalne jednačine za statičke sisteme zamenjuju algebarskim jednačinama konačnih razlika (diferencnim jednačinama), a ove za dinamičke sisteme diferencno-(običnim) diferencijalnim jednačinama. Ukoliko se i parcijalni izvodi po koordinatama diskretizuju, sve jednačine su diferencne. Takve jednačine se najčešće mogu rešiti rekurentnim postupcima.

U fizičkom pogledu, aproksimacija parcijalnih diferencijalnih jednačina diferencno-običnim diferencijalnim jednačinama znači zamenu prostorno-raspodeljenog sistema jednim prostorno-diskretnim sistemom čije karakteristike u izvesnom smislu ostaju bliske karakteristikama polaznog sistema. Intuitivno je razumljivo da će aproksimacija biti utoliko bolja ukoliko je manja razlika između potencijala dve susedne tačke sistema koje se uzimaju za formiranje konačnih razlika. Dokazuje se da su diferencno-diferencijalne jednačine koje se dobijaju pri diskretizaciji jednačina raspodeljenog sistema analogne jednačinama električne mreže sa koncentrisanim elementima, standardne strukture. Ove se mreže mogu lako sagraditi i na njima se eksperimentalno mogu proučiti procesi koji su analogni procesima u datom "diskretizovanom" fizičkom sistemu. Isto tako, diferencno-diferencijalne jednačine su vrlo pogodne za programiranje na analognim i digitalnim računarima.

U sledećim odeljcima upoznaćemo se sa diskretizacijom jednačina raspodeljenih linearnih sistema za svaki tip parcijalne diferencijalne jednačine, a potom ćemo izvesti analogne mreže za diskretizovane raspodeljene sisteme.

## 3.2.1. RASPODELJENI STATIČKI SISTEMI

Opšta jednačina koja karakteriše raspodeljene statičke sisteme je oblika

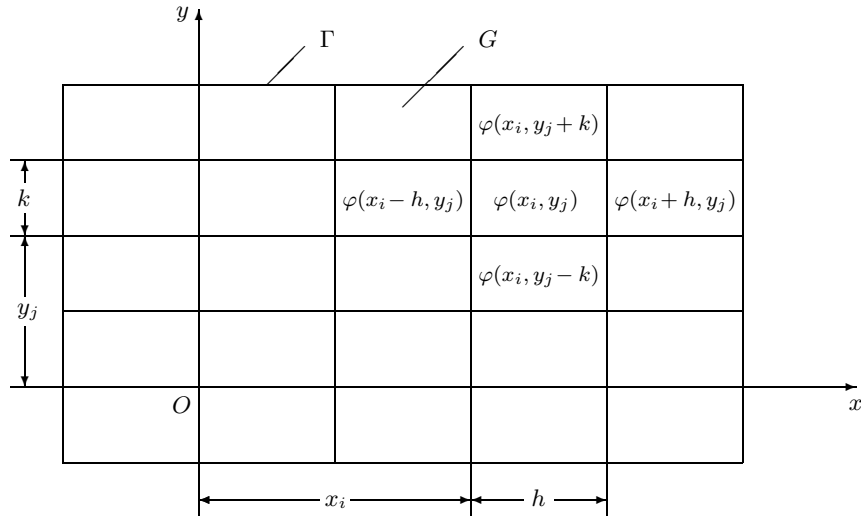
$$(32) \quad \nabla^2 \varphi = J + M\varphi,$$

gde je  $M$  konstanta, a  $J$  može zavisiti od prostornih koordinata.

Posebni oblici ove jednačine su POISSONova jednačina ( $M = 0$ ) i LAPLACEova jednačina ( $M = 0$  i  $J = 0$ ).

U slučaju planarnih polja (32) je oblika

$$(33) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = J(x, y) + M\varphi.$$



Sl. 3.3. Pravougaona rešetka

## a) Slučaj oblasti pravougaonog i paralelepipednog oblika

Posmatrajmo rešenje  $\varphi(x, y)$  jednačine (23) u jednoj *pravougaonoj oblasti*  $G$ , koje zadovoljava izvesne date uslove na rubu oblasti  $\Gamma$  (Sl. 3.3). Podelimo oblast pomoću ekvidistantnih paralelnih linija na niz pravougaonika širine  $h$  i visine  $k$ . Ovako podeljena oblast naziva se *pravougaona rešetka*  $G$ , a  $h = \Delta x$  i  $k = \Delta y$  *koraci rešetke*. Presečne tačke linija nazivaju se *čvorovi rešetke*.

Ako se  $h$  i  $k$  uzmu dovoljno mali, tada su prvi parcijalni izvodi u tački  $(x_i, y_j)$  mogu približno predstaviti diferencnim količnicima

$$(34a) \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{i,j} \approx \frac{\varphi(x_i + h, y_j) - \varphi(x_i, y_j)}{h}, \quad (34b) \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{i,j} \approx \frac{\varphi(x_i, y_j + k) - \varphi(x_i, y_j)}{k},$$

ili

$$(35a) \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{i,j} \approx \frac{\varphi(x_i, y_j) - \varphi(x_i - h, y_j)}{h}, \quad (35b) \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{i,j} \approx \frac{\varphi(x_i, y_j) - \varphi(x_i, y_j - k)}{k}.$$

Oblik (34) se naziva *razlika unapred* (udesno), a oblik (35) *razlika unazad* (ulevo). Često se koristi i tzv. *centralna razlika*

$$(36a) \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{i,j} \approx \frac{\varphi(x_i + h, y_j) - \varphi(x_i - h, y_j)}{2h},$$

$$(36b) \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{i,j} \approx \frac{\varphi(x_i, y_j + k) - \varphi(x_i, y_j - k)}{2k},$$

koja je aritmetička sredina razlike unapred i razlike unazad. Može se pokazati da je sa gledišta bolje aproksimacije centralna razlika najprihvatljivija.

### Vežbanje

**3.2.** Razvijajući  $\varphi(x_i + h, y_j)$  u TAYLOROV red u okolini tačke  $(x_i, y_j)$  odrediti greške koje se prave pri zameni  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  razlikom unapred, razlikom unazad i centralnom razlikom.

$$\text{Odgovor. } -\frac{h}{2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right); \quad \frac{h}{2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right); \quad \frac{h^2}{24} \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right).$$

Ako se od razlike unapred oduzme razlika unazad i rezultat podeli odgovarajućim korakom dobijaju se približne vrednosti drugih parcijalnih izvoda u tački  $(x, y)$  (centralna razlika):

$$(37a) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \approx \frac{\varphi(x_i + h, y_j) - 2\varphi(x_i, y_j) + \varphi(x_i - h, y_j)}{h^2},$$

$$(37b) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \approx \frac{\varphi(x_i, y_j + k) - 2\varphi(x_i, y_j) + \varphi(x_i, y_j - k)}{k^2}.$$

Unošenjem (37) u (33), dobijamo jednačinu

$$(38) \quad \frac{\varphi(x_i, h, y_j) - 2\varphi(x_i, y_j) + \varphi(x_i - h, y_j)}{h^2} + \frac{\varphi(x_i, y_j + k) - 2\varphi(x_i, y_j) + \varphi(x_i, y_j - k)}{k^2} \approx J(x_i, y_j) + M\varphi(x_i, y_j),$$

koja pokazuje da je rešenje (potencijal) u tački  $(x_0, y_0)$  određeno potencijalima u susednim tačkama

$$(39) \quad \varphi(x_i, y_j) = \frac{a\varphi(x_i + h, y_j) + a\varphi(x_i - h, y_j) + \varphi(x_i, y_j + k)}{2a + 2k^2 M} + \frac{\varphi(x_i, y_j - k) - k^2 J(x_i, y_j)}{2a + 2 + k^2 M},$$

gde je

$$(40) \quad a = k^2/h^2.$$



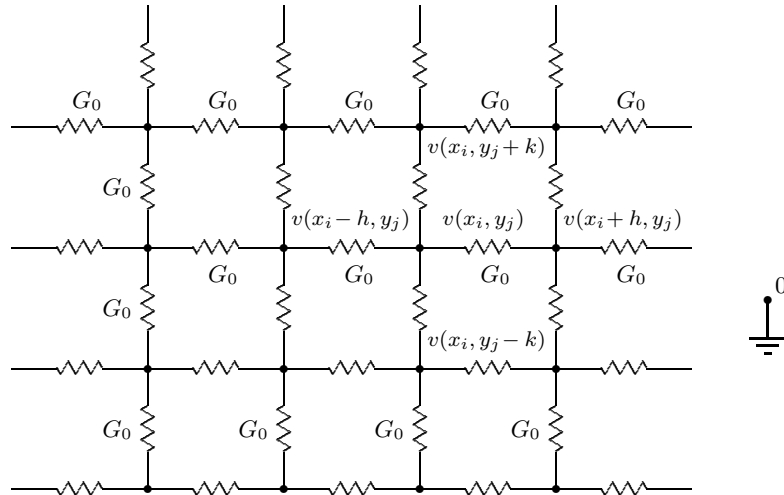
U slučaju kada su koraci rešetke jednaki ( $a = 1$ ), a dobijamo za POISSONovu jednačinu ( $M = 0$ )

$$(41) \quad \varphi(x_i, y_j) = \frac{\varphi(x_i + h, y_j) + \varphi(x_i - h, y_j) + \varphi(x_i, y_j + k) + \varphi(x_i, y_j - k)}{4} - h^2 J(x_i, y_j),$$

a za LAPLACEovu jednačinu ( $M = 0, J = 0$ )

$$(42) \quad \varphi(x_i, y_j) = \frac{\varphi(x_i + h, y_j) + \varphi(x_i - h, y_j) + \varphi(x_i, y_j + k) + \varphi(x_i, y_j - k)}{4}.$$

S druge strane, ako posmatramo rezistivnu mrežu na Sl.3.4. u kojoj svi otpornici imaju istu provodnost  $G_0$ , gde je  $G_0$  proizvoljno, a označeni naponi su naponi između pojedinih čvorova i referentnog čvora 0, jednačina napona čvorova pisana za čvor čiji je napon  $v(x_i, y_j)$  je:



Sl.3.4. M-analogna mreža za dvodimenzionalnu LAPLACEovu jednačinu

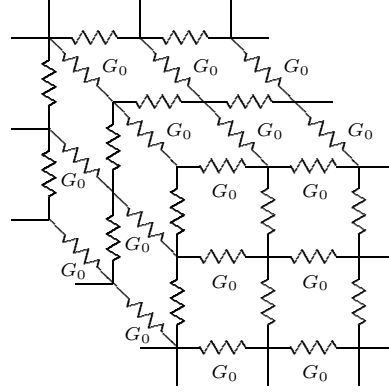
$$(43) \quad 4G_0 v(x_i, y_j) - G_0 v(x_i + h, y_j) - G_0 v(x_i - h, y_j) - G_0 v(x_i, y_j + k) - G_0 v(x_i, y_j - k) = 0,$$

odakle je

$$(44) \quad v(x_i, y_j) = \frac{v(x_i + h, y_j) + v(x_i - h, y_j) + v(x_i, y_j + k) + v(x_i, y_j - k)}{4}.$$

Jednačina (44) je analogna jednačini (42), a  $v$  je  $M$ -analogna veličina za  $\varphi$ . Na taj način rezistivna planarna mreža na Sl. 3.4. postaje  $M$ -analogna mreža za dvodimenzionalnu LAPLACEovu jednačinu.

Polazeći od paralelepipedne rešetke, na isti način se dokazuje da je rezistivna prostorna mreža na Sl. 3.5.  $M$ -analogna za trodimenzionalnu LAPLACEovu jednačinu. U ovom slučaju na mestu (44) imamo



Sl. 3.5.  $M$ -analogna mreža za trodimenzionalnu LAPLACEovu jednačinu

$$(45) \quad v(x_i, y_j, z_k) = \frac{v(x_i + h, y_j, z_k) + v(x_i - h, y_j, z_k) + v(x_i, y_j + h, z_k) + v(x_i, y_j - h, z_k) + v(x_i, y_j, z_k + h) + v(x_i, y_j, z_k - h)}{6},$$

što pokazuje da je, isto kao i u slučaju dvodimenzionalne LAPLACEove jednačine, jednačina (44), napon nekog čvora jednak aritmetičkoj sredini napona susednih čvorova.

### b) Diskretna ćelija i elementarna mreža

Diskretizaciji parcijalnih diferencijalnih jednačina koje režiraju raspodeljene statičke sisteme možemo dati prostu fizičku interpretaciju. Posmatrajmo najpre sisteme opisane *Laplace-ovom jednačinom*. Kao fizički model za ove sisteme posmatraćemo polje gustine električne struje u jednoj homogenoj i izotropnoj provodnoj sredini, ali rezultati na osnovi analogije ostaju u važnosti i za druga polja čiji potencijal zadovoljava LAPLACEovu jednačinu.

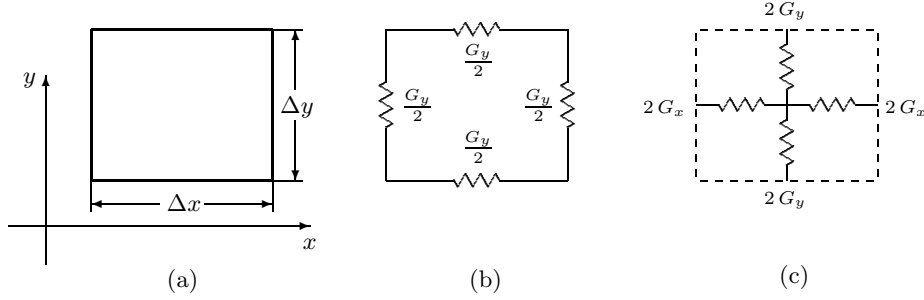
Neka je najpre polje dvodimenzionalno (planarno). Izdelićemo provodnu sredinu, na primer metalnu ploču, na niz jednakih pravougaonika čije su dužine stranica jednake koracima diskretizacije, odnosno  $h = \Delta x$  i  $k = \Delta y$ , Sl. 2.6a.

Ako su  $h$  i  $k$  dovoljno mali, tada su komponente električnog polja u pravcu  $x$ -ose,  $K_x$ , i u pravcu  $y$ -ose,  $K_y$ , približno konstantne i jednake razlici potencijala vertikalnih stranica podeljenoj sa  $h$ , odnosno razlici potencijala horizontalnih stranica podeljenoj sa  $k$ , respektivno. Drugim rečima, možemo smatrati da pravougaona pločica raspolaže provodnošću u pravcu  $x$ -ose:

$$(46a) \quad G_x = \gamma \ell \frac{k}{h} = G_0 \frac{k}{h} = G_0 \frac{\Delta x}{\Delta y},$$

gde je  $\gamma$  specifična provodnost materijala, a  $\ell$  debljina ploče, i provodnošću u pravcu  $y$ -ose

$$(46b) \quad G_y = \gamma \ell \frac{h}{k} = G_0 \frac{h}{k} = G_0 \frac{\Delta x}{\Delta y}.$$



Sl. 3.6. (a) Dvodimezionalna diskretna ćelija za Laplace-ovu jednačinu  
b), c) Odgovarajuće elementarne mreže

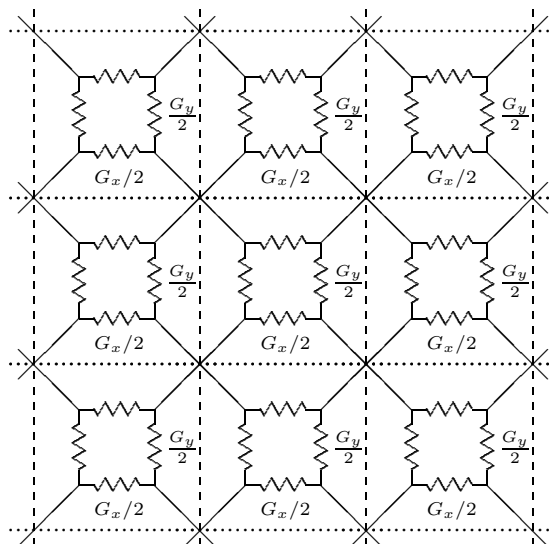
Prema tome, ova pravougaona pločica predstavlja osnovni diskretni element građe našeg raspodeljenog sistema i ona se naziva *diskretna ćelija* sistema. Postavljanjem diskretnih ćelija jedne pored druge dobije se *diskretizovani raspodeljeni sistem*. Pošto svaka diskretna ćelija ima ukupnu provodnost u pravcu  $x$ - i  $y$ - ose  $G_x$  i  $G_y$ , možemo je modelovati rezistivnom električnom mrežom, kao na Sl. 3.6b. Ovde je svaka provodnost podeljena na dva jednaka dela i ona je provodnost otpornika postavljenih duž paralelnih ivica ćelije. Ova mreža, model za diskretnu ćeliju, naziva se *elementarna ćelija*. Ista diskretna ćelija se može modelovati i elementarnom mrežom na Sl. 3.6c. Ovde  $2G_x$  predstavlja provodnost diskretne ćelije dimenzije  $h/2$  sa  $k$ , a  $2G_y$  predstavlja provodnost diskretne ćelije dimenzije  $h$  sa  $k$ .

Važno je primetiti da bez obzira na oblik elementarne mreže koja se koristi, električna mreža koja modeluje (u  $M$ -analogiji) diskretizovani raspodeljeni sistem je uvek ista. Ovo, međutim, važi samo za elementarne mreže *unutar polja*. O ovome ćemo kasnije više diskutovati. Na Sl. 3.7. obrazovana je  $M$ -analogna mreža koristeći oba tipa elementarnih mreža pri čemu je oblast unutar polja podeljena na 9 diskretnih ćelija.

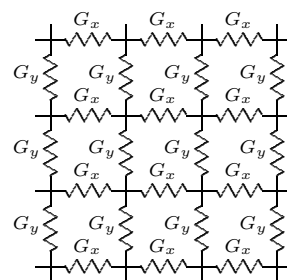
U slučaju trodimenzionalnih polja diskretne ćelije su paralelepipedi stranica  $h = \Delta x$ ,  $k = \Delta y$  i  $\ell = \Delta z$ , Sl. 3.8a. Sličnim rezonovanjem kao u slučaju dvodimenzionalnih polja dolazimo do elementarnih mreža na Sl. 3.8b i Sl. 3.8c. Ovde su  $G_x$ ,  $G_y$  i  $G_z$  provodnosti između naspramnih strana diskretne ćelije. One su date obrascima:

$$(47a) \quad G_x = \gamma \frac{k\ell}{h} = \gamma \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x}, \quad (47b) \quad G_y = \gamma \frac{\ell h}{k} = \gamma \frac{\Delta z \Delta x}{\Delta y},$$

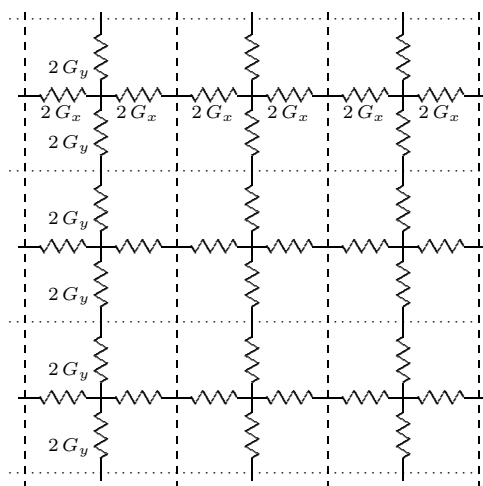
$$(47c) \quad G_z = \gamma \frac{hk}{\ell} = \gamma \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta z}.$$



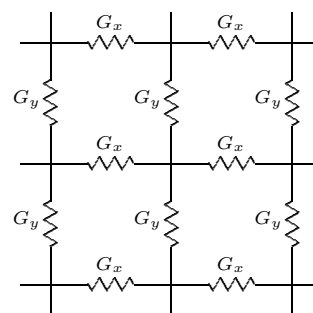
(a)



(b)

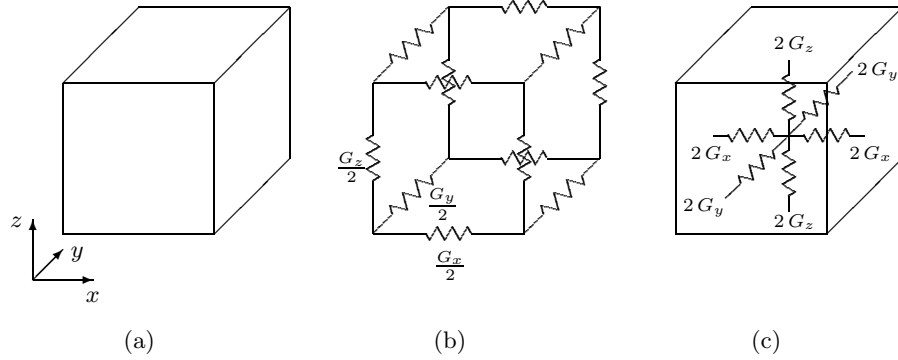


(c)



(d)

Sl. 3.7. Obrazovanje  $M$ -analogne mreže iz elementarnih mreža



Sl. 3.8. a) Trodimenzionalna diskretna ćelija za LAPLACEovu jednačinu  
b), c) Odgovarajuće elementarne mreže

PRIMEDBA 1. Ako su koraci diskretizacije jednaki, tada su sve provodnosti elementarnih mreža, a naravno i cele M-analogne mreže, međusobno jednake. Diskretne ćelije su sada kvadrati, odnosno kocke.

PRIMEDBA 2. Postavlja se pitanje da li je osim kvadrata moguće koristiti i druge pravilne mnogougaoike (poligone) za diskretne ćelije dvodimenzionalnih polja. Lako je dokazati da samo planarne diskretne ćelije u obliku kvadrata, ravnostranog trougla i pravilnog šestougla ispunjavaju uslov da se mogu složiti, tj. samo one potpuno prekrivaju ravan.

Pošto smo diskutovali pitanje elementarne mreže za LAPLACEovu jednačinu, ostaje sada da ovo pitanje proširimo na opštu jednačinu za raspodeljene statičke sisteme (32). Za razliku od načina koji smo koristili za LAPLACEovu jednačinu, koji je bio zasnovan na konceptu diskretne ćelije - način, dakle, više fizički - , način koji ćemo upotrebiti za opšti slučaj biće čisto analitički, tj. polazimo od diskretizovane jednačine (38). U posebnom slučaju  $J = 0$  i  $M = 0$ , dobijeni rezultat treba da potvrdi onaj koji smo dobili za LAPLACEovu jednačinu polazeći od koncepta diskretne ćelije.

Označimo sa  $\varphi_{ij}$  vrednost funkcije  $\varphi(x, y)$  u čvoru sa koordinatama  $(x_i, y_j)$  pravougaone rešetke  $G_{hk}$  na Sl. 3.3, tj. stavimo  $\varphi_{ij} = \varphi(x_i, y_j)$ . Isto tako stavimo  $J_{ij} = J(x_i, y_j)$ . Pošto je  $x_{i\pm 1} = x_i \pm h$  i  $y_{j\pm 1} = y_j \pm k$ , jednačinu (38) sa ovim oznakama možemo pisati u obliku *diferencne jednačine*

$$(48) \quad \frac{1}{h^2} (\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{ij} + \varphi_{i-1,j}) + \frac{1}{k^2} (\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{ij} + \varphi_{i,j-1}) = M\varphi_{ij} + J_{ij},$$

ili, posle preuređenja

$$(49) \quad \left(2\frac{k}{h} + 2\frac{h}{k} + hkM\right) \varphi_{ij} - \frac{k}{h} \varphi_{i+1,j} - \frac{k}{h} \varphi_{i-1,j} - \frac{h}{k} \varphi_{i,j+1} - \frac{h}{k} \varphi_{i,j-1} = -hkJ_{ij}.$$

Neka je  $K_\varphi$  dimenzioni faktor za promenljivu  $\varphi$ , tj. označimo sa  $v_{ij} = (1/K_\varphi) \varphi_{ij}$  napon koji odgovara čvoru  $(x_i, y_j)$  rešetke  $G_{hk}$ . Ako (48) pomnožimo sa  $G_0$ , gde je  $G_0$  po prirodi provodnost, (48) postaje

$$(50) \quad \left(2G_0 \frac{k}{h} + 2G_0 \frac{h}{k} + G_0 h k M\right) v_{ij} - G_0 \frac{k}{h} v_{i+1,j} - G_0 \frac{k}{h} v_{i-1,j} - G_0 \frac{h}{k} v_{i,j+1} - G_0 \frac{h}{k} v_{i,j-1} = -G_0 \frac{h k}{K_\varphi} J_{ij}.$$

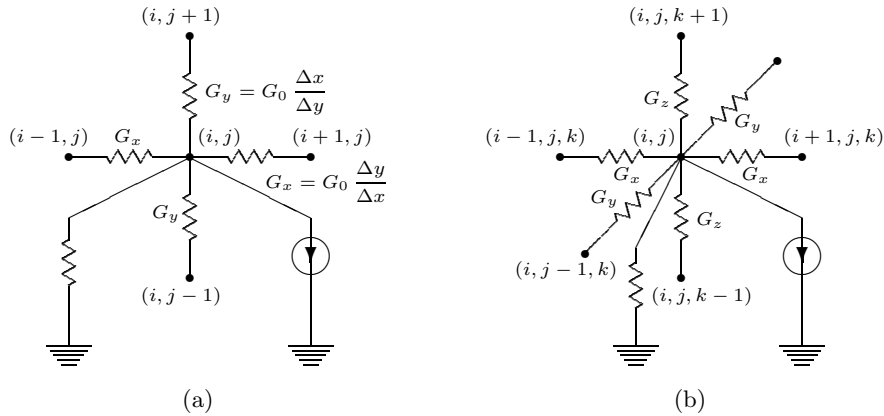
Ova jednačina pokazuje da se  $M$ -analogna mreža za diskretizovanu jednačinu raspodeljenih statičkih sistema (38) dobija na sledeći način:

1) svaki čvor  $(x_i, y_j)$  pravougaone rešetke  $G_{hk}$  zamenjuje se jednim čvorom  $(i, j)$   $M$ -analogne mreže;

2) između svaka dva čvora u pravcu  $x$ -ose vezan je otpornik provodnosti  $G_x = G_0 (k/h) = G_0 (\Delta y / \Delta x)$ , a u pravcu  $y$ -ose vezan je otpornik provodnosti  $G_y = G_0 (h/k) = G_0 (\Delta x / \Delta y)$ ;

3) između svakog čvora i referentnog vezan je otpornik provodnosti  $G_0 h k M = G_0 \Delta x \Delta y M$  i strujni izvor čija je struja  $G_0 \frac{h k}{K_\varphi} J_{ij} = G_0 \frac{\Delta x \Delta y}{K_\varphi} J_{ij}$  i čija je pozitivna orijentacija od čvora.

Na ovaj način električna  $M$ -analogna mreža se dobija međusobnim vezivanjem posredstvom čvorova jednotipnih mreža. Jedna takva mreža predstavljena je na Sl. 3.9a.



Sl. 3.9.  $M$ -elementarna mreža za jednačinu (38)

a) dvodimenzionalni sistemi b) trodimenzionalni sistemi

Uočavamo da ako bismo uveli  $G_0 = \gamma \ell$ , tada bi provodnosti  $G_x$  i  $G_y$  bile jednake onima datim izrazima (46). Ako je još  $M = 0$  i  $J = 0$ , tada mreža na Sl. 3.9a odgovara LAPLACEovoj jednačini. Ako je uporedimo sa elementarnom mrežom za diskretnu ćeliju na Sl. 3.6c, vidimo da su u ovoj provodnosti dva puta veće od odgovarajućih provodnosti mreže na Sl. 3.9a. Iz ovih razloga, ovu mrežu zovemo  $M$ -analogna mreža za jednačinu (38). Odgovarajuća elementarna mreža za diskretnu ćeliju se dobija iz  $M$ -elementarne mreže kada se u ovoj svaki  $x$ - i  $y$ -otpornik zameni rednom vezom dva identična otpornika čija je svaka provodnost

$2G_x$  i  $2G_y$ . Otpornik provodnosti  $G_0\Delta x\Delta yM$  predstavlja “odvodnost” diskretne ćelije, a strujni izvor predstavlja “datu struju” diskretne ćelije.

Na isti način se dobija i  $M$ -elementarna mreža za jednačinu (45). Ona je prikazana na Sl. 3.9b. Provodnosti  $G_x$ ,  $G_y$ ,  $G_z$  su date izrazima (47).

Ako su koraci diskretizacije jednaki, tada su sve provodnosti otpornika jednake.

PRIMEDBA 1. Pošto je u praksi teže ostvariti idealni strujni izvor od idealnog naponskog izvora, obično se paralelna veza strujnog izvora i otpornika na Sl. 3.9. zamenjuje ekvivalentnom rednom vezom idealnog naponskog izvora i istog otpornika. U slučaju POISSONOVE jednačine ( $M = 0$ ) ovaj otpornik ne postoji. Tada se strujni izvor zamenjuje rednom vezom naponskog izvora i otpornika čija je otpornost znatno veća (10 do 50 puta) od ostalih otpornosti vezanih u čvoru  $(i, j)$ . Struja  $j_{ij}$  se podešava promenom  $R_{ij}$ .

PRIMEDBA 2. Mi smo došli do  $M$ -elementarne mreže na osnovu  $M$ -analogije. Na isti način smo mogli pomoću transformacije  $j_{ij} = \varphi_{ij} (1/R_0 K_\varphi)$  tražiti  $K$ -elementarnu mrežu odnosno  $K$ -analognu mrežu. Pošto je  $K$ -analogna mreža *dualna*  $M$ -analogne mreže, jasno je da će prva postojati samo kada je  $M$ -analogna mreža *planarna*.

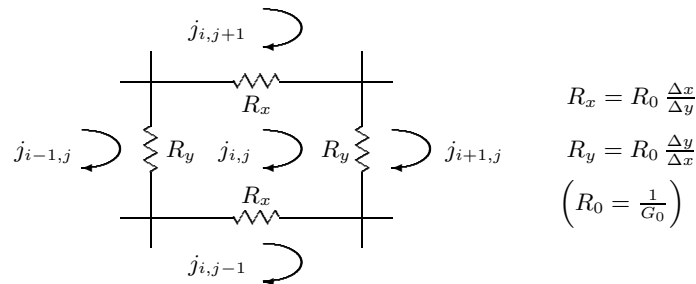
Drugim rečima postojaće u slučaju LAPLACEOVE jednačine dvodimenzionalnih polja. Isto tako postojaće u svim slučajevima jednodimenzionalnih polja.

**Vežbanje**

**3.3.** Što se može reći o egzistenciji jedinstvenog rešenja za POISSONOVU jednačinu?

**3.4.** Odrediti  $M$ - i  $K$ -analogne mreže i elementarne mreže za jednodimenzionalnu jednačinu (32).

**3.5.** Pokazati da je  $K$ -elementarna mreža za dvodimenzionalnu LAPLACEOVU jednačinu ona na Sl. 3.10.



Sl. 3.10.  $K$ -elementarna mreža za dvodimenzionalnu LAPLACEOVU jednačinu

### c) Granični uslovi

Mi smo pokazali kako se određuje  $M$ -analogna mreža za jednačinu (32), ali pri tome nismo vodili računa o graničnim uslovima. Prema tome, ovako određena mreža modeluje unutrašnjost polja. Da bismo zadovoljili date granične uslove, granica ove mreže mora se modifikovati. Ako je granica polja pravougaonik,

odnosno paralelepiped, što ćemo ovde kao i do sada pretpostaviti, tada zavisno od vrste graničnih uslova postupićemo na sledeći način.

Ako je data vrednost funkcije  $\varphi$  na granici polja  $\Gamma$ ,  $\varphi_\Gamma$ , (DIRICHLETov granični problem) tada ćemo korake  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  izabrati tako da čvorovi na granici mreže leže na stranicama na kojima je poznato  $\varphi_\Gamma$ .

Svi ovi čvorovi se vezuju za jedan kraj naponskog izvora čiji je napon jednak  $K_\varphi^{-1}\varphi$ . Drugi kraj naponskog izvora je vezan za referentni čvor-masu.

Za nalaženje graničnih uslova datih u obliku normalnog izvoda (NEUMANNov granični problem) ili mešovitih graničnih uslova; potrebno je prethodno aproksimirati vrednost normalnog izvoda (normalnog gradijenta) jednom od formula (34) – (36) za konačne priraštaje. Ako se koraci diskretizacije uzmu tako da na stranicama na kojima je dato  $(\frac{\partial\varphi}{\partial x})|_\Gamma$  i  $(\frac{\partial\varphi}{\partial y})|_\Gamma$  leže granični čvorovi  $(i, j)$  mreže, tada se iz jednačine konačnih priraštaja sa razlikom unazad za ove izvode uspostavlja veza između napona graničnih čvorova i napona susednih čvorova unutar mreže. Ako je, na primer, data vrednost  $(\frac{\partial\varphi}{\partial x})|_{(i,j)}$  na nekom čvoru  $(i, j)$  na granici mreže, tada se prema (34b) može pisati

$$(51) \quad v_{ij} = v_{i-1,j} + \frac{\Delta x}{K_\varphi} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}|_{(i,j)},$$

što pokazuje da između svakog graničnog čvora  $(i, j)$  u kome je dato  $(\frac{\partial\varphi}{\partial x})|_{(i,j)}$  i susednog čvora  $(i-1, j)$  levo od granice mreže treba vezati jedan naponski izvor napona  $\frac{\Delta x}{K_\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial x}|_{(i,j)}$ .

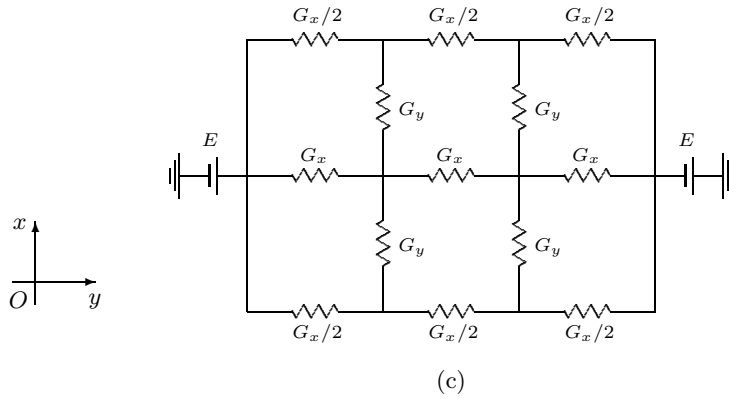
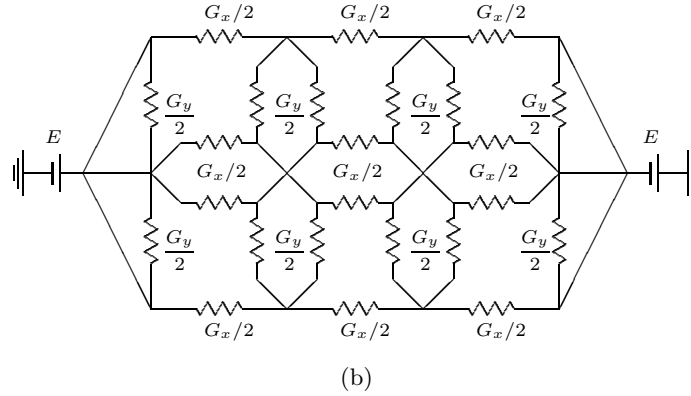
Posebno je važan slučaj kada je na nekim graničnim površinama polja vrednost normalnog gradijenta  $(\frac{\partial\varphi}{\partial n})|_\Gamma$  jednaka nuli, a vrednost  $\varphi_\Gamma$  nije specificirana. G. LIEBMANN<sup>1</sup> je pokazao da se za ovaj slučaj dobijaju zadovoljavajući rezultati ako se sve provodnosti otpornika na graničnim površinama zamene polovinom njihove vrednosti u unutrašnjosti polja. Fizičko tumačenje ove zamene leži u činjenici što se diskretne ćelije na granici polja modeluju elementarnim mrežama na Sl. 3.6b, odnosno Sl. 3.8b.

PRIMER 3.4. Odrediti  $M$ -analognu mrežu za metalnu ploču na Sl. 3.1.

Ako ploču podelimo na  $3 \times 2 = 6$  diskretnih ćelija, tada s obzirom na prirodu graničnih uslova svi čvorovi na levoj vertikalnoj stranici su vezani na naponski izvor napona  $E$ , a oni na desnoj vertikalnoj stranici su vezani na naponski izvor napona  $-E$ . Horizontalne stranice predstavljaju granice mreže gde su zadovoljeni LIEBMANNovi uslovi, i kao takve su predstavljene otpornicima provodnosti  $G_x/2$ , Sl. 3.11.

<sup>1</sup>G. LIEBMANN: *Electrical Analogues*. Brit. J. Appl. Physics, **4**, 193-200, 1953.



Sl. 3.11.  $M$ -analogna mreža za metalnu ploču na Sl. 3.1.

PRIMER 3.5. Odrediti  $M$ -analognu mrežu za homogeni i izotropni metalni blok provodnosti  $\gamma$ , predstavljen na Sl. 3.12a.

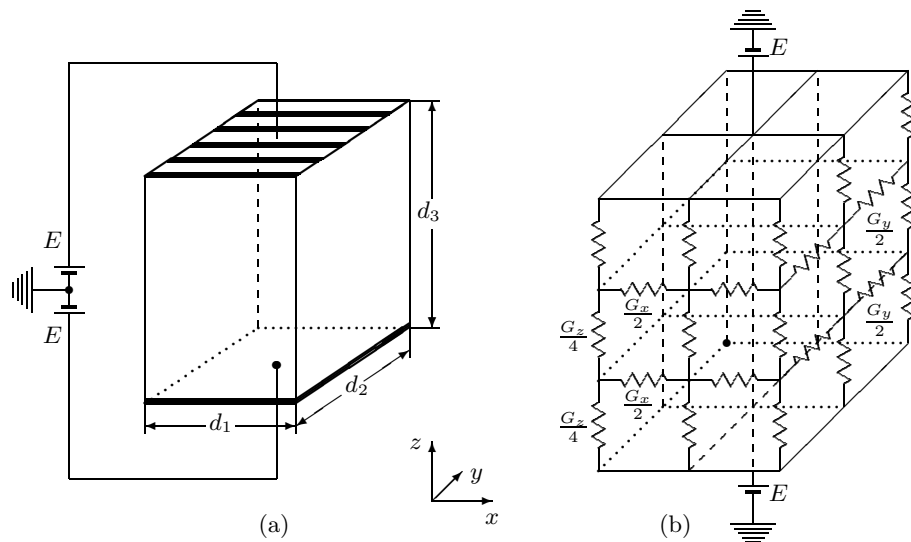
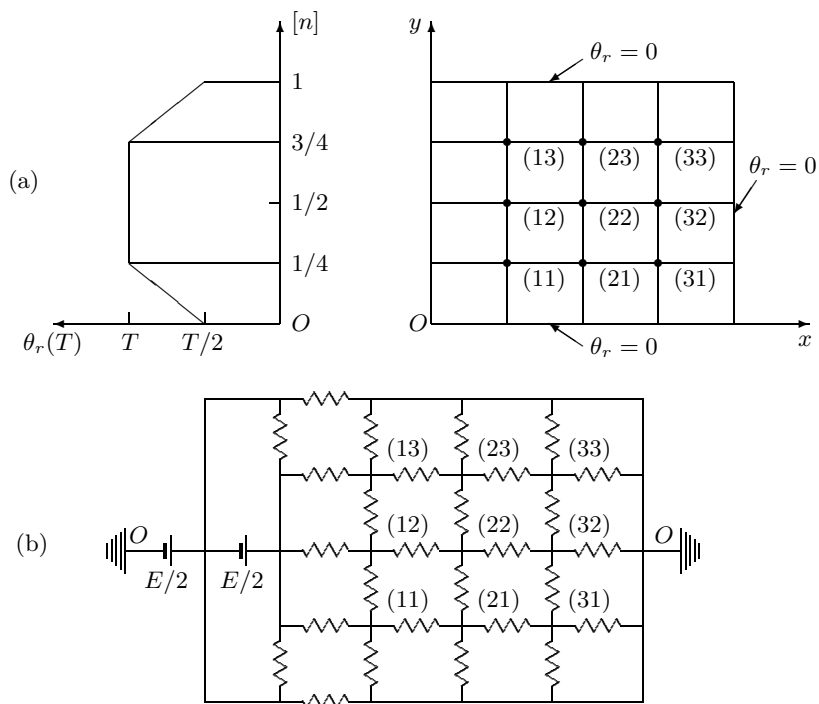
Blok smo podelili na  $2 \times 2 \times 3 = 12$  diskretnih ćelija. Svaka ćelija je predstavljena elementarnom mrežom prema Sl. 3.8b. Posle uprošćavanja,  $M$ -analogna mreža je prikazana na Sl. 3.12b. Vidimo da su provodnosti koje nisu ivične na površinama  $x = d_1/2$  i  $y = d_2/2$  jednake  $G_y/2$  i  $G_x/2$ , respektivno, i da su sve ivične provodnosti jednake  $G_z/4$ .

PRIMER 3.6. Potrebno je odrediti stacionarnu raspodelu temperature u homogenoj kvadratnoj ploči čija je stranica dužine 1 m pomoću  $M$ -analogne mreže. Raspodela temperature na rubovima,  $\theta_\Gamma$ , je poznata (Sl. 3.13a).

*Rešenje:* Funkcija  $\theta(x, y)$  koja daje raspodelu stacionarne temperature je rešenje dvodimenzionalne LAPLACEove jednačine

$$(52) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0,$$

pri datim graničnim uslovima.

Sl. 3.12. a) metalni blok b)  $M$ -analogna mrežaSl. 3.13. Modelovanje raspodele temperature  
a) kvadratna ploča b)  $M$ -analogna ploča

Uzmimo  $\Delta x = \Delta y = 1/4$  m i podelimo ploču na  $4 \times 4 = 16$  diskretnih ćelija kao na Sl. 3.13a. Pošto su date vrednosti temperature na granicama (DIRICHLETov granični problem),  $M$ -analognu mrežu ćemo sagraditi iz elementarnih mreža na Sl. 3.6c, odnosno iz  $M$ -elementarnih mreža, Sl. 3.9a u kojima ne postoji odvodni otpornik i strujni izvor. Ova mreža je prikazana na Sl. 3.13b. Unutrašnji čvorovi su označeni dvocifrenim brojevima prema položaju u koordinatnom sistemu  $xOy$ .

Jednačina (50) u našem slučaju je oblika

$$(53) \quad 4v_{i,j} - v_{i+1,j} - v_{i-1,j} - v_{i,j+1} - v_{i,j-1} = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

budući da su prema (43) sve provodnosti jednake  $G_0$ . Radi jednostavnosti možemo uzeti  $G_0 = 1$  S. Ako uzmemo dimenzioni faktor  $K_\theta = 1^\circ \text{C/V}$  brojne vrednosti napona čvorova biće jednake odgovarajućim vrednostima temperature.

Jednačina (52) se može pisati za napone 9 unutrašnjih čvorova. Međutim, zbog simetrije ploče i graničnih uslova u odnosu na pravu  $y = m/2$ , i sama  $M$ -analogna mreža je simetrična (ova mreža je u stvari jedan simetrični razdelnik napona) tako da je

$$(54) \quad v_{11} = v_{13}, \quad v_{21} = v_{23}, \quad v_{31} = v_{33}$$

i prema tome nije potrebno pisati jednačine za čvorove 13, 23 i 33.

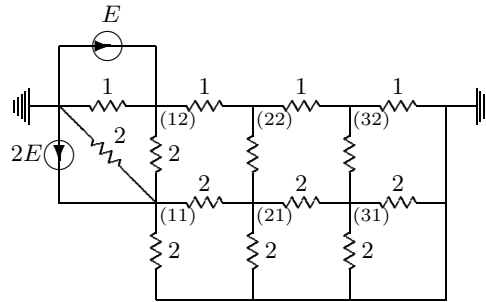
Za preostalih 6 čvorova: 11, 12, 21, 22, 31 i 32 diskretizovane jednačine (52), s obzirom na granične uslove, glase

$$(55) \quad \begin{aligned} 4v_{11} - v_{12} - v_{21} &= E, \\ 4v_{12} - 2v_{11} - v_{22} &= E, \\ 4v_{21} - v_{11} - v_{22} - v_{31} &= 0, \\ 4v_{22} - v_{12} - 2v_{21} - v_{32} &= 0, \\ 4v_{31} - 2v_{21} - 2v_{32} &= 0, \\ 4v_{32} - v_{22} - 2v_{31} &= 0. \end{aligned}$$

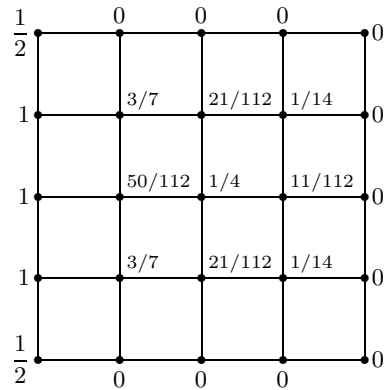
Do istog sistema jednačina dolazimo pišući jednačine napona čvorova mreže na Sl. 3.13b.

U tu svrhu, s obzirom na uslove simetrije (54), spojićemo čvorove 11 i 13, 21 i 23, i čvorove 31 i 33 premešćemo naponske izvore u grane konačnih provodnosti i izostavićemo suvišne grane. Dobijena mreža prikazana je na Sl. 3.14. Čitalac će se uveriti da su (55) jednačine napona čvorova za ovu mrežu.

Rešavanjem (55) dobijamo



Sl. 3.14. Transfigurisana mreža na Sl. 3.13.



Sl. 3.15. Dijagram normalizovane raspodele temperature

$$\begin{aligned}
 v_{11} &= \frac{3E}{7}, & v_{12} &= \frac{59E}{112}, & v_{13} &= \frac{3E}{7}, \\
 v_{21} &= \frac{21E}{112}, & v_{22} &= \frac{E}{4}, & v_{23} &= \frac{21E}{112}, \\
 v_{31} &= \frac{E}{14}, & v_{32} &= \frac{11E}{112}, & v_{33} &= \frac{E}{14}.
 \end{aligned}$$

Na Sl. 3.15. ucrtane su normalizovane vrednosti temperatura na pojedinim mestima ploče.

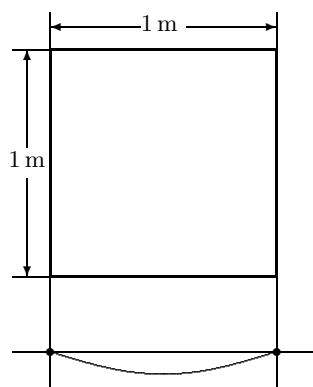
Neposredno se proverava da je temperatura u svakoj tački jednaka srednjoj vrednosti temperature susednih tačaka.

### Vežbanje

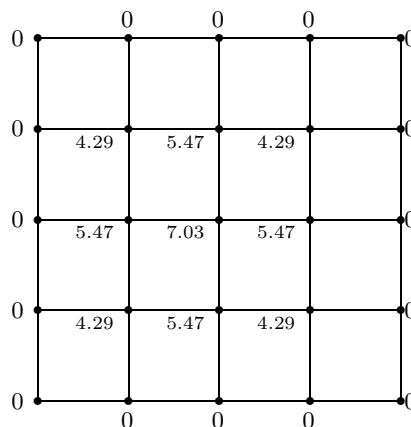
**3.6.** Pomoću  $M$ -analogne mreže odrediti deformaciju kvadratne, homogene, elastične membrane podvrgnute dejstvu konstantnog pritiska, Sl. 3.16. Pretpostavlja se da je membrana pričvršćena na ivicama (nula granični uslovi) i da deformacija  $z$  zadovoljava POISSONOVU jednačinu  $\nabla^2 z = -1$ .

Uzimati korake  $\Delta x = \Delta y = (1/4)$  m.

*Odgovor.* Deformacija u pojedinim tačkama u [cm]; data je na Sl. 3.17.



Sl. 3.16. Elastična membrana



Sl. 3.17. Dijagram deformacije ploče

### d) Kvalitet aproksimacije pri diskretizaciji raspodeljenih statičkih sistema

Pri modelovanju problema sa graničnim uslovima u statičkim režimima pomoću analogne mreže pravi se uglavnom dve vrste grešaka:

1. greške usled diskretizacije parcijalne diferencijalne jednačine;
2. greške usled tolerancije otpornika analogne mreže.

Ako se jednačine mreže reše nekom približnom numeričkom metodom, tada se pored greške usled diskretizacije, javlja i greška koja se pri tome čini.

Da bismo procenili grešku usled zamene parcijalne diferencijalne jednačine diferencnom jednačinom, predstavimo rešenje  $\varphi(x, y)$  jednačine (33) pomoću

TAYLORove formule.

Ako  $\varphi(x, y)$  ima neprekidne četvrte parcijalne izvode, tada za neku tačku  $(x_i, y_j) \in G$  važi

$$(56a) \quad \begin{aligned} \varphi(x_i \pm h, y_j) = \varphi(x_i, y_j) \pm h \frac{\partial \varphi(x_i, y_j)}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi(x_i, y_j)}{\partial x^2} \\ \pm \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 \varphi(x_i, y_j)}{\partial x^3} + O(h^4), \end{aligned}$$

$$(56b) \quad \begin{aligned} \varphi(x_i, y_j \pm k) = \varphi(x_i, y_j) \pm k \frac{\partial \varphi(x_i, y_j)}{\partial y} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi(x_i, y_j)}{\partial y^2} \\ \pm \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3 \varphi(x_i, y_j)}{\partial y^3} + O(k^4). \end{aligned}$$

Iz (56a) dobijamo

$$(57a) \quad \frac{\partial^2 \varphi(x_i, y_j)}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} \left( \varphi(x_i + h, y_j) - \varphi(x_i, y_j) + \varphi(x_i - h, y_j) \right) - O(h^3),$$

$$(57b) \quad \frac{\partial^2 \varphi(x_i, y_j)}{\partial y^2} = \frac{1}{k^2} \left( \varphi(x_i, y_j + k) - 2\varphi(x_i, y_j) + \varphi(x_i, y_j - k) \right) - O(k^3).$$

Sabiranjem (56a) i (56b) i dodavanjem svakoj strani dobijene jednačine izraz  $-M\varphi(x_i, y_j) - J(x_i, y_j)$ , imamo

$$(58) \quad \begin{aligned} \nabla^2 \varphi(x_i, y_j) - M\varphi(x_i, y_j) - J(x_i, y_j) = \frac{1}{h^2} \left( \varphi(x_i + h, y_j) - 2\varphi(x_i, y_j) \right. \\ \left. + \varphi(x_i - h, y_j) \right) + \frac{1}{k^2} \left( \varphi(x_i, y_j + k) - 2\varphi(x_i, y_j) + \varphi(x_i, y_j - k) \right) \\ - M\varphi(x_i, y_j) - J(x_i, y_j) - O(h^2) - O(k^2). \end{aligned}$$

Pošto  $\varphi(x, y)$  zadovoljava jednačinu (33) za svako  $(x_i, y_j) \in G$ , leva strana (58) je nula, tako da je

$$(59) \quad \begin{aligned} \frac{1}{h^2} \left( \varphi(x_i + h, y_j) - 2\varphi(x_i, y_j) + \varphi(x_i - h, y_j) \right) \\ + \frac{1}{k^2} \left( \varphi(x_i, y_j + k) - 2\varphi(x_i, y_j) + \varphi(x_i, y_j - k) \right) \\ = M\varphi(x_i, y_j) + J(x_i, y_j) + O(h^2) + O(k^2). \end{aligned}$$

*Kvalitet aproksimacije* se ocenjuje tačnošću kojom rešenje  $\varphi(x_i, y_j)$  date diferencijalne jednačine (33) zadovoljava diferencnu jednačinu (48). Jednačina (59) pokazuje da za svaku tačku unutar oblasti od interesa  $G$ , rešenje jednačine (33) zadovoljava diferencnu jednačinu (48) sa tačnošću reda  $O(h^2) + O(k^2)$ , odnosno da je greška aproksimacije jednačine (33) jednačinom (48) reda  $O(h^2) + O(k^2)$ .

U opštem slučaju, gornja procena greške za tačke  $(x_i, y_j)$  na rubu  $\Gamma$  oblasti  $G$  ne zadovoljava. Važno je istaći da dobijeni rezultat procenjuje grešku koja se čini kada se diferencijalna jednačina zamenjuje algebarsko-diferencnom jednačinom, a ne i stvarno odstupanje rešenja  $\varphi(x_i, y_j)$  diferencijalne jednačine (33) u nekoj tački  $(x_i, y_j)$  od rešenja  $\varphi_{ij}$  algebarsko-diferencne jednačine (48). Šta više, a *priori* nije jasno da li rešenje  $\varphi_{ij}$  jednačine (48) za usvojene korake diskretizacije  $h$  i  $k$  i za date granične uslove postoji ili ne. Ovo, pored ostalog, dolazi i otud što koeficijent  $M$  u (59) može biti *negativan*. Analogna mreža bi tada imala sve odvodne otpornike sa negativnom provodnošću. Takva mreža može da nema jedinstveno rešenje za napone čvorova. Ako bi nastao ovaj slučaj model bi bio defektan, odnosno fizički neprihvatljiv.

Može se pokazati da u slučaju LAPLACEove jednačine sa  $k = h$  rešenje DIRICHLETovog problema postoji, jedinstveno je, i da je odstupanje rešenja diferencne jednačine od stvarnog rešenja reda  $O(h)$ .

Na osnovu (59) može se, međutim, sigurno tvrditi da ako su četvrti parcijalni izvodi neprekidni u oblasti  $G$  i na rubu  $\Gamma$ , tada se smanjenjem koraka diskretizacije može postići da rešenja diferencne jednačine (48) sa proizvoljnom tačnošću aproksimira rešenje diferencijalne jednačine (33). U ovom kontekstu iskršava i važno pitanje da li se na osnovu modela konstruisanog sa jednim korakom i modela konstruisanog sa upola manjim korakom može nešto suditi o tačnosti rešenja. Prema *metodi ekstrapolacije*<sup>2,3</sup> može se tvrditi sledeće: Ako je  $\varphi'$  rešenje LAPLACEove jednačine sa korakom  $h' = h = k$ , a  $\varphi''$  rešenje sa korakom  $h'' = \frac{h}{2} = \frac{k}{2}$ , tada rešenje određeno sa  $\varphi = \varphi' - \frac{1}{3}(\varphi' - \varphi'')$  odgovara modelu sa korakom  $h''' = \frac{h}{4} = \frac{k}{4}$ . Što se tiče druge vrste greške - odstupanje otpornosti otpornika od propisanih vrednosti, statistička i eksperimentalna ispitivanja su pokazala<sup>4,5</sup> da ako se koriste *žičani otpornici* sa tolerancijom od  $\pm 1\%$ , odstupanje napona čvorova analogne mreže pri najgorim uslovima ne prelazi  $0.01 - 0.1\%$ .

#### e) Slučaj oblasti proizvoljnog oblika

Pri obrazovanju pravougaone rešetke  $G_{h,k}$  koja pokriva neku dvodimenzionalnu oblast  $G$  proizvoljnog oblika, Sl. 3.18, ne može se postići da sve tačke ruba  $\Gamma$  date oblasti prolaze kroz čvorove rešetke.

To znači da se prilikom korišćenja jednačine (48), odnosno iz nje izvedene jednačine napona čvorova  $M$ -analogne mreže (50), pored greške usled diskretizacije parcijalne diferencijalne jednačine, unosi *dopunska greška* usled zamene

2. G. LIEBMANN: *Solution of Partial Differential Equations with Resistance Network Analogues*. Brit. J. Appl. Physics, **1**, 92-103, 1950.

3. R. CULVER: *The Use of Extrapolation Techniques with Electrical Network Analogue Solutions*, Brit. Appl. Physics, **3**, 376-378, 1952.

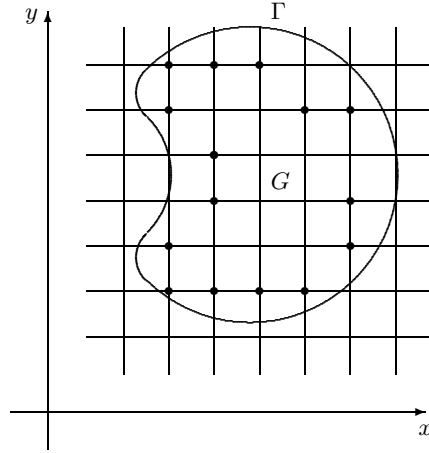
4. M. L. BYCHOVSKI: *Točnost' elektricheskikh setok dlya resheniya uravnenii Laplasa*. Izv. AN SSSR, OTN, No 4, 1950.

5. G. LIEBMANN: *Solution of Partial Differential Equations with a Resistive Network*. Brit. Appl. Physics, **1**, 92-103, 1950.

datih graničnih uslova u obliku  $\varphi_\Gamma$ ,  $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_\Gamma$ , i  $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_\Gamma$  i (ili) njihovih linearnih kombinacija njihovim vrednostima na čvorovima rešetke  $G_{hk}$  koji leže najbliže rubu  $\Gamma$ .

Pomoću pravih  $x_i = ih$ ,  $y_j = jk$  ( $h = \Delta x$ ,  $k = \Delta y$ ),  $(i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  obrazovaćemo pravougaonu rešetku  $G_{hk}$ . Svaki čvor rešetke koji leži unutar oblasti  $G$ , i sva četiri njegova susedna čvora leže takođe u oblasti  $G$  i (ili) na rubu  $\Gamma$  naziva se *unutrašnji čvor*. Ostali se nazivaju *granični čvorovi*. Na Sl.3.18. granični čvorovi su označeni kružićima. Neoznačeni čvorovi u  $G$  su unutrašnji.

Očigledno je da će greška usled zamene vrednosti datih graničnih uslova na rubu  $\Gamma$  njihovim vrednostima na graničnim čvorovima rešetke  $G_{hk}$  biti utoliko manja ukoliko su ovi granični čvorovi bliže rubu  $\Gamma$ .



Sl. 3.18. Pravougaona rešetka

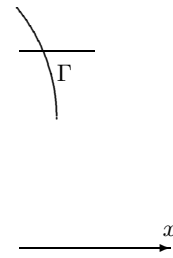
To se može postići finijom diskretizacijom, tj. smanjenjem koraka  $h$  i  $k$ .

Finija diskretizacija, međutim, zahteva glomazniju rešetku, odnosno složeniju  $M$ -analognu mrežu. Tako na primer, ako se koraci  $h$  i  $k$  prepolove, broj jednačina, odnosno broj diskretnih ćelija i  $M$ -elementarnih mreža se učetvorostručuje.

Ako su iz nekih posebnih razloga koraci  $k$  i  $h$  fiksirani, odnosno ne mogu se smanjiti ispod neke određene vrednosti, tada da bi se smanjila greška usled graničnih uslova. Koristi se *linearna interpolacija* kojom se potrebni granični uslovi u graničnim čvorovima aproksimiraju pomoću datih graničnih uslova. To se postiže tako što se parcijalni izvodi u graničnim čvorovima, umesto formulama (34)–(37), aproksimiraju formulama u kojima se na mesto normalnog koraka  $h$  i  $k$  uvode *skraćeni koraci*  $h_1$ ,  $h_2$  i  $k_1$ ,  $k_2$ , tako da je  $0 < h_i < h$  i  $0 < k_i < k$  ( $i = 1, 2$ ).

Posmatrajmo, na primer, granični čvor  $B(x_i, y_j)$  unutar oblasti  $G$  sa krivolinijskim rubom  $\Gamma$  na Sl.3.19.

Formule (34)–(37) zamenićemo odgovarajućim formulama:



Sl. 3.19. Aproksimacija parcijalnih izvoda za granične čvorove

$$(60a) \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} \approx \frac{\varphi(x_i + h_1, y_j) - \varphi(x_i, y_j)}{h_1}, \quad (60b) \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} \approx \frac{\varphi(x_i, y_j + k_1) - \varphi(x_i, y_j)}{k_1},$$

$$(61a) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \approx \frac{\varphi(x_i, y_j) - \varphi(x_i - h_2, y_j)}{h_2}, \quad (61b) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \approx \frac{\varphi(x_i, y_j) - \varphi(x_i, y_j - k_2)}{k_2},$$

$$(62a) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \approx \frac{\varphi(x_i + h_1, y_j) - \varphi(x_i - h_2, y_j)}{h_1 + h_2},$$

$$(62b) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \approx \frac{\varphi(x_i, y_j + k_1) - \varphi(x_i, y_j + k_2)}{k_1 + k_2},$$

$$(63a) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \approx \frac{\frac{\varphi(x_i + h_1, y_j) - \varphi(x_i, y_j)}{h_1} - \frac{\varphi(x_i, y_j) - \varphi(x_i - h_2, y_j)}{h_2}}{\frac{h_1 + h_2}{2}},$$

$$(63b) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \approx \frac{\frac{\varphi(x_i, y_j + k_1) - \varphi(x_i, y_j)}{k_1} - \frac{\varphi(x_i, y_j) - \varphi(x_i, y_j - k_2)}{k_2}}{\frac{k_1 + k_2}{2}}.$$

pri čemu su  $(h_1 + h_2)/2$  i  $(k_1 + k_2)$  srednje vrednosti odgovarajućih koraka.

Ako nema promene koraka, tj.  $h_1 = h_2 = h$  i  $k_1 = k_2 = k$ , formule (60)–(63) se svode, respektivno, na formule (34)–(37).

Na mesto (48), pomoću (63) pišemo

$$(64) \quad \begin{aligned} & \frac{2}{h_1(h_1 + h_2)} \varphi_{i+1,j} + \frac{2}{h_2(h_1 + h_2)} \varphi_{i-1,j} + \frac{2}{k_1(k_1 + k_2)} \varphi_{i,j+1} \\ & + \frac{2}{k_2(k_1 + k_2)} \varphi_{i,j-1} - \left( \frac{2}{h_1 h_2} + \frac{2}{k_1 k_2} \right) \varphi_{ij} = M \varphi_{ij} + J_{ij}, \end{aligned}$$

gde smo, kao i ranije, sa  $\varphi_{ij}$  označili vrednost funkcije  $\varphi(x, y)$  u čvoru  $x_i, y_j$ , tj.  $\varphi_{ij} = \varphi(x_i, y_j)$ , a sa  $\varphi_{i+1,j} = \varphi(x_i + h_1, y_j)$ ,  $\varphi_{i-1,j} = \varphi(x_i - h_2, y_j)$ ,  $\varphi_{i,j+1} = \varphi(x_i, y_j + k_1)$ ,  $\varphi_{i,j-1} = \varphi(x_i, y_j - k_2)$  vrednosti funkcije  $\varphi(x, y)$  u susednim čvorovima, a sa  $J_{i,j} = J(x_i, y_j)$ .

Množenjem (64) sa  $\frac{G_0}{K_\varphi} \frac{(h_1 + h_2)(k_1 + k_2)}{4}$  i preuređujući je, dobijamo jednačinu

$$(65) \quad \begin{aligned} & \left( G_0 \frac{(h_1 + h_2)(k_1 + k_2)}{2h_1 h_2} + G_0 \frac{(h_1 + h_2)(k_1 + k_2)}{2k_1 k_2} + G_0 M (h_1 + h_2)(k_1 + k_2) \right) \\ & - G_0 \frac{k_1 + k_2}{2h_1} v_{i+1,j} - G_0 \frac{k_1 + k_2}{2h_2} v_{i-1,j} - G_0 \frac{h_1 + h_2}{2k_1} v_{i,j+1} - G_0 \frac{h_1 + h_2}{2k_2} v_{i,j-1} \\ & = - \frac{G_0}{K_\varphi} \frac{(h_1 + h_2)(k_1 + k_2)}{4} J_{i,j}, \end{aligned}$$

koja karakteriše  $M$ -elementarnu mrežu predstavljenu na Sl. 3.20. Provodnosti u pravcu  $x$ - i  $y$ - ose, provodnost otočnog otpornika  $G_{ij}$  i struja  $j_{ij}$  strujnog izvora u čvoru  $(i, j)$  su ovde date izrazima



$$\begin{aligned}
 G_{x_1} &= G_0 \frac{k_1 + k_2}{2h_1}, & G_{x_2} &= G_0 \frac{k_1 + k_2}{2h_2}, \\
 G_{y_1} &= G_0 \frac{h_1 + h_2}{2k_1}, & G_{y_2} &= G_0 \frac{h_1 + h_2}{2k_2}, \\
 (66) \quad G_{ij} &= G_0 M \frac{(h_1 + h_2)(k_1 + k_2)}{4}, \\
 j_{ij} &= \frac{G_0}{\varphi} \frac{(h_1 + h_2)(k_1 + k_2)}{4} J_{ij}.
 \end{aligned}$$

Na sličan način se može izvesti  $M$ -elementarna mreža za granične čvorove u trodimenzionalnom slučaju.

Sada je potrebno još da se ispita kvalitet aproksimacije pri diskretizaciji pomoću jednačina (65).

Može se pokazati da je za jedan red veličine niži nego u slučaju oblasti pravougaonog ili paralelepipednog oblika, tj. za dvodimenzionalni slučaj on je reda  $O(h) + O(k)$ . Ovo se ostavlja čitaocu kao vežba.

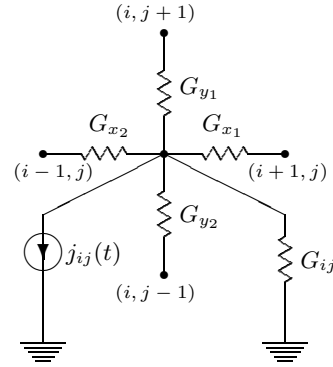
Prema tome, donekle smanjenje greške usled unošenja netačnih graničnih uslova ide na uštrb kvaliteta aproksimacije. Mogu se konstruisati složenije formule za aproksimiranje drugih parcijalnih izvoda koje zadržavaju istu grešku aproksimacije kao i u slučaju pravougaonih i paralelepipednih oblasti. One su međutim, zbog svoje složenosti nepodesne u modelovanju.

Jedna druga mogućnost korigovanja greške usled krivoliniskog ruba oblasti sastoji se u tome da se ove oblasti modeluju sitnijim korakom, a oblasti prema unutrašnjosti polja i u okolini rubova pravougaonog i paralelepipednog oblika - krupnijim korakom. To se postiže tako što se granične linije ili površine pomoću kojih se deli oblast  $G$  na niz podoblasti, tretiraju kao stvarne granice polja. Svaka podoblast se modeluje odgovarajućom mrežom, a ove mreže se potom spajaju pomoću graničnih čvorova. Na primer, ako je potrebno "istaći" deo  $S$  oblasti  $G$  na Sl. 3.21, da bismo povećali tačnost, ovaj deo modelujemo upola manjim korakom, tj. korakom  $h' = k' = h/2 = k/2$ .

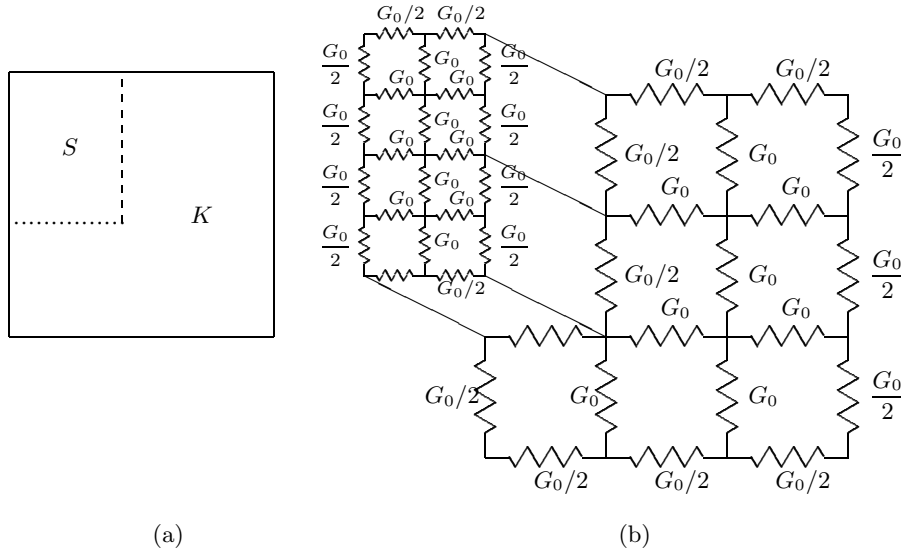
Za raspodeljene statičke sisteme sa cilindričnom ili sfernom simetrijom pogodnije je koristiti cilindrični odnosno sferni koordinatni sistem. Jednačine u ovim koordinatama se mogu diskretizovati, a zatim se konstruiše  $M$ -elementarna mreža. Na primer, može se dokazati da u slučaju POISSONOVE jednačine u cilindričnim koordinatama

$$(67) \quad \nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = f(r, \theta, z),$$

diferencna jednačina je



Sl. 3.20.  $M$ -elementarna mreža za jednačinu 38 u slučaju oblasti proizvoljnog oblika



Sl. 3.21. Promena koraka diskretizacije  
a)  $s$  = deo polja koji se modeluje "sitnim" koracima  $= h/2$ ;  $K$  = deo polja koji se modeluje krupnim korakom  $= h$  b)  $M$ -analogna mreža

$$\begin{aligned}
(68) \quad & \frac{(2r + \Delta r)(\varphi(r + \Delta r, \theta, z) - \varphi(r, \theta, z)) + (2r - \Delta r)(\varphi(r - \Delta r, \theta, z) - \varphi(r, \theta, z))}{2r\Delta r} \\
& + \frac{\varphi(r, \theta + \Delta\theta, z) - 2\varphi(r, \theta, z) + \varphi(r, \theta - \Delta\theta, z)}{r^2\Delta\theta^2} \\
& + \frac{\varphi(r, \theta, z + \Delta z) - 2\varphi(r, \theta, z) + \varphi(r, \theta, z - \Delta z)}{\Delta z^2} = f(r, \theta, z).
\end{aligned}$$

Na osnovu (68) može se ovako odrediti  $M$  elementarna mreža. To se ostavlja čitaocu kao vežba.

PRIMEDBA. Pošto se odrede parametri  $M$ -analogne mreže za svaki čvor  $(i, j)$  potrebno je ove  $M$ -analogne mreže međusobno povezati.

U slučaju tzv. *simetričnih* elementarnih mreža kod kojih su  $x$ -provodnosti i  $y$ -provodnosti međusobno jednake, tj.  $G_{x2} = G_{x1} = G_x$  i  $G_{y2} = G_{y1} = G_y$ , spajanje se jednostavno vrši vezivanjem čvorova susednih mreža. Kod *nesimetričnih* mreža,  $x$ - i  $y$ -provodnosti susednih mreža nisu međusobno jednake, pa se susedni čvorovi ne mogu neposredno spojiti. Da bismo ovo shvatili, posmatrajmo elementarne mreže za dva susedna čvora u jednodimenzionalnom slučaju, prikazane na Sl. 3.22.

Jednačina napona čvorova za središnji čvor  $(i)$  prve mreže je

$$(69a) \quad -G_{i-1,i} v_{i-1} + (G_{i-1,i} + G_i + G_{i+1,i}) v_i - G_{i+1,i} v_{i+1} = -j_i,$$

a jednačina za središnji čvor  $(i + 1)$  druge mreže je

$$(69b) \quad -G_{i,i+1} v_i + (G_{i,i+1} + G_{i+1} + G_{i+2,i+1}) v_{i+1} - G_{i+2,i+1} v_{i+2} = -j_{i+1}.$$

Ovde smeta što je  $G_{i+1,i} \neq G_{i,i+1}$ . Da bi ove dve jednačine predstavljale jednačine napona čvorova mreže na Sl. 3.22c, koja je nastala “spajanjem” ove dve mreže, pomnožićemo (69b) koeficijentom  $A_{i+1}$ .

Ovaj koeficijent ćemo izabrati tako da bude zadovoljen uslov

$$(70) \quad A_{i+1}G_{i,i+1} = G_{i+1,i} \quad i = 1, 1, 3 \dots$$

Ovim postupkom jednačine (69a) i (69b) su usaglašene prema mreži na Sl. 3.22c u kojoj nove vrednost provodnosti otočnog otpornika i struje strujnog izvora su u čvoru  $i + 1$  su

$$(71) \quad G'_{i+1} = A_{i+1}G_{i+1},$$

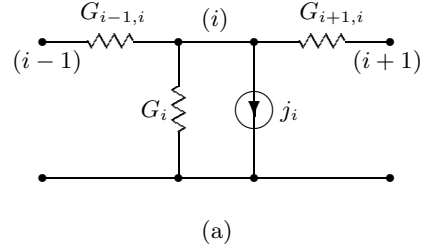
$$(72) \quad j'_{i+1} = A_{i+1}j_{i+1} \quad (1, 2, 3, \dots).$$

Na osnovu (70), (71) i (72) zaključujemo da se  $M$ -analogna mreža dobija od  $M$ -elementarnih mreža na taj način što se na prvu  $M$ -elementarnu mrežu ( $i = 1$ ) dodaje druga *bez levog rednog otpornika* i sa parametrima  $G'_2$  i  $j'_2$  određenim iz (71) i (72). Potom se na ovu mrežu dodaje treća *bez levog otpornika* i sa parametrima  $G'_3$  i  $j'_3$  određenim iz (71) i (72). Postupak se na isti način nastavlja sa svim daljim  $M$ -elementarnim mrežama. Provodnost srednjeg rednog otpornika između čvorova ( $k$ ) i ( $k + 1$ ) počev od drugog čvora se dobija množenjem provodnosti prethodnog otpornika između čvorova ( $k - 1$ ) i ( $k$ ) koeficijentom  $A_{k+1}$ , a provodnost otočnog otpornika i strujnog izvora se određuje iz (71) i (72).

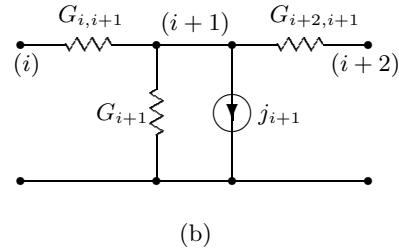
Ovaj postupak *usaglašavanja* provodnosti spojenih  $M$ -elementarnih mreža može se primeniti i u dvodimenzionalnom, odnosno trodimenzionalnom slučaju.

#### f) Nehomogena statička polja

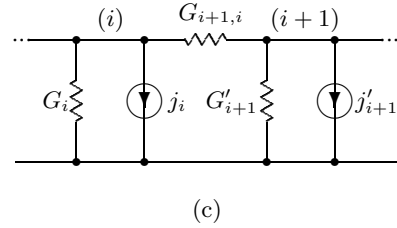
Pravougaona, odnosno paralelepipedna rešetka sa promenljivim korakom koja se koristi u slučaju oblasti proizvoljnog oblika, upotrebljava se i za izvođenje  $M$ -analogne mreže za nehomogena statička polja. Da bismo to pokazali, posmatrajmo planarno statičko polje u savršenom dielektriku. Pretpostavićemo da je *sredina izotopna*, da je *dielektrik nehomogen*, tj. dielektrična konstanta  $\varepsilon$  je



(a)



(b)



(c)

Sl. 3.22. Spajanje  $M$ -elementarnih mreža (jednodimenzioni slučaj)

a)  $M$ -elementarna mreža za čvor  $i$

b)  $M$ -elementarna mreža za čvor  $i + 1$

c) mreža dobijena spajanjem

$M$ -elementarnih mreža

funkcija prostornih koordinata  $x, y$ .

Ako sa  $\vec{K} = K_x \vec{i} + K_y \vec{j}$  označimo vektor električnog polja, sa  $\rho$  gustinu elektriciteta u datoj tački polja, a sa  $\varphi$  potencijal, iz jednačina

$$(73) \quad \operatorname{div}(\varepsilon \vec{K}) = \rho,$$

$$(74) \quad \vec{K} = -\operatorname{grad} \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j}$$

dobijamo

$$(75) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = -\rho.$$

Posmatrajmo neku tačku polja  $M(x_i, y_j)$  i različite priraštaje koordinata  $x$  i  $y$  u pozitivnom i u negativnom pravcu. Parcijalni izvodi za jednačinu (75) mogu se tada zamieniti približnim izrazima

$$(76) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \Big|_{(x_i+h_1, y_j)} \approx \varepsilon(x_i+h_1, y_j) \frac{\varphi(x_i+h_1, y_j) - \varphi(x_i, y_j)}{h_1},$$

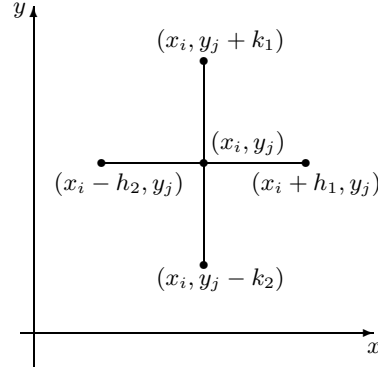
$$(77) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \Big|_{(x_i-h_2, y_j)} \approx \varepsilon(x_i-h_2, y_j) \frac{\varphi(x_i, y_j) - \varphi(x_i-h_2, y_j)}{h_2}.$$

Na isti način dobijamo i približnu vrednost izvoda po  $y$

$$(78) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \Big|_{(x_i, y_j)} &\approx \frac{\left( \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \Big|_{(x_i+h_1, y_j)} - \left( \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \Big|_{(x_i-h_2, y_j)}}{\frac{1}{2}(h_1+h_2)} \\ &= \frac{2\varepsilon(x_i+h_1, y_j)}{h_1(h_1+h_2)} \varphi(x_i+h_1, y_j) + \frac{2\varepsilon(x_i-h_2, y_j)}{h_2(h_1+h_2)} \varphi(x_i-h_2, y_j) \\ &\quad - \frac{2\varepsilon(x_i+h_1, y_j)}{h_1(h_1+h_2)} \varphi(x_i, y_j) - \frac{2\varepsilon(x_i-h_2, y_j)}{h_2(h_1+h_2)} \varphi(x_i, y_j), \end{aligned}$$

$$(79) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \Big|_{(x_i, y_j)} &\approx \frac{\left( \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \Big|_{(x_i, y_j+k_1)} - \left( \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \Big|_{(x_i, y_j-k_2)}}{\frac{1}{2}(k_1+k_2)} \\ &= \frac{2\varepsilon(x_i, y_j+k_1)}{k_1(k_1+k_2)} \varphi(x_i, y_j+k_1) + \frac{2\varepsilon(x_i, y_j-k_2)}{k_2(k_1+k_2)} \varphi(x_i, y_j-k_2) \\ &\quad - \frac{2\varepsilon(x_i, y_j+k_1)}{k_1(k_1+k_2)} \varphi(x_i, y_j) - \frac{2\varepsilon(x_i, y_j-k_2)}{k_2(k_1+k_2)} \varphi(x_i, y_j). \end{aligned}$$

Kada se parcijalni izvodi u (75) zamene njihovim približnim vrednostima iz



Sl. 3.23. Određivanje parcijalnih izvoda za jednačinu (75)

(78) i (79), dobija se

$$(80) \quad \left( \frac{2\varepsilon(x_i + h_1, y_j)}{h_1(h_1 + h_2)} + \frac{2\varepsilon(x_i - h_2, y_j)}{h_2(h_1 + h_2)} + \frac{2\varepsilon(x_i, y_j + k_1)}{k_1(k_1 + k_2)} + \frac{2\varepsilon(x_i, y_j - k_2)}{k_2(k_1 + k_2)} \right) \varphi(x_i, y_j) \\ - \frac{2\varepsilon(x_i + h_1, y_j)}{h_1(h_1 + h_2)} \varphi(x_i + h_1, y_j) - \frac{2\varepsilon(x_i - h_2, y_j)}{h_2(h_1 + h_2)} \varphi(x_i - h_2, y_j) \\ - \frac{2\varepsilon(x_i, y_j + k_1)}{k_1(k_1 + k_2)} \varphi(x_i, y_j + k_1) - \frac{2\varepsilon(x_i, y_j - k_2)}{k_2(k_1 + k_2)} \varphi(x_i, y_j - k_2) = \varrho(x_i, y_j).$$

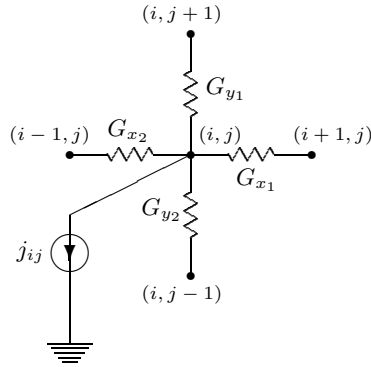
Množeći (80) sa  $\frac{G_0}{K_\varphi} \frac{(h_1 + h_2)(k_1 + k_2)}{4}$  i stavljajući radi jednostavnosti kao i ranije  $\varphi(x_i, y_j) = \varphi_{ij}$ , itd., i uvodeći  $\varepsilon(x_i + h_1, y_j) = \varepsilon_{i+1,j}$ ,  $\varepsilon(x_i - h_2, y_j) = \varepsilon_{i-1,j}$ ,  $\varepsilon(x_i, y_j + k_1) = \varepsilon_{i,j+1}$  i  $\varepsilon(x_i, y_j - k_2) = \varepsilon_{i,j-1}$ , jednačinu (80) pišemo u obliku

$$(81) \quad (G_{x_1} + G_{x_2} + G_{y_1} + G_{y_2})v_{ij} - G_{x_1}v_{i+1,j} - G_{x_2}v_{i-1,j} - G_{y_1}v_{i,j+1} - G_{y_2}v_{i,j-1} = j_{ij},$$

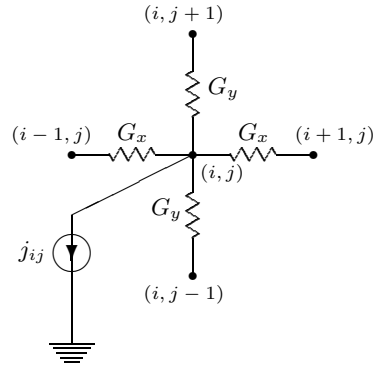
gde je

$$(82) \quad G_{x_1} = G_0 \frac{\varepsilon_{i+1,j}(k_1 + k_2)}{2h_1}, \quad G_{x_2} = G_0 \frac{\varepsilon_{i-1,j}(k_1 + k_2)}{2h_2}, \\ G_{y_1} = G_0 \frac{\varepsilon_{i,j+1}(h_1 + h_2)}{2k_1}, \quad G_{y_2} = G_0 \frac{\varepsilon_{i,j-1}(h_1 + h_2)}{2k_2}, \\ j_{ij} = \frac{G_0}{K_\varphi} \frac{(h_1 + h_2)(k_1 + k_2)}{4} \varrho_{ij}.$$

Jednačina (82) predstavlja jednačinu napona čvorova  $M$ -elementarne mreže prikazane na Sl. 3.24.



Sl. 3.24  $M$ -elementarna mreža za jednačinu (80)



Sl. 3.25.  $M$ -elementarna mreža za jednačinu (83)

### g) Nelinearna jednačina eliptičnog tipa

Mnogi nelinearni raspodeljeni sistemi u statičkim režimima opisani su jedinačinom eliptičnog tipa

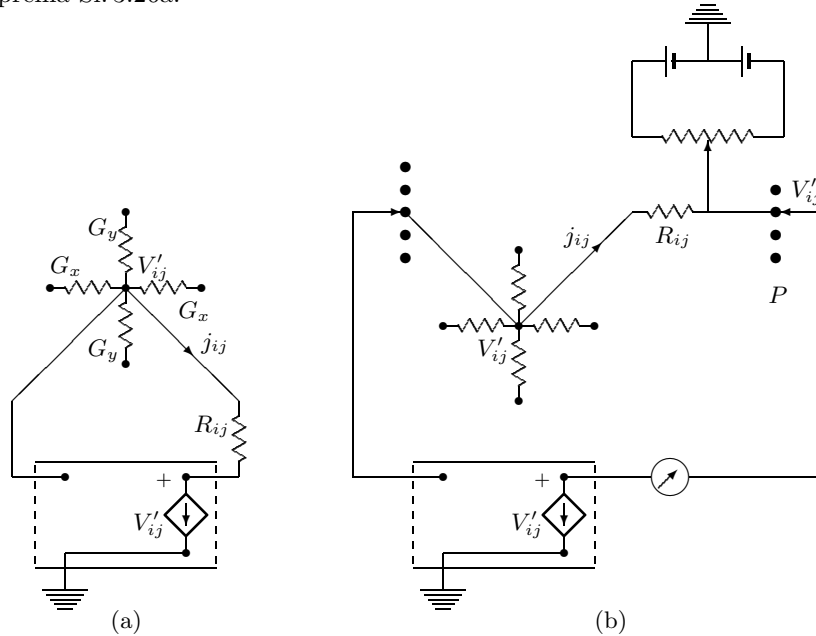
$$(83) \quad \nabla^2 \varphi = J(\varphi).$$

Ovom jednačinom se, na primer, opisuje raspodela prostornog električnog opterećenja u elektronskim cevima. Istom jednačinom se opisuju i neki problemi elektronske optike. Budući da je leva strana identična sa levom stranom jednačine (32), očigledno je da će se  $M$ -elementarna mreža za jednačinu (83) u dvodimenzionalom slučaju razlikovati od one za jednačinu (32) samo po otočnim elementima. Naime, budući da se desna strana predstavlja strujnim izvorom struje  $j_{ij} = G_0 \frac{\Delta x \Delta y}{K_\varphi} J(K_\varphi v_{ij})$ ,  $M$ -elementarna mreža izgleda kao na Sl. 3.25.

Ovaj strujni izvor je u stvari nelinearni  $i$ -otpornik kontrolisan naponom. Njegov napon  $v_{ij}$  mora imati vrednost koja zadovoljava karakteristiku

$$(84) \quad j_{ij} = G_0 \frac{\Delta x \Delta y}{K_\varphi} J(K_\varphi v_{ij}).$$

Međutim, pošto  $v_{ij}$  nije poznato (napon  $v_{ij}$  je određen tek pošto se reše jednačine napona čvorova  $M$ -analogne mreže), vrednost struje  $j_{ij}$  u svakom čvoru podešavati iterativnim putem. To se obično radi tako što se nelinearna karakteristika (84) ostvaruje indirektnim putem. Naime, na mesto naponom kontrolisane karakteristike koristi se strujom kontrolisana karakteristika, te se nelinearni otpornik vezuje na red sa jednim linearnim otpornikom otpornosti  $R_{ij}$  prema Sl. 3.26a.



Sl. 3.26. Podešavanje struje  $j_{ij}$

a) automatsko podešavanje b) iterativno podešavanje

Napon  $v'_{ij}$  se određuje iz uslova

$$(85) \quad v_{ij} = R_{ij}j_{ij} + v'_{ij},$$

ili posle unošenja  $j_{ij}$  iz (84)

$$(86) \quad v'_{ij} = v_{ij} - R_{ij}G_0 \frac{\Delta x \Delta y}{K_\varphi} J(K_\varphi v_{ij}) = \Phi(v_{ij}).$$

Vidimo da struja  $j_{ij}$ , koja je potrebna u čvoru  $(i, j)$  da bi se zadovoljila diskretizovana jednačina (83), ostvaruje se *automatski* generisanjem napona  $v'_{ij} = \Phi(v_{ij})$ . Fizičke naprave koje ostvaruju ovakvu karakteristiku obično se nazivaju *generatori funkcija*. Za modelovanje nelinearne funkcije  $J(\varphi)$  automatskim putem, potrebno je imati u svakom čvoru  $(i, j)$   $M$ -analogne mreže jedan generator funkcija, što je nepraktično. Naime, išlo se za tim da se ovo modelovanje izvede samo pomoću jednog generatora funkcija. Sl. 3.26b prikazuje jedan generator funkcija čiji je napon  $v'_{ij}$  dat desnom stranom jednačine (86). Ovaj generator se redom priključuje na sve čvorove mreže pomoću jednog preklopnika. U svakom čvoru  $(i, j)$  pomoću jednog potencimetra  $P$  i dodatog otpornika  $R_{ij}$  ostvaruje se struja  $j_{ij}$ . Napon klizača potencimetra kompenzira se naponom  $v'_{ij}$  generatora funkcija, tako da se dobije nula-skretanje miliampermetra. Pošto se pri podešavanju struja u nekom čvoru remeti ravnoteža u čvorovima u kojima je podešavanje izvršeno, potrebno je, pošto se pređu svi čvorovi, ponoviti podešavanje nekoliko puta. Ovakav način podešavanja u više ciklusa naziva se iterativno i ono je slično poznatoj matematičnoj metodi rešavanja nelinearnih algebarskih jednačina metodom sukcesivnih aproksimacija (iteracija).

### Vežbanja

**3.7.** Dokazati da na rubu oblasti proizvoljnog oblika rešenje  $\varphi(x, y)$  jednačine (33) zadovoljava diferencnu jednačinu (64) sa tačnošću  $O(h) + O(k)$ .

**3.8.** Odrediti  $M$ -elementarnu mrežu za POISSONovu jednačinu u cilindričnim koordinatama.

## 3.2.2. RASPODELJENI DINAMIČKI SISTEMI

Za razliku od raspodeljenih statičkih sistema čije je osnovno obeležje postojanje samo jedne vrste energije, raspodeljeni dinamički sistemi sadrže *dve odnosno tri vrste energije*, pri čemu je bar jedna energija akumulativna. Stoga treba očekivati da će odgovarajuća analogna diskretna mreža biti obrazovana od  $R$  i  $C$  ( $R$  i  $L$ ) odnosno  $RLC$  elemenata. Linearni raspodeljeni dinamički sistemi su karakterisani parcijalnim diferencijalnim jednačinama paraboličnog i hiperboličnog tipa. U narednim redovima izložićemo modelovanje nekih od najpoznatijih jednačina paraboličnog i hiperboličnog tipa.

### a) Difuziona jednačina sa raspodeljenim izvorima

Oblik ove jednačine u dvodimenzionalnom pravouglom koordinatnom sistemu je

$$(87) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = K \frac{\partial \varphi}{\partial x} + J(x, y, t).$$

Ako se izvrši diskretizacija prostornih koordinata, tada na osnovu (37) gornja jednačina postaje

$$(88) \quad \frac{\varphi(x_i + h, y_j, t) - 2\varphi(x_i, y_j, t) + \varphi(x_i - h, y_j, t))}{h^2} + \frac{\varphi(x_i, y_j + k, t) - 2\varphi(x_i, y_j, t) + \varphi(x_i, y_j - k, t))}{k^2} \approx K \frac{d\varphi(x_i, y_j, t)}{dt} + J(x_i, y_j, t),$$

pri čemu smo parcijalni izvod po vremenu zamenili običnim izvodom, jer je funkcija  $\varphi(x, y, t)$  u svakom čvoru  $x = x_i$ ,  $y = y_j$  pravougaone rešetke zavisna samo od vremena  $t$ .

Stavljajući  $\varphi_{ij}(t) = \varphi(x_i, y_j, t)$ ,  $J_{ij}(t) = J(x_i, y_j, t)$ ,  $v_{ij}(t) = K_\varphi^{-1} \varphi_{ij}(t)$  i  $t = K_t t_e$ , i množenjem sa  $-G_0 h k$ , jednačina (58) postaje

$$(89) \quad \left( 2G_0 \frac{h}{k} + 2G_0 \frac{k}{h} + \frac{G_0 K}{K_t} h k D \right) v_{ij} - G_0 \frac{k}{h} v_{i+1,j} - G_0 \frac{k}{h} v_{i-1,j} - G_0 \frac{h}{k} v_{i,j+1} - G_0 \frac{h}{k} v_{i,j-1} = -K_\varphi^{-1} G_0 h k J_{ij}(K_t t_e),$$

gde smo, radi jednostavnosti, izostavili zavisnost pojedinih napona od vremena, a sa

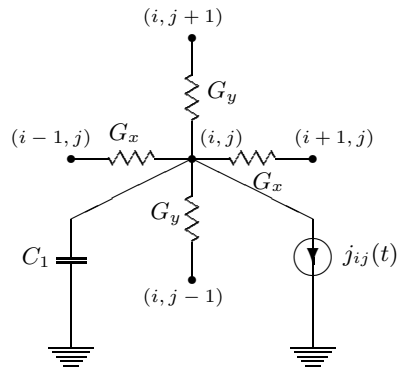
$$(90) \quad D = \frac{d}{dt_e}$$

označili smo napon diferenciranja po “električnom” vremenu.

Jednačina (89) predstavlja jednačinu napona čvorova  $M$ -elementarne mreže prikazane na Sl. 3.27.

$$G_x = G_0 \frac{k}{h}, \quad G_y = G_0 \frac{h}{k},$$

$$C = G_0 \frac{K}{K_t} h k \quad j_{ij}(t_e) = \frac{G_0}{K_\varphi} h k J_{ij}(K_t t_e).$$



Sl. 3.27.  $M$ -elementarna mreža za jednačinu (89)



Na isti način, polazeći od jednodimenzionalne difuzione jednačine sa raspodeljenim izvorima

$$(91) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = K \frac{\partial \varphi}{\partial t} + J(x, t),$$

izvodimo jednačinu napona čvorova  $M$ -elementarne mreže prikazane na Sl. 3.28.

$$(92) \quad \left(2G_0 + \frac{G_0 K}{K_0} h^2 D\right) v_i - G_0 v_{i+1} - G_0 v_{i-1} = K_\varphi^{-1} G_0 h^2 J_i(t).$$

U slučaju kada ne postoje unutrašnji raspodeljeni izvori, tj.  $J(x, t) = 0$ , ova mreža predstavlja jednu diskretnu ćeliju homogenog dvožičnog  $RC$  voda. Kaskadnom vezom  $M$ -elementarnih mreža dobija se analogna mreža za ceo vod.

PRIMEDBA 1. Osnovni faktor koji određuje izbor pogodnih vrednosti za korake diskretizacije  $h$  i  $k$  kod raspodeljenih statičkih sistema jeste željena tačnost. Kod raspodeljenih dinamičkih sistema mora se, međutim, voditi računa i o vremenu koje se može dopustiti na modelu s obzirom na uslove merenja, odnosno pogodnosti računanja.

Tako, na primer, difuzioni procesi koji u prirodi mogu trajati nekoliko dana, pa i nekoliko godina, (biološke i astrofizičke pojave) moraju se završiti na modelu za najviše nekoliko minuta. To nam određuje faktor razmere za vreme  $K_t = t/t_e$ .

Ako su koraci  $h$  i  $k$  utvrđeni s obzirom na zahteve u pogledu tačnosti aproksimacije, tada se iz formula uz Sl. 3.27. mogu izračunati

$$\frac{G_x}{G_0} = \frac{k}{h}, \quad \frac{G_y}{G_0} = \frac{k}{h} \quad \text{i} \quad \frac{C}{G_0} = \frac{K}{K_t} h k, \quad G_0 \text{ proizvoljno,}$$

$$C = G_0 \frac{K}{K_t} h^2, \quad j_{ij}(t) = \frac{G_0}{K_\varphi} h^2 J_i(K_t t_e).$$

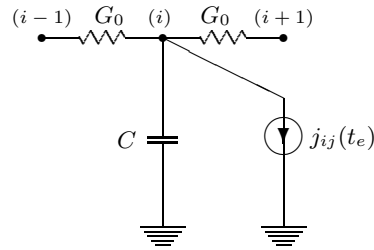
Pošto se usvoji dimenzioni faktor  $K_\varphi$  i zadaje odnos maksimalne trenutne vrednosti,  $[j_{ij}(t)]_{\max}$ ,  $\alpha$ , tj.  $\alpha = \frac{G_0 h k}{K_\varphi}$ , izračunava se konstanta  $G_0$  kao  $G_0 = \frac{\alpha K_\varphi}{h k}$ . Time su određene vrednosti parametara  $G_x$ ,  $G_y$  i  $C$   $M$ -elementarne mreže.

### b) Talasna jednačina

Ako se u dvodimenzionalnoj talasnoj jednačini

$$(93) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

izvrši diskretizacija prostornih koordinata, dobija se obična diferencna jednačina



Sl. 3.28.  $M$ -elementarna mreža za jednačinu (92)

$$(94) \quad \frac{\varphi(x_i + h, y_j) - 2\varphi(x_i, y_j) + \varphi(x_i - h, y_j)}{h^2} + \frac{\varphi(x_i, y_j + k) - 2\varphi(x_i, y_j) + \varphi(x_i, y_j - k)}{k^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \varphi(x_i, y_j, t)}{dt^2}.$$

Sa istim granama kao za difuzionu jednačinu, jednačina (94) je analogna jednačini

$$(95) \quad \left( 2G_0 \frac{h}{k} + 2G_0 \frac{k}{h} + \frac{G_0 h k}{c^2 K_t^2} D^2 \right) v_{ij} - G_0 \frac{k}{h} v_{i+1,j} - G_0 \frac{h}{k} v_{i-1,j} - G_0 \frac{h}{k} v_{i,j+1} - G_0 \frac{h}{k} v_{i,j-1} = 0.$$

odnosno jednačini

$$(96) \quad \left( 2G_0 \frac{h}{k} K_t \frac{1}{D} + 2G_0 \frac{k}{h} K_t \frac{1}{D} + \frac{G_0}{c^2 K_t} D \right) v_{ij} - G_0 \frac{k}{h} K_t \frac{1}{D} v_{i+1,j} - G_0 \frac{h}{k} K_t \frac{1}{D} v_{i-1,j} - G_0 \frac{h}{k} K_t \frac{1}{D} v_{i,j+1} - G_0 \frac{h}{k} K_t \frac{1}{D} v_{i,j-1} = 0$$

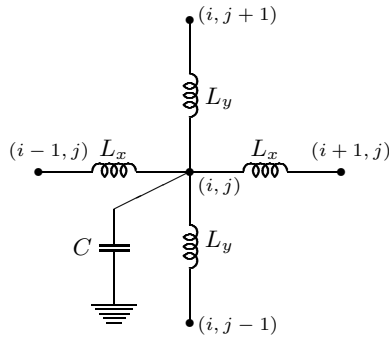
što predstavlja jednačinu napona čvorova  $M$ -elementarne mreže na Sl. 3.29.

Istim postupkom se dobija i  $M$ -elementarna mreža na Sl. 3.30. za slučaj jednodimenzionalne talasne jednačine. Ova mreža predstavlja diskretnu ćeliju homogenog dvožičnog  $LC$  voda (voda bez gubitaka).

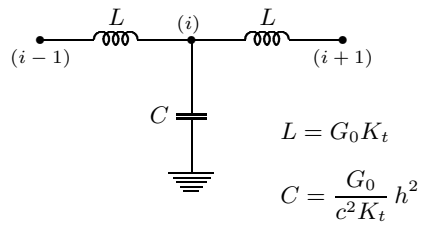
Čitalac će se uveriti da mreža na Sl. 3.31. predstavlja  $M$ -elementarnu mrežu za diskretizovani oblik opšte hiperbolične jednačine

$$(97) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = K \frac{\partial \varphi}{\partial t} + L \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + M \varphi + J(x, y, t),$$

i sam će odrediti njene parametre.



Sl. 3.29.  $M$ -elementarna mreža za jednačinu (95)



Sl. 3.30.  $M$ -elementarna mreža za diskretizovanu jednodimenzionalnu talasnu jednačinu

Analogna mreža za talasnu jednačinu je manje pogodna od analogne mreže za difuzionu jednačinu, jer ona zahteva savršene kalemove, bez otpornosti, koji se praktično ne mogu realizovati.

Kasnije ćemo videti da su  $LC$  analogne mreže korisne za određivanje ustaljenog odziva ako su pobudni izvori graničnih uslova prostoperiodični odnosno poliharmonični.

### c) Jednačina ustaljene difuzije čestica

Ako se u nekom prostoru ispunjenom inernim gasom ili tečnošću nalazi izvor koji ispušta čestice, tada, pod dejstvom sila molekularne difuzije, one teže da se raspodele tako da njihova koncentracija u svakoj tački bude ista. Koncentracija čestica je potencijalna funkcija i režirana je prostom difuzionom jednačinom (13).

Ako se, međutim, fluid nalazi u pokretnom stanju (na primer vazдушna masa koja se kreće pod dejstvom vetra), tada se moraju uzeti u obzir kako lokalna turbulentna strujanja, tako isto i kretanje samog fluida.

Difuzionu jednačinu koja opisuje koncentraciju čestica je sada oblika

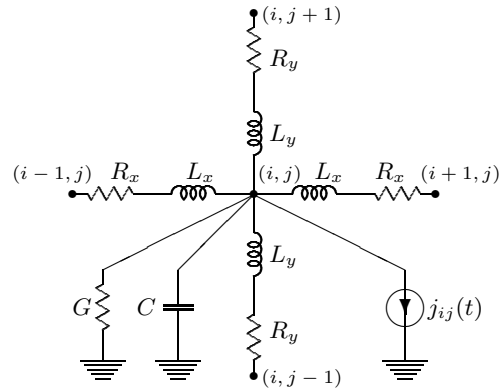
$$(98) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

gde su  $K_x$ ,  $K_y$  i  $K_z$  koeficijenti viorne difuzije u pravcima  $x$ ,  $y$  i  $z$ -ose;  $u$ ,  $v$ ,  $w$  komponente brzine strujanja fluida u pravcima  $x$ ,  $y$  i  $z$ -ose.

Jednačinom (98) opisuje se koncentracija čestica koje se ispuštaju u atmosferu u prisustvu vazдушnih strujanja i atmosferske turbulentnosti. Ispitivanje koncentracije čestica u vazduhu je od velikog značaja za utvrđivanje stepena zagađenosti prirodne sredine usled nepotpunog sagorevanja goriva i usled ozračenja radioaktivnih materija.

Pri atmosferskoj difuziji,  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_z$ ,  $u$ ,  $v$  i  $w$  su složene funkcije visine iznad zemlje,  $z$ . Ovde ćemo posmatrati jedan uprošćen problem analize koncentracije čestica pri ustaljenoj difuziji.<sup>6</sup>

Pretpostavićemo da je izvor zagađenja beskonačno linijskog oblika postavljen u pravcu  $y$ -ose i da ispušta  $Q$  čestica po jedinici dužine i u jedinici vremena. Pretpostavićemo takođe, da je strujanje vazduha samo u pravcu  $x$ -ose, tj.  $v = w = 0$ ;  $u = u(z)$ , i da je difuzija čestica u pravcu  $x$ -ose usled strujanja vazduha znatno veća od viorne difuzije, tj. da je član  $\frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$  zanemarljivo mali.



Sl. 3.31.  $M$ -elementarna mreža za diskretizovanu dvodimenzionalnu opštu hiperboličnu jednačinu

6. W. KARPLUS, J. R. ALLDIR: *Atmospheric Turbulent Diffusion from Infinite Line Sources*. J Meteorology, **13**, 583-586, 1956.

U ustaljenom režimu jednačina (98) se svodi na

$$(99) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = u(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Uzmimo da su pridruženi uslovi

$$(100a) \quad \varphi(y, z) \Big|_{\substack{x=\infty \\ z=\infty}} = 0, \quad (100b) \quad \varphi(x, z) \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \infty,$$

$$(100c) \quad \left( K_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Big|_{\substack{z=0 \\ 0 < x < \infty}} = 0, \quad (100d) \quad \int_0^{\infty} u(z) \varphi(x, z) dz = Q, \quad (x > 0).$$

Zavisnost od brzine vetra  $u$  od visine  $z$  se obično određuje empirijskim putem. Ova zavisnost je približnog oblika

$$(101) \quad u(z) = A \ln \frac{z}{z_0},$$

gde su  $A$  i  $z_0$  konstante za određene atmosferske uslove. Za iste atmosferske uslove, koeficijent viorne difuzije  $K_z$  je približno jednak

$$(102) \quad K_z = \frac{Bz}{A},$$

gde je  $B$  konstanta.

Na ovaj način jednačina (99) postaje

$$(103) \quad \frac{B}{A^2} \frac{\partial}{\partial z} \left( z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \ln \frac{z}{z_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Uvedimo smenu

$$(104) \quad x = \frac{A^2}{B} t.$$

Tada (315) postaje

$$(105) \quad z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \left( \ln \frac{z}{z_0} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Ova jednačina je oblika 1-dimenzionalne difuzione jednačine. Da bismo je rešili metodom električnog modelovanja, izvršićemo diskretizaciju parcijalnih izvoda po promenljivoj  $z$ . Za  $\nu$ -ti čvor rešetke ( $z_\nu = h\nu$ ) imaćemo

$$(106) \quad z_\nu \frac{\Delta^2 \varphi_\nu}{\Delta z^2} + \frac{\Delta \varphi_\nu}{\Delta z} \approx \left( \ln \frac{z_\nu}{z_0} \right) \frac{d\varphi_\nu}{dt},$$

ili

$$(107) \quad h\nu \frac{\varphi_{\nu+1} - 2\varphi_\nu + \varphi_{\nu-1}}{h^2} + \frac{\varphi_{\nu+1} - \varphi_{\nu-1}}{2h} = \left( \ln \frac{h\nu}{z_0} \right) \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial t},$$

odnosno

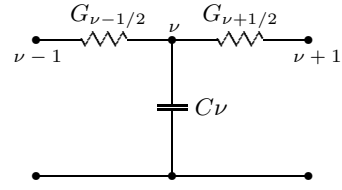
$$(108) \quad \left( G_{\nu+\frac{1}{2}} + G_{\nu-\frac{1}{2}} + C_{\nu} D \right) v_{\nu} - G_{\nu+\frac{1}{2}} v_{\nu-1} - G_{\nu-\frac{1}{2}} v_{\nu+1} = 0,$$

gde je

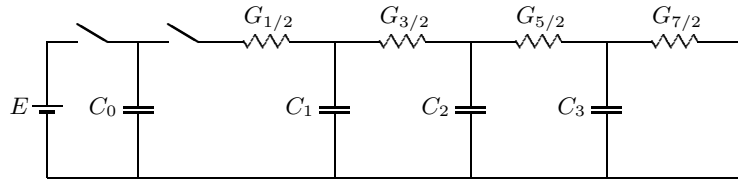
$$(109) \quad G_{\nu+\frac{1}{2}} = \frac{\nu + \frac{1}{2}}{h}, \quad G_{\nu-\frac{1}{2}} = \frac{\nu - \frac{1}{2}}{h}, \quad C_{\nu} = \ln \frac{h\nu}{z_0},$$

iz čega se vidi da je (108) analogna jednačina napona čvorova za  $\nu$ -ti čvor  $M$ -elementarne mreže prikazane na Sl. 3.32.

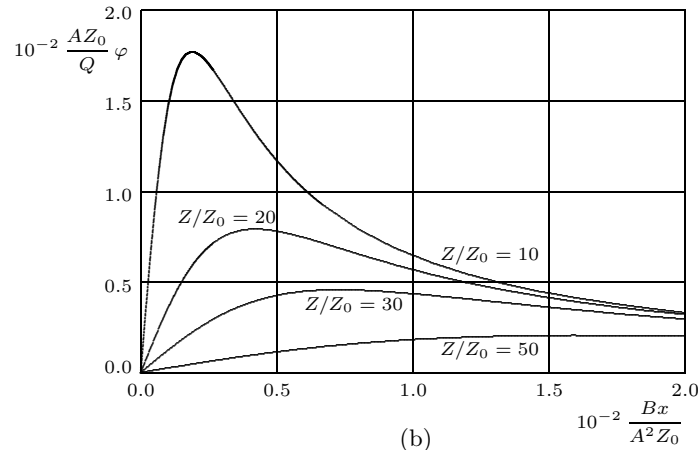
Ovim postupkom se određivanje rešenja  $\varphi(x, z)$  svelo na određivanje odziva  $v_k(t, z_k)$  ( $z_k$  = parametar  $M$ -analogne mreže. Granični uslovi (100b), (100c) i (100d) određuju vrednost strujnog impulsa  $Q$  koji u trenutku  $t = 0$  mora biti priključen u početni čvor  $O$  mreže.



Sl. 3.32.  $M$ -elementarna mreža za jednačinu (108)



(a)



(b)

Sl. 3.33. a)  $M$ -analogna mreža za jednačinu (108)  
b) koncentracija u funkciji rastojanja od izvora za razne visine

To se ostvaruje tako što se kondenzator kapacitivnosti  $Z_0$  na početku mreže najpre priključi na konstantni napon  $E = Q/C_0$ , a potom, u trenutku  $t = 0$  na početku mreže. Pošto je mreža pasivna  $RC$ -tipa, napon u bilo kom čvoru će težiti nuli kada  $t \rightarrow \infty$ . Ovim je granični uslov automatski zadovoljen.  $M$ -analogna mreža prikazana je na Sl. 3.33a<sup>7</sup>, a dijagram familije krivih, crtan u normalizovanim koordinatama, dat je na Sl. 3.33b.

Prednost ovog modela je njegova jednostavnost i lakoća kojom se može podešavati za razne vrednosti konstanti  $A$ ,  $B$  i  $z_0$ , putem promene parametara električne mreže. Po istom principu je pravljen i električna mreža za rešavanje jednačine<sup>8</sup>

$$(110) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + K_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = u(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

#### d) Maxwellove jednačine

Prostiranje talasa u elektromagnetnom polju opisano je MAXWELLOVIM jednačinama

$$(111a) \quad \text{rot } \vec{K} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (111b) \quad \text{rot } \vec{H} = \gamma \vec{K} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (111c) \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{K},$$

$$(111d) \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (111e) \quad \text{div } \vec{D} = \varrho, \quad (111f) \quad \text{div } \vec{B} = 0,$$

gde su  $\vec{H}$  i  $\vec{K}$  vektori jačine magnetnog i električnog polja,  $\vec{B}$  i  $\vec{D}$  vektori magnetne indukcije i električne indukcije,  $\mu$  i  $\varepsilon$  su magnetna i dielektrična propustljivost sredine,  $\gamma$  je specifična provodnost sredine, a  $\varrho$  gustina električnog opterećenja.

Zbog dosta složene međuzavisnosti između komponenti vektora  $\vec{H}$  i  $\vec{K}$  u opštem slučaju, ovde ćemo posmatrati samo posebne slučajeve kada su izvesne komponente ovih vektora identički jednake nuli. Od posebnog praktičkog interesa su polja u metalnim cevima, tzv. talasovodima. To su šuplje cevi od metala visoke provodnosti. Pri vrlo visokim učestanostima talasovodi prenose elektromagnetne talase određenog tipa slično električnim vodovima. Analiza polja u talasovodima pokazuje da samo jedan od vektora  $\vec{K}$  i  $\vec{H}$  može imati jednu komponentu u pravcu prostiranja. Ako osu talasovoda uzmemo za  $z$ -osu, tada su mogući slučajevi  $K_z \neq 0, H_z = 0$  ili  $H_z \neq 0, K_z = 0$ . Prvi tip talasa naziva se *TM talasi* (transverzalni magnetni) ili *E talasi* (električni), a drugi tip naziva se *TE talasi* (transverzalni električni) ili *H talasi* (magnetni).

Kod cilindričnih talasovoda koji prenose *TM* talase postoji *osovinska simetrija*, tako da su  $K_z$ ,  $K_r$  i  $H_\theta$  jedine komponente polja u cilindričnom koordinatnom sistemu koje su različite od nule.

Uopšte, Maxwell-ove jednačine (111a) i (111b) pisane u cilindričnim koordinatama za sistem sa osovinskom simetrijom koji prenosi *TM* talase glase

$$(112) \quad \frac{\partial K_z}{\partial r} - \frac{\partial K_r}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_\theta}{\partial t}, \quad -\frac{\partial H_\theta}{\partial z} = \gamma K_r + \varepsilon \frac{\partial K_r}{\partial t}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(r H_\theta)}{\partial r} = \gamma K_z + \varepsilon \frac{\partial K_z}{\partial t},$$

<sup>7</sup>Treba primetiti da su u ovom slučaju provodnosti date u (109) usklađene.

<sup>8</sup>videti 6)

ili

$$(113) \quad \frac{\partial K_z}{\partial r} - \frac{\partial K_r}{\partial z} = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial H'_\theta}{\partial t}, \quad -\frac{\partial H'_\theta}{\partial z} = \mu r K_r + \varepsilon r \frac{\partial K_r}{\partial t}, \quad \frac{\partial H'_\theta}{\partial r} = \gamma r K_z + \varepsilon r \frac{\partial K_z}{\partial t}$$

(ovde je  $H'_\theta = r H_\theta$ ).

Ako parcijalne izvode po prostornim koordinatama zamenimo količnicima konačnih razlika

$$(114) \quad \left. \frac{\partial K_z}{\partial r} \right|_{r,z} = \frac{K_z|_{r+\frac{\Delta r}{2},z} - K_z|_{r-\frac{\Delta r}{2},z}}{\Delta r}, \quad \left. \frac{\partial K_r}{\partial z} \right|_{r,z} = \frac{K_r|_{r,z+\frac{\Delta z}{2}} - K_r|_{r,z-\frac{\Delta z}{2}}}{\Delta z},$$

$$\left. \frac{\partial H'_\theta}{\partial z} \right|_{r,z} = \frac{H'_\theta|_{r,z+\Delta z} - H'_\theta|_{r,z}}{\Delta z}, \quad \left. \frac{\partial H'_\theta}{\partial r} \right|_{r,z} = \frac{H'_\theta|_{r+\Delta r,z} - H'_\theta|_{r,z}}{\Delta r}$$

i stavimo radi jednostavnosti  $\Delta z = \Delta r$ , jednačine (113) se pišu u obliku

$$(115a) \quad K_z|_{r+\frac{\Delta r}{2},z} - K_z|_{r-\frac{\Delta r}{2},z} - K_r|_{r,z+\frac{\Delta z}{2}} + K_r|_{r,z-\frac{\Delta z}{2}} \approx \mu \frac{\Delta r}{r} D H'_\theta|_{r,z},$$

$$(115b) \quad H'_\theta|_{r,z} - H'_\theta|_{r,z+\Delta z} \approx \gamma \Delta r \cdot r K_r|_{r,z+\frac{\Delta z}{2}} + \varepsilon \Delta r \cdot r D K_r|_{r,z+\frac{\Delta z}{2}},$$

$$(115c) \quad H'_\theta|_{r+\Delta r,z} - H'_\theta|_{r,z} \approx \gamma \Delta r \cdot r K_z|_{r+\frac{\Delta r}{2},z} + \varepsilon \Delta r \cdot r D K_z|_{r+\frac{\Delta r}{2},z},$$

pri čemu je vrednost  $H'_\theta$  izračunata u čvoru  $(r, z)$ , a vrednosti  $K_r$  i  $K_z$  su izračunate na sredini između čvora  $(r, z + \Delta z)$ ,  $(r, z)$  i  $(r + \Delta r, z)$ ,  $(r, z)$ , respektivno.

Granični uslovi se postavljaju u vidu naponskih i strujnih izvora vezanih za granične čvorove. Ako je neki granični uslov tipa “savršeno provodna površina”, kao što je, na primer, u talasovodima, tada tangencijalna komponenta električnog polja na površini mora biti jednaka nuli, pa će grane sa kalemovima čije su struje predstavljene ovim komponentama (to su kalemovi normalni na granične površine) biti prekinute.

Na sličan način se modeluju MAXWELLOVE jednačine koje opisuju sisteme sa osovinom simetrijom koji prenose  $TE$  talase.

### Vežbanja

**3.9.** Odrediti  $M$ -elementarnu mrežu za diskretizovani oblik opšte hiperbolične jednačine (97).

**3.10.** Izvesti izraze za parametre mreže iz prethodnog zadatka za oblast proizvoljnog oblika (različiti koraci diskretizacije).

**3.11.** Odrediti analognu mrežu za modelovanje MAXWELLOVIH jednačina sistema sa osovinom simetrijom koji prenose  $TE$  talase

$$\frac{\partial K_\theta}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_r}{\partial t}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(r K_\theta)}{\partial r} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \gamma K_\theta + \varepsilon \frac{\partial K_\theta}{\partial t}.$$

**3.12.** Dokazati da ako je polje homogeno i ako je  $\varrho = 0$ , iz MAXWELLOvih jednačina (111) se dobijaju jednačine:

$$\nabla^2 \vec{H} = \gamma\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \vec{K} = \gamma\mu \frac{\partial \vec{K}}{\partial t} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{K}}{\partial t^2},$$

gde je  $\nabla^2 =: \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

Na osnovi ovih jednačina odrediti analognu mrežu koja određuje komponente vektora  $\vec{H}$  i  $\vec{K}$ .

### 3.2.3. REZISTIVNE ANALOGNE MREŽE ZA RASPODELJENE DINAMIČKE SISTEME

Pri modelovanju raspodeljenih dinamičkih sistema, mi smo do sada aproksimirali količnicima konačnih priraštaja samo parcijalne izvode po prostornim koordinatama. Ovim smo parcijalne diferencijalne jednačine paraboličnog i hiperboličnog tipa sveli na sisteme diferencno-(običnih)diferencijalnih jednačina na osnovu kojih smo dobijali analogne  $RC$ - i  $RLC$ -mreže.

Pri numeričkom rešavanju jednačina za raspodeljene dinamičke sisteme potrebno je diskretizovati ne samo parcijalne izvode po prostornim koordinatama, već i one po vremenu. Kao rezultat diskretizacije svih parcijalnih izvoda dobija se sistem diferencnih jednačina koji se može programirati za rešavanje na digitalnoj računskoj mašini.

Sa gledišta električnog modelovanja, sistemi diferencnih jednačina odgovaraju rezistivnoj mreži regularne strukture. To je s jedne strane povoljno jer je analiza  $R$ -mreža jednostavnija od analize  $RC$ - ili  $RLC$ - mreža. Isto tako i merenje napona i struje je prostije nego u dinamičkim analognim mrežama gde su potrebni osciloskopi i specijalni registrujući aparati. Međutim, diskretizacija vremenske promenljive unosi jedan novi moment koji se po pravilu ne javlja kada se ona ne vrši. Naime, numeričke analize su pokazale da ako se korak diskretizacije po vremenu ne uzme dovoljno mali u odnosu na korake diskretizacije po prostornim koordinatama, tada se mogu pojaviti velike kumulativne greške usled zaokružavanja. Ako se početni uslovi daju u trenutku  $t = 0$  sa izvesnom malom greškom, ona stalno raste sa svakim računskim korakom u trenucima  $\Delta t$ ,  $2\Delta t$ ,  $\dots$ , tako da posle nekoliko vremenskih intervala greška može biti veća od 100%, što čini rezultat besmislenim. Ova mogućnost pojave *numeričke nestabilnosti pri izvesnoj aproksimaciji parcijalnih izvoda po vremenu* zahteva smanjenje intervala  $\Delta t$ , što čini da za jednu određenu tačnost analogna mreža bude složenija nego pri uzimanju većeg intervala. Stoga prilikom izbora  $R$ -analogne mreže potrebno je voditi računa o ovoj pojavi.

Pošto razni izbori koraka diskretizacije po vremenu i po prostornim koordinatama, koji vode do stabilne sheme računanja, dovode u opštem slučaju do različitog kvaliteta aproksimacije diferencijalne jednačine diferencnom jednačinom, postavlja se i pitanje izbora koraka koji daju najbolje rezultate.

U ovom odeljku mi ćemo izvesti  $R$ -analogne mreže za razne parabolične i hiperbolične jednačine sa gledišta optimalne numeričke stabilnosti i sa gledišta



što bolje aproksimacije parcijalne diferencijalne jednačine diferencnom jednačinom.

#### a) Fourier-ova jednačina

*Analiza stabilnosti*

Posmatrajmo 1-dimenzionalnu FOURIERovu jednačinu

$$(116) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial t},$$

u kojoj smo radi jednostavnosti normalizovali vreme i promenljivu  $\varphi^9$ .

Neka su pridruženi uslovi:

$$(117) \quad v(0, t) = v_0(t) \ (t \geq 0), \ v(d, t) = v_d(t) \ (t \geq 0), \ v(x, 0) = v(x_0) \ (0 \leq x \leq d).$$

Da bismo odredili rešenje  $v(x, t)$ , obrazujmo diferencnu jednačinu uzimajući za izvod po vremenu *razlike unapred*, a za izvod po prostornoj koordinati, kao i do sada, centralnu razliku

$$(118) \quad \frac{v(x_i + h, t_j) - 2v(x_i, t_j) + v(x_i - h, t_j))}{h^2} = \frac{(v(x_i, t_j + \tau) - v(x_i, t_j))}{\tau}.$$

Pridružene uslove pišemo u obliku:

$$(119) \quad \begin{aligned} v(0, t_j) &= v_0(t_j) = v_{0j} \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \\ v(d, t_j) &= v_d(t_j) = v_{dj} \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \\ v(x_i, 0) &= v(x_i) = v_{i,0} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Uzmimo korake diskretizacije  $h$  i  $\tau$  tako da je  $x_i = hi$  i  $t_j = \tau j$ , gde je

$$(120) \quad h = \frac{d}{n}, \quad \tau = \alpha h^2.$$

Jednačina (118) postaje

$$(121) \quad (2\alpha - 1) v_{ij} - \alpha v_{i+1,j} - \alpha v_{i-1,j} + v_{i,j+1} = 0.$$

Ona pokazuje da se vrednost napona  $v$  u tački  $(i, j + 1)$  koja odgovara mestu sa koordinatom  $x_i$  u trenutku  $t_{j+1}$  može izračunati ako se poznaju naponi u tačkama sa koordinatama  $(i - 1, j)$ ,  $(i, j)$  i  $(i + 1, j)$ , tj. ako se poznaju naponi na mestima sa koordinatama  $x_{i-1}$ ,  $x_i$  i  $x_{i+1}$  u prethodnom trenutku  $t_j$ . To znači da polazeći od poznatih vrednosti početnog napona  $v(x_i, 0) = v_{i,0}$  u tačkama  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  i napona u graničnim tačkama  $v(0, t_j) = v_{0,j}$  i  $v(d, t_j)$  u “trenucima”

<sup>9</sup>Jednačina (116) se dobija kada se u (225) na mesto  $t$  uvede “električno” vreme  $t/K$ , a  $\Phi$  zameni sa  $v/K_\varphi$ .

$j = 0, 1, \dots$ , mogu se izračunati vrednosti napona  $v(x, t)$  u svim diskretnim tačkama oblasti  $a \leq x \leq d$ ,  $t \geq 0$ :  $v(x_i, t_1); v(x_i, t_2); \dots$ , ( $i = 0, 1, \dots, n$ ).

Iz ovog razloga računaska shema data formulama (121) naziva se *explicitna shema*. Potrebno je samo da numerička greška koja se čini na nekom stupnju računanja u trenutku  $t_j$ , ne raste prilikom prelaska na sledeći stupanj u trenutku  $t_{j+1}$ .

Pretpostavimo, naime, da su vrednosti napona  $v(x_i, 0) = v_{i,0}$  koji se žele imati u trenutku  $t = 0$  (početni naponi) dati sa greškom  $\varepsilon_{i,0}$ :

$$(122) \quad \bar{v}_{i,0} = v_{i,0} + \varepsilon_{i,0},$$

gde  $\bar{v}_{i,0}$  označava stvarnu vrednost napona  $v_{i,0}$  u prisustvu greške.

Ako sa  $\bar{v}_{i,j} = \bar{v}(x_i, \bar{t}_j)$  označimo rešenje jednačine (121) u prisustvu greške, tj.

$$(123) \quad (2\alpha - 1) \bar{v}_{i,j} - \alpha \bar{v}_{i+1,j} - \alpha \bar{v}_{i-1,j} + \bar{v}_{i,j+1} = 0,$$

sa pridruženim uslovima

$$(124) \quad \bar{v}_{0,j} = v_{0,j}, \quad \bar{v}_{d,j} = v_{d,j}, \quad \bar{v}_{i,0} = v_{i,0} + \varepsilon_{i,0}$$

i ako sa  $\delta_{i,j} = \bar{v}_{i,j} - v_{ij}$  označimo grešku koja se čini u rešenju usled unosenja pogrešnih početnih uslova, tada oduzimanjem (121) od (122) i (124) od (117) dobijamo da  $\delta_{i,j}$  zadovoljava istu diferencnu jednačinu

$$(125) \quad (2\alpha - 1) \delta_{i,j} - \alpha \delta_{i+1,j} - \alpha \delta_{i-1,j} + \delta_{i,j+1} = 0,$$

ali sa pridruženim uslovima

$$(126) \quad \delta_{0,j} = 0 \text{ i } \delta_{d,j} = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \quad \delta_{i,0} = \varepsilon_{i,0} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Ispitaćemo da li je moguće izabrati  $\alpha$  tako da greška  $\delta_{i,j}$  ostane ograničena kada  $t_j \rightarrow \infty$ .

U tu svrhu potražićemo partikularno rešenje jednačine (125) u obliku

$$(127) \quad \delta_{i,j} = \delta(x_i, t_j) = a^{t_j} \sin bx_i,$$

koje očigledno zadovoljava prvi granični uslov  $\delta_{i,j} = 0$ . Iz uslova da mora zadovoljavati i drugi granični uslov  $\delta_{d,j} = 0$  dobijamo

$$(128) \quad a^{t_j} \sin bd = 0,$$

odnosno

$$(129) \quad b = \frac{\nu\pi}{d} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots),$$

tako da je

$$(130) \quad \delta_{i,j} = a^{t_j} \sin \frac{\nu\pi}{d} x_i.$$

Posle unošenja (130) u (125) i izvesnih uprošćavanja dobija se

$$(131) \quad a^\tau + 4\alpha \sin^2 \frac{\nu\pi}{2d} h - 1 = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots),$$

odnosno

$$(132) \quad a = \left(1 - 4\alpha \sin^2 \frac{\nu\pi}{2d} h\right)^{1/\tau} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots).$$

Primenom na (120) i (130) zaključujemo da postoje beskonačno mnogo partikularnih integrala

$$(133) \quad \delta_{i,j}^{(\nu)} = \left(1 - 4\alpha \sin^2 \frac{\nu\pi}{2n}\right)^j \sin \frac{\nu\pi}{2n} i \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots),$$

koji zadovoljavaju date granične uslove.

Pošto je jednačina (125) linearna, linearna kombinacija proizvoljnog broja funkcija  $\delta_{i,j}$  je takođe partikularni integral

$$(134) \quad \delta_{i,j} = \sum_{\nu=1}^{n-1} A_\nu \delta_{i,j}^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{n-1} A_\nu \left(1 - 4\alpha \sin^2 \frac{\nu\pi}{2n}\right)^j \sin \frac{\nu\pi}{2n} i,$$

gde su  $A_\nu$  konstante koje se određuju iz početnih uslova u (126),  $\delta_{i,0} = \varepsilon_{i,0}$ .

Prema našem zahtevu, sa porastom vremena, tj. kada  $j \rightarrow \infty$ , greška  $\delta_{i,j}$  mora ostati ograničena. Dovoljan uslov za to je ispunjenje nejednakosti

$$(135) \quad \left|1 - 4\alpha \sin^2 \frac{\nu\pi}{2n}\right| \leq 1,$$

odnosno nejednakosti

$$(136) \quad \alpha \sin^2 \frac{\nu\pi}{2n} \leq \frac{1}{2} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n-1).$$

Ona je bezuslovno zadovoljena ako je

$$(137) \quad \alpha \leq \frac{1}{2}.$$

Ovaj rezultat pokazuje da će računanje vrednosti  $v_{i,j}$  po formuli (121) biti numerički stabilno, ako odnos između vremenskog koraka i kvadrata dužinskog koraka ne premašuje 1/2.

Pored eksplicitne sheme računanja (121), koja potiče od aproksimiranja parcijalnog izvoda po vremenu u (116) razlikom unapred, možemo upotrebiti i diferencnu jednačinu sa *razlikom unazad*

$$(138) \quad \frac{v(x_i + h, t_j) - 2v(x_i, t_j) + v(x_i - h, t_j))}{h^2} = \frac{v(x_i, t_j) - v(x_i, t_j - \tau)}{\tau},$$

odnosno

$$(139) \quad (2\alpha + 1)v_{i,j} - \alpha v_{i+1,j} - \alpha v_{i-1,j} - v_{i,j-1} = 0,$$

koja se često naziva *implicitna shema*. Ovaj naziv potiče otud što kod ove sheme vrednost napona  $v$  u nekom trenutku  $t_j$  na mestu  $x_{i-1}$  ne može se neposredno izračunati poznavanjem vrednosti napona u prethodnom trenutku na mestima  $x_{i-2}$ ,  $x_{i-1}$ ,  $x_i$  kao kod eksplicitne sheme.

Ispitivanje stabilnosti implicitne sheme pri pridruženim uslovima (119) vrši se na isti način kao kod eksplicitne sheme. Naime, ako su početni naponi dati sa greškom  $\varepsilon_{i,0}$  kao u (122), tada greška  $\delta_{i,j}$  zadovoljava istu diferencijalnu jednačinu kao (139), tj.

$$(140) \quad (2\alpha + 1)\delta_{i,j} - \alpha\delta_{i+1,j} - \alpha\delta_{i-1,j} - \delta_{i,j-1} = 0,$$

sa pridruženim uslovima (126). Zamenom  $\delta_{i,j}$  iz (130) u (140) dobijamo jednačinu

$$(141) \quad \alpha a^\tau \left( 2 \sin \frac{\nu\pi}{d} x_i - \sin \frac{\nu\pi}{d} (x_i + h) - \sin \frac{\nu\pi}{d} (x_i - h) \right) + (a^\tau - 1) \sin \frac{\nu\pi}{d} x_i = 0,$$

koja se može napisati kao

$$(142) \quad a^\tau 4\alpha \sin \frac{\nu\pi}{d} x_i \sin^2 \frac{\nu\pi}{2d} h + (a^\tau - 1) \sin \frac{\nu\pi}{d} x_i = 0,$$

ili

$$(143) \quad a = \frac{1}{\left( 4\alpha \sin^2 \frac{\nu\pi}{2d} h + 1 \right)^{1/\tau}}.$$

Pošto je  $\alpha > 0$ , sve funkcije

$$(144) \quad \delta_{i,j}^{(\nu)} = \frac{1}{\left( 4\alpha \sin^2 \frac{\nu\pi}{2n} + 1 \right)^j} \sin \frac{\nu\pi}{2n} i \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

asimptotski teže nuli kada  $j \rightarrow \infty$  ako je  $\sin \frac{\nu\pi}{2n} i \neq 0$ , ili, u najgorem slučaju, ostaju ograničene kada je  $\sin \frac{\nu\pi}{2n} i = 0$ . Na ovaj način, linearna kombinacija

funkcija  $\delta_{i,j}^{(\nu)}$ ,  $\delta_{i,j} = \sum_{\nu=1}^{n-1} B_\nu \delta_{i,j}^{(\nu)}$  se ponaša na isti način, što znači da je *implicitna shema* (139) *numerički stabilna bez obzira na vrednost  $\alpha$* , odnosno da se sa gledišta stabilnosti koraci diskretizacije po prostornoj koordinati i po vremenu mogu birati proizvoljno.

## b) Kvalitet aproksimacije

Osim zadovoljavanja zahteva u pogledu stabilnosti, parametar  $\alpha$  se može izabrati i sa gledišta minimalne greške aproksimacije parcijalne diferencijalne jednačine (116) diferencnom jednačinom (121).

Da bismo ovo dokazali, uvedimo diferencijalni operator  $L(v)$  i diferencni operator  $L_h(v)$ , definisane kao

$$(145) \quad L(v) =: \frac{\partial v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t},$$

i

$$(146) \quad L_h(v) =: \frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{h^2} - \frac{1}{\alpha h^2} (v_{i,j+1} - v_{i,j}).$$

Kvalitet aproksimacije se ocenjuje greškom

$$(147) \quad R_h(v) = L_h(v) - L(v),$$

koja se čini pri zameni diferencijalne jednačine diferencnom jednačinom.

Posmatrajmo eksplicitnu shemu (116). Kako u diskretnim tačkama  $(x_i, t_j)$   $v_{i,j} = v(x_i, t_j)$  zadovoljava jednačinu (116), to je u ovim tačkama  $L(v) = 0$ . Ako pretpostavimo da  $v(x, t)$  ima u tačkama  $(x_i, t_j)$  neprekidne parcijalne izvode po  $x$  do 6. reda zaključno, i po  $t$  do 3. reda zaključno razvijanjem  $v_{i+1,j} = v(x_i + h, t_j)$ ,  $v_{i-1,j} = v(x_i - h, t_j)$  i  $v_{i,j+1} = v(x_i, t_j + \alpha h^2)$  po TAYLOROVoj formuli u okolini  $(x_i, t_j)$  i zamenom u (146), dobijamo posle sređivanja

$$(148) \quad R_h(v) = L_h(v) = \frac{\partial^2 v_{i,j}}{\partial x^2} - \frac{\partial v_{i,j}}{\partial t} + h^2 \left( \frac{1}{12} \frac{\partial^4 v_{i,j}}{\partial x^4} - \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 v_{i,j}}{\partial t^2} \right) + h^4 \left( \frac{1}{360} \frac{\partial^6 v_{i,j}}{\partial x^6} - \frac{\alpha^2}{6} \frac{\partial^3 v_{i,j}}{\partial t^3} \right) + O(h^6).$$

Iz uslova da  $v_{i,j}$  zadovoljava jednačinu (116) možemo izračunati parcijalne izvode po vremenu koji se pojavljuju u (141)

$$(149) \quad \frac{\partial v_{i,j}}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_{i,j}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 v_{i,j}}{\partial t^2} = \frac{\partial^4 v_{i,j}}{\partial x^4}, \quad \frac{\partial^3 v_{i,j}}{\partial t^3} = \frac{\partial^6 v_{i,j}}{\partial x^6}.$$

Posle njihovog unošenja u (148) dobijamo

$$(150) \quad R_h(v) = h^2 \left( \frac{1}{12} - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\partial^4 v_{i,j}}{\partial x^4} + h^4 \left( \frac{1}{360} - \frac{\alpha^2}{6} \right) \frac{\partial^6 v_{i,j}}{\partial x^6} + O(h^6).$$

Ako  $\alpha$  izaberemo tako da prvi član bude jednak nuli, tj. ako je

$$(151) \quad \alpha = 1/6,$$

tada dobijamo da je greška

$$(152) \quad R_h(v) = h^4 \left( \frac{1}{360} - \frac{1}{216} \right) \frac{\partial^6 v_{i,j}}{\partial x^6} + O(h^6) = -\frac{h^4}{540} \frac{\partial^6 v_{i,j}}{\partial x^6} + O(h^6),$$

odnosno

$$(153) \quad R_h(v) = O(h^4)$$

Ovo je ujedno *minimalna greška* koja se može postići sa diferencnom jednačinom (121), budući da je za  $\alpha \neq 1/6$  ova greška reda  $O(h^2)$ .

PRIMEDBA 1. Vidimo da za razliku od jednačina za jednodimenzionalne statičke sisteme kod kojih je greška reda  $O(h^2)$  i koja se prema tome može učiniti proizvoljno malom ako se korak diskretizacije učini dovoljno malim, kod jednodimenzionalne difuzne jednačine ova greška može biti reda  $O(h^4)$ . Međutim, pošto su koraci diskretizacije vezani relacijom (144), svako smanjenje  $h$  u cilju dobijanja bolje tačnosti nameće obavezno smanjenje vremenskog intervala  $\tau$ .

PRIMEDBA 2. Može se dokazati da na granicama  $x = 0$  i  $x = d$  procena data u (153) ne zadovoljava.

PRIMEDBA 3. Optimalna vrednost  $\alpha = 1/6$  daje eksplicitnu formulu

$$(154) \quad v_{i,j} = \frac{v_{i-1,j} + 4v_{i,j} - v_{i+1,j}}{6}$$

sa greškom realizacije reda  $O(h^4)$ .

Prema (137),  $\alpha = 1/6$  zadovoljava uslov numeričke stabilnosti. Međutim, najprostija računaska formula je za vrednost parametra  $\alpha = 1/2$  koja je na granici stabilnosti. Ova formula je

$$(155) \quad v_{i,j+1} = \frac{v_{i-1,j} + v_{i+1,j}}{2},$$

ali sa greškom aproksimacije reda  $O(h^2)$ .

PRIMEDBA 4. Mogućno je proceniti grešku između stvarnog rešenja  $v^*(x, t)$  i rešenja  $v(x, t)$  dobijenog iz jednačine (154), odnosno (155). Označimo sa

$$\begin{aligned} M_1 &= \max \left[ |v^{(4)}(x)|, |v_0^{(2)}(t)|, |v_d^{(2)}(t)| \right], \quad x \in [0, d], \quad t \in [0, T], \\ M_2 &= \max \left[ |v^{(6)}(x)|, |v_0^{(4)}(t)|, |v_d^{(4)}(t)| \right], \quad x \in [0, d], \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Tada je<sup>1</sup>

$$(156) \quad |v(x, t) - v^*(x, t)| \leq \frac{T}{3} M_1 h^3$$

za formulu (155), i

$$(157) \quad |v(x, t) - v^*(x, t)| \leq \frac{T}{135} M_2 h^4$$

za formulu (154).

Kao što se moglo pretpostaviti, formula (154) koja daje najbolju aproksimaciju ujedno daje i najmanje odstupanje stvarnog rešenja od približnog u odnosu na formulu (155). Ovo, naravno, važi samo ako su pridruženi uslovi dovoljno "blagi". Pošto je, međutim, u slučaju  $\alpha = 1/2$  korak  $\tau$  tri puta veći od koraka u slučaju  $\alpha = 1/6$  (pri istom koraku  $h$ ) i računski posao će biti manji, uz manju tačnost u prvom slučaju nego u drugom.

---

<sup>1</sup>S. G. MILHIN, H. L. SMOLITSKII: *Priblizhennyye metody resheniya differentsialnykh uravnenii*. S. M. B., "Nauka", Moskva 1965.

PRIMEDBA 5. Ovom metodom se može rešiti i nehomogena difuziona jednačina:

$$(158) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial t} + J(x, t)$$

sa eksplicitnom shemom

$$(159) \quad (2\alpha - 1) v_{i,j} - \alpha v_{i+1,j} - \alpha v_{i-1,j} + v_{i,j+1} = -\tau J_{ij}.$$

Odstupanje stvarnog rešenja od približnog u ovom slučaju je<sup>2</sup>

$$(160) \quad |v(x, t) - v^*(x, t)| \leq \begin{cases} \frac{T}{4} \left( M_2 + \frac{M_4}{3} \right) h^2, & \text{za } \alpha = \frac{1}{2}, \\ \frac{T}{72} \left( \frac{M_3}{3} + \frac{M_6}{5} \right) h^2, & \text{za } \alpha = \frac{1}{6}, \end{cases}$$

gde je

$$(161) \quad \begin{aligned} M_2 &= \max \left| \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \right|, & M_3 &= \max \left| \frac{\partial^3 v(x, t)}{\partial t^3} \right|, \\ M_4 &= \max \left| \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} \right|, & M_6 &= \max \left| \frac{\partial^6 v(x, t)}{\partial x^6} \right|. \end{aligned}$$

Formula (160) je manje pogodna od formula (156) i (157), jer ona zavisi od viših parcijalnih izvoda rešenja, koji obično nisu poznati.

Što se tiče kvaliteta aproksimacije sa implicitnom shemom, može se dokazati da je ona reda  $O(h^2) + O(\tau)$ .

Odstupanje stvarnog rešenja od približnog može se proceniti pomoću izraza<sup>3</sup>

$$(162) \quad |v(x, t) - v^*(x, t)| \leq T \left( \frac{\tau}{2} + \frac{h^2}{12} \right) M_1.$$

On pokazuje da implicitna shema daje manju tačnost od optimalne eksplicitne formule (154), ali pošto se u ovoj koraci  $\tau$  i  $h$  ne mogu birati nezavisno, ona zahteva veći obim računanja.

### c) Analogne mreže za difuznu jednačinu

$M$ -elementarna mreža koja odgovara *eksplicitnoj shemi* (121) prikazana je na Sl. 3.34.

Ona sadrži jedan “negativni” otpornik provodnosti  $-G_0$ . Kao što je poznato, jedan od načina dobijanja negativnih otpornika jeste zatvaranje konvertora negativne imitanse (NIC) jednim pozitivnim otpornikom, Sl. 3.35.

Isti efekat se može dobiti ako se operacioni pojačavač sa konačnim pojačanjem  $K > 1$  veže prema Sl. 3.36.

Zaista, iz jednačina

$$(163) \quad u_2 = K u_1, \quad (164) \quad i_1 = G(u_1 - u_2)$$

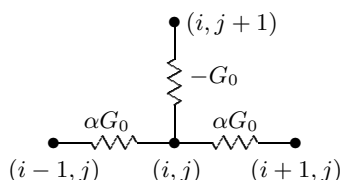
---

<sup>2</sup>ibid

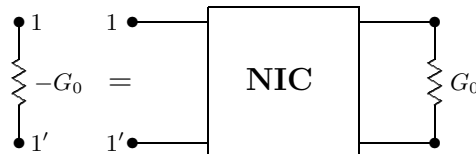
<sup>3</sup>ibid.

dobijamo

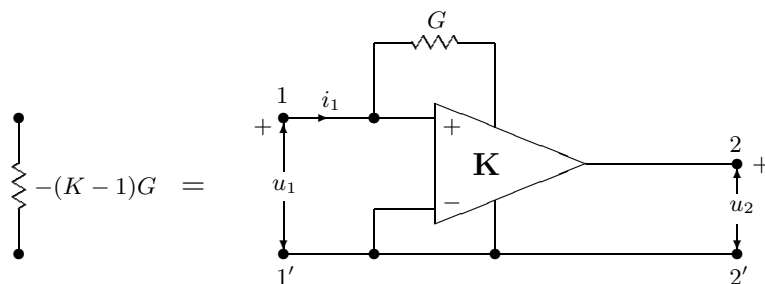
$$(165) \quad \frac{i_1}{u_1} = -(K - 1)G = -G_0.$$



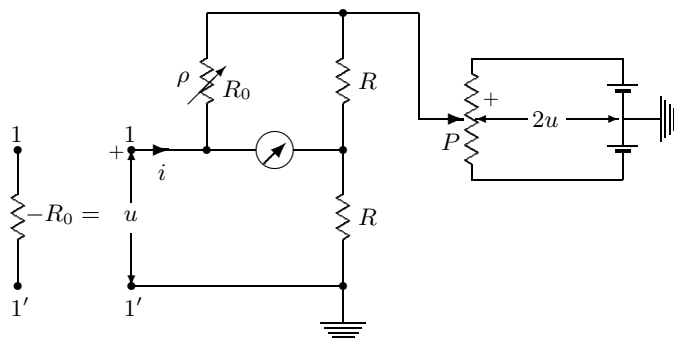
Sl. 3.34.  $M$ -elementarna mreža za eksplisitnu shemu (121)



Sl. 3.35 Dobijanje negativnog otpornika pomoću konvertora negativne imitanse



Sl. 3.36. Dobijanje negativnog otpornika pomoću operacionog pojačavača



Sl. 3.37. Dobijanje negativnog otpornika pomoću WHEATSTONEovog mosta

Isto tako, pomoću kola u obliku WHEATSTONEovog mosta prema Sl. 3.37. može se proizvesti negativna otpornost  $-R_0$  ukoliko se postigne da struja kroz otpornik  $R_0$  bude negativna u odnosu na pozitivni prikazan smer.

Klizač potencijometra  $P$  podešava se tako da za jednu željenu vrednost negativne otpornosti, koja se postavlja na reostatu  $\rho$ , skretanje nula-indikatora bude jednako nuli. Tada je očigledno napon između klizača potencijometra i čvora  $1'$  jednak  $2u$ , tako da je struja  $i$  jednaka



$$(166) \quad i = \frac{u - 2u}{R_0} = -\frac{u}{R_0},$$

što će reći da je ulazna provodnost jednaka  $-1/R_0$ .

Ovo kolo nije tako praktično, zato što ako je potrebno ostvariti više negativnih otpornika, tada se njihovo podešavanje ne može vršiti pojedinačno, tj. podešavanje jednog kola kviri podešavanje ostalih. Podešavanje se mora vršiti u više navrata, iterativno. Prisustvo negativnih otpornika može da učini  $M$ -analognu mrežu nestabilnom u odnosu na male perturbacije struje i napona koje mogu izazvati na primer šumovi. Sa druge strane, videli smo da diferencna jednačina (121) može da ispolji numeričku nestabilnost za  $\alpha > 1/2$ .

Izlazi da su pojave električne nestabilnosti i numeričke nestabilnosti u neku ruku analogne. Svaka električna nestabilnost  $M$ -analogne mreže odraziće se kao numerička nestabilnost diferencne jednačine i obrnuto. Koristeći ovu ideju, W. J. Karplus<sup>1</sup> je formulisao sledeći opšti *kriterijum stabilnosti* diferencijalnih jednačina sa dve nezavisne promenljive.

a) Diferencnu jednačinu napisati u obliku

$$(167) \quad \begin{aligned} &1 \cdot (\varphi_{i+1,j} - \varphi_{ij}) + a(\varphi_{i-1,j} - \varphi_{ij}) + b(\varphi_{i+2,j} - \varphi_{ij}) \\ &+ c(\varphi_{i,j+1} - \varphi_{ij}) + d(\varphi_{i,j-1} - \varphi_{ij}) + e(\varphi_{i,j+2} - \varphi_{ij}) + \dots = 0, \end{aligned}$$

gde se indeks  $i$  odnosi na *prostorne koordinate*.

b) Ako su svi koeficijenti  $a, b, c, d, e$ , itd. *pozitivni*, jednačina je stabilna.

c) Ako je bar jedan koeficijent *negativan*, tada dovoljan uslov za stabilnost jeste da je suma svih koeficijenata, ovde uključujući i jedinicu, negativna, tj.

$$1 + a + b + c + d + e + \dots < 0,$$

ili

$$1 + a_{i+1} + a_{i-1} + a_{i+2} + a_{j+1} + a_{j-1} + a_{j-2} + \dots < 0.$$

Osnovna prednost ovog kriterijuma u odnosu na druge je njegova jednostavnost.

PRIMER 3.7. Ispitati stabilnost diferencnih jednačina

$$(168a) \quad \frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{h^2} = \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}}{\tau},$$

$$(168b) \quad \frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{h^2} = \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i,j-1}}{\tau},$$

$$(168c) \quad \frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{h^2} = \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1}}{2\tau},$$

koje odgovaraju jednodimenzionalnoj FOURIEROvoj jednačini (116) sa aproksimacijom desne strane pomoću razlike unapred, razlike unazad i centralne razlike, respektivno.

<sup>1</sup>W. J. KARPLUS: *An Electric Circuit Theory Approach to Finite Difference Stability*, Trans. AIEE, **77**, pt. I, 210-213, 1958.

Uvedimo  $\alpha = \tau/h^2$  i napišimo ove jednačine u obliku (167). Dobijamo

$$(169a) \quad 1 \cdot (\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}) + 1 \cdot (\varphi_{i-1,j} - \varphi_{i,j}) - \frac{1}{\alpha} (\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}) = 0,$$

$$(169b) \quad 1 \cdot (\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}) + 1 \cdot (\varphi_{i-1,j} - \varphi_{i,j}) + \frac{1}{\alpha} (\varphi_{i,j-1} - \varphi_{i,j}) = 0,$$

$$(169c) \quad 1 \cdot (\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}) + 1 \cdot (\varphi_{i-1,j} - \varphi_{i,j}) - \frac{1}{2\alpha} (\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}) + \frac{1}{2\alpha} (\varphi_{i,j-1} - \varphi_{i,j}) = 0.$$

Pošto u (169a) postoji jedan negativan koeficijent, primenjuje se deo pod c) kriterijuma

$$1 + 1 - \frac{1}{\alpha} < 0, \quad \text{tj.} \quad \alpha < \frac{1}{2}.$$

Ovaj rezultat je, sa tačnošću do znaka jednakosti, isti kao u (137). Za jednačinu (169b) važi deo pod b) kriterijuma, jer su svi koeficijenti pozitivni. Jednačina je, prema tome, uvek stabilna što smo dobili i ranije ispitivanjem diferencne jednačine. Najзад, jednačina (169c) je uvek nestabilna, jer je zbir koeficijenata jednak 2.

Kriterijum nije ograničen samo na jednačine tri nezavisne promenljive.

PRIMER 3.8. Ispitati stabilnost dvodimenzionalne Fourier-ove jednačine:

$$(170) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Ako izvod po vremenu aproksimiramo razlikom unapred, dobićemo

$$(172) \quad \frac{\varphi_{i+1,j,k} - 2\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i-1,j,k}}{h^2} + \frac{\varphi_{i,j+1,k} - 2\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i,j-1,k}}{k^2} = \frac{\varphi_{i,j,k+1} - \varphi_{i,j,k}}{\tau},$$

što posle preuređenja u obliku (167) daje

$$(172) \quad (\varphi_{i+1,j,k} - \varphi_{i,j,k}) + (\varphi_{i-1,j,k} - \varphi_{i,j,k}) + \frac{\beta}{\alpha} (\varphi_{i,j+1,k} - \varphi_{i,j,k}) + \frac{\beta}{\alpha} (\varphi_{i,j-1,k} - \varphi_{i,j,k}) - \frac{1}{\alpha} (\varphi_{i,j+1,k} - \varphi_{i,j,k}) = 0,$$

gde je  $\alpha = \tau/h^2$  i  $\beta = \tau/k^2$ .

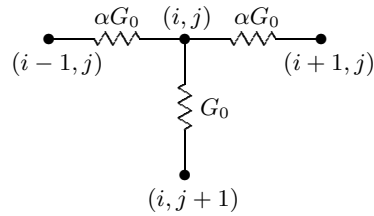
Prema delu c) kriterijuma, jednačina (172) je stabilna ako je

$$2 + 2 \frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} < 0,$$

tj.

$$(173) \quad \alpha + \beta < \frac{1}{2}.$$

Dok analogna mreža građena prema eksplicitnoj shemi sadrži negativne otpornike i samim tim je samo uslovno stabilna, analogne mreže dobijene prema *implicitnoj shemi* (139) su *bezuslovno stabilne*. To je posledica činjenica što je *M*-elementarna mreža za jednačinu (139) prikazana na Sl. 3.38, *pasivna* jer sadrži samo pozitivne otpornike.



Sl. 3.38. *M*-elementarna mreža za implicitnu shemu (139)

PRIMER 3.9. Odrediti optimalnu  $M$ -analognu rezistivnu mrežu za difuzionu jednačinu  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial t}$  pri sledećim pridruženim uslovima  $v(0, t) = v(1, t) = 0$  ( $0 \leq t \leq \infty$ ) i  $v(x, 0) = 4x(1 - x)$  ( $0 \leq x \leq 1$ ), koristeći eksplicitnu shemu računanja.

Za korak diskretizacije uzimati  $h = 0.1$  a promenjivu  $t$  posmatrati u intervalu  $0 \leq t \leq 0.01$ . Izračunati napone čvorova mreže.

Kod optimalne mreže je  $\alpha = 1/6$ , tako da je za korak diskretizacije  $h = 0.1$ ,  $\tau = \alpha h^2 = 1/600$ . Prema tome, čvorovi mreže su određeni koordinatama  $x_i = 0.1i$  ( $i = 0, 1, \dots, 10$ ) i  $t_j = j/600$  ( $j = 0, 1, \dots, 6$ ).

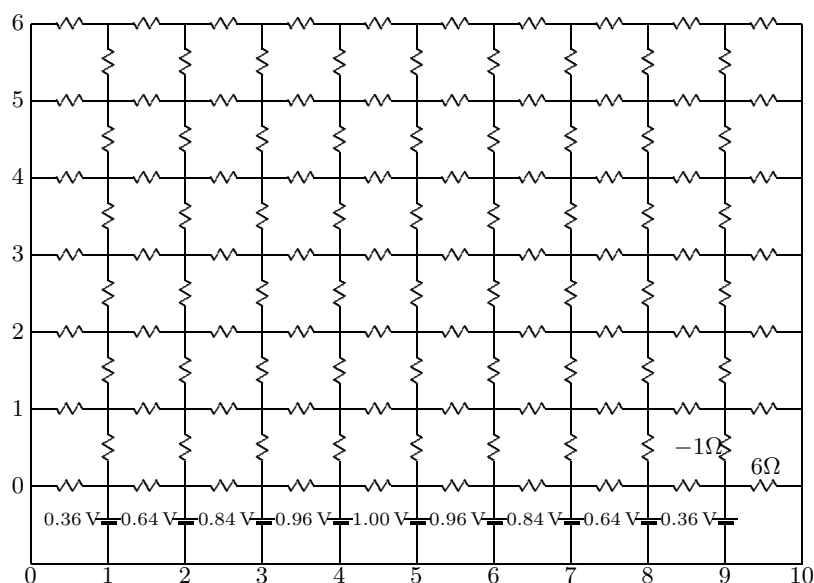
Diskretizovane početne uslove računamo po formuli (119)

$$v(x_i, 0) = v_{i,0} = 4x_i(1 - x_i) = 0.4i(1 - 0.1i), \quad (i = 0, 1, \dots, 10),$$

ili tabelarno:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$v_{i,0}$ [V]	0	.36	.64	.84	.96	1	.96	.84	.64	.36	0

$M$ -analogna mreža određena sa  $G_0 = 1S$ , prikazana je na Sl. 3.39. Primećujemo da je ona simetrična u odnosu na vertikalnu simetralu. Ovo je posledica činjenice što je prava  $x = 1/2$  osa simetrije za dijagrame datih graničnih i početnih uslova. Prema tome, dovoljno je posmatrati mrežu koja se dobija od date mreže sjedinjavanjem čvorova simetrično postavljenih prema osi simetrije. Sve provodnosti u ovoj mreži, osim onih na simetrali, jednake su udvostručenim vrednostima provodnosti u prvobitnoj mreži, dok naponi izvora ostaju neizmenjeni.

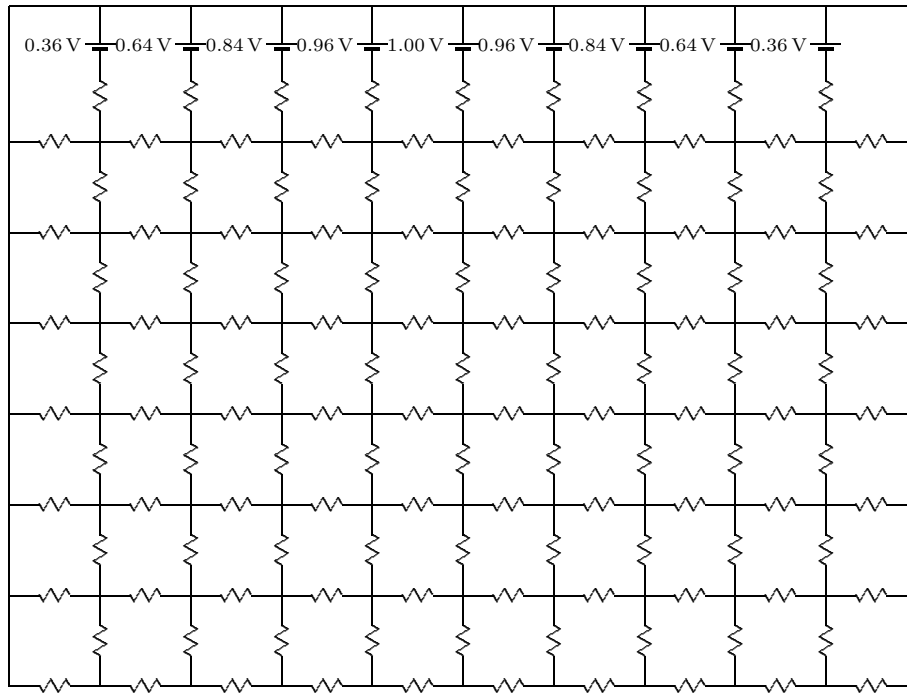


Sl. 3.39.  $M$ -analogna mreža za eksplicitnu shemu računanja jednačine (116)

Napone u čvorovima možemo računati vršeći analizu mreže metodom napona čvorova ili neposredno pomoću formule (154).

PRIMER 3.10. Odrediti  $M$ -analognu rezistivnu mrežu za jednačinu iz prethodnog primera, koristeći implicitnu shemu računanja.

$M$ -analogna mreža dobijena za  $G_0 = 1$  i  $\alpha = 1$  prikazana je na Sl. 3.40. Na Sl. 3.41. prikazana je mreža posle sjedinjavanja čvorova simetrično postavljenih prema simetrali.



Sl. 3.40.  $M$ -analogna mreža za implicitnu shemu računanja jednačine (116)

#### Vežbanja

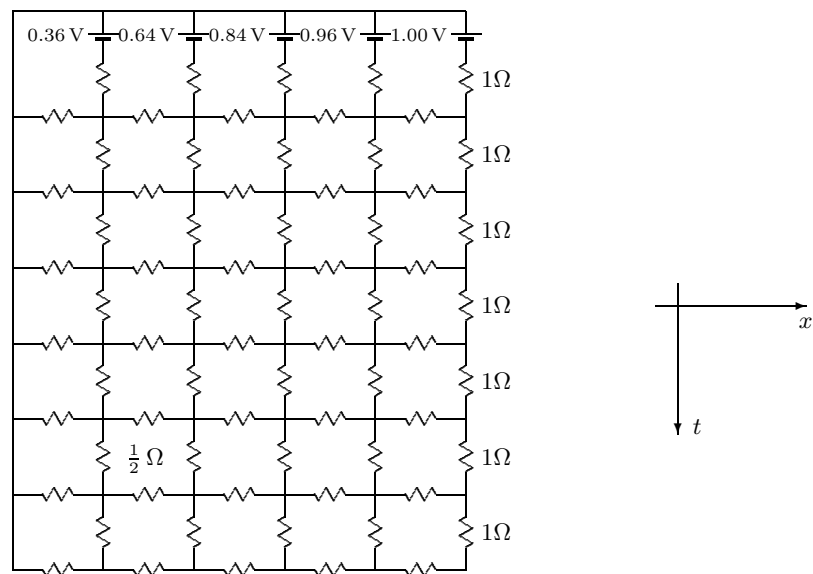
**3.13.** Izvesti izraz (131).

**3.14.** Izvesti izraz (141).

**3.15.** Proceniti grešku aproksimacije  $R_h(v)$  na granicama intervala.

**3.16.** Dokazati da je kvalitet aproksimacije jednačine (116) za eksplicitnu shemu reda  $O(h^2) + O(\tau)$ .

**3.17.** Pomoću kriterijuma (167) ispitati stabilnost  $M$ -analogne mreže za statički raspodeljene sisteme.



Sl. 3.41. Uprošćena mreža sa Sl. 3.39

CIP - Каталогизација у публикацији  
Народна библиотека Србије, Београд

53.072 : 621.3.049

МИЛИЋ, Мирко

Električno modelovanje fizičkih procesa  
/Mirko Milić. - Beograd : BIT  
inženjering, 2004 (Beograd : BIT  
inženjering). - VII, 149 str. : graf.  
prikazi ; 23 cm

Tiraž 500. - Napomene i bibliografske  
reference uz tekst. - Bibliografija: str.  
93-94.

ISBN 86-7557-011-2

Физички процеси - Моделирање  
COBISS.SR-ID 113484812