Preprint · September 2020

DOI: 10.13140/RG.2.2.36457.11360

1 author:

Hiroki Yagisita

Kyoto Sangyo University

「部分関数を含む数学的構造」の意味論、形式証明系、完全性定理

柳下浩紀　（京都産業大学）

要旨

例えば、環は言語 $\{+, -, \times, 0, 1\}$ の構造であり、環の乗法逆元の演算 $\cdot^{-1}$ の定義域は全体でないため、環は言語 $\{+, -, \times, \cdot^{-1}, 0, 1\}$ の構造ではない。一般的には、部分関数に対して関数記号を導入することは公式にはできないことになっている。この原稿では、関数記号の解釈として部分関数を許容するような「広義の構造」について考え、その意味論と（ヒルベルト流の）形式証明系を与え、完全性定理を証明する。シーケント計算、自然演繹に関しては、難しくないのかもしれないが、未解決問題である。

Mathematical structure in a broad sense, Partial function,
Function symbol, Semantics, Hilbert-style formal deductive system,
Sequent calculus, Natural deduction, Completeness theorem,
Intuitionistic logic, Kripke model.

1　序

最初に、動機付けとして、次のことを指摘したい。有理数の全体 $\mathbb{Q}$ を宇宙としたとき、例えば、

$$\forall x\,(x^{-1} \times x = 1)$$
$$0^{-1} \times 0 = 1$$
$$\exists x\,(x \times 0 = 1)$$
$$0^{-1} \times 0 \neq 1$$
$$\forall x\,(x^{-1} = x^{-1})$$
$$0^{-1} = 0^{-1}$$
$$\exists x\,(x = 0^{-1})$$
$$0^{-1} \neq 0^{-1}$$
$$\forall x\,((0 \leq x) \to (\sqrt{x} \times \sqrt{x} = x))$$
$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$$
$$\exists x\,(x \times x = 2)$$
$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} \neq 2$$
$$\forall x\,((0 \leq x) \to (\sqrt{x} = \sqrt{x}))$$
$$\sqrt{2} = \sqrt{2}$$
$$\exists x\,(x = \sqrt{2})$$
$$\sqrt{2} \neq \sqrt{2}$$

などは、いずれも、素朴に判断をすれば、正しい命題ではないであろう。これらの「素朴には真ではない文字列」には「偽と言いたくなるもの」もあれば、「偽とも言い難いもの」もあるように思われる。

通常の数学では、例えば、環の乗法逆演算を表す記号として $\cdot^{-1}$ がごく普通に用いられている。一方、「既存の構造」においては、未定義な項の出現を排除するために、定義域が全体ではない関数に関数記号を宛てることは禁止されている。既存の構造においては、関数記号が表す関数の定義域は全体であるので、言語が $\cdot^{-1}$ と 0 を含むとき、

$$\exists x\,(x = 0^{-1})$$

は「通常の意味論」では恒真であり、「通常の形式証明系」では証明可能である。

この原稿では、関数記号の解釈として部分関数を許容するような「広義の構造」を考えたい。例えば、言語が $\cdot^{-1}$ と 0 を含むとき、0^{-1} が定義されているかは、どうかは、「広義の構造」ごとに異なる。しかし、証明とは正しいことを確認することであるとすれば、部分関数を許容する代価として、上述のような「正しくない文字列」が証明されないようにするために、（通常の形式証明系に比べて）形式証明系に何らかの制約が必要である。

このような「広義の構造」に対して、我々がこの原稿で与えたい意味論は 2 値論理である。但し、上でも見たように「未定義な項を含む閉論理式」は、真とも偽とも言い難い場合がある。よって、まず、最初に取り上げるべき意味論は、「真である（正しい）」、「真でない（正しくない）」を定義することである。しかしながら、より具体的には、

「$\neg(A)$ は真である」: ⇔「 A は真でない」、

「$(A)\wedge(B)$ は真である」: ⇔「 A、および、B のいずれも、が真である」、

「$(A)\vee(B)$ は真である」: ⇔「 A、または、B のいずれか、は真である」、

「$(A) \to (B)$ は真である」: ⇔「 A が真であるならば、B は真である」、

「$\forall x\,(A)$ は真である」: ⇔「任意の対象 x に対して、「A は真である」」、

「$\exists x\,(A)$ は真である」: ⇔「ある対象 x が存在して、「A は真である」」

と定義することになるので、これらの記号に関しては、結果的に、通常の意味論と同じである。但し、未定義な項の出現が有り得るので、否定 $\neg$ の意味（真でない）は通常の意味（偽である）よりも拡大されていて（広義であり）、そのため、否定 $\neg$ を通常の意味（偽である）で安易に解釈しようとすると混乱する可能性が高いことに注意しておく。例えば、通常のように、0 は宇宙に存在し、0^{-1} は宇宙に存在しないとすると、$\neg(0^{-1} \neq 0^{-1})$ と $\forall x\,(\forall y\,((\neg(x \neq y)) \to (x = y)))$ は真であるが、$0^{-1} = 0^{-1}$ と $\forall x\,(\forall y\,((\neg(x^{-1} \neq y^{-1})) \to (x^{-1} = y^{-1})))$ は真ではない。但し、ここで、$\neq$ は「等しくない」を意図する「宇宙上の 2 項関係」を表す述語記号である。一方、もちろん、$=$ は「等しい」を意図する「宇宙上の 2 項関係」を表す述語記号（または、論理記号）である。排中律は一般に成立するが、それは否定 $\neg$ を広義に（真でない、と）解釈した結果である。

さて、「通常の意味論」の定義との違いは、未定義な項が出現している場合であっても原子閉論理式 $r = s, \mathrm{R}(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ が取る値を定義することである。そして、既に指摘したように、この違いは通常の形式証明系の機能不全を引き起こす。しかしながら、後に完全性定理として明らかにするように、適当な修正により機能が回復できる。我々の形式証明系は、

通常の形式証明系より、（証明可能な論理式が少ないという意味で）弱い形式証明系であるが、さらに、「通常の完全性定理」と「我々が示す完全性定理」により、通常の形式証明系は、我々の形式証明系において、「定義域が全体であること」を意図する数学的公理からなる理論と（証明可能な論理式が同じという意味で）同値である。また、我々がこの原稿で与える「広義の構造に対する完全性定理」の証明は、ヘンキン流の「通常の完全性定理」の証明とあまり変わらない。

第２節で、「広義の構造」とその「意味論」を定義し、次節以降の準備も少し行う。第３節で、（ヒルベルト流の）「形式証明系」を与え（←ここが、この原稿の最大の工夫のしどころである）、その「健全性」を注意し、さらに、完全性証明の準備を行う。第４節で、「完全性定理」を証明する。

通常の意味論と我々の意味論は、「既存の構造」に対しては、同じ結果を与えることは自明である。我々の歴史に対する常識が正しければ、「通常の意味論」は、「通常の完全性定理」のヘンキンによる証明の影響下で広く受容されるようになった。読者にあっては、「広義の構造」に対して、他に適当な意味論がないか、どうか、是非、ご検討をお願いしたい。

最後に、（通常の）多種論理は（通常の）１種論理に還元できると言われるが、当然ながら、その正当化には多種論理の意味論が必要であろうし、「広義の構造」は「既存の構造」に還元できると主張する場合にも、その前提として「広義の構造」に対する意味論が必要であろう。蛇足かもしれないが、広義の構造の全体は、２種論理の既存の構造の全体の「適当な部分」に対応するように思われる。また、逆に、多種論理の広義の構造も考えられるであろう。その他、直観主義論理のクリプキモデルに対する広義の構造をどうすべきか、考えてみる余地もあるかもしれない。

2　擬構造とその意味論

この節では、「広義の構造」（後に擬構造と名付ける）、「定義されている項」（後に既定義項と名付ける）と「意味論」を定義する。とは言え、前節の説明で、それらの定義は容易に推測できると思われる。

言語、述語記号、関数記号、項、閉項、原子論理式、論理式、閉論理式などの定義は、通常の（等号 $=$ を含む）古典 1 階述語論理と同じであるとする。但し、定数記号は 0 変数関数記号であるとするが、0 列（空列）が置かれていることを示すはずの括弧は省略しても良いこととする。応用上の必要性は低いと思われるが、一応、0 変数述語記号も許容し、同様に括弧は省略しても良いこととする。変数記号は、$v_0, v_1, v_2, \cdots, v_n, \cdots$ であるとする。論理式 A、変数記号全体の集合の部分集合から閉項全体の集合への写像 e に対して、$A\langle e(\cdot)/\cdot\rangle$ で A における（e の定義域に属する）x のすべての自由な出現を $e(x)$ で置き換えた論理式を表すとする。これは、閉項の（標準的な）代入である。この特別な場合として、論理式 A、変数記号 x、閉項 t に対して、$A\langle t/x\rangle$ で A における x のすべての自由な出現を t で置き換えた論理式を表すとする。論理式 A、変数記号 x、項 t に対して、A における x への t の代入条件が満たされるとき、$A[t/x]$ で A における x のすべての自由な出現を t で置き換えた論理式を表すとする。もちろん、代入条件とは「単なる置き換えが代入である」という条件であって、具体的には、「項に含まれる変数が置き換え箇所において束縛を受けない」という条件である。我々は意味論の定義に（また、ヘンキン定数の添加にも）名前を用いるので、言語 L と集合 U に対して、$L(U)$ で L' は L を拡大した言語であり、$L' \setminus L = \cup_{u\in U}\{\lceil u\rceil\}$ であり、$u \in U$ ならば $\lceil u\rceil$ は L' の定数記号であるような L' を表すとする。念のため、$\lceil u_1\rceil = \lceil u_2\rceil$ ならば $u_1 = u_2$ であることに注意する。また、$\lceil u\rceil$ を（対象 u の L における）標準名前（または、真名）と言うことにする。念のため、$\lceil u\rceil$ は L の項ではないことに注意する。また、$U \subset V$ であることと $L(V)$ が $L(U)$ を拡大した言語であることは同値である。

定義２．１（擬構造）:

L を言語とする。(U, F) が（L の）擬構造であるとは、次を満たすことを言うとする。

(1) U は空でない集合である。

(2) F は定義域が L である全射である。

(3) R が L の n 変数述語記号ならば、$F(\mathrm{R})$ は U^n の部分集合である。

(4) f が L の n 変数関数記号ならば、$F(f)$ は定義域が U^n の部分集合であり、値域が U の部分集合である全射である。 □

注意

(1) $n=0$ のとき、$U^n=\{()\}$ であり、$F(\mathrm{R})$、及び、$F(f)$ の定義域は、$\emptyset$、または、$\{()\}$ である。

(2) 構造は擬構造である。「f が L の n 変数関数記号ならば、$F(f)$ の定義域は U^n である」ことは、擬構造が構造であるための必要十分条件である。 □

定義２．２（既定義項とその解釈）:

L を言語、(U,F) を擬構造とする。$L(U)$ の閉項 t に対して、t が（F で）既定義であること、及び、既定義であるとき、その解釈 t^F を t の構成の木構造に関して帰納的に次のように定義する。

(0) $t \in L(U) \setminus L$ のとき： このとき、ある $u \in U$ が一意に存在して、$t=\lceil u \rceil$ である。t は既定義であると定義し、さらに、$t^F := u$ と定義する。

(1) $t \in L$ のとき： このとき、t は L の定数記号である。$F(t)$ の定義域が $\{()\}$ のとき、かつ、そのときに限り、t は既定義であると定義する。さらに、既定義であるとき、$t^F := (F(t))()$ と定義する。

(2) $t \notin L(U)$ のとき： このとき、正のある整数 n、L のある n 変数関数記号 f と $L(U)$ のある閉項 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ が一意に存在して、$t=f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ である。$t_1,t_2,\cdots,t_n$ が既定義であり、$({t_1}^F,{t_2}^F,\cdots,{t_n}^F)$ が $F(f)$ の定義域の要素であるとき、かつ、そのときに限り、t は既定義であると定義する。さらに、既定義であるとき、$t^F := (F(f))({t_1}^F,{t_2}^F,\cdots,{t_n}^F)$ と定義する。 □

注意

t が既定義であるとき、$t^F \in U$ である。任意の $t \in L(U)\setminus L$ に対して、t は既定義な $L(U)$ の閉項であり、$\lceil t^F \rceil = t$ である。任意の $u \in U$ に対して、$(\lceil u \rceil)^F = u$ である。 □

定義２．３（等号記号の意味論）:

L を言語、(U,F) を擬構造とする。A が等号記号による（$L(U)$ の）閉論理式であるとは、$L(U)$ のある閉項 t_1,t_2 が存在して、A が $t_1=t_2$ であることを言うとする。A は等号記号による閉論理式であるとする。このとき、A は原子閉論理式であり、ある閉項 t_1,t_2 が一意に存在して、A は $t_1=t_2$ である。t_1,t_2 が既定義であり、${t_1}^F={t_2}^F$ であるとき、かつ、そのときに限り、$(U,F)\models A$ であると定義する。 □

定義２．４（述語記号の意味論）:

L を言語、(U,F) を擬構造とする。A が述語記号による（$L(U)$ の）閉論理式であるとは、A が原子閉論理式であり、かつ、等号記号による閉論理式ではないことを言うとする。A は述語記号による閉論理式であるとする。このとき、非負のある整数 n、ある n 変数述語記号 R と（$L(U)$ の）ある閉項 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ が一意に存在して、A は $\mathrm{R}(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ である。$t_1, t_2, \cdots, t_n$ が既定義であり、$({t_1}^F, {t_2}^F, \cdots, {t_n}^F) \in F(\mathrm{R})$ であるとき、かつ、そのときに限り、$(U,F) \models A$ であると定義する。 $\square$

定義２．５（非原子閉論理式の意味論）:

L を言語、(U,F) を擬構造とする。A が（$L(U)$ の）非原子閉論理式であるとは、A が閉論理式であり、かつ、原子閉論理式ではないことを言うとする。非原子閉論理式 A に対して、$(U,F) \models A$ であることを、通常のように論理式の構成の木構造に関して帰納的に定義する。すなわち、

(1) $(U,F) \models \neg(A)$

:⇔「$(U,F) \models A$ でない」、

(2) $(U,F) \models (A) \wedge (B)$

:⇔「$(U,F) \models A$ である、かつ、$(U,F) \models B$ である」、

(3) $(U,F) \models (A) \vee (B)$

:⇔「$(U,F) \models A$ である、または、$(U,F) \models B$ である」、

(4) $(U,F) \models (A) \to (B)$

:⇔「$(U,F) \models A$ であるならば、$(U,F) \models B$ である」、

(5) $(U,F) \models \forall x\,(A)$

:⇔「<u>既定義</u>な $L(U)$ の任意の閉項 t に対して、$(U,F) \models A\langle t/x \rangle$ である」、

(6) $(U,F) \models \exists x\,(A)$

:⇔「<u>既定義</u>な $L(U)$ のある閉項 t が存在して、$(U,F) \models A\langle t/x \rangle$ である」

と定義する。但し、もちろん、それぞれにおいて、$\neg(A), (A) \wedge (B), (A) \vee (B), (A) \to (B), \forall x\,(A), \exists x\,(A)$ はそれぞれ（$L(U)$ の）閉論理式であるとする。 $\square$

注意

量化記号の解釈は通常、「任意の $c \in L(U) \setminus L$ に対して」、「ある $c \in L(U) \setminus L$ が存在して」と定義をするのであろうが、上のように定義した方が健全性の確認が容易になるように思われる。もちろん、これらの定義は同値であろう（実際に、そうであることを、後出の補題２．９で述べる）。 $\square$

例

(U,F) を言語 $\{+,-,\times,\cdot^{-1},0,1\}$ の環の擬構造とすると、

$$(U,F) \models \forall v_0\,(({v_0}^{-1} = {v_0}^{-1}) \to ({v_0}^{-1} \times v_0 = 1))$$

$$(U,F) \models \forall v_0\,(({v_0}^{-1} \times v_0 = 1) \to ({v_0}^{-1} = {v_0}^{-1}))$$

である。$\mathbb{N}$ を標準モデルとすると、

$$\mathbb{N} \models \forall v_0\,((\sqrt{v_0} = \sqrt{v_0}) \to (\sqrt{v_0} \times \sqrt{v_0} = v_0))$$

$$\mathbb{N} \models \forall v_0\,((\sqrt{v_0} \times \sqrt{v_0} = v_0) \to (\sqrt{v_0} = \sqrt{v_0}))$$

である。 □

定義２．６（非閉論理式の意味論）：

L を言語、(U,F) を擬構造とする。A は（$L(U)$ の）論理式であり、かつ、閉論理式ではないとする。このとき、$(U,F) \models A$ であることを通常のように定義する。すなわち、A に自由な出現がある変数記号全体の集合から既定義な $L(U)$ の閉項全体の集合への任意の写像 e に対して、$(U,F) \models A\langle e(\cdot)/\cdot\rangle$ であるとき、かつ、そのときに限り、$(U,F) \models A$ であると定義する。 □

例

(U,F) を言語 $\{+,-,\times,\cdot^{-1},0,1\}$ の環の擬構造とすると、

$$(U,F) \models ({v_0}^{-1} = {v_0}^{-1}) \to ({v_0}^{-1} \times v_0 = 1)$$

$$(U,F) \models ({v_0}^{-1} \times v_0 = 1) \to ({v_0}^{-1} = {v_0}^{-1})$$

である。$\mathbb{N}$ を標準モデルとすると、

$$\mathbb{N} \models (\sqrt{v_0} = \sqrt{v_0}) \to (\sqrt{v_0} \times \sqrt{v_0} = v_0)$$

$$\mathbb{N} \models (\sqrt{v_0} \times \sqrt{v_0} = v_0) \to (\sqrt{v_0} = \sqrt{v_0})$$

である。 □

以上により、$(U,F) \models A$ であることが、言語 L、擬構造 (U,F)、（$L(U)$ の）論理式 A に対して定義された。

注意

L を言語、D_1, D_2 を変数記号全体の集合の部分集合、e_1, e_2 をそれぞれ D_1, D_2 から（L の）閉項全体の集合への写像とする。

(1) A を（L の）論理式とする。D_A を A に自由な出現がある変数記号全体の集合とする。$D_1 \cap D_A = D_2 \cap D_A$ とする。$x \in D_1 \cap D_A, x \in D_2 \cap D_A$ であるならば、$e_1(x) = e_2(x)$ であるとする。このとき、$A\langle e_1(\cdot)/\cdot\rangle = A\langle e_2(\cdot)/\cdot\rangle$ である。

(2) e を $D_1 \cup D_2$ から（L の）閉項全体の集合への写像で、$x \in D_1$ ならば $e(x) = e_1(x)$ であり、$x \in D_2 \setminus D_1$ ならば $e(x) = e_2(x)$ とする。A を（L の）論理式とする。このとき、$(A\langle e_1(\cdot)/\cdot\rangle)\langle e_2(\cdot)/\cdot\rangle = A\langle e(\cdot)/\cdot\rangle$ である。 $\square$

注意

L を言語、D を変数記号全体の集合の部分集合、e を D から（L の）閉項全体の集合への写像とする。

(0) A, B を（L の）論理式とする。このとき、$((A) \wedge (B))\langle e(\cdot)/\cdot\rangle = (A\langle e(\cdot)/\cdot\rangle) \wedge (B\langle e(\cdot)/\cdot\rangle)$、$((A) \vee (B))\langle e(\cdot)/\cdot\rangle = (A\langle e(\cdot)/\cdot\rangle) \vee (B\langle e(\cdot)/\cdot\rangle)$、$((A) \to (B))\langle e(\cdot)/\cdot\rangle = (A\langle e(\cdot)/\cdot\rangle) \to (B\langle e(\cdot)/\cdot\rangle)$ である。

(1) A を（L の）論理式とする。このとき、$(\neg(A))\langle e(\cdot)/\cdot\rangle = \neg(A\langle e(\cdot)/\cdot\rangle)$ である。

(2) x_0 を変数記号とする。e_0 を $D \setminus \{x_0\}$ から（L の）閉項全体の集合への写像で、$x \in D \setminus \{x_0\}$ ならば $e_0(x) = e(x)$ であるとする。A を（L の）論理式とする。このとき、$(\forall x_0\,(A))\langle e(\cdot)/\cdot\rangle = \forall x_0\,(A\langle e_0(\cdot)/\cdot\rangle)$、$(\exists x_0\,(A))\langle e(\cdot)/\cdot\rangle = \exists x_0\,(A\langle e_0(\cdot)/\cdot\rangle)$ である。 $\square$

注意

(1) $U \neq \emptyset$ より $L(U) \setminus L \neq \emptyset$ であるので、既定義な $L(U)$ の閉項全体の集合は空でない。

(2) $(U, F) \models \forall x\,(A)$ と $(U, F) \models A$ は（A に x の自由な出現がなかったとしても）同値である。

(3) （$L(U)$ の）任意の論理式 A, B, C に対して、$(U, F) \models (A) \to (B), (U, F) \models (B) \to (C)$ であるならば、$(U, F) \models (A) \to (C)$ である。

(4) （$L(U)$ の）論理式 A, B に対して、$A \sim B$ を $(U, F) \models (A) \to (B), (U, F) \models (B) \to (A)$ であることとすると、$\sim$ は同値関係である。

以後の議論では、これらのことを明示的に注意することなく用いる。$\square$

注意

U を「数学的対象の全体」（仮にそのようなものがあったとして）とすると、U は普遍的ではあろうが、L が「素朴な意味」での（物理的な？）文字からなる場合は、(L, F) の方は恣意的なものにならざるを得ないであろう。多くの場合、そこで重要と思える対象、述語、部分関数に L の

要素を宛てがうことになるのであろう。因みに、真名（標準名前）は定数記号であるが、「素朴な意味」での文字とは言い難いように思われる。□

次のことは、健全性の確認（及び、補題２．９の証明）に用いる。

補題２．７：

L を言語、(U,F) を（L の）擬構造、A_1, B_1, A_2, B_2 を $L(U)$ の論理式とする。B_1 は A_1 における A_2 の<u>一つ</u>の出現を B_2 に置き換えたものであるとする。$(U,F) \models A_2 \to B_2$ であり、$(U,F) \models B_2 \to A_2$ であるとする。このとき、$(U,F) \models A_1 \to B_1$ であり、$(U,F) \models B_1 \to A_1$ である。□

証明

A_2, B_2 から始まる論理式の結合に関する帰納法。■

補題２．８：

L を言語、(U,F) を（L の）擬構造とする。t, s は（F で）既定義な $L(U)$ の閉項とし、$t^F = s^F$ であるとする。t', s' は $L(U)$ の閉項で、s' は t' における t の<u>一つ</u>の出現を s で置き換えたものであるとする。このとき、t' が（F で）既定義であることと s' が（F で）既定義であることは同値である。t', s' が（F で）既定義であるならば、$(t')^F = (s')^F$ である。□

証明

t, s から始まる関数記号への入力に関する帰納法。■

直感的には自明であるように思われるが、次の (1) も完全性の証明（及び、健全性の確認）に用いる。(2), (3), (4) は補題２．１０の証明に用いる。

補題２．９：

L を言語、(U,F) を（L の）擬構造とし、A を $L(U)$ の論理式とする。

(1) t, s は（F で）既定義な $L(U)$ の閉項とし、$t^F = s^F$ であるとする。B は A における t の<u>一つ</u>の出現を s で置き換えたものであるとする。このとき、$(U,F) \models A \to B$ であり、$(U,F) \models B \to A$ である。

(2) $\forall x\,(A)$ が閉論理式であるとする。このとき、

$(U,F) \models \forall x\,(A)$

⇔「任意の $c \in L(U) \setminus L$ に対して、$(U,F) \models A\langle c/x\rangle$ である」

である。

(3) $\exists x\,(A)$ が閉論理式であるとする。このとき、

$(U,F) \models \exists x\,(A)$

⇔「ある $c \in L(U) \setminus L$ が存在して、$(U,F) \models A\langle c/x\rangle$ である」

である。

(4) A は閉論理式ではないとする。このとき、A に自由な出現がある変数記号全体の集合から $L(U) \setminus L$ への任意の写像 e に対して、$(U,F) \models A\langle e(\cdot)/\cdot\rangle$ であるとき、かつ、そのときに限り、$(U,F) \models A$ である。 $\square$

証明

(1)

補題２．８を用いて、置き換え箇所を含む原子論理式について確認できる。よって、補題２．７による。

(2), (3), (4)

$u \in U$ ならば $\lceil u \rceil$ は F で既定義で $(\lceil u \rceil)^F = u$ であることと (1) より、容易。 $\blacksquare$

（通常の意味論と同様に）我々の意味論も、次のように言語の拡大に対して頑強であることを注意する。このことも、完全性の証明に用いる。

補題２．１０：

L を言語、L' を L を拡大した言語とする。

(0) $L(\emptyset) = L$ である。

(1) $U \subset U'$ であるならば、$L'(U')$ は $L(U)$ を拡大した言語である。

(2) $U \subset U'$ であるならば、$L(U)$ の論理式は $L'(U')$ の論理式である。

(3) $U \subset U'$ であるならば、$L(U)$ の任意の論理式 A に対して、A が $L(U)$ の閉論理式であることと A が $L'(U')$ の閉論理式であることとは同値である。

(4) (U,F) を L の擬構造、(U',F') を L' の擬構造とする。任意の $s \in L$ に対して、$F(s) = F'(s)$ であるとする。このとき、$U = U'$ であるならば、$L(U)$ の任意の論理式 A に対して、$(U,F) \models A$ であることと $(U',F') \models A$ であることは同値である。 $\square$

注意

より正確には、L における真名（標準名前）を表す $\lceil\cdot\rceil_L$ のすべての出現を L' における真名（標準名前）を表す $\lceil\cdot\rceil_{L'}$ に置き換える操作が必要である。ただし、A が L の論理式であれば、（真名の出現がないので）そのような操作は不要である。 $\square$

証明：

(4) 以外は容易である。(4) を確認する。

まず、t を $L(U)$ の閉項とすると、t が F で既定義であることと t が F' で既定義であることは同値であり、t が F と F' で既定義であるならば $t^F = t^{F'}$ である。このことは、t の構成の木構造に関する帰納法で確認できる。このことから、$L(U)$ の原子閉論理式について確認できる。

次に、論理式の長さ（$\neg, \wedge, \vee, \to, \forall, \exists$ の出現の個数）に関する帰納法で、$L(U)$ の閉論理式について確認する。$\neg, \wedge, \vee, \to$ については、自明。 $\forall, \exists$ については、$U = U'$ から $L(U) \setminus L = L'(U') \setminus L'$ であることと補題２．９より、確認できる。

最後に、$L(U)$ の非閉論理式についても、$L(U)$ の閉論理式の場合から、上の「$\forall, \exists$ について」と同様に確認できる。 ■

3　形式証明系とその健全性

この原稿の最大の工夫のしどころは、「適切な形式証明系」を与えることである。とは言え、述語記号（及び、等号）は「宇宙上の関係」を意図しているということを意識すれば「適切な形式証明系」は自然に得られる、と我々の「論理的公理の選択」をこの節で見られた方は思うのではないかと思われる。対照的に（当然であるが）命題論理の結合子は解釈が宇宙に依存しない普遍的なものである。蛇足ではあるが、仮に宇宙が「数学的対象の全体」（そのようなものがあるか、どうかは判然としないと思われるが）であるなら、量化と等号の解釈も普遍的であろう。また、ほとんどの関数は当然、部分関数であろう。この節では、ヒルベルト流の形式証明系を（言語ごとに）一つ与える方法を具体的に一つ与え、「広義の構造」に対する健全性を注意する。それから、次節の準備も行う。因みに、シーケント計算、自然演繹については、難しくないかもしれないが、未解決問題である。

論理的公理を定義するために、まず、いくつかの公理（型）を定義する。

定義３．１（公理型）:

L を言語とする。

命題公理： 相異なる命題記号 $p_1, p_2, \cdots, p_n$、φ に出現がある命題記号全体の集合が $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ である命題論理の恒真式 φ と（L の）論理式 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ があって、φ における $p_1, p_2, \cdots, p_n$ のすべての出現をそれぞれ $A_1, A_2, \cdots, A_n$ で置き換えたものである（L の）論理式を（L の）命題公理と言うことにする。

代入公理： A における x への t の代入条件が満たされる（L の）項 t、（L の）論理式 A と変数記号 x があって

$$(t = t) \to ((\forall x\,(A)) \to (A[t/x]))$$

である（L の）論理式を（L の）代入公理と言うことにする。

定義公理： （L の）項 t_1, t_2 があって

$$(t_1 = t_2) \to ((t_1 = t_1) \wedge (t_2 = t_2)),$$

（L の）**述語記号** R と（L の）項 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ があって

$$(\mathrm{R}(t_1, t_2, \cdots, t_n))$$

$$\to (((\cdots((t_1 = t_1) \wedge (t_2 = t_2)) \wedge \cdots) \wedge (t_{n-1} = t_{n-1})) \wedge (t_n = t_n)),$$

または、（L の）**関数記号** f と（L の）項 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ があって

$$(f(t_1, t_2, \cdots, t_n) = f(t_1, t_2, \cdots, t_n))$$

$$\to (((\cdots((t_1 = t_1) \wedge (t_2 = t_2)) \wedge \cdots) \wedge (t_{n-1} = t_{n-1})) \wedge (t_n = t_n))$$

である（L の）論理式を（L の）定義公理と言うことにする。

等号公理： A における z への x の<u>**代入条件**</u>と A における z への y の<u>**代入条件**</u>が満たされる変数記号 x, y, z と（L の）論理式 A があって

$$(x = y) \to ((A[x/z]) \to (A[y/z]))$$

である（L の）論理式を（L の）等号公理と言うことにする。

対象公理： 変数記号 x があって

$$x = x$$

である（L の）論理式を（L の）対象公理と言うことにする。 □

注意

実際には、対象公理は言語によらない。 □

定義３．２（論理的公理）:

L を言語、A を（L の）論理式とする。A が（L の）論理的公理であるとは、A が（L の）命題公理、代入公理、定義公理、等号公理、または、対象公理であることを言うとする。 □

注目すべきは、

$$(\forall x\,(A)) \to (A[t/x])$$

でなく、それよりも弱い

$$(t = t) \to ((\forall x\,(A)) \to (A[t/x]))$$

を論理的公理（代入公理）としたことである。これを補うために、項 t が定義されていること（$t = t$）を帰結するための論理的公理（定義公理）が用意された。

次のように、論理的公理は擬構造に対して恒真であることを注意する。

補題３．３：

L を言語、A を（L の）論理的公理とする。このとき、（L の）任意の擬構造 (U, F) に対して、

$$(U, F) \models A$$

である。 □

証明

等号公理は、補題２．９ (1) より確認できる。それ以外は、容易である。

■

注意３．４：

L を言語、L' を L を拡大した言語とする。

(1) L の任意の論理式 A に対して、A が L の論理的公理であることと A が L' の論理的公理であることは同値である

(2) c_0 は L' の定数記号であり、$L' \setminus L = \{c_0\}$ であるとする。A' を L' の論理式、x を A' に出現がない変数記号とする。A を A' における c_0 の出現をすべて x に置き換えたものであるとする。このとき、A が L の論理的公理であることと A' が L' の論理的公理であることとは同値である。■

次に、通常のように、推論規則（ただし、我々は操作と言う）を定義する。

定義３．５（推論型）:

L を言語、S を（L の）論理式全体の集合の部分集合、A を（L の）論理式とする。

公理操作： $S \rightsquigarrow A$ は（L の）公理操作であるとは、A が（L の）論理的公理であることを言うとする。

単純操作： $S \rightsquigarrow A$ は（L の）単純操作であるとは、（L の）ある論理式 B が存在して、

$$B, (B) \to (A) \in S$$

であることを言うとする。

全称操作： $S \rightsquigarrow A$ は（L の）全称操作であるとは、（L の）ある論理式 B、ある変数記号 x と x の自由な出現がない（L の）ある論理式 C が存在して、

$$(C) \to (B) \in S$$

であり、A が

$$(C) \to (\forall x\,(B))$$

であることを言うとする。

補対操作： $S \rightsquigarrow A$ は（L の）補対操作であるとは、ある $A_1 \in S$、（L の）ある論理式 A_2 とある変数記号 x が存在して、A が A_1 における $\exists x\,(A_2)$ の一つの出現を $\neg(\forall x\,(\neg(A_2)))$ で置き換えたものであるか、または、$\neg(\forall x\,(\neg(A_2)))$ の一つの出現を $\exists x\,(A_2)$ で置き換えたものであることを言うとする。 □

定義３．６（許容操作）：

$S \rightsquigarrow A$ が（L の）許容操作であるとは、$S \rightsquigarrow A$ が（L の）公理操作、単純操作、全称操作、または、補対操作であることを言うとする。 □

注意

素朴な印象としては、公理操作以外は言語にほとんど依存していない、と言うのが妥当だと思われる。 □

次のように、許容操作は充足性を保存することを注意する。

補題３．７：

L を言語、$S \rightsquigarrow A$ を（L の）許容操作、(U, F) を（L の）の擬構造とする。任意の $B \in S$ に対して、

$$(U, F) \models B$$

であるとする。このとき、

$$(U, F) \models A$$

である。 □

証明

公理操作は補題３．３より、補対操作は補題２．７より、確認できる。それ以外は、容易である。 ■

注意３．８：

L を言語、L' を L を拡大した言語とする。

(1) S を L の論理式全体の集合の部分集合、A を L の論理式とする。$S \rightsquigarrow A$ が L の許容操作であることと $S \rightsquigarrow A$ が L' の許容操作であることは同値である。

(2) c_0 は L' の定数記号であり、$L' \setminus L = \{c_0\}$ であるとする。S' を L' の論理式全体の集合の部分集合、A' を L' の論理式とする。x は S' と A' に出現がない変数記号であるとする。S を S' における c_0 の出現をすべて

x に置き換えたものであるとする。A を A' における c_0 の出現をすべて x に置き換えたものであるとする。このとき、$S \rightsquigarrow A$ が L の許容操作であることと $S' \rightsquigarrow A'$ が L' の許容操作であることは同値である。 ■

定義３．９（形式証明）：
L を言語とする。（L の）論理式 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ に対して、

$$\mapsto_L (A_1, A_2, \cdots, A_n)$$

であるとは、任意の $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ に対して、$\{A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}\} \rightsquigarrow A_k$ が（L の）許容操作であることを言うとする。 □

注意３．１０：
L を言語、L' を L を拡大した言語とする。
(1) $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ を L の論理式の列とする。このとき、$\mapsto_L (A_1, A_2, \cdots, A_n)$ であることと $\mapsto_{L'} (A_1, A_2, \cdots, A_n)$ であることとは同値である。
(2) c_0 は L' の定数記号であり、$L' \backslash L = \{c_0\}$ であるとする。$({A'}_1, {A'}_2, \cdots, {A'}_n)$ を L' の論理式の列とする。x を $({A'}_1, {A'}_2, \cdots, {A'}_n)$ に出現がない変数記号であるとする。$(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ を $({A'}_1, {A'}_2, \cdots, {A'}_n)$ における c_0 の出現をすべて x に置き換えたものとする。このとき、$\mapsto_L (A_1, A_2, \cdots, A_n)$ であることと $\mapsto_{L'} ({A'}_1, {A'}_2, \cdots, {A'}_n)$ であることとは同値である。 ■

定義３．１１（証明可能）：
L を言語とする。
(1) （L の）論理式 A に対して、

$$\vdash_L A$$

であるとは、正のある整数 n と（L の）ある論理式 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ が存在して、

$$\mapsto_L (A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, A)$$

であることを言う。
(2) T を（L の）閉論理式全体の集合の部分集合とする。（L の）論理式 A に対して、

$$T \vdash_L A$$

であるとは、非負のある整数 n とある $C_1, C_2, \cdots, C_n \in T$ が存在して、

$$\vdash_L (C_n) \to ((C_{n-1}) \to (\cdots \to ((C_2) \to ((C_1) \to (A))) \cdots))$$

であることを言うとする。 □

注意

(0) $\vdash_L A$ と $\emptyset \vdash_L A$ は同値である。

(1) $T \vdash_L A$ の定義の仕方は、通常とは少し違っている。我々の定義は、演繹定理そのものである。

(2) T を閉論理式全体の集合の部分集合としたとき、命題論理により（T から）証明可能であることと「命題公理の公理操作」と「単純操作」だけに操作を限定して（T から）証明可能であることは同じである。以後の議論では、このことを特に明示的に注意することなく用いる。 □

補題３．１２（健全性）:

L を言語、T を（L の）閉論理式全体の集合の部分集合とする。A を（L の）論理式とし、

$$T \vdash_L A$$

であるとする。このとき、（L の）任意の擬構造 (U, F) に対して、

$$[\ \forall C \in T:\ (U, F) \models C\ ] \qquad \Longrightarrow \qquad (U, F) \models A$$

である。 □

証明

ある $C_1, C_2, \cdots, C_n \in T$ が存在して、

$$\vdash_L (C_n) \to ((C_{n-1}) \to (\cdots \to ((C_2) \to ((C_1) \to (A)))\cdots))$$

である。よって、補題３．７を用いて、形式証明の構成に関する帰納法で、

$$(U, F) \models (C_n) \to ((C_{n-1}) \to (\cdots \to ((C_2) \to ((C_1) \to (A)))\cdots))$$

が確認される。一方、$C_k \in T$ より $(U, F) \models C_k$ であるので、$(U, F) \models A$ が確認される。 ■

定義３．１３（矛盾、無矛盾）:

L を言語、T を（L の）閉論理式全体の集合の部分集合とする。

(1) T が（L で形式的に）矛盾しているとは、（L の）任意の論理式 A に対して、

$$T \vdash_L A$$

であることを言うとする。

(2) T が（L で形式的に）無矛盾であるとは、T が（L で形式的に）矛盾していないことを言うとする。 □

注意

(1) L を言語、T を（L の）閉論理式全体の集合の部分集合とする。T が（L で形式的に）矛盾していることと（L の）ある論理式 A が存在して、

$$T \vdash_L A \quad \text{かつ} \quad T \vdash_L \neg(A)$$

であることは同値である。以後の議論では、このことを明示的に注意することなく、用いる。

(2) 健全性とは「形式的に矛盾」していることは「（真に）矛盾」しているという主張であり、完全性とは「形式的に無矛盾」なことは「（真に）無矛盾」であるという主張であるとも考えられるであろう。もちろん、これは、意味論は普遍的であるのに対し、形式証明系は個別的である、という素朴な印象によるものである。しかしながら、「通常の意味論」と「我々の意味論」は異なっている。例えば、$\{\neg(\exists\, v_0\,(v_0 = 0^{-1}))\}$ は「通常の意味論」では矛盾しているが、「我々の意味論」では無矛盾である。

□

以下、完全性の証明のための準備をする。具体的には、後出の補題３．２０を証明する。実質的に、ここから（おおよそ、この原稿の半分）がヘンキンの方法による完全性定理の証明である。

補題３．１４（ヘンキン補題）:

L を言語、L' を L を拡大した言語とする。c_0 は L' の定数記号であり、$L' \setminus L = \{c_0\}$ であるとする。A を L の論理式、x を変数記号とし、$\exists\, x\,(A)$ が L の閉論理式であるとする。T を L の閉論理式全体の集合の部分集合とする。このとき、$T \cup \{\exists\, x\,(A)\}$ が L で形式的に無矛盾であることと $T \cup \{c_0 = c_0, A\langle c_0/x\rangle\}$ が L' で形式的に無矛盾であることとは同値である。 □

証明

$T \cup \{\exists\, x\,(A)\}$ が L で形式的に矛盾しているとする。このとき、

$$T \vdash_L \neg(\exists\, x\,(A))$$

であるので、

$$T \cup \{c_0 = c_0, A\langle c_0/x\rangle\} \vdash_{L'} \neg(\exists\, x\,(A))$$

である。一方、代入公理より

$$\vdash_{L'} (c_0 = c_0) \to ((\forall\, x\,(\neg(A))) \to (\neg(A\langle c_0/x\rangle)))$$

であるので、

$$\{c_0 = c_0\} \vdash_{L'} (A\langle c_0/x\rangle) \to (\neg(\forall\, x\, (\neg(A))))$$

である。よって、補対操作より、

$$\{c_0 = c_0\} \vdash_{L'} (A\langle c_0/x\rangle) \to (\exists\, x\, (A))$$

$$T \cup \{c_0 = c_0, A\langle c_0/x\rangle\} \vdash_{L'} \exists\, x\, (A)$$

である。したがって、$T \cup \{c_0 = c_0, A\langle c_0/x\rangle\}$ は L' で形式的に矛盾している。

逆に、$T \cup \{c_0 = c_0, A\langle c_0/x\rangle\}$ は L' で形式的に矛盾しているとする。このとき、ある $C_1, C_2, \cdots, C_n \in T$ が存在して、

$$\vdash_{L'}$$

$$(c_0 = c_0)$$

$$\to ((C_n) \to ((C_{n-1}) \to (\cdots \to ((C_2) \to ((C_1) \to (\neg(A\langle c_0/x\rangle))))) \cdots)))$$

である。よって、L' の論理式のある列 $(A'_1, A'_2, \cdots, A'_m)$ が存在して、A'_m は

$$(c_0 = c_0)$$

$$\to ((C_n) \to ((C_{n-1}) \to (\cdots \to ((C_2) \to ((C_1) \to (\neg(A\langle c_0/x\rangle))))) \cdots)))$$

であり、

$$\mapsto_{L'} (A'_1, A'_2, \cdots, A'_m)$$

である。ここで、x と異なるある変数記号 y が存在して、y は $A, (A'_1, A'_2, \cdots, A'_m)$ に出現がない。このとき、注意３．１０ (2) より、

$$\vdash_L$$

$$(y = y)$$

$$\to ((C_n) \to ((C_{n-1}) \to (\cdots \to ((C_2) \to ((C_1) \to (\neg(A[y/x]))))) \cdots)))$$

である。$\top$ を

$$(\forall\, v_0\, (v_0 = v_0)) \vee (\neg(\forall\, v_0\, (v_0 = v_0)))$$

とし、C を

$$((\cdots(((\top) \wedge (C_1)) \wedge (C_2)) \wedge \cdots) \wedge (C_{n-1})) \wedge (C_n)$$

とする。$\vdash_L \top$、$T \vdash_L C$ である。対象公理より、

$$\vdash_L (C) \to (\neg(A[y/x]))$$

である。よって、等号公理より、

$$\vdash_L (y = x) \to ((C) \to (\neg(A)))$$

$$\vdash_L (\top) \to ((y = x) \to ((C) \to (\neg(A))))$$

である。よって、全称操作より、

$$\vdash_L (\top) \to (\forall\, y\, ((y = x) \to ((C) \to (\neg(A)))))$$

$$\vdash_L \forall\, y\, ((y = x) \to ((C) \to (\neg(A))))$$

である。よって、代入公理より、

$$\vdash_L (x = x) \to ((x = x) \to ((C) \to (\neg(A))))$$

である。よって、対象公理より

$$\vdash_L (C) \to (\neg(A))$$

であるので、全称操作より

$$\vdash_L (C) \to (\forall\, x\, (\neg(A)))$$

$$\vdash_L (C) \to (\neg(\neg(\forall\, x\, (\neg(A)))))$$

である。よって、補対操作より

$$\vdash_L (C) \to (\neg(\exists\, x\, (A)))$$

であるので、

$$T \vdash_L \neg(\exists\, x\, (A))$$

である。$T \cup \{\exists\, x\, (A)\}$ は L で形式的に矛盾している。 ■

補題３．１５（ヘンキン定数）:

L を言語、T を L の閉論理式全体の集合の部分集合とする。T は L で形式的に無矛盾であるとする。このとき、L を拡大したある言語 L' と L' の閉論理式全体の集合のある部分集合 T' が存在して、次を満たす。

(1) $c' \in L' \setminus L$ ならば、c' は L' の定数記号である。

(2) T' は L' で形式的に無矛盾である。

(3) A は L の論理式で、x は変数記号であるとする。$\exists x\,(A)$ は L の閉論理式であり、

$$T \vdash_L \exists x\,(A)$$

であるとする。このとき、L' のある定数記号 c' が存在して、

$$(c' = c') \wedge (A\langle c'/x\rangle) \in T'$$

である。

(4) $T \subset T'$ である。 □

証明

W を A が L の論理式で、x が変数記号で、$\exists x\,(A)$ が L の閉論理式で、$T \vdash_L \exists x\,(A)$ である (x, A) 全体の集合とする。$L' := L(W)$ とする。$(x, A) \in W$ に対して、$\varphi^{(x,A)}$ を

$$(\lceil (x, A)\rceil = \lceil (x, A)\rceil) \wedge (A\langle \lceil (x, A)\rceil/x\rangle)$$

とする。$T' := T \cup (\cup_{(x,A)\in W}\{\varphi^{(x,A)}\})$ とする。

このとき、L' は L を拡大した言語であり、T' は L' の閉論理式全体の集合の部分集合であり、(1), (3), (4) を満たす。

(2) を示す。背理法。T' は L' で形式的に矛盾しているとする。$\perp$ を

$$(\forall\, v_0\,(v_0 = v_0)) \wedge (\neg(\forall\, v_0\,(v_0 = v_0)))$$

とする。ある $C_1, C_2, \cdots, C_n \in T'$ が存在して、

$$\vdash_{L'} (C_n) \to ((C_{n-1}) \to (\cdots \to ((C_2) \to ((C_1) \to (\perp)))\cdots))$$

である。L' の論理式のある列 $(B_1, B_2, \cdots, B_m)$ が存在して、B_m は

$$(C_n) \to ((C_{n-1}) \to (\cdots \to ((C_2) \to ((C_1) \to (\perp)))\cdots))$$

であり、

$$\rightsquigarrow_{L'} (B_1, B_2, \cdots, B_m)$$

である。ある $(x_1, A_2), (x_2, A_2), \cdots, (x_k, A_k) \in W$ が存在して、任意の $(x, A) \in W$ に対して、$\lceil (x, A)\rceil$ が $(B_1, B_2, \cdots, B_m)$ に出現しているならば、

$$(x, A) \in \{(x_1, A_2), (x_2, A_2), \cdots, (x_k, A_k)\}$$

である。注意３．１０ (1) より、

$$\rightsquigarrow_{L(\{(x_1,A_2),(x_2,A_2),\cdots,(x_k,A_k)\})} (B_1, B_2, \cdots, B_m)$$

である。よって、$\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ は $L(\{(x_1, A_2), (x_2, A_2), \cdots, (x_k, A_k)\})$ で形式的に矛盾している。さらに、

$$\{C_1, C_2, \cdots, C_n\} \subset T \cup \{\varphi^{(x_1,A_1)}, \varphi^{(x_2,A_2)}, \cdots, \varphi^{(x_k,A_k)}\}$$

であり、$T \cup \{\varphi^{(x_1,A_1)}, \varphi^{(x_2,A_2)}, \cdots, \varphi^{(x_k,A_k)}\}$ が $L(\{(x_1, A_1), (x_2, A_2), \cdots, (x_k, A_k)\})$ で形式的に矛盾している。l を $T \cup \{\varphi^{(x_1,A_1)}, \varphi^{(x_2,A_2)}, \cdots, \varphi^{(x_l,A_l)}\}$ が $L(\{(x_1, A_1), (x_2, A_2), \cdots, (x_l, A_l)\})$ で形式的に矛盾している最小の非負の整数とする。仮定より、$l \neq 0$ である。よって、$T \cup \{\varphi^{(x_1,A_1)}, \varphi^{(x_2,A_2)}, \cdots, \varphi^{(x_{l-1},A_{l-1})}\}$ は $L(\{(x_1, A_1), (x_2, A_2), \cdots, (x_{l-1}, A_{l-1})\})$ で形式的に無矛盾である。さらに、$(x_l, A_l) \in W$ より

$$T \vdash_L \exists x_l\,(A_l)$$

であるので、$(T \cup \{\varphi^{(x_1,A_1)}, \varphi^{(x_2,A_2)}, \cdots, \varphi^{(x_{l-1},A_{l-1})}\}) \cup \{\exists x_l\,(A_l)\}$ は $L(\{(x_1, A_1), (x_2, A_2), \cdots, (x_{l-1}, A_{l-1})\})$ で形式的に無矛盾である。ところが、そうすると、補題３．１４より、$T \cup \{\varphi^{(x_1,A_1)}, \varphi^{(x_2,A_2)}, \cdots, \varphi^{(x_l,A_l)}\}$ が $L(\{(x_1, A_1), (x_2, A_2), \cdots, (x_l, A_l)\})$ で形式的に無矛盾である。矛盾。よって、(2) が満たされる。 ■

定義３．１６（極大無矛盾）:

L を言語、T を（L の）閉論理式全体の集合の部分集合とする。T が（L で形式的に）極大無矛盾であるとは、次が成り立つことを言うとする。

(1) T は（L で形式的に）無矛盾である。

(2) （L の）閉論理式全体の集合の任意の部分集合 S に対して、S が（L で形式的に）無矛盾であるならば、

$$T \subset S \quad \Longrightarrow \quad T = S$$

である。 □

補題３．１７：

L を言語、T を（L の）閉論理式全体の集合の部分集合とする。T は（L で形式的に）極大無矛盾であるとする。このとき、（L の）任意の閉論理式 C に対して、

$$T \vdash_L C \quad \Longleftrightarrow \quad C \in T$$

である。 □

証明

$C \in T$ ならば $T \vdash_L C$ であることは、自明である。

$T \vdash_L C$ とする。このとき、$T \cup \{C\}$ が矛盾していれば T が矛盾している。よって、仮定より、$T \cup \{C\}$ は無矛盾であるので、さらに、$C \in T$ である。 ■

補題３．１８：

L を言語、T を（L の）閉論理式全体の集合の部分集合とする。T は（L で形式的に）無矛盾であるとする。このとき、T が（L で形式的に）極大無矛盾であるのは、（L の）任意の閉論理式 C に対して、

$$C \in T \quad \text{または} \quad \neg(C) \in T$$

であるとき、かつ、そのときに限る。 □

証明

T が極大無矛盾であるとする。$T \vdash_L C$ のとき、補題３．１７より、$C \in T$ である。$T \vdash_L C$ でないとき、$T \cup \{\neg(C)\}$ は無矛盾であるので、$\neg(C) \in T$ である。よって、$C \in T$、または、$\neg(C) \in T$ である。

T は極大無矛盾でないとする。ある閉論理式 C が存在して、$C \in T$ でなく、$T \cup \{C\}$ は無矛盾である。$\neg(C) \in T$ であるとすると、$T \cup \{C\}$ は矛盾しているので、矛盾。よって、$\neg(C) \in T$ でない。 ■

補題３．１９：

L を言語、T を（L の）閉論理式全体の集合の部分集合とする。T は（L で形式的に）無矛盾であるとする。このとき、（L の）閉論理式全体の集合のある部分集合 T^* が存在して、T^* は（L で形式的に）極大無矛盾であり、$T \subset T^*$ である。 □

証明

ツォルンの補題の条件を確認する。W を空でない（ここで当然、考えるべき半順序集合の）全順序部分集合とする。$\cup_{S \in W} S$ は、閉論理式全体の集合の部分集合である。$\cup_{S \in W} S$ が、無矛盾であることを示す。背理法。$\cup_{S \in W} S$ が、矛盾しているとする。$\perp$ を

$$(\forall v_0 \, (v_0 = v_0)) \wedge (\neg(\forall v_0 \, (v_0 = v_0)))$$

とする。ある $C_1, C_2, \cdots, C_n \in \cup_{S \in W} S$ が存在して、

$$\vdash_L (C_n) \to ((C_{n-1}) \to (\cdots \to ((C_2) \to ((C_1) \to (\perp))) \cdots))$$

である。W は空でない全順序集合であるので、ある $S \in W$ が存在して、

$$C_1, C_2, \cdots, C_n \in S$$

である。このとき、$S \vdash_L \perp$ であり、S は矛盾している。矛盾。よって、$\cup_{S \in W} S$ は無矛盾である。 ■

注意

もちろん、大差はないのだが、「形式証明に関して閉じているもの」（完全性定理により結果的に「論理的帰結に関して閉じているもの」）についてのみ議論を起こす方が（手数は増えるかもしれないが）自然なのかもしれない。 □

補題３．２０（ヘンキン拡大）:

L を言語、T を L の閉論理式全体の集合の部分集合とする。T は L で形式的に無矛盾であるとする。このとき、L を拡大したある言語 L^* と L^* の閉論理式全体の集合のある部分集合 T^* が存在して、次を満たす。

(1) $c^* \in L^* \setminus L$ ならば、c^* は L^* の定数記号である。

(2) L^* の任意の閉論理式 ${C^*}_1, {C^*}_2$ に対して、

$${C^*}_1 \in T^* \quad \Longleftrightarrow \quad T^* \vdash_{L^*} {C^*}_1$$

$$\neg({C^*}_1) \in T^* \quad \Longleftrightarrow \quad [{C^*}_1 \in T^* \text{ でない}]$$

$$({C^*}_1) \wedge ({C^*}_2) \in T^* \quad \Longleftrightarrow \quad [{C^*}_1 \in T^* \text{ かつ } {C^*}_2 \in T^*]$$

$$({C^*}_1) \vee ({C^*}_2) \in T^* \quad \Longleftrightarrow \quad [{C^*}_1 \in T^* \text{ または } {C^*}_2 \in T^*]$$

$$({C^*}_1) \rightarrow ({C^*}_2) \in T^* \quad \Longleftrightarrow \quad [{C^*}_1 \in T^* \text{ ならば } {C^*}_2 \in T^*]$$

である。

(3) A^* は L^* の論理式で、x は変数記号であるとする。$\exists x\,(A^*)$ は L^* の閉論理式であり、

$$T^* \vdash_{L^*} \exists x\,(A^*)$$

であるとする。このとき、L^* のある閉項 t^* が存在して、

$$(t^* = t^*) \wedge (A^* \langle t^*/x \rangle) \in T^*$$

である。

(4) $T \subset T^*$ である。 □

証明

$L_0 := L$ とおく。補題３．１９より、L_0 の閉論理式全体の集合のある部分集合 T_0 が存在して、T_0 は L_0 で形式的に極大無矛盾であり、$T \subset T_0$ である。

ある L_1 と T'_0 が存在して、L を L_0、T を T_0、L' を L_1、T' を T'_0 に読み替えたときに補題３．１５に記述された条件が満たされる。補題３．１９より、L_1 の閉論理式全体の集合のある部分集合 T_1 が存在して、T_1 は L_1 で形式的に極大無矛盾であり、$T'_0 \subset T_1$ である。

ある L_2 と T'_1 が存在して、L を L_1、T を T_1、L' を L_2、T' を T'_1 に読み替えたときに補題３．１５に記述された条件が満たされる。補題３．１９より、L_2 の閉論理式全体の集合のある部分集合 T_2 が存在して、T_2 は L_2 で形式的に極大無矛盾であり、$T'_1 \subset T_2$ である。

以下、同様にして、列 $\{L_k\}_k, \{T_k\}_k, \{T'_k\}_k$ を得る。$L^* := \cup_k L_k$、$T^* := \cup_k T_k$ とおく。

L^* は L を拡大した言語であり、(1) を満たす。T^* は L^* の閉論理式全体の集合の部分集合であり、(4) を満たす。

(3) を示す。A^* は L^* の論理式で、x は変数記号であるとする。$\exists x\,(A^*)$ は L^* の閉論理式であり、

$$T^* \vdash_{L^*} \exists x\,(A^*)$$

であるとする。ある n が存在して、

$$T_n \vdash_{L^*} \exists x\,(A^*)$$

である。注意３．１０ (1) より、ある m が存在して、$n \leq m$ であり、

$$T_n \vdash_{L_m} \exists x\,(A^*)$$

である。よって、

$$T_m \vdash_{L_m} \exists x\,(A^*)$$

である。L を L_m、T を T_m、L' を L_{m+1}、T' を T'_m に読み替えたときに補題３．１５に記述された条件が満たされるので、L_{m+1} のある定数記号 c^* が存在して、

$$(c^* = c^*) \wedge (A^*\langle c^*/x\rangle) \in T'_m$$

である。c^* は L^* の定数記号であり、特に L^* の閉項である。また、$T'_m \subset T_{m+1}$ より、

$$(c^* = c^*) \wedge (A^*\langle c^*/x\rangle) \in T^*$$

である。よって、(3) が満たされる。

以下、(2) を示す。C^* を L^* の閉論理式とする。

$C^* \in T^*$ ならば $T^* \vdash_{L^*} C^*$ であることは、自明。

$T^* \vdash_{L^*} C^*$ とする。ある n が存在して、

$$T_n \vdash_{L^*} C^*$$

である。注意３．１０ (1) より、ある m が存在して、$n \leq m$ であり、

$$T_n \vdash_{L_m} C^*$$

である。よって、

$$T_m \vdash_{L_m} C^*$$

である。補題３．１７より、 $C^* \in T_m$ であるので、$C^* \in T^*$。

$\neg(C^*) \in T^*$ とする。$C^* \in T^*$ でないことを示す。背理法。$C^* \in T^*$ とする。ある n が存在して、$\neg(C^*) \in T_n$、かつ、$C^* \in T_n$ である。T_n は L_n で形式的に矛盾している。矛盾。$C^* \in T^*$ でない。

$C^* \in T^*$ でないとする。ある n が存在して、C^* は L_n の閉論理式である。一方、$C^* \in T_n$ でない。よって、補題３．１８より、$\neg(C^*) \in T_n$ である。$\neg(C^*) \in T^*$ である。

(2) の残りは、４（＝２×２）つに場合分けして、上の結果を用いれば良い。 ■

因みに、等号のない述語論理を考える場合には、原子論理式 $t = t$ の代替として、項 t が定義されている（宇宙の要素である）ことを意図する述語記号を「論理記号」として追加する必要があるであろう。また、その論理記号を仮に U とすると、任意の変数記号 x に対して、閉論理式 $\forall x\,(\mathrm{U}(x))$, $\exists x\,(\mathrm{U}(x))$ は擬構造に対する恒真式である。

また、我々の形式証明系も、宇宙が空である場合を排除している。これは、「単純操作」によるものであると思われる。そこで、($\exists y\,((\forall x\,(x = x)) \vee (\neg(\forall x\,(x = x))))$ がまだ証明されていないときは)「A が閉でなく、B が閉である場合」に A と $A \to B$ から B を得る操作を禁止にすると、宇宙が空である場合にも機能するのかもしれない。

4　完全性定理とその証明

この節では、前節の方法で与えられる形式証明系が「広義の構造」に対して完全であることを示す。

補題４．１（ヘンキン構造）：
L を言語、T を L の閉論理式全体の集合の部分集合とする。T は L で形式的に無矛盾であるとする。このとき、L を拡大したある言語 L^* と L^* のある擬構造 (U, F) が存在して、任意の $A \in T$ に対して、$(U, F) \models A$ である。 $\square$

証明

［ステップ１］　(L^*, T^*) を補題３．２０によって存在が示されているものとする。L^* は L を拡大した言語である。 —

以下の数ステップを費やして、通常の場合と大体、同じように (L^*, T^*) から L^* の擬構造 (U, F) を構成する。 —

［ステップ２］　L^* の任意の論理式 A、任意の変数記号 x と L^* の任意の閉項 s_1, s_2 に対して、

$$\{s_1 = s_2\} \vdash_{L^*} (A\langle s_1/x\rangle) \to (A\langle s_2/x\rangle)$$

であることを示す。 —

$\top$ を

$$(\forall\, v_0\, (v_0 = v_0)) \vee (\neg(\forall\, v_0\, (v_0 = v_0)))$$

とする。互いに異なるある変数記号 x_1, x_2 が存在して、x_1, x_2 は A に出現しない。等号公理より、

$$\vdash_{L^*} (x_1 = x_2) \to ((A[x_1/x]) \to (A[x_2/x]))$$

$$\vdash_{L^*} (\top) \to ((x_1 = x_2) \to ((A[x_1/x]) \to (A[x_2/x])))$$

である。よって、全称操作より、

$$\vdash_{L^*} (\top) \to (\forall\, x_1\, ((x_1 = x_2) \to ((A[x_1/x]) \to (A[x_2/x]))))$$

$$\vdash_{L^*} \forall\, x_1\, ((x_1 = x_2) \to ((A[x_1/x]) \to (A[x_2/x])))$$

である。よって、代入公理より、

$$\vdash_{L^*} (s_1 = s_1) \to ((s_1 = x_2) \to ((A\langle s_1/x\rangle)) \to (A[x_2/x])))$$

である。よって、定義公理より、

$$\vdash_{L^*} (s_1 = x_2) \to ((A\langle s_1/x\rangle) \to (A[x_2/x]))$$

$$\vdash_{L^*} (\top) \to ((s_1 = x_2) \to ((A\langle s_1/x\rangle) \to (A[x_2/x])))$$

である。よって、全称操作より、

$$\vdash_{L^*} (\top) \to (\forall x_2\,((s_1 = x_2) \to ((A\langle s_1/x\rangle) \to (A[x_2/x]))))$$

$$\vdash_{L^*} \forall x_2\,((s_1 = x_2) \to ((A\langle s_1/x\rangle) \to (A[x_2/x])))$$

である。よって、代入公理より、

$$\vdash_{L^*} (s_2 = s_2) \to ((s_1 = s_2) \to ((A\langle s_1/x\rangle) \to (A\langle s_2/x\rangle)))$$

である。よって、定義公理より、

$$\vdash_{L^*} (s_1 = s_2) \to ((A\langle s_1/x\rangle) \to (A\langle s_2/x\rangle))$$

である。 —

［ステップ３］ $V := \{t \,|\, (t = t) \in T^*\}$ とおく。$(t = t) \in T^*$ であるならば、t は L^* の閉項である。よって、V は L^* の閉項全体の集合の部分集合である。 —

［ステップ４］ $W := \{(t_1, t_2) \,|\, (t_1 = t_2) \in T^*\}$ とおく。W は V の同値関係であることを示す。 —

$(t_1, t_2) \in W$ とする。t_1, t_2 は L^* の閉項である。定義公理より、$(t_1 = t_1) \in T^*$、$(t_2 = t_2) \in T^*$。$(t_1, t_2) \in V^2$。

$t \in V$ ならば $(t, t) \in W$ は、明らか。

対称性を示す準備として、L^* の任意の閉項 t_1, t_2 に対して、

$$\{t_1 = t_2\} \vdash_{L^*} t_2 = t_1$$

であることを示す。ステップ２より、

$$\{t_1 = t_2\} \vdash_{L^*} ((t_1 = t_2) \to (t_1 = t_1)) \to ((t_2 = t_2) \to (t_2 = t_1))$$

である。よって、定義公理より、

$$\{t_1 = t_2\} \vdash_{L^*} t_2 = t_1$$

である。

$(t_1, t_2) \in W$ とする。上の準備より

$$T^* \vdash_{L^*} t_2 = t_1$$

であり、また、t_1, t_2 は L^* の閉項なので、

$$(t_2 = t_1) \in T^*$$

である。$(t_2, t_1) \in W$。

推移性を示す準備として、L^* の任意の閉項 t_1, t_2, t_3 に対して、

$$\{t_1 = t_2, t_2 = t_3\} \vdash_{L^*} t_1 = t_3$$

であることを示す。ステップ 2 より、

$$\{t_2 = t_3\} \vdash_{L^*} (t_1 = t_2) \to (t_1 = t_3)$$

$$\{t_1 = t_2, t_2 = t_3\} \vdash_{L^*} t_1 = t_3$$

である。

$(t_1, t_2) \in W$、$(t_2, t_3) \in W$ とする。上の準備より

$$T^* \vdash_{L^*} t_1 = t_3$$

であり、また、t_1, t_3 は L^* の閉項なので、

$$(t_1 = t_3) \in T^*$$

である。$(t_1, t_3) \in W$。

以上より、W は V の同値関係である。 —

［ステップ 5］ $t \in V$ に対して、$[t]_{T^*} := \{s \mid (s, t) \in W\}$ と定める。$U := \cup_{t \in V}\{[t]_{T^*}\}$ とおく。$U \neq \emptyset$ を示す。 —

代入公理より、

$$\vdash_{L^*} (v_0 = v_0) \to ((\forall\, v_0\, (\neg(v_0 = v_0))) \to (\neg(v_0 = v_0)))$$

である。よって、対象公理より、

$$\vdash_{L^*} (\forall\, v_0\, (\neg(v_0 = v_0))) \to (\neg(v_0 = v_0))$$

$$\vdash_{L^*} (v_0 = v_0) \to (\neg(\forall\, v_0\, (\neg(v_0 = v_0))))$$

$$\vdash_{L^*} \neg(\forall\, v_0\, (\neg(v_0 = v_0)))$$

である。よって、補対操作より、

$$\vdash_{L^*} \exists v_0\,(v_0 = v_0)$$

である。よって、補題３．２０の条件 (3) より、L^* のある閉項 t^* が存在して、

$$(t^* = t^*) \wedge (t^* = t^*) \in T^*$$

である。よって、$(t^* = t^*) \in T^*$ であり、$t^* \in V$ である。よって、$V \neq \emptyset$ であり、$U \neq \emptyset$ である。 —

［ステップ６］ W の同値類から代表元を選択する写像が存在する。σ をその一つとする。すなわち、σ は U から V への単射であり、任意の $u \in U$ に対して、

$$u = [\sigma(u)]_{T^*}$$

である。さらに、任意の $t \in V$ に対して、

$$(\sigma([t]_{T^*}) = t) \in T^*,$$

$$(t = \sigma([t]_{T^*})) \in T^*$$

である。$u \in U$ に対して、$\sigma(u)$ を（σ による対象 u の）仮名と言うことにする。因みに、（u の L^* における）真名（標準名前）は $\lceil u \rceil$ であり、これは L^* の項ではなかった。対して、$\sigma(u)$ は L^* の閉項である。 —

［ステップ７］ L^* を定義域とする全射 F を以下のように定める。

(i) R が L^* の（n 変数）述語記号であるとき：

$$F(\mathrm{R}) := \{(u_1, u_2, \cdots, u_n) \in U^n \,|\, \mathrm{R}(\sigma(u_1), \sigma(u_2), \cdots, \sigma(u_n)) \in T^*\}$$

と定める。

(ii) f が L^* の（n 変数）関数記号であるとき：

$$D^F_f := \{(u_1, u_2, \cdots, u_n) \in U^n \,|\, f(\sigma(u_1), \sigma(u_2), \cdots, \sigma(u_n)) \in V\}$$

とおく。$F(f)$ を定義域が D^F_f であり、任意の $(u_1, u_2, \cdots, u_n) \in D^F_f$ に対して、

$$(F(f))(u_1, u_2, \cdots, u_n) := [f(\sigma(u_1), \sigma(u_2), \cdots, \sigma(u_n))]_{T^*}$$

である全射とする。 —

［ステップ８］ (U, F) は L^* の擬構造である。 —

以下の数ステップを費やして、通常の場合と大体、同じように任意の $A \in T$ に対して、$(U, F) \models A$ であることを示す。 —

［ステップ９］　L^* の任意の閉項 t に対して、
(i)　t が既定義であることと $t \in V$ であることは、
　同値であること
(ii)　「t が既定義であり、かつ、$t \in V$ である」ならば、
　$t^F = [t]_{T^*}$ であること
を t の構成の木構造に関する帰納法で示す。　—

(a)　t が L^* の定数記号であるとき：

t は既定義であるとする。このとき、$F(t)$ の定義域は $\{()\}$ である。すなわち、$D_t^F = \{()\}$ である。よって、$t \in V$ である。

$t \in V$ であるとする。このとき、$() \in D_t^F$ であるので、$D_t^F = \{()\}$ である。よって、t は既定義である。

t が既定義であり、かつ、$t \in V$ であるとする。このとき、$t^F = (F(t))() = [t]_{T^*}$ である。

(b)　t が L^* の定数記号でないとき：

正のある整数 n、L^* のある n 変数関数記号 f と L^* のある閉項 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ が一意に存在して、

$$t = f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$$

である。

t は既定義であるとする。このとき、$t_1, t_2, \cdots, t_n$ は既定義であり、かつ、$({t_1}^F, {t_2}^F, \cdots, {t_n}^F) \in D_f^F$ である。よって、帰納法の仮定より、$t_1, t_2, \cdots, t_n \in V$ であり、かつ、$([t_1]_{T^*}, [t_2]_{T^*}, \cdots, [t_n]_{T^*}) \in D_f^F$ である。よって、

$$(f(\sigma([t_1]_{T^*}), \sigma([t_2]_{T^*}), \cdots, \sigma([t_n]_{T^*})) = f(\sigma([t_1]_{T^*}), \sigma([t_2]_{T^*}), \cdots, \sigma([t_n]_{T^*})))$$

$$\in T^*$$

である。一方、ステップ６より $(\sigma([t_k]_{T^*}) = t_k) \in T^*$ であるので、ステップ２を順次、用いることより

$$T^* \vdash_{L^*} f(t_1, \sigma([t_2]_{T^*}), \cdots, \sigma([t_n]_{T^*})) = f(t_1, \sigma([t_2]_{T^*}), \cdots, \sigma([t_n]_{T^*}))$$

$$T^* \vdash_{L^*} f(t_1, t_2, \sigma([t_3]_{T^*}), \cdots, \sigma([t_n]_{T^*})) = f(t_1, t_2, \sigma([t_3]_{T^*}), \cdots, \sigma([t_n]_{T^*}))$$

$$\cdots$$

$$T^* \vdash_{L^*} f(t_1, t_2, \cdots, t_n) = f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$$

である。すなわち、$T^* \vdash_{L^*} t = t$ であるので、$t \in V$。

$t \in V$ とする。 このとき、

$$(f(t_1, t_2, \cdots, t_n) = f(t_1, t_2, \cdots, t_n)) \in T^*$$

である。よって、定義公理より、$T^* \vdash_{L^*} t_k = t_k$ である。$t_k \in V$。よって、帰納法の仮定より、t_k は既定義であり、${t_k}^F = [t_k]_{T^*}$ である。よって、ステップ 6 より $(t_k = \sigma([t_k]_{T^*})) \in T^*$ であるので、同様にステップ 2 を順次、用いることより

$$T^* \vdash_{L^*}$$

$$f(\sigma([t_1]_{T^*}), \sigma([t_2]_{T^*}), \cdots, \sigma([t_n]_{T^*})) = f(\sigma([t_1]_{T^*}), \sigma([t_2]_{T^*}), \cdots, \sigma([t_n]_{T^*}))$$

であるので、

$$f(\sigma([t_1]_{T^*}), \sigma([t_2]_{T^*}), \cdots, \sigma([t_n]_{T^*})) \in V$$

$$f(\sigma({t_1}^F), \sigma({t_2}^F), \cdots, \sigma({t_n}^F)) \in V$$

である。よって、$({t_1}^F, {t_2}^F, \cdots, {t_n}^F) \in D_f^F$ である。t は既定義。

t が既定義であり、かつ、$t \in V$ であるとする。t は既定義であるので、t_k は既定義である。帰納法の仮定より、$t_k \in V$、${t_k}^F = [t_k]_{T^*}$ である。よって、ステップ 6 より、

$$(t_k = \sigma({t_k}^F)) \in T^*$$

である。よって、$t \in V$ より

$$(f(t_1, t_2, \cdots, t_n) = f(t_1, t_2, \cdots, t_n)) \in T^*$$

であるので、ステップ 2 を順次、用いることより

$$T^* \vdash_{L^*} f(\sigma({t_1}^F), \sigma({t_2}^F), \cdots, \sigma({t_n}^F)) = f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$$

である。よって、

$$(f(\sigma({t_1}^F), \sigma({t_2}^F), \cdots, \sigma({t_n}^F)), f(t_1, t_2, \cdots, t_n)) \in W$$

であるので、t が既定義であることより、$t^F = (F(f))({t_1}^F, {t_2}^F, \cdots, {t_n}^F) = [f(\sigma({t_1}^F), \sigma({t_2}^F), \cdots, \sigma({t_n}^F))]_{T^*} = [f(t_1, t_2, \cdots, t_n)]_{T^*} = [t]_{T^*}$ である。—

［ステップ１０］ 任意の $u \in U$ に対して、$\sigma(u)$ は既定義であり、

$$(\sigma(u))^F = u$$

であることを示す。 —

$u \in U$ とする。$\sigma(u) \in V$ であるので、ステップ９より、$\sigma(u)$ は既定義であり、$(\sigma(u))^F = [\sigma(u)]_{T^*}$ である。よって、ステップ６より、$(\sigma(u))^F = u$。

—

［ステップ１１］ L^* の任意の閉論理式 A に対して、$A \in T^*$ と $(U, F) \models A$ が同値であることを論理式の長さ（$\neg, \wedge, \vee, \to, \forall, \exists$ の出現の個数）に関する帰納法で示す。

—

(a) t, s を L^* の閉項とし、$(U, F) \models t = s$ とする。t, s は既定義で、$t^F = s^F$ である。ステップ９より、$t, s \in V$ であり、$t^F = [t]_{T^*}, s^F = [s]_{T^*}$ である。よって、$[t]_{T^*} = [s]_{T^*}$ であり、$(t, s) \in W$。$(t = s) \in T^*$。

(b) t, s を L^* の閉項とし、$(t = s) \in T^*$ とする。このとき、$(t, s) \in W$ であるので、$t, s \in V$、$[t]_{T^*} = [s]_{T^*}$。ステップ９より、t, s は既定義で、$t^F = s^F$。$(U, F) \models t = s$。

(c) R を L^* の（n 変数）述語記号、$t_1, t_2, \cdots, t_n$ を L^* の閉項とし、$(U, F) \models \mathrm{R}(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ とする。$t_1, t_2, \cdots, t_n$ は既定義であり、$({t_1}^F, {t_2}^F, \cdots, {t_n}^F) \in F(\mathrm{R})$ である。よって、$\mathrm{R}(\sigma({t_1}^F), \sigma({t_2}^F), \cdots, \sigma({t_n}^F)) \in T^*$。また、ステップ９より、$t_k \in V$、${t_k}^F = [t_k]_{T^*}$ である。よって、ステップ６より $(\sigma({t_k}^F) = t_k) \in T^*$ であるので、ステップ２を順次、用いることより $\mathrm{R}(t_1, t_2, \cdots, t_n) \in T^*$ である。

(d) R を L^* の（n 変数）述語記号、$t_1, t_2, \cdots, t_n$ を L^* の閉項とし、$\mathrm{R}(t_1, t_2, \cdots, t_n) \in T^*$ とする。定義公理より、$T^* \vdash_{L^*} t_k = t_k$ である。$t_k \in V$。ステップ９より、t_k は既定義で、${t_k}^F = [t_k]_{T^*}$。よって、ステップ６より $(t_k = \sigma({t_k}^F)) \in T^*$ であるので、ステップ２を順次、用いることより $\mathrm{R}(\sigma({t_1}^F), \sigma({t_2}^F), \cdots, \sigma({t_n}^F)) \in T^*$ である。よって、$({t_1}^F, {t_2}^F, \cdots, {t_n}^F) \in F(\mathrm{R})$ であり、$(U, F) \models \mathrm{R}(t_1, t_2, \cdots, t_n)$。

(e) $\forall x\,(B)$ は L^* の閉論理式であるとし、$\forall x\,(B) \in T^*$ でないとする。このとき、

$$\neg(\forall x\,(B)) \in T^*$$

である。一方、代入公理より

$$\vdash_{L^*} (x = x) \to ((\forall x\,(\neg(\neg(B)))) \to (\neg(\neg(B))))$$

$$\vdash_{L^*} (\forall x\,(\neg(\neg(B)))) \to (\neg(\neg(B)))$$

$$\vdash_{L^*} (\forall x\,(\neg(\neg(B)))) \to (B)$$

$$\vdash_{L^*} (\forall x\,(\neg(\neg(B)))) \to (\forall x\,(B))$$

$$\vdash_{L^*} (\neg(\forall x\,(B))) \to (\neg(\forall x\,(\neg(\neg(B)))))$$

$$\vdash_{L^*} (\neg(\forall x\,(B))) \to (\exists x\,(\neg(B)))$$

であるので、

$$T^* \vdash_{L^*} \exists x\,(\neg(B))$$

である。よって、補題３．２０の条件 (3) をここで使うことになり、L^* のある閉項 t が存在して、

$$(t = t) \wedge (\neg(B\langle t/x\rangle)) \in T^*$$

である。$(t = t) \in T^*$、$\neg(B\langle t/x\rangle) \in T^*$ であるので、$t \in V$ であり、かつ、$B\langle t/x\rangle \in T^*$ でない。よって、ステップ９と帰納法の仮定より、t は既定義であり、かつ、$(U, F) \models B\langle t/x\rangle$ でない。よって、既定義な $L^*(U)$ のある閉項 t が存在して、「$(U, F) \models B\langle t/x\rangle$ でない」。「既定義な $L^*(U)$ の任意の閉項 t に対して、$(U, F) \models B\langle t/x\rangle$」でない。$(U, F) \models \forall x\,(B)$ でない。

(f) $\forall x\,(B)$ は L^* の閉論理式であるとし、$\forall x\,(B) \in T^*$ とする。t を既定義な $L^*(U)$ の閉項とする。$t^F \in U$ である。ステップ１０より、$\sigma(t^F)$ は既定義であり、

$$(\sigma(t^F))^F = t^F$$

である。$\sigma(t^F) \in V$ より、

$$(\sigma(t^F) = \sigma(t^F)) \in T^*$$

であり、$\sigma(t^F)$ は L^* の閉項である。一方、代入公理より

$$\vdash_{L^*} (\sigma(t^F) = \sigma(t^F)) \to ((\forall x\,(B)) \to (B\langle \sigma(t^F)/x\rangle))$$

であるので、

$$B\langle \sigma(t^F)/x\rangle \in T^*$$

である。よって、帰納法の仮定より、$(U, F) \models B\langle \sigma(t^F)/x\rangle$ である。補題２．９ (1) より、$(U, F) \models B\langle t/x\rangle$ である。以上より、$(U, F) \models \forall x\,(B)$。

(g) $\exists x\,(B)$ は L^* の閉論理式であるとし、$(U, F) \models \exists x\,(B)$ とする。このとき、既定義な $L^*(U)$ のある閉項 t が存在して、

$$(U, F) \models B\langle t/x\rangle$$

である。$t^F \in U$ である。ステップ１０より、$\sigma(t^F)$ は既定義であり、

$$(\sigma(t^F))^F = t^F$$

である。よって、補題２．９ (1) より、

$$(U, F) \models B\langle\sigma(t^F)/x\rangle$$

である。$\sigma(t^F) \in V$ より、$\sigma(t^F)$ は L^* の閉項である。よって、$B\langle\sigma(t^F)/x\rangle$ は L^* の閉論理式である。したがって、帰納法の仮定より、

$$B\langle\sigma(t^F)/x\rangle \in T^*$$

である。一方、$\sigma(t^F) \in V$ より、

$$(\sigma(t^F) = \sigma(t^F)) \in T^*$$

である。よって、代入公理より、

$$T^* \vdash_{L^*} (\forall x\,(\neg(B))) \to (\neg(B\langle\sigma(t^F)/x\rangle))$$

$$T^* \vdash_{L^*} (B\langle\sigma(t^F)/x\rangle) \to (\neg(\forall x\,(\neg(B))))$$

$$T^* \vdash_{L^*} \neg(\forall x\,(\neg(B)))$$

である。よって、補対操作より、$\exists x\,(B) \in T^*$ である。

(h) $\exists x\,(B)$ は L^* の閉論理式であるとし、$\exists x\,(B) \in T^*$ とする。補題３．２０の条件 (3) をここで使うことになり、L^* のある閉項 t が存在して、

$$(t = t) \wedge (B\langle t/x\rangle) \in T^*$$

である。よって、$(t = t) \in T^*$、$(B\langle t/x\rangle) \in T^*$ である。$t \in V$ であるので、t は既定義である。また、帰納法の仮定より、$(U, F) \models (B\langle t/x\rangle)$ である。したがって、$(U, F) \models \exists x\,(B)$ である。

(i) $\neg, \wedge, \vee, \to$ については、容易である。 —

［ステップ１２］ $A \in T$ とする。このとき、$T \subset T^*$ とステップ１１によって、$(U, F) \models A$。 ■

注意

上の証明において、T^* は L^* で極大無矛盾であるが、一方、$T^* \cup (\cup_{u \in U}\{\lceil u \rceil = \sigma(u)\})$ は $L^*(U)$ で完全無矛盾であろう。また、$L^*(U)$ の任意の閉論理式 A に対して、B を A における真名（$\lceil\cdot\rceil$）のすべての出現を仮名（$\sigma(\cdot)$）で置き換えたものとすると、$T^* \cup (\cup_{u \in U}\{\lceil u \rceil = \sigma(u)\}) \vdash_{L^*(U)} A$ であることと $B \in T^*$ であることは同値であろう。上で構成された (U, F) の重要な特徴は、任意の $u \in U$ に対して、既定義な L^* のある閉項 t が存在して、

$u = t^F$ であることであるように思われる。擬構造がこのような特徴を持つことと補題３．２０の条件 (2), (3) を満たすある T^* が存在して、擬構造がT^* から上の方法（ヘンキンの方法）で構成される (U, F) と同型であることは同値であるように思われる。 $\square$

定理４．２（完全性定理）:

L を言語、T を L の閉論理式全体の集合の部分集合とする。

(1) T が（L で形式的に）無矛盾であることと（L の）ある擬構造 (U, F) が存在して、任意の $C \in T$ に対して、$(U, F) \models C$ であることは、同値である。

(2) A を（L の）論理式とする。このとき、$T \vdash_L A$ であることと（L の）任意の擬構造 (U, F) に対して、「「任意の $C \in T$ に対して、$(U, F) \models C$ である」ならば、$(U, F) \models A$ である」ことは同値である。 $\square$

証明

(1)

(a) T が（L で形式的に）無矛盾であるとする。このとき、補題４．１より、L を拡大したある言語 L' と L' のある擬構造 (U, F') が存在して、任意の $C \in T$ に対して、$(U, F') \models C$ である。F を定義域が L である全射で、任意の $s \in L$ に対して、

$$F(s) := F'(s)$$

であるものとする。(U, F) は L の擬構造である。さらに、補題２．１０ (4) より、任意の $C \in T$ に対して、$(U, F) \models C$ である。

(b) (U, F) は（L の）擬構造であり、任意の $C \in T$ に対して、$(U, F) \models C$ であるとする。$\perp$ を

$$(\forall\, v_0\, (v_0 = v_0)) \wedge (\neg(\forall\, v_0\, (v_0 = v_0)))$$

とする。このとき、（閉論理式における $\neg, \wedge$ の意味論の帰納的定義により、）$(U, F) \models \perp$ でない。T が（L で形式的に）無矛盾であることを示す。背理法。T が（L で形式的に）矛盾しているとする。このとき、$T \vdash_L \perp$ である。よって、補題３．１２より、$(U, F) \models \perp$。矛盾。よって、T は（L で形式的に）無矛盾である。

(2)

(a) $T \vdash_L A$ でないとする。ある $\bar{A}$ が存在して、$\bar{A}$ は A の閉包である。

代入公理と対象公理を順次、用いることより

$$\vdash_L \bar{A} \to A$$

であるので、$T \vdash_L \bar{A}$ でない。よって、$T \cup \{\neg(\bar{A})\}$ は（L で形式的に）無矛盾である。よって、(1) より、（L の）ある擬構造 (U, F) が存在して、任意の $C \in T \cup \{\neg(\bar{A})\}$ に対して、$(U, F) \models C$ である。$(U, F) \models \neg(\bar{A})$ であるので、（閉論理式における $\neg$ の意味論の帰納的定義により、）$(U, F) \models \bar{A}$ でない。$(U, F) \models A$ でない。

(b) $T \vdash_L A$ であるならば云々であることは、補題３．１２そのものである。 ■

Hiroki Yagisita (Kyoto Sangyo University)

Abstract:
For example, a ring is a structure of the language $\{+, -, \times, 0, 1\}$, and a ring is not a structure of the language $\{+, -, \times, \cdot^{-1}, 0, 1\}$ because the domain of the operation $\cdot^{-1}$ of the multiplicative inverse is not the whole. In general, it is not officially possible to introduce a function symbol into a partial function. In this paper, we consider "a structure in a broad sense" that allows a partial function as the interpretation of a function symbol, we give its semantics and a Hilbert-style formal deductive system, and we prove the completeness theorem. Regarding sequent calculus and natural deduction, it may not be difficult, but it is an unsolved problem.

感想

「通常の述語論理」が未定義項を排除しているのは、「命題論理からの発展」として述語論理が見なされることが常態であった、という歴史的経緯によるのではないのであろうか。もう一つは、それなりに相対性が浸透した後も、「等号にも、若干の相対性がある」（例えば、$\sqrt{2} = \sqrt{2}$ をどの宇宙で考えているのか？）ことについては注意を向けられることが多くなかったということもあるかもしれない。

K. Godel, Die Vollstandigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalkuls, *Monatsh. Math. Phys.*, 37 (1930), 349-360.

L. Henkin, The completeness of the first-order functional calculus, *J. Symbolic Logic*, 14 (1949), 159-166.

田中一之『数学基礎論講義』（日本評論社）
嘉田勝『論理と集合から始める数学の基礎』（日本評論社）
坪井明人『数理論理学の基礎・基本』（牧野書店）
菊池誠『不完全性定理』（共立出版）