

# Solutions stationnaires de masse finie pour l'équation de Vlasov avec potentiel central en dimension trois : une démonstration du théorème de Jeans

J. Dolbeault

CEREMADE (UMR 7534)

Université Paris IX - Dauphine

Place du Maréchal de Lattre de Tassigny

75775 Paris Cédex 16, France

et Groupe de Physique Théorique, Laboratoire de Physique Quantique (U.R.A. 505), IRSAMC, Université Paul Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse

## Plan

1. Introduction
  2. Solutions de masse finie pour l'équation de Vlasov et caractéristiques
  3. Equation de Vlasov stationnaire avec potentiel central : le théorème de Jeans, un résultat de factorisation
  4. Exemple : solutions stationnaires de masse finie du système de Vlasov-Poisson gravitationnel, le cas du potentiel à symétrie sphérique
- Appendice : une propriété caractéristique des potentiels en  $-1/r$  ou  $r^2$   
Références

**Mots-clefs :** Equations cinétiques — Equation de Vlasov — Equation de Poisson — Solutions stationnaires — Caractéristiques — Systèmes dynamiques — Ergodicité — Théorème de Jeans — Gravitation — Astrophysique — Solutions radiales — Symétrie — Factorisation

Mathematics Subject Classification : Primary : 58F11 ; Secondary : 82B40, 70H33, 28D10, 34C35, 35A30, 58G35, 85A05

## 1. Introduction

Considérons l'équation de Vlasov stationnaire

$$v \cdot \nabla_x f - \nabla_x \phi \cdot \nabla_v f = 0$$

où  $\phi$  est un potentiel radial. La fonction de distribution  $f(x, v)$  est une fonction positive définie pour  $(x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ . Il est bien connu en astrophysique (voir [BT], [L]), apparemment depuis les travaux de J.H. Jeans (voir [J1,2]), que lorsque l'équation de Vlasov stationnaire est couplée à l'équation de Poisson (gravitationnelle)

$$\Delta \phi = \int_{\mathbb{R}^3} f(x, v) dv ,$$

$f$  peut être factorisée comme fonction de l'énergie et du moment angulaire,  $c$  est à dire qu'il existe une fonction  $g$  telle que

$$f(x, v) = g\left(\frac{|v|^2}{2} + \phi(x), x \wedge v\right) \quad \forall (x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

(et l'équation de Vlasov est alors automatiquement satisfaite pour toute fonction  $g$ ). Il semble qu'un tel résultat n'ait été étudié mathématiquement que par Batt, Faltenbacher et Horst dans le cadre plus restreint des modèles à symétrie sphérique (voir [BFH]),  $c$  est à dire tels que  $f$  ne dépende en fait que de

$$|x|, \quad (x \cdot v) \quad \text{et} \quad |x \wedge v|^2 .$$

Nous allons étudier en détail le "théorème de Jeans" et donner en particulier des conditions de validité précises, sans faire d'hypothèses *a priori* sur les symétries de  $f$ , ni d'ailleurs supposer que le potentiel est donné par l'équation de Poisson. Il s'agit donc d'un résultat de symétrie pour toutes les solutions (suffisamment régulières), ce qui permet de les classifier et montre que la classe considérée dans [BBDP] (partie 5) était en fait la classe la plus générale. La preuve du théorème repose sur l'étude du système dynamique sous-jacent

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dt} = -\nabla_x \phi(x(t)) .$$

$f$  étant invariante par transport le long des trajectoires, une moyenne en temps des trajectoires dans l'espace des phases fait disparaître par ergodisation certaines coordonnées de type angulaire, sous réserve que soient satisfaites des conditions de non résonance. Nous serons d'abord amenés à étudier

le rapport entre les trajectoires bornées et le support de  $f$ . Le théorème de Jeans sera ensuite exposé dans différentes versions. Un argument essentiel de la preuve (les potentiels pour lesquels un ensemble de mesure non nulle de données initiales conduisent à des trajectoires périodiques sont localement en  $-1/r$  ou en  $r^2$ ) est donné en appendice. Nous présenterons enfin l'application du théorème de Jeans au système de Vlasov-Poisson gravitationnel lorsque le potentiel est radial (le problème est alors ramené à l'étude d'une équation semi-linéaire elliptique : voir [BFH], [BBDP]). D'autres applications, en particulier pour des problèmes liés à l'électromagnétisme, seront présentées dans des travaux ultérieurs (voir [D1-3]). Notons enfin l'intérêt des résultats de factorisation d'un point de vue numérique, l'une des principales difficultés rencontrées dans le calcul de solutions d'équations cinétiques provenant de la dimension élevée de l'espace des phases (voir [D4,5]).

Nous reprendrons pour l'essentiel les notations de Batt, Faltenbacher et Horst dans [BFH], ainsi que la démonstration qu'ils ont donnée du théorème de Jeans, en l'étendant toutefois de deux manières : nous traiterons d'un potentiel général et pas simplement de celui qui apparaît dans le système de Vlasov-Poisson ; nous ne ferons pas l'hypothèse de symétrie sphérique pour  $f$ , hypothèse qui dissimule le principal argument de la démonstration du théorème de Jeans : la moyenne en temps sur les variables angulaires.

Considérons dans  $\mathbb{R}^3$  un gaz de particules indépendantes soumises à un champ de force dérivant d'un potentiel  $\phi$ . La trajectoire  $t \mapsto (x(t), v(t))$  d'une particule dans l'espace des phases  $\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3$  est donnée par les équations de Newton

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = v(t) \\ \frac{dv}{dt} = -\nabla\phi(x(t)) \end{array} \right. \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ v(0) = v_0 \end{array} \right. \quad (1)$$

Ici, on a supposé ou bien que toutes les particules étaient de même masse (normalisée à 1), ou bien que la force exercée sur les particules était proportionnelle à leur masse.  $f(t, x, v)$ , densité de particules qui à l'instant  $t$  occupent la position  $x$  avec la vitesse  $v$ , obéit à l'équation de Vlasov (ou équation de transport en présence du champ de forces  $-\nabla_x\phi$ ). Cette équation est obtenue en écrivant simplement que  $f$  est constante le long des trajectoires

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} f(t, x(t), v(t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + v(t) \cdot \nabla_x f(t, x(t), v(t)) - \nabla_x \phi(x(t)) \cdot \nabla_v f(t, x(t), v(t)) , \end{aligned}$$

ce qui conduit à l'équation de Vlasov

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x \phi \cdot \nabla_v f = 0. \quad (2)$$

Réciproquement, on montre que toute solution de (2) au sens des distributions, avec donnée initiale

$$f(0, x, v) = f_0(x, v) \quad \forall (x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

s'écrit pour presque tout  $(t, x, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

$$f(t, x, v) = f_0(x_t(x, v), v_t(x, v))$$

où

$$\begin{aligned} x_t(x, v) &= x(-t) \\ v_t(x, v) &= v(-t) \end{aligned}$$

$x(t)$  et  $v(t)$  étant solutions de (1) avec données initiales  $x_0(x, v) = x(0) = x$  et  $v_0(x, v) = v(0) = v$ .

(Pour simplifier, on a supposé que le champ de forces  $-\nabla_x \phi$  était autonome - c'est à dire indépendant du temps - et que  $f$  et  $\phi$  possédaient une régularité suffisante.) Nous allons nous intéresser au cas de solutions stationnaires :

$$f \in C^0(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \text{ ne dépend pas de } t, \quad (H1)$$

lorsque  $\phi$  est  $C^1$  est à symétrie radiale :

$$\phi(x) = \varphi(|x|) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad \varphi \in C^1(]0, +\infty[, \mathbb{R}). \quad (H2)$$

Nous supposerons en outre que

$$\varphi(r) = o(r^{-2}) \text{ quand } r \rightarrow 0_+, \quad (H3a)$$

et

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} r^{-2} \varphi(r) > -\infty. \quad (H3b)$$

Dans la partie 3, nous serons enfin amenés à faire les hypothèses

$$r \mapsto \frac{d}{dr}(r\varphi(r)) \text{ et } r \mapsto \frac{d}{dr}(r^{-2}\varphi(r)) \text{ ne s'annulent sur aucun intervalle contenu dans } \text{supp}(\rho) \quad (H4a)$$

et

$$\varphi \text{ est analytique sur } ]0, +\infty[, \quad (H4b)$$

la densité spatiale  $\rho$  étant définie par

$$\rho(x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x, v) dv \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Dans la suite, on a supposé autant de régularité qu'il en fallait pour ne pas avoir à prendre de précautions particulières. Les calculs pourraient être

justifiés dans des cadres moins réguliers correspondant à des modélisations réalistes, mais cela nuirait certainement à la clarté de l'exposé.

## 2. Solutions de masse finie pour l'équation de Vlasov et caractéristiques

Nous allons démontrer qu'une solution stationnaire de masse finie est à support dans la partie de l'espace des phases correspondant aux trajectoires bornées, sous réserve qu'aucune trajectoire n'explose en temps fini.

**Proposition 1 :** *Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3a, b), si  $f \in L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$  est une solution positive non identiquement nulle de (2), alors la trajectoire définie par (1) est bornée pour presque toute donnée initiale  $(x_0, v_0)$  relativement à la mesure  $d\mu(x, v) = f(x, v) dx dv$ .*

**Preuve :** La preuve se décompose de la manière suivante : après avoir introduit quelques notations, nous donnons une caractérisation des trajectoires non bornées. Nous étudions ensuite le temps d'explosion des trajectoires non bornées, et nous montrons que - dans le cas le plus général (pas de conditions à l'infini sur le potentiel - les trajectoires non bornées explosent soit presque toutes en temps fini, soit presque toutes en temps infini. L'hypothèse (H3b) sur le comportement à l'infini du potentiel permet de montrer qu'en fait les trajectoires non bornées explosent presque toutes en temps infini. Il ne reste plus alors qu'à vérifier que si les données initiales correspondant à ces trajectoires ne sont pas de mesure nulle par rapport à  $d\mu$ , alors il y a une contradiction avec le fait que  $f$  appartienne à  $L^1$ .

1) Commençons par introduire quelques notations<sup>1</sup>, que nous continuerons à utiliser dans la suite de ce travail. Soit  $(x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ , et

$$r = |x| \tag{3}$$

$$w = \frac{(x \cdot v)}{|x|} \tag{4}$$

$$\mathcal{F} = |x|^2 |v|^2 - (x \cdot v)^2 \tag{5}$$

On peut réécrire partiellement (1) sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{dt} = w \\ \frac{dw}{dt} = \frac{\mathcal{F}}{r^3} - \frac{d\varphi}{dr} \\ \frac{d\mathcal{F}}{dt} = 0 \end{array} \right.$$

---

<sup>1</sup>ces notations sont pour l'essentiel reprises de [BFH].

Définissons l' énergie associée à une trajectoire de (1) par

$$\mathcal{E}(x, v) = \frac{|v|^2}{2} + \phi(x) = \frac{w^2}{2} + \psi_{\mathcal{F}}(r) \quad (6)$$

$$\text{où} \quad \psi_{\mathcal{F}}(r) = \frac{\mathcal{F}}{2r^2} + \varphi(r) . \quad (7)$$

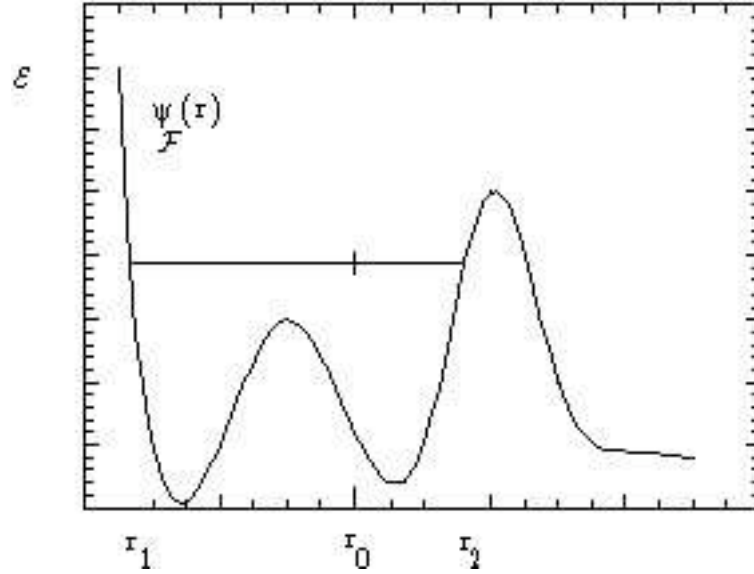
On utilisera aussi la notation (abusiv)  $\mathcal{E}(r, w, \mathcal{F})$ . Il est facile de voir que l' énergie est constante le long d' une trajectoire

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(x(t), v(t)) = 0 , \quad \text{et aussi que} \quad \frac{d}{dt}\mathcal{F}(x(t), v(t)) = 0 .$$

$\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  ( $\mathcal{F}$  est le carré du module du moment angulaire) sont des constantes du mouvement. Définissons encore

$$\begin{cases} r_1(\mathcal{E}, \mathcal{F}, r_0) = \inf\{r < r_0 \mid \forall s \in [r, r_0] \psi_{\mathcal{F}}(s) < \mathcal{E}\} \\ r_2(\mathcal{E}, \mathcal{F}, r_0) = \sup\{r > r_0 \mid \forall s \in [r_0, r] \psi_{\mathcal{F}}(s) < \mathcal{E}\} \end{cases} \quad (8)$$

( $r_1(\mathcal{E}, \mathcal{F}, r_0) \in ]0, r_0]$  à cause de (H3a) lorsque  $\mathcal{F}$  est non nul, et  $r_2(\mathcal{E}, \mathcal{F}, r_0) \in [r_0, +\infty[$ ).



*Figure 1.* A  $\mathcal{F}$  fixé, on peut définir un potentiel efficace  $\psi_{\mathcal{F}}$ ;  $r_1(\mathcal{E}, \mathcal{F}, r_0)$  et  $r_2(\mathcal{E}, \mathcal{F}, r_0)$  sont les extrémités de l' intervalle (en  $r$ ) dans lequel sont contenues les trajectoires. En définitive, les trajectoires bornées sont contenues dans des couronnes (planes) de rayon intérieur  $r_1(\mathcal{E}, \mathcal{F}, r_0)$  et de rayon extérieur  $r_2(\mathcal{E}, \mathcal{F}, r_0)$ .

2) Caractérisons maintenant les trajectoires non bornées. Pour qu' une trajectoire  $t \mapsto (x(t), v(t))$  soit non bornée, il faut et il suffit qu' il existe  $T \in ]0, +\infty]$  tel que

$$\lim_{t \rightarrow T^-} |x(t)| = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{t \rightarrow T^-} |v(t)| = +\infty .$$

Or, grâce à la conservation de l' énergie d' une part,

$$|v(t)|^2 = 2(\mathcal{E} - \varphi(|x(t)|)) , \quad (9)$$

et par (H3a) d' autre part,

$$|x(t)| > r_1(\mathcal{E}, \mathcal{F}, r_0) > 0 \quad (\text{si } \mathcal{F} > 0) . \quad (10)$$

Pour presque tout  $(x_0, v_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{F}(x_0, v_0) > 0$  (ce que nous supposons dans toute la suite) : une trajectoire est alors non bornée si et seulement s' il existe  $T \in ]0, +\infty]$  tel que

$$\lim_{t \rightarrow T^-} |x(t)| = +\infty .$$

- Une trajectoire est bornée si  $r_2 < +\infty$ , et on a l' équivalence

$$(r_2 < +\infty) \iff \begin{cases} \mathcal{E} < \sup_{r > r_0} \psi_{\mathcal{F}}(r) \\ \text{ou} \\ \exists r > r_0 \text{ tel que } \mathcal{E} = \psi_{\mathcal{F}}(r) = \sup_{s > r_0} \psi_{\mathcal{F}}(s) \end{cases}$$

Du fait de la régularité de  $\phi$  (hypothèse (H2)), l' ensemble

$$\{(x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \mathcal{E}(x, v) = \sup_{r > r_0} \psi_{\mathcal{F}}(r)\}$$

est de mesure nulle.

- S' il existe  $t_0 > 0$  tel que  $(x(t_0) \cdot v(t_0)) > 0$ ,  $t \mapsto (x(t), v(t))$  étant une trajectoire solution de (1) (avec  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x_0, v_0)$ ), et si  $\mathcal{E}(x_0, v_0) > \sup_{r > |x_0|} \psi_{\mathcal{F}}(r)$ , alors  $t \mapsto (x(t), v(t))$  est une trajectoire non bornée.

Considérons en effet  $\Delta = \mathcal{E}(x_0, v_0) - \sup_{r > |x_0|} \psi_{\mathcal{F}}(r)$  :

$$\frac{dr}{dt} = w \geq \sqrt{2\Delta} > 0 \quad \forall t \geq t_0 ,$$

et par conséquent :  $r_2(\mathcal{E}, \mathcal{F}, r_0) = +\infty$ ; il existe donc  $T \in ]0, +\infty]$  tel que  $\lim_{t \rightarrow T^-} r(t) = +\infty$ .

- Pour presque tout  $(x_0, v_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ , si  $\mathcal{E}(x_0, v_0) > \sup_{r > |x_0|} \psi_{\mathcal{F}}(r)$ , alors il existe  $t_0 > 0$  tel que  $(x(t_0) \cdot v(t_0)) > 0$ . En effet, si  $w(0) > 0$ , il suffit de prendre  $t_0 = 0$ . Si par contre  $w(0) < 0$ , prenons

$$t_0 > \tau(r, w, \mathcal{F}) = \int_{r_1(\mathcal{E}(r, w, \mathcal{F}), \mathcal{F})}^{r_0} \frac{ds}{\sqrt{2(\mathcal{E}(r, w, \mathcal{F}) - \psi_{\mathcal{F}}(s))}}. \quad (11)$$

Cette dernière intégrale converge sous réserve que

$$\frac{d}{dr} \psi_{\mathcal{F}}(r_1(\mathcal{E}(r, w, \mathcal{F}), \mathcal{F})) \neq 0,$$

ce qui est réalisé pour presque tout  $(x_0, v_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ,  $r \mapsto \psi_{\mathcal{F}}(r)$  étant par (H2) régulière sur  $]0, +\infty[$ . Il est facile de voir qu' alors  $w(t_0) > 0$  pour tout  $t_0 > \tau(r, w, \mathcal{F})_+$ .

- Enfin, il est facile de montrer en utilisant (H2) (régularité de  $\varphi$ ), que

$$\{(x_0, v_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \mathcal{E}(x_0, v_0) = \sup_{r > |x_0|} \psi_{\mathcal{F}}(r)\}$$

est de mesure nulle.

Finalement, pour presque toutes (au sens de Lebesgue) les données initiales  $(x_0, v_0)$ , la trajectoire  $(x(t), v(t))$  est non bornée si et seulement si

$$\mathcal{E}(x_0, v_0) > \sup_{r > |x_0|} \psi_{\mathcal{F}}(r).$$

En particulier, pour presque toute donnée initiale  $(x_0, v_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ , si  $t \mapsto (x(t), v(t))$  est non bornée, il existe  $t_0 > 0$  tel que

$$\forall t > t_0 \quad \frac{d}{dt}(|x(t)|) > 0$$

(ce qui équivaut à  $w(t) = \frac{(x(t) \cdot v(t))}{|x(t)|} > 0 \quad \forall t > t_0$ ).

3) Etudions maintenant les trajectoires non bornées de manière un peu plus précise. Deux situations bien distinctes peuvent se produire lorsqu' on ne fait pas d' hypothèse sur le comportement à l' infini du potentiel :



**Lemme 2 :** *On suppose que  $\phi$  vérifie les hypothèses (H2) et (H3a). Les trajectoires non bornées explosent soit presque toutes en temps fini, soit presque toutes en temps infini.*

La démonstration du lemme 2 repose entièrement sur le lemme 3, compte tenu du fait (hypothèse (H3a)) que la réunion des supports des trajectoires de moment angulaire nul ou dont l'énergie est valeur critique de  $\psi_{\mathcal{F}}$  est de mesure nulle :

**Lemme 3 :** *Considérons l'ensemble des trajectoires telles que  $\mathcal{F} > 0$  et dont l'énergie n'est pas valeur critique de  $\psi_{\mathcal{F}}$ , et supposons que le potentiel vérifie les hypothèses (H2) et (H3a).*

- (i) *Si la trajectoire  $t \mapsto (x(t), v(t))$  explose en un temps fini  $T \in ]0, +\infty[$ , alors  $\lim_{t \rightarrow T^-} w(t) = +\infty$ .*
- (ii) *S'il existe une trajectoire  $t \mapsto (x(t), v(t))$  qui explose en un temps fini, toutes les autres trajectoires non bornées explosent en un temps fini.*
- (iii) *S'il existe une trajectoire  $t \mapsto (x(t), v(t))$  qui explose en un temps infini, toutes les autres trajectoires non bornées explosent en un temps infini.*

**Preuve :** Considérons une trajectoire  $t \mapsto (x(t), v(t))$  qui explose en un temps fini  $T$  avec  $\mathcal{F} = |x(t) \wedge v(t)|^2 > 0$ . Quand  $t \rightarrow T_-$ ,

$$r(t) = |x(t)| \rightarrow +\infty ,$$

ou

$$|v(t)|^2 = |w(t)|^2 + \frac{\mathcal{F}}{|r(t)|^2} \rightarrow +\infty .$$

Comme  $\mathcal{F}$  est strictement positif, on a  $r(t) \geq r_1(r, \mathcal{E}, \mathcal{F}) > 0$  : si  $w(t)$  est borné, alors  $r(t) = r(0) + \int_0^t w(s) ds$  est aussi borné, ce qui est contradictoire avec les hypothèses et démontre (i).

(iii) est (par contraposition) une conséquence immédiate de (ii).

La démonstration de (ii) repose sur l'argument suivant : considérons deux trajectoires  $t \mapsto (x_1(t), v_1(t))$  et  $t \mapsto (x_2(t), v_2(t))$ . Avec les notations habituelles

$$\frac{1}{2}w_1^2 = \mathcal{E}_1 - \psi_{\mathcal{F}_1}(r_1)$$

et

$$\frac{1}{2}w_2^2 = \mathcal{E}_2 - \psi_{\mathcal{F}_2}(r_2) .$$

D'après 2), pour  $t$  assez grand, mais plus petit qu'un temps d'explosion éventuel pour l'une des deux trajectoires (et quitte à translater en temps l'une des deux trajectoires), on peut assurer

$$w_1(t) > 0 \quad \text{et} \quad w_2(t) > 0 ,$$

et par conséquent, il existe  $t \mapsto \alpha(t)$  tel que

$$r_2(t) = r_1(t + \alpha(t)) .$$

En dérivant par rapport à  $t$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dr_1}{dt}(t) &= w_1(t) \\ \frac{dr_2}{dt}(t) &= w_2(t) = w_1(t + \alpha(t)) \cdot \left(1 + \frac{d\alpha}{dt}(t)\right) \end{aligned}$$

d'où en particulier  $\frac{d\alpha}{dt}(t) > -1$ , et

$$w_2^2(t) - w_1^2(t + \alpha(t)) = 2(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) = w_1^2(t + \alpha(t)) \cdot \left(2 + \frac{d\alpha}{dt}(t)\right) \frac{d\alpha}{dt}(t) .$$

Supposons maintenant que  $r_1(t)$  explose en un temps fini  $T$ , et que  $r_2(t)$  explose en un temps infini. Quitte à faire une translation en  $t$  pour  $w_2$ , c'est à dire remplacer  $w_2(t)$  par  $w_2(t - t_0)$  pour un certain  $t_0 \in \mathbb{R}$ , compte tenu des résultats obtenus dans 2) et de (i), on peut en fait supposer que

$$r_2(t) = r_1(t + \alpha(t))$$

pour tout  $t$  appartenant à un voisinage de  $T_-$ . Quand  $t + \alpha(t) \rightarrow T_-$ , on obtient

$$\lim_{t \rightarrow T_-} \left(2 + \frac{d\alpha}{dt}(t)\right) \frac{d\alpha}{dt}(t) = 0 ,$$

d'où  $\alpha(t) = o(T - t)$  quand  $t \rightarrow T_-$ , et donc

$$\lim_{t \rightarrow T_-} r_2(t) = \lim_{t \rightarrow T_-} r_1(t + \alpha(t)) = +\infty ,$$

d'où une contradiction avec l'hypothèse :  $r_2(t)$  explose en un temps infini, ce qui démontre (ii). □□

4) L'hypothèse (H3b) assure que les trajectoires non bornées explosent en un temps infini :

**Lemme 4 :** *Si le potentiel  $\phi$  vérifie les hypothèses (H2) et (H3a, b), presque toute trajectoire non bornée explose en un temps infini.*

**Preuve :** A presque toute trajectoire non bornée correspond un moment angulaire  $\mathcal{F}$  non nul, ce que nous supposons dans la suite. Si  $\varphi$  est bornée inférieurement au voisinage de  $+\infty$ , la vitesse de toute trajectoire est bornée par (9), et conformément au lemme 3 (i), toute trajectoire non bornée explose en un temps infini. Si  $\liminf_{r \rightarrow +\infty} \varphi(r) = -\infty$  quand  $r \rightarrow +\infty$ , alors par (9), quand  $|\varphi(r)|$  est grand,  $w^2 \sim -2\varphi(r)$ . Par (H3b), on a donc  $\frac{dr}{dt} < Cr$ , où  $C$  est une constante positive, ce qui entraîne

$$r(t) < r_0 e^{Ct} < +\infty \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}^+ .$$

□□

**Remarque 5 :** Il est facile de construire un contre-exemple à la proposition 1 si (H3b) n'est pas vérifiée. (Prendre par exemple  $\varphi(r) = -r^{2+\varepsilon}$  avec  $\varepsilon > 0$  : toute trajectoire non bornée de moment angulaire non nul explose en un temps fini.)

5) Montrons par l'absurde que si  $f \in L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$  et si les hypothèses (H1), (H2) et (H3a, b) sont vérifiées, alors l'ensemble des trajectoires non bornées est de mesure nulle par rapport à la mesure  $d\mu = f(x, v) dx dv$ . Soit  $\Omega$  tel que

- (i)  $\forall (x_0, v_0) \in \Omega, t \mapsto (x(t), v(t))$  est non bornée
- (ii)  $\int_{\Omega} f(x, v) dx dv > 0$
- (iii) il existe  $R_0 > 0$  tel que  $\Omega \subset B(0, R_0) \times B(0, R_0)$
- (iv) il existe  $\delta > 0$  tel que  $\inf_{(x_0, v_0) \in \Omega} \mathcal{F}(x_0, v_0) > \delta$

Les conditions (iii) et (iv) ne sont manifestement pas restrictives. Soit

$$\Omega_t = \{(x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : x = x(t), v = v(t), (x(0), v(0)) \in \Omega\} .$$

On a

$$\Omega_t \cap \Omega \subset U_t = \{(x, v) \in \Omega_t : |x| \leq R_0 \text{ ou } x \cdot v \leq 0\} .$$

Par le lemme de Fatou et les résultats de 2), 3) et 4), il est facile de voir que

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_t \cap \Omega} f(x, v) dx dv \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{U_t} f(x, v) dx dv = 0 .$$

Soit  $\delta_0 \in ]0, 1[$ . Comme le changement de variables  $(x_0, v_0) \mapsto (x, v) = (x(t), v(t))$  préserve les aires

$$\int_{\Omega_t} f(x, v) dx dv = \int_{\Omega} f(x_0, v_0) dx_0 dv_0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

il existe  $t_1 > 0$  tel que

$$\forall t \geq t_1 \quad \int_{\Omega_t \cap \Omega^c} f(x, v) dx dv > (1 - \delta_0) \int_{\Omega} f(x_0, v_0) dx_0 dv_0.$$

Enfin, il est facile de montrer en utilisant (9) et (H3b) qu'il existe  $R_1 > 0$  tel que

$$\Omega_{t_1} \cap \Omega^c \subset B(0, R_1) \times B(0, R_1).$$

En effet, compte-tenu de la définition de  $\Omega$ , on a les bornes suivantes

$$\begin{aligned} \sup_{(x_0, v_0) \in \Omega} \mathcal{E}(x_0, v_0) &< +\infty \\ \inf_{(x_0, v_0) \in \Omega} \mathcal{F}(x_0, v_0) &> \delta \\ \inf_{(x_0, v_0) \in \Omega} r_1(\mathcal{E}(x_0, v_0), \mathcal{F}(x_0, v_0), |x_0|) &> 0 \end{aligned}$$

Si  $\Omega_{t_1}$  n'était pas borné, en utilisant les estimations ci-dessus ainsi que (9), (10) et la définition de  $\Omega$ , on aurait une contradiction avec le lemme 3.

Soit  $\Omega_1^* = \Omega_{t_1} \cap \Omega^c$ ,  $\Omega_0^* = \Omega$ . De la même manière que précédemment, étant donnée une suite  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels strictement positifs tels que

$$\delta = \sum_{i=1}^{+\infty} \delta_i < 1,$$

on peut construire une suite croissante  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\forall t \geq t_n \quad \int_{\Omega_t \cap (\cap_{i=0}^{n-1} \Omega_i^*)^c} f(x, v) dx dv > (1 - \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i) \int_{\Omega} f(x_0, v_0) dx_0 dv_0$$

et telle que  $\Omega_n^* = \Omega_{t_n} \cap (\cap_{i=0}^{n-1} \Omega_i^*)^c$  soit borné. Alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} f(x, v) dx dv &\geq \int_{\cup_{i=1}^{+\infty} \Omega_i^*} f(x, v) dx dv \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{\Omega_i^*} f(x, v) dx dv \\ &\geq \sum_{i=1}^{+\infty} (1 - \sum_{j=0}^{i-1} \delta_j) \int_{\Omega} f(x_0, v_0) dx_0 dv_0, \end{aligned}$$

ce qui est absurde, car  $f$  appartient à  $L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$  et

$$(1 - \sum_{j=0}^{i-1} \delta_j) \int_{\Omega} f(x_0, v_0) dx_0 dv_0 > (1 - \delta) \int_{\Omega} f(x_0, v_0) dx_0 dv_0 > 0. \quad \square$$

### 3. Equation de Vlasov stationnaire avec potentiel central : le théorème de Jeans, un résultat de factorisation

Nous allons commencer par donner une version locale du théorème de Jeans.

Pour tout  $(r_0, \mathcal{F}_0) \in [0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ , définissons  $\mathcal{X}(r_0, \mathcal{F}_0)$  par

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(r_0, \mathcal{F}_0) = \{ (r, w, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 : \\ \mathcal{F}_0 = |\omega|^2, r_2(\mathcal{E}(r, w, \mathcal{F}_0), \mathcal{F}_0, r) < +\infty, \\ r_0 \in [r_1(\mathcal{E}(r, w, \mathcal{F}_0), \mathcal{F}_0, r), r_2(\mathcal{E}(r, w, \mathcal{F}_0), \mathcal{F}_0, r)] \}, \end{aligned} \quad (12)$$

$\mathcal{E}(r, w, \mathcal{F})$ ,  $r_1(\mathcal{E}(r, w, \mathcal{F}_0), \mathcal{F}_0, r)$  et  $r_2(\mathcal{E}(r, w, \mathcal{F}_0), \mathcal{F}_0, r)$  étant définis respectivement par (6) et (8).

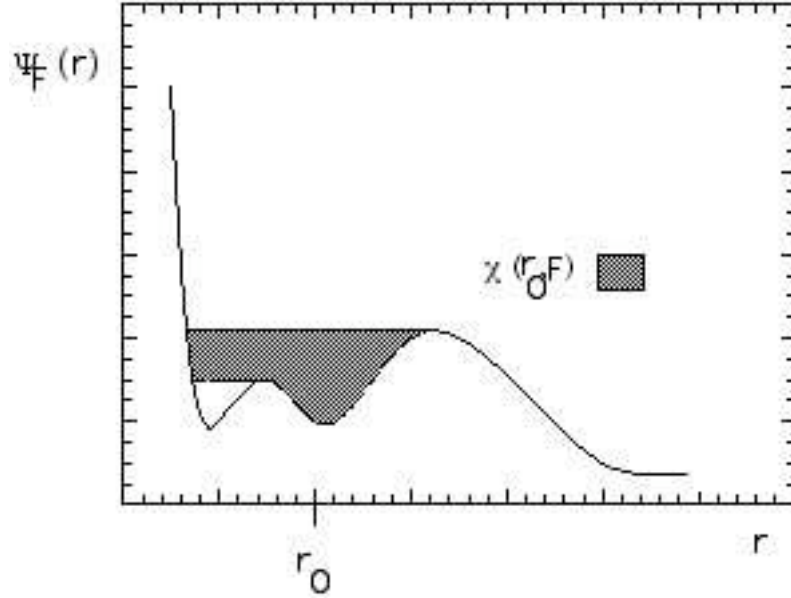


Figure 2.  $\mathcal{X}(r_0, \mathcal{F}_0)$  est l'ensemble des supports de presque toutes les trajectoires bornées qui passent par  $r_0$ ,  $\mathcal{F}_0$  étant fixé.

$\mathcal{X}(r_0, \mathcal{F}_0)$  est non vide si et seulement si il existe  $w_0 \in \mathbb{R}$  tel que

$$r_2(\mathcal{E}(r_0, w_0, \mathcal{F}_0), \mathcal{F}_0, r_0) < +\infty .$$

Pour cela, il faut et il suffit en fait que

$$\limsup_{w_0 \rightarrow 0} r_2(\mathcal{E}(r_0, w_0, \mathcal{F}_0), \mathcal{F}_0, r_0) < +\infty .$$

On fera par la suite la convention  $\mathcal{X}(r_0, \mathcal{F}_0) = \emptyset$  si

$$\limsup_{w_0 \rightarrow 0} r_2(\mathcal{E}(r_0, w_0, \mathcal{F}_0), \mathcal{F}_0, r_0) = +\infty .$$

Soit

$$\begin{aligned} \Pi : (\mathbb{R}^3 - \{0\}) \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow ]0, +\infty[ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \\ (x, v) &\mapsto (r, w, \omega) \end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} r = |x| \\ w = \frac{(x \cdot v)}{|x|} \\ \omega = x \wedge v \end{cases}$$

Dans la suite nous noterons  $\Theta$  la période angulaire définie par

$$\Theta(r(0), \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \frac{1}{2\pi} \int_{r_1(\mathcal{E}(r(0), w(0), \mathcal{F}), \mathcal{F}, r(0))}^{r_2(\mathcal{E}(r(0), w(0), \mathcal{F}), \mathcal{F}, r(0))} \frac{\sqrt{\mathcal{F}}}{s^2} \frac{ds}{\sqrt{2(\mathcal{E}(r(0), w(0), \mathcal{F}) - \psi_{\mathcal{F}}(s))}}$$

(voir (15) ci-après).

**Théorème 6 (Théorème de Jeans local) :** *Soit  $f$  et  $\phi$  vérifiant (H1), (H2) et (H4a, b) et supposons que  $\mathcal{E} \mapsto \Theta(r(0), \mathcal{E}, \mathcal{F})$  est analytique pour tout  $(r(0), \mathcal{F})$ . Soit  $(r_0, \mathcal{F}_0) \in [0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ . Si  $f$  est une solution stationnaire de (2), alors il existe une fonction  $g$  définie sur  $\mathcal{X}(r_0, \mathcal{F}_0)$  telle que*

$$f(x, v) = g(\mathcal{E}(x, v), x \wedge v)$$

pour presque tout  $(x, v) \in \Pi^{-1}(\mathcal{X}(r_0, \mathcal{F}_0))$ .

Ce théorème donne une description complète de  $f$  dans les cartes  $\mathcal{X}(r_0, \mathcal{F}_0)$ , qui recouvrent la partie de l'espace des phases correspondant à la réunion des supports des trajectoires bornées.

**Preuve :** Nous allons ramener le problème à l'étude de trajectoires planes, utiliser une propriété d'ergodicité sur les angles, qui est l'argument essentiel du théorème, et démontrer que le problème plan est complètement

caractérisé par  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  (en ce qui concerne ce dernier point, nous reprenons exactement l'argument donné par Batt, Faltenbacher et Horst dans [BFH]).

1) Le potentiel  $\phi$  étant à symétrie sphérique (hypothèse (H2)), pour toute solution  $t \mapsto (x(t), v(t))$  de (1),

$$\frac{d}{dt}\omega(t) = \frac{d}{dt}(x(t) \wedge v(t)) = 0.$$

Par conséquent, la trajectoire  $t \mapsto x(t)$  est inscrite dans le plan  $P(\omega)$  orthogonal à  $\omega$  contenant 0, orienté par  $\omega$ .  $\omega$  étant fixé, l'application

$$\begin{aligned} (P(\omega) - \{0\}) \times P(\omega) &\rightarrow ]0, +\infty[ \times S^1 \times \mathbb{R} \\ (x, v) &\mapsto (r, \theta, w) \end{aligned}$$

où  $x \in P(\omega)$  est représenté en coordonnées polaires par  $(r, \theta)$ , et où  $\mathcal{F} = |\omega|^2 = |x|^2|v|^2 - w^2$ , est une bijection.

2) Dans ce système de coordonnées, la trajectoire d'une particule s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{dt} = w \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{\mathcal{F}}}{r^2} \\ \frac{dw}{dt} = \frac{\mathcal{F}}{r^3} - \frac{d\varphi}{dr} \\ \frac{d\mathcal{F}}{dt} = 0 \end{array} \right. \quad (13)$$

(L'orientation de  $P(\omega)$  est fixée par  $\omega = x \wedge v$ , de sorte que  $\frac{d\theta}{dt}$  est positif.) Le système étant autonome, il est facile de voir que  $t \mapsto r(t)$  est périodique de période

$$\mathcal{T}(r(0), w(0), \mathcal{F}) = 2 \int_{r_1(\mathcal{E}(r(0), w(0), \mathcal{F}), \mathcal{F}, r(0))}^{r_2(\mathcal{E}(r(0), w(0), \mathcal{F}), \mathcal{F}, r(0))} \frac{ds}{\sqrt{2(\mathcal{E}(r(0), w(0), \mathcal{F}) - \psi_{\mathcal{F}}(s))}}. \quad (14)$$

qui est bien définie presque partout,  $d\psi_{\mathcal{F}}/dr$  étant non nul p.p. Le mouvement est donc périodique si et seulement si

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\Theta(r(0), w(0), \mathcal{F}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\mathcal{T}(r(0), w(0), \mathcal{F})} \frac{d\theta}{dt}(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{r_1(\mathcal{E}(r(0), w(0), \mathcal{F}), \mathcal{F}, r(0))}^{r_2(\mathcal{E}(r(0), w(0), \mathcal{F}), \mathcal{F}, r(0))} \frac{\sqrt{\mathcal{F}}}{s^2} \frac{ds}{\sqrt{2(\mathcal{E}(r(0), w(0), \mathcal{F}) - \psi_{\mathcal{F}}(s))}} \end{aligned} \quad (15)$$

est un nombre rationnel. On montre (cf. [LL]) que, compte tenu de (H4a, b), pour presque tout  $(x, v) \in P(\omega)$ ,  $\frac{1}{2\pi}\Theta(r(0), w(0), \mathcal{F})$  est irrationnel. Voir le détail du calcul dans l'appendice : "une propriété caractéristique des potentiels en  $-1/r$  ou  $r^2$ ".

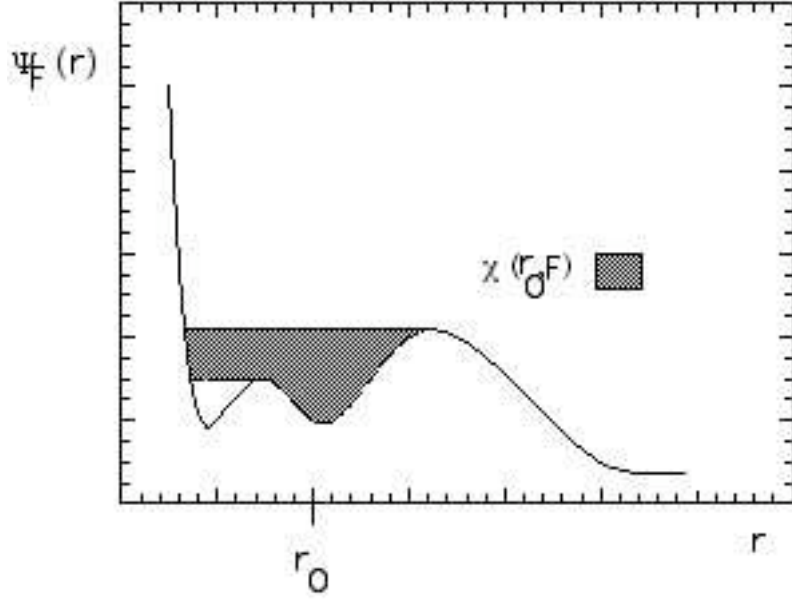


Figure 3. L' hypothèse  $(H4a, b)$  consiste à dire que le potentiel n' est pas (localement) en  $-1/r$  ou en  $r^2$  (potentiels pour lesquels les trajectoires  $t \mapsto x(t)$  sont des ellipses pour certaines valeurs de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$ ). Si  $(H4a, b)$  est vérifiée, la trajectoire  $t \mapsto x(t)$  est dense dans la couronne

$$\{x \in P(\omega) \mid r_1(\mathcal{E}(r(0), w(0), \mathcal{F}), \mathcal{F}, r(0)) \leq |x| \leq r_2(\mathcal{E}(r(0), w(0), \mathcal{F}), \mathcal{F}, r(0)) \}$$

Il est alors facile d' en déduire qu' il existe une fonction  $h$  telle que pour presque tout  $(x, v) \in \Pi^{-1}(\mathcal{X}(r_0, \mathcal{F}_0))$

$$f(x, v) = h(|x|, w = \frac{(x \cdot v)}{|x|}, x \wedge v)$$

3) Reste à montrer que  $f$  ne dépend pas de  $w$ ,  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  étant fixés. Nous reprenons ici l' argument donné dans [BFH].  $\omega = x \wedge v$  étant fixé, considérons

$$\tau(r, w, \mathcal{F}) = \int_{r_1(\mathcal{E}(r, w, \mathcal{F}), \mathcal{F}, r)}^{r_0} \frac{ds}{\sqrt{2(\mathcal{E}(r, w, \mathcal{F}) - \psi_{\mathcal{F}}(s))}} \in [0, +\infty] . \quad (11)$$

Considérons aussi

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{dt} = w \\ \frac{dw}{dt} = \frac{\mathcal{F}}{r^3} - \frac{d\varphi}{dr} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r(0) = r \\ w(0) = w \end{array} \right.$$



Soit  $\varepsilon = -\text{sgn}(w)$ . On a

$$\begin{cases} w(\varepsilon\tau(r, w, \mathcal{F})) = 0 \\ r(\varepsilon\tau(r, w, \mathcal{F})) = r_1(\mathcal{E}(r, w, \mathcal{F}), \mathcal{F}, r) \end{cases}$$

$t \mapsto h(r(t), w(t), \mathcal{F}(t))$  ne dépend pas de  $t$ . En particulier

$$\begin{aligned} h(r, w, \mathcal{F}) &= h(r(\varepsilon\tau(r, w, \mathcal{F})), w(\varepsilon\tau(r, w, \mathcal{F})), \mathcal{F}(\varepsilon\tau(r, w, \mathcal{F}))) \\ &= h(r_1(\mathcal{E}(r, w, \mathcal{F}), \mathcal{F}), 0, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

ne dépend de  $w$  qu' au travers de  $\mathcal{E}(r, w, \mathcal{F})$ , ce qui démontre le théorème  $\square$

Nous allons maintenant donner quelques résultats globaux déduits du théorème précédent. Ces résultats, qui sont techniques, peuvent être omis en première lecture. Il servent essentiellement à alléger la démonstration du théorème 9, tout en dégagant des arguments qui peuvent être utilisés dans un cadre plus général. Le corollaire 8 est un cas particulier du corollaire 7. Nous en donnons néanmoins l' énoncé dans la mesure où  $c'$  est à ce résultat que se réfère l' appellation "théorème de Jeans" lorsqu'il est utilisé en astrophysique, et dans la mesure où  $c'$  est sur lui que repose la démonstration du théorème 9.

La première conséquence (corollaire 7) du théorème 6 est que l' on peut recouvrir la partie de l' espace des phases correspondant à des trajectoires bornées par des cartes indexées par les zéros de  $r \mapsto \frac{d}{dr}(r^3 \frac{d\varphi}{dr})$  (lorsque  $\psi_{\mathcal{F}}$  possède au moins un maximum local pour  $r \in ]0, +\infty[$ ) et par une carte  $\mathcal{X}_0$  (dans le cas contraire), et donc obtenir ainsi une représentation complète de  $f$  lorsqu' elle est  $L^1$  (en utilisant la proposition 1).

Commençons par introduire quelques notations. Soit

$$\mathcal{X}_\infty = \{ (r, w, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 : r_2(\mathcal{E}(r, w, |\omega|^2), |\omega|^2, r) = +\infty \}$$

l' ensemble des supports des trajectoires non bornées. Soit  $(r^i)_{i \in I}$  la famille (au plus dénombrable) des zéros de  $r \mapsto \frac{d}{dr}(r^3 \frac{d\varphi}{dr})$ , et

$$\mathcal{X}_i = \bigcup_{0 < \mathcal{F} < \underline{\mathcal{F}}} \mathcal{X}(r_i, \mathcal{F})$$

où  $\underline{\mathcal{F}} = \sup\{\mathcal{F} > 0 : \psi_{\mathcal{F}} \text{ possède au moins un maximum local pour } r \in ]0, +\infty[ \}$ . Soit encore

$$\mathcal{X}_0 = \bigcup_{\underline{\mathcal{F}} < \mathcal{F} < \overline{\mathcal{F}}} \mathcal{X}(r_0(\mathcal{F}), \mathcal{F})$$

où  $r_0(\mathcal{F})$  est l'unique minimum de  $\psi_{\mathcal{F}}$  sur  $]0, +\infty[$  pour  $\underline{\mathcal{F}} < \mathcal{F} < \overline{\mathcal{F}}$ , et où  $\underline{\mathcal{F}} = \inf\{ \mathcal{F} > 0 : \psi_{\mathcal{F}} \text{ est monotone décroissante} \}$ . Soit enfin

$$\mathcal{X} = \cup_{i \in (I \cup \{0\})} \mathcal{X}_i$$

l'ensemble des trajectoires bornées.

**Corollaire 7 :** Soit  $\phi$  vérifiant (H2) et (H4a, b) et supposons que  $\mathcal{E} \mapsto \Theta(r(0), \mathcal{E}, \mathcal{F})$  est analytique pour tout  $(r(0), \mathcal{F})$ . A un ensemble de mesure nulle près,

$$\Pi^{-1}(\mathcal{X}_{\infty}) \cup \Pi^{-1}(\mathcal{X}) = \mathbb{R}^3,$$

et l'on a :

(i) Soit  $f$  une solution positive non identiquement nulle de (2) vérifiant (H1). Pour tout  $i \in (I \cup \{0\})$ , il existe une fonction  $g_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, +\infty[$  telle que

$$f(x, v) = g_i(\mathcal{E}(x, v), x \wedge v)$$

pour presque tout  $(x, v) \in \Pi^{-1}(\mathcal{X}_i)$ .

(ii) Si de plus  $f \in L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ , et si  $\phi$  vérifie (H3a, b), alors le support de  $f$  est contenu dans  $\mathcal{X}$ .

(iii) Enfin, si  $\varphi$  est bornée inférieurement au voisinage de  $r = 0_+$ , alors le support de  $f$  est compact si l'une des conditions suivantes est réalisée :

(a)  $\frac{d\varphi}{dr} < 0$  au voisinage de  $r = +\infty$ .

(b)  $\liminf_{r \rightarrow +\infty} \varphi(r) > C > -\infty$ , et il existe  $\mathcal{E}_0 < C$  tel que

$$\forall i \in (I \cup \{0\}), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \mathcal{E} > \mathcal{E}_0 \quad g_i(\mathcal{E}, \omega) = 0$$

**Preuve :** La représentation de  $f$  dans les cartes  $(\mathcal{X}_i)_{i \in (I \cup \{0\})}$  est une conséquence immédiate de la proposition 1 et du théorème 6. Montrons que les cartes  $(\mathcal{X}_i)_{i \in (I \cup \{0, \infty\})}$  fournissent un recouvrement de l'espace des phases. Soit  $(r, \mathcal{F}) \in ]0, +\infty[^2$  tel que  $\mathcal{X}(r, \mathcal{F})$  soit non vide. Soit

$$\begin{cases} a = \max(0, \sup\{ s \in ]0, r[ : \frac{d\psi_{\mathcal{F}}}{dr} = 0 \text{ et } \frac{d^2\psi_{\mathcal{F}}}{dr^2} \leq 0 \}) \\ b = \inf\{ s > r : \frac{d\psi_{\mathcal{F}}}{dr} = 0 \text{ et } \frac{d^2\psi_{\mathcal{F}}}{dr^2} \leq 0 \} \end{cases}$$

(on prend ici les conventions usuelles :  $\inf \emptyset = +\infty$  et  $\sup \emptyset = -\infty$ .)

1<sup>er</sup> cas : Supposons pour commencer que  $\mathcal{F}$  est tel que  $\psi_{\mathcal{F}}$  possède au moins un maximum local (ce qui est le cas par exemple pour  $\mathcal{F}$  assez petit, si  $\varphi$  possède un maximum local). On a soit  $a > 0$ , soit  $b < +\infty$ . Comme par hypothèse,  $\mathcal{X}(r, \mathcal{F})$  est non vide, il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $\frac{d\psi_{\mathcal{F}}}{dr}(c) = 0$ . La fonction  $r \mapsto \frac{d}{dr}(r^3 \frac{d\psi_{\mathcal{F}}}{dr})$  change de signe sur  $[a, b]$ . En effet,

$$\begin{aligned} & \text{si } a > 0, \frac{d}{dr}(r^3 \frac{d\psi_{\mathcal{F}}}{dr})|_{r=a} \leq 0 \\ & \text{si } b < +\infty, \frac{d}{dr}(r^3 \frac{d\psi_{\mathcal{F}}}{dr})|_{r=b} \leq 0 \\ & \text{et } \frac{d}{dr}(r^3 \frac{d\psi_{\mathcal{F}}}{dr})|_{r=c} \geq 0 \end{aligned}$$

Soit  $\tilde{r} \in [a, b] \cap \mathbb{R}^+$  tel que  $\frac{d}{dr}(r^3 \frac{d\psi_{\mathcal{F}}}{dr})|_{r=\tilde{r}} = 0$ . On a évidemment

$$\mathcal{X}(r, \mathcal{F}) = \mathcal{X}(\tilde{r}, \mathcal{F}) .$$

Or  $\frac{d}{dr}(r^3 \frac{d\psi_{\mathcal{F}}}{dr}) = \frac{d}{dr}(r^3 \frac{d\varphi}{dr})$ , et par conséquent  $\tilde{r}$  ne dépend pas de  $\mathcal{F}$ , ce qui démontre en définitive que

$$\bigcup_{0 < \mathcal{F} < \underline{\mathcal{F}}} \mathcal{X}(r, \mathcal{F}) = \bigcup_{0 < \mathcal{F} < \underline{\mathcal{F}}} \mathcal{X}(\tilde{r}, \mathcal{F}) .$$

2<sup>ème</sup> cas : Supposons maintenant que  $\psi_{\mathcal{F}}$  ne possède pas de maximum local. Considérons encore  $(r, \mathcal{F}) \in ]0, +\infty[^2$  tel que  $\mathcal{X}(r, \mathcal{F})$  soit non vide. Il est clair que l'ensemble des  $\mathcal{F} > 0$  tels que  $a > 0$  ou  $b < +\infty$  est de mesure nulle. Comme  $\mathcal{X}(r, \mathcal{F})$  est non vide,  $\psi_{\mathcal{F}}$  possède un et un seul minimum local  $r_0(\mathcal{F})$ . Or  $\lim_{r \rightarrow 0_+} \psi_{\mathcal{F}}(r) = +\infty$ , et quand  $r \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{d\psi_{\mathcal{F}}}{dr} \geq 0$  : ce minimum est donc en fait un minimum absolu, ce qui achève la démonstration de (i).  $\square$

La deuxième conséquence (qui est en fait un cas particulier du corollaire 7) est que si  $r \mapsto r^3 \frac{d\varphi}{dr} = r^3 \frac{d\psi_{\mathcal{F}}}{dr}$  est monotone croissante sur  $]0, +\infty[$ ,  $\psi_{\mathcal{F}}$  ne possède de maximum local pour aucun  $\mathcal{F} > 0$ ;  $\psi_{\mathcal{F}}$  possède au plus un minimum, qui est un minimum absolu, et  $f$  (lorsqu'elle appartient à  $L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ ) peut alors être représentée dans une seule carte. Cet argument est repris de [BFH] où il a été exploité dans le cadre plus restreint du système de Vlasov-Poisson gravitationnel.

**Corollaire 8 (Théorème de Jeans global)** : *Soit  $f$  une solution positive non identiquement nulle de (2) et  $\phi$  telles que  $f$  et  $\phi$  vérifient (H1), (H2) et (H4a, b). Si  $r \mapsto r^3 \frac{d\varphi}{dr}$  est monotone croissante, alors il existe une fonction  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, +\infty[$  telle que*

$$f(x, v) = g(\mathcal{E}(x, v), x \wedge v)$$

pour presque tout  $(x, v) \in \Pi^{-1}(\mathcal{X}_0)$ , où

$$\mathcal{X}_0 = \cup_{0 < \mathcal{F} < \overline{\mathcal{F}}} \mathcal{X}(r_0(\mathcal{F}), \mathcal{F})$$

est l'ensemble des supports des trajectoires bornées, où  $r_0(\mathcal{F}) \in ]0, +\infty[$  est l'unique minimum de  $\psi_{\mathcal{F}}$  (pour  $\mathcal{F} > 0$  donné), et où  $\overline{\mathcal{F}} = \inf\{ \mathcal{F} > 0 : \psi_{\mathcal{F}} \text{ est monotone décroissante} \}$ .

Si de plus  $f$  appartient à  $L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ , alors

$$\text{supp}(f) \subset \Pi^{-1}(\mathcal{X}_0) .$$

Enfin, si  $\varphi$  est bornée inférieurement au voisinage de  $r = 0_+$ , alors le support de  $f$  est compact si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

(a)  $\frac{d\varphi}{dr} < 0$  au voisinage de  $r = +\infty$ .

(b)  $\liminf_{r \rightarrow +\infty} \varphi(r) > C > -\infty$  et il existe  $\mathcal{E}_0 < C$  tel que

$$\forall \omega \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \mathcal{E} > \mathcal{E}_0 \quad g(\mathcal{E}, \omega) = 0 .$$

Remarquons que si l'hypothèse (H3b) n'est pas vérifiée, on peut construire par une méthode des caractéristiques une solution de (2) de masse finie pour laquelle le théorème de Jeans global (corollaire 8) n'est pas vrai, en considérant par exemple un potentiel comme celui de la remarque 5, et en choisissant pour les trajectoires des conditions asymptotiques pour lesquelles le résultat de factorisation n'est pas vrai.

#### 4. Exemple : solutions stationnaires de masse finie du système de Vlasov-Poisson gravitationnel, le cas du potentiel à symétrie sphérique

Considérons maintenant le système de Vlasov-Poisson gravitationnel stationnaire

$$\begin{cases} v \cdot \nabla_x f - \nabla_x \phi \cdot \nabla_v f = 0 \\ \Delta \phi = \rho = \int_{\mathbb{R}^3} f(x, v) dv \end{cases} \quad (VPg)$$

Nous allons montrer que les différents résultats obtenus précédemment s'appliquent à toute solution suffisamment régulière de (VPg), du moins dans la partie de l'espace des phases où la densité spatiale  $\rho$  n'est pas constante. Plus précisément, on a le :

**Théorème 9 :** Soit  $f \in C^0 \cap L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$  une solution stationnaire positive de (VPg), telle que le potentiel associé  $\phi$  vérifie (H2) et (H4b). Alors :

(i) (factorisation de la fonction de distribution) il existe une fonction  $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $(x, v) \in \text{supp}(f)$  vérifiant

$$\nabla_x \rho \neq 0 \quad \text{sur} \quad ]r_1(\mathcal{E}(x, v), \mathcal{F}(x, v), |x|), r_2(\mathcal{E}(x, v), \mathcal{F}(x, v), |x|)[ ,$$

alors

$$f(x, v) = g(\mathcal{E}(x, v), x \wedge v)$$

(ii) (factorisation de la densité spatiale) il existe une fonction  $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathcal{E}(x, v), \mathcal{F}(x, v)) dv \\ &= \frac{\pi}{|x|^2} \int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} G\left(\frac{w^2}{2} + \frac{\mathcal{F}}{2|x|^2} + \phi(x), \mathcal{F}\right) dw d\mathcal{F} \\ &= h_G(|x|, \phi(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

où  $h_G(r, u) = 2\pi \int \int_{(\mathbb{R}^+)^2} \frac{ds dt}{\sqrt{2s}} G(s + t + u, 2r^2 t)$ .

(iii) (équation de Poisson)  $f$  est solution de (VPg) si et seulement si  $\varphi$  est solution de

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = h_G(r, \varphi(r)) .$$

**Preuve :** Pour démontrer (i), il faut vérifier que  $f$  et  $\phi$  satisfont aux hypothèses (H3a), (H3b) et (H4a).

De l'équation de Poisson

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = \rho ,$$

on déduit que

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r^2} \int_0^r r^2 \rho(r) dr = o\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \text{quand } r \rightarrow 0_+$$

car  $x \mapsto \rho(x)$  appartient à  $L^1(\mathbb{R}^3)$ . Par conséquent,

$$\varphi(r) = o\left(\frac{1}{r}\right)$$

quand  $r \rightarrow 0_+$ , et (H3a) est vérifiée.

De même,

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r^2} \int_0^r r^2 \rho(r) dr \sim \frac{\|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}}{4\pi r^2}$$

quand  $r \rightarrow +\infty$ , d'où

$$\exists \lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi(r) = \varphi_\infty \quad \text{et} \quad \varphi(r) - \varphi_\infty \sim -\frac{\|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}}{4\pi r} \quad \text{quand } r \rightarrow +\infty,$$

et (H3b) est aussi vérifiée.

Si  $\frac{d}{dr}(r\varphi) = 0$  sur un intervalle  $I \subset ]0, +\infty[$ , alors il existe une constante  $\kappa$  telle que

$$\varphi(r) = \frac{\kappa}{r} \quad \forall r \in I,$$

et l'équation de Poisson entraîne

$$\rho(r) = 0 \quad \forall r \in I,$$

ce qui démontre la première partie de (H4a) :  $r \mapsto r\varphi(r)$  ne s'annule sur aucun intervalle contenu dans  $\text{supp}(\rho)$ .

De la même manière, si  $\frac{d}{dr}(\frac{1}{r^2} \frac{d\varphi}{dr}) = 0$  sur un intervalle  $I \subset ]0, +\infty[$ , alors il existe une constante  $\kappa$  telle que

$$\varphi(r) = \kappa r^2 \quad \forall r \in I$$

et l'équation de Poisson entraîne

$$\rho(r) = 6\kappa \quad \forall r \in I$$

Comme

$$\text{supp}(f) \subset \text{supp}(\rho) \times \mathbb{R}^3$$

(H4a) est donc vérifiée, du moins pour presque tout  $(x, v) \in \text{supp}(f)$  tel que  $\nabla_x \rho \neq 0$  sur

$$]r_1(\mathcal{E}(x, v), \mathcal{F}(x, v), |x|), r_2(\mathcal{E}(x, v), \mathcal{F}(x, v), |x|)[$$

(c'est à dire, en termes imagés, pour presque tout  $(x, v) \in \text{supp}(f)$  tel qu'une trajectoire passant par  $(x, v)$  ne reste pas dans le domaine où  $\rho$  est constante).

Finalement, comme

$$r^2 \frac{d\varphi}{dr} = \int_0^r r^2 \rho(r) dr \geq 0 \quad \forall r > 0,$$

$r \mapsto r^3 \frac{d\varphi}{dr}$  est monotone croissante et (i) est une conséquence du corollaire 8. (En fait, il faut d'abord se convaincre que l'on peut remplacer l'hypothèse

" $r \mapsto \frac{d}{dr}(r^2\varphi)$  ne s'annule sur aucun intervalle contenu dans  $\text{supp}(\rho)$ " par l'hypothèse plus faible énoncée ci-dessus, et que le résultat du corollaire 8 persiste, du moins dans la forme énoncée au théorème 9 : voir la démonstration de la proposition 13 ci-après.)

Pour démontrer (ii), il suffit de remarquer qu'à toute solution stationnaire  $f$  telle que  $\phi$  est à symétrie sphérique et telle que  $\rho \in L^1(\mathbb{R}^3)$ , on peut associer une fonction  $\tilde{f}$  telle que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \tilde{f}(x, v) dv = \rho(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

$\tilde{f}$  ne dépend que de  $|x|$ , de  $|v|$  et  $(x \cdot v)$

$\tilde{f}$  est une solution de (VPg).

(On utilise les mêmes notations que dans la démonstration du théorème de Jeans local – théorème 6.) Soit  $h$  tel que

$$f(x, v) = h(r, w, \theta, w, |x \wedge v|^2, \frac{x \wedge v}{|x \wedge v|^2}),$$

et  $\tilde{h}$  tel que

$$\tilde{h}(r, w, \mathcal{F}) = \frac{1}{2\pi^2} \int \int_{s^1 \times S^2} (r, \theta, w, \mathcal{F}, \sigma) d\theta d\sigma.$$

Il suffit alors de considérer  $\tilde{f}$  défini par

$$\tilde{f}(x, v) = \tilde{h}\left(|x|, \frac{(x \cdot v)}{|x|}, |x \wedge v|^2\right) \quad \forall (x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3.$$

Le problème est alors ramené exactement aux hypothèses de Batt, Faltenbacher et Horst dans [BFH] et (ii) est une application immédiate de leur résultat de factorisation, dont le théorème 6 est une généralisation. Ceci montre en particulier l'existence d'une fonction  $G$  telle que

$$\tilde{f}(x, v) = G(\mathcal{E}(x, v), \mathcal{F}(x, v)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 - \{0\}, \quad \forall v \in \mathbb{R}^3,$$

$g$  et  $G$  étant reliés (lorsque les conditions de (i) sont vérifiées) par

$$G(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \int_{\sigma \in S^2} g(\mathcal{E}, \sqrt{\mathcal{F}} \cdot \sigma) \frac{d\sigma}{4\pi}.$$

(iii) est une conséquence immédiate de (ii). □

**Remarque 10 :** Il est alors facile de construire des solutions particulières à la manière de Batt, Berestycki, Degond et Perthame (voir [BBDP]), en considérant des fonctions de distributions de la forme

$$f(x, v) = h(\mathcal{E}(x, v) - \mathcal{F}(x, v))$$

connues sous le nom de solutions localement isotropiques (voir aussi [ER]). Cette approche peut être généralisée à la classe la plus générale de solutions : celle des fonctions de distributions  $f$  telles que la fonction  $\tilde{f}$  soit de la forme

$$\tilde{f}(x, v) = h(\mathcal{E}(x, v), \mathcal{F}(x, v))$$

(voir [BBDP]).

**Remarque 11 :** Les expressions obtenues dans le théorème 9 fournissent un moyen simple pour construire des solutions de  $(VPg)$  de masse totale

$$M = \int \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} f(x, v) \, dx dv$$

et d'énergie totale

$$E = \int \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} f(x, v) \left( \frac{|v|^2}{2} + \phi(x) \right) \, dx dv$$

finies, avec éventuellement un support borné (voir [BFH] [G] et [BBDP] pour plus de détails).

**Remarque 12 :** Les résultats énoncés ci-dessus se généralisent sans difficulté à tout système de la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f + v \cdot \nabla_x f - (\nabla_x \phi + \nabla_x \phi_0) \cdot \nabla_v f = 0 \\ \phi = V * \rho \end{cases}$$

dont on cherche les solutions stationnaires telles que  $\phi$  soit à symétrie sphérique et que  $\rho \in L^1(\mathbb{R}^3)$ ,  $V$  étant un potentiel à deux corps central,  $c'$  est à dire ne dépendant que de  $|x|$ , positif, et  $\phi_0$  un potentiel extérieur à symétrie sphérique,  $V$  et  $\phi_0$  étant tels que soient satisfaites les différentes hypothèses de la partie 1.



**Appendice : une propriété caractéristique des potentiels en  $-1/r$  ou  $r^2$**

Nous allons donner la démonstration du résultat suivant, souvent utilisé en mécanique (voir [LL]), mais rarement démontré, et qui caractérise les potentiels en  $-1/r$  ou en  $r^2$  : dans un potentiel à symétrie sphérique, les trajectoires (planes) correspondant à des orbites bornées sont périodiques seulement pour un ensemble de mesure nulle de données initiales si le potentiel n'est localement ni en  $r^2$ , ni en  $-1/r$  (l'hypothèse (H4a) sert précisément à éviter ces deux cas). La preuve consiste simplement à montrer que pour presque toute donnée initiale, la trajectoire associée, qui est périodique en  $r$ , précède d'un angle  $\Theta$  tel que  $\Theta/2\pi$  est irrationnel, ou, en d'autres termes, qu'il n'y a pas résonance.

Commençons par redéfinir quelques notations, dont la plupart ont déjà été utilisées précédemment, afin de rendre la lecture de l'appendice indépendant des parties précédentes. On considère une particule de trajectoire  $t \mapsto (x(t), v(t)) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ , et on suppose que  $x(0) \wedge v(0) \neq 0$ . Soit  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  définis par

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(x, v) = |x|^2 |v|^2 - (x \cdot v)^2 \quad (5)$$

$$\mathcal{E}(x, v) = \frac{w^2}{2} + \psi_{\mathcal{F}}(r) \quad (6)$$

où  $r = |x|$ ,  $w = \frac{(x \cdot v)}{|x|}$ , et  $\psi_{\mathcal{F}}(r) = \frac{\mathcal{F}}{2r^2} + \varphi(r)$ . Les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  associées à  $x(t)$  dans le plan orthogonal à  $x(0) \wedge v(0)$  (et orienté par  $x(0) \wedge v(0)$ ) obéissent à

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{dt} = w, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{\mathcal{F}}}{r^2}, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\mathcal{F}}{r^3} - \frac{d\varphi}{dr}, \quad \frac{d\mathcal{F}}{dt} = 0 \end{array} \right. \quad (13)$$

et on suppose que la trajectoire est bornée. Le problème étant autonome ( $\varphi$  ne dépend pas de  $t$ ),  $t \mapsto r(t)$  est périodique (relativement à  $r$  :  $r(t + \mathcal{T}) = r(t)$ ) de période

$$\mathcal{T}(r_0, w_0, \mathcal{F}) = 2 \int_{r_1(\mathcal{E}(r_0, w_0, \mathcal{F}), \mathcal{F}, r_0)}^{r_2(\mathcal{E}(r_0, w_0, \mathcal{F}), \mathcal{F}, r_0)} \frac{ds}{\sqrt{2(\mathcal{E}(r_0, w_0, \mathcal{F}) - \psi_{\mathcal{F}}(s))}} \quad (14)$$

pour presque toute donnée initiale. Introduisons l'angle de rotation sur une période

$$\begin{aligned} \Theta(x_0, v_0) = \Theta(r_0, w_0, \mathcal{F}) &= \int_0^{\mathcal{T}(r_0, w_0, \mathcal{F})} \frac{d\theta}{dt}(t) dt \\ &= 2 \int_{r_1(\mathcal{E}(r_0, w_0, \mathcal{F}), \mathcal{F}, r_0)}^{r_2(\mathcal{E}(r_0, w_0, \mathcal{F}), \mathcal{F}, r_0)} \frac{\sqrt{\mathcal{F}}}{s^2} \frac{ds}{\sqrt{2(\mathcal{E}(r_0, w_0, \mathcal{F}) - \psi_{\mathcal{F}}(s))}}, \end{aligned} \quad (15)$$

où  $r_1$  et  $r_2$  sont définis par

$$\begin{cases} r_1(\mathcal{E}, \mathcal{F}, r_0) = \inf\{r < r_0 \mid \forall s \in [r, r_0] \psi_{\mathcal{F}}(s) < \mathcal{E}\} \\ r_2(\mathcal{E}, \mathcal{F}, r_0) = \sup\{r > r_0 \mid \forall s \in [r_0, r] \psi_{\mathcal{F}}(s) < \mathcal{E}\} \end{cases} \quad (8)$$

Utilisons encore les notations des parties 2 et 3, et introduisons l'ensemble  $\mathcal{X}$  tel que  $\Pi^{-1}(\chi)$  est la réunion des supports des trajectoires bornées, l'application  $\Pi$  étant elle-même définie par

$$\begin{aligned} \Pi : (\mathbb{R}^3 - \{0\}) \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow ]0, +\infty[ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \\ (x, v) &\mapsto (r, w, x \wedge v) \end{aligned}$$

**Proposition 13 :** *Soit  $\varphi$  une fonction analytique sur  $]0, +\infty[$ . L'ensemble des données initiales  $(x_0, v_0)$  appartenant à  $\Pi^{-1}(\chi)$  telles que  $\Theta(x_0, v_0)$  appartienne à  $2\pi \cdot \mathbb{Q}$  est de mesure non nulle si et seulement si il existe deux constantes  $k > 0$  et  $C \in \mathbb{R}$  telles que soit*

$$\varphi(r) = -\frac{k}{r} + C ,$$

soit

$$\varphi(r) = kr^2 + C ,$$

pour tout  $r$  appartenant à un intervalle non vide  $I$ .

**Preuve :** Nous allons, en utilisant l'hypothèse de régularité (H4b), ramener le problème à l'étude de  $\Theta$  au voisinage d'un point d'équilibre. En supposant que  $\Theta/2\pi$  est rationnel pour un ensemble de mesure non nulle de paramètres dont dépend  $\Theta$ , nous montrerons alors que les coefficients du développement sont nécessairement nuls, ce qui nous permettra au moyen d'un calcul (un peu fastidieux) de donner la forme locale du potentiel.

$\mathcal{F}$  étant fixé, on dira que  $\mathcal{E}_c$  est valeur critique non minimisante pour une trajectoire passant par  $r = r_0$  s'il existe  $r \in \mathbb{R} \cap [r_1(\mathcal{E}, \mathcal{F}, r_0), r_2(\mathcal{E}, \mathcal{F}, r_0)]$  tel que

$$\begin{aligned} \psi_{\mathcal{F}}(r) &= \mathcal{E}_c , \\ \frac{d}{dr} \psi_{\mathcal{F}}(r) &= 0 , \\ \mathcal{E}_c &> \min_{r \in [r_1(\mathcal{E}, \mathcal{F}, r_0), r_2(\mathcal{E}, \mathcal{F}, r_0)]} \psi_{\mathcal{F}}(r) . \end{aligned}$$

Pour tout  $(r_0, \mathcal{E}_0, \mathcal{F}_0)$  tel que  $\mathcal{E}_0$  n'est pas valeur critique non minimisante, il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{E}_0$  tel que  $\mathcal{E} \mapsto \Theta(r_0, \mathcal{E}, \mathcal{F}_0)$  est analytique sur  $\mathcal{V}$ .

Si  $\Theta/2\pi$  est rationnel pour un ensemble de mesure non nulle des paramètres  $(r, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ , alors  $\Theta$  est constante dans tout ouvert ne contenant pas de valeur critique. Or un calcul d'équivalence montre que

$$\lim_{\substack{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_c \\ \mathcal{E} \neq \mathcal{E}_c}} \Theta(r_0, \mathcal{E}, \mathcal{F}_0) = +\infty$$

pour toute valeur critique non minimisante  $\mathcal{E}_c$ ,  $r_0$  et  $\mathcal{F}_0$  étant fixés.

Si  $\Theta/2\pi$  est rationnel pour un ensemble de mesure non nulle de paramètres, il n'existe donc pas de valeur critique non minimisante, et  $\Theta$  est constante. En particulier, pour tout  $\mathcal{F} > 0$ ,  $\psi_{\mathcal{F}}$  possède au plus un minimum.

Supposons donc que  $\Theta/2\pi$  est une constante rationnelle. Soit  $(x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  tel que  $\Pi(x, v) \in \mathcal{X}$ . Pour simplifier les notations, nous écrirons  $\mathcal{F} = \varpi^2 = |x \wedge v|^2$ . Nous supposons, ce qui n'est pas restrictif,  $\mathcal{F} > 0$  et  $\mathcal{X}(|x|, \mathcal{F}) \neq \emptyset$  i.e.

$$\limsup_{w_0 \rightarrow 0} r_2(\mathcal{E}(r_0, w_0, \mathcal{F}_0), \mathcal{F}_0, r_0) < +\infty, .$$

et nous noterons  $r_0$  le point qui réalise le minimum de  $\psi_{\mathcal{F}}$  :  $r_0$  est tel que

$$\frac{d\psi_{\mathcal{F}}}{dr}(r_0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dr}\varphi(r_0) = \frac{\varpi^2}{r_0^3} . \quad (16)$$

En particulier, on peut remarquer que  $r_0$  ne dépend localement que de  $\varpi$ .

Faisons le changement de variable  $(\mathcal{E}, r) \mapsto (\alpha, \eta)$  défini par

$$\begin{cases} \mathcal{E} - \psi_{\mathcal{F}}(r) = \alpha^2 \cos^2 \eta \\ \mathcal{E} - \psi_{\mathcal{F}}(r_0) = \alpha^2 \end{cases}$$

qui s'écrit encore

$$\psi_{\mathcal{F}}(r) - \psi_{\mathcal{F}}(r_0) = \alpha^2 \sin^2 \eta$$

avec  $\eta \in [-\pi, +\pi[$ . Ce changement de variable est licite car

$$\frac{d\psi_{\mathcal{F}}}{dr}(r) = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = r_0 .$$

Soit  $t = t(\alpha, \eta) = \frac{r(\alpha, \eta) - r_0}{r_0}$ . Développons en  $t$  à l'ordre deux en utilisant le fait que  $0 \leq t(\alpha, \eta) \leq t(\alpha, \pi/2) \rightarrow 0$  quand  $\alpha \rightarrow 0_+$ , ou, plus précisément,

$$t(\alpha, \eta) \sim \frac{r_0^2 \sin \eta}{\sqrt{\frac{d^2}{dr^2} \psi_{\mathcal{F}}(r_0)}} \cdot \alpha \quad (17)$$

si  $\frac{d^2}{dr^2}\psi_{\mathcal{F}}(r_0) \neq 0$  (ce qui nous supposons par la suite pour simplifier l'exposé ; si  $\frac{d^2}{dr^2}\psi_{\mathcal{F}}(r_0) = 0$ , il suffit de faire varier la valeur de  $\varpi$ ). En reportant dans (15), on obtient

$$\Theta = \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\varpi}{r^2} \frac{2\alpha \sin \eta}{\frac{d}{dr}\psi_{\mathcal{F}}(r(\eta))} d\eta. \quad (18)$$

Soit

$$\begin{cases} a = \sqrt{\frac{\frac{d^2}{dr^2}\psi_{\mathcal{F}}(r_0)}{2r_0}} \\ b = \frac{1}{6} \frac{d^3}{dr^3}\psi_{\mathcal{F}}(r_0) \\ c = \frac{1}{24} \frac{d^4}{dr^4}\psi_{\mathcal{F}}(r_0) \end{cases}$$

On peut développer  $\psi_{\mathcal{F}}(r)$  et  $\frac{d}{dr}\psi_{\mathcal{F}}(r)$  en puissances de  $t$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_0^2} \frac{d}{dr}\psi_{\mathcal{F}}(r) &= 2a^2t + 3bt^2 + 4ct^3 + o(t^3) \\ \frac{1}{r_0^3}(\psi_{\mathcal{F}}(r) - \psi_{\mathcal{F}}(r_0)) &= a^2t^2 + bt^3 + ct^4 + o(t^4) \end{aligned}$$

(18) devient alors

$$\begin{aligned} \Theta = \Theta(\alpha, \varpi) &= 2\sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\varpi}{r_0^2} (1+t)^{-2} \cdot \frac{(a^2t^2 + bt^3 + ct^4 + o(t^4))^{1/2}}{2a^2t + 3bt^2 + 4ct^3 + o(t^3)} d\eta \\ &= 2\sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\varpi}{ar_0^2} \left( 1 - \left(2 + \frac{b}{a^2}\right)t + \frac{1}{8a^4}(24a^4 + 16ba^2 \right. \\ &\quad \left. - 12ca^2 + 11b^2)t^2 + o(t^2) \right) d\eta \end{aligned} \quad (19)$$

Développons maintenant en puissances de  $\alpha$  et intégrons par rapport à  $\eta$ , (17) étant remplacée par

$$t(\alpha, \eta) = \frac{1}{a} \sin \eta \cdot \alpha - \frac{b}{2a^4} \sin^2 \eta \cdot \alpha^2 + O(\alpha^3), \quad (20)$$

ce qui, en reportant dans (19), donne

$$\begin{aligned} &\Theta(\alpha, \varpi) \\ &= 2\sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\varpi}{ar_0^2} \left( 1 - \left(2 + \frac{b}{a^2}\right) \frac{1}{a} \sin \eta \cdot \alpha \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8a^6}(24a^4 + 24ba^2 - 12ca^2 + 15b^2) \frac{b}{2a^4} \sin^2 \eta \cdot \alpha^2 + o(\alpha^2) \right) d\eta \\ &= 2\pi \frac{\varpi}{\sqrt{2}ar_0^2} \left( 1 - \frac{1}{16a^6}(24a^4 + 24ba^2 - 12ca^2 + 15b^2) \frac{b}{2a^4} \cdot \alpha^2 \right) + o(\alpha^2). \end{aligned}$$

1)  $\varpi \mapsto \frac{\varpi}{ar_0^2}$  est continue, donc constante : montrons qu'il existe une constante  $\gamma > -2$  telle que

$$\varphi(r) = kr^\gamma + C \quad (21)$$

pour tout  $r$  appartenant à un voisinage de  $r_0$ . Soit  $\lambda > 0$  tel que

$$\frac{\varpi^2}{r_0^4 \frac{d^2}{dr^2} \psi_{\mathcal{F}}(r_0)} = \lambda^{-1}.$$

En utilisant la définition de  $\varpi$ , on obtient

$$\frac{d^2}{dr^2} \varphi(r_0) + (3 - \lambda) \frac{\varpi^2}{r_0^4} = 0. \quad (22)$$

Or l'équation (16) entraîne, par définition de  $r_0$ ,

$$\frac{d}{dr} \varphi(r_0) = \frac{\varpi^2}{r_0^3}.$$

(22) devient donc

$$\frac{d^2}{dr^2} \varphi(r_0) + (3 - \lambda) r_0 \frac{d}{dr} \varphi(r_0) = 0$$

pour presque tout  $\varpi$ , ce qui démontre, en faisant le changement de variable  $\varpi \mapsto r_0(\varpi)$ , que

$$\varphi(r) = kr^{\lambda-2} + C$$

avec  $\lambda > 0$ .

2) De la même manière, le terme du deuxième ordre en  $\alpha$  est identiquement nul :

$$16a^6(24a^4 + 24ba^2 - 12ca^2 + 15b^2) \frac{b}{2a^4} = 0.$$

Compte-tenu de (21),

$$\psi_{\mathcal{F}}(r) = kr^{\gamma} + C + \frac{\varpi^2}{2r^2} \quad \forall r > 0$$

pour une constante  $\gamma > -2$ , et de (16)

$$\gamma kr_0^{\gamma-1} = \frac{\varpi^2}{r_0^2},$$

on tire

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}(\gamma + 2) \cdot K(r_0) \\ b = ((\gamma - 1)(\gamma - 2) - 12) \cdot \frac{K(r_0)}{6} \\ c = ((\gamma - 1)(\gamma - 2)(\gamma - 3) + 60) \cdot \frac{K(r_0)}{24} \end{cases}$$

où  $K(r_0) = \gamma k r_0^{\gamma-4} > 0$ . En remplaçant en fonction de  $\gamma$  et en factorisant, on obtient pour finir

$$(\gamma + 2)^2(\gamma + 1)(\gamma - 2) = 0 ,$$

d' où  $\gamma = -1$  ou  $\gamma = +2$ .

3) Reste à vérifier que si  $\gamma = -1$  ou si  $\gamma = +2$ ,  $\Theta/2\pi$  est bien rationnel pour presque toute donnée initiale.

1<sup>er</sup> cas:  $\gamma = -1$  (*problème de Képler*)

$$\Theta(r_0, w_0, \mathcal{F}_0) = \sqrt{2} \int_{r_1(\mathcal{E}(r_0, w_0, \mathcal{F}_0), \mathcal{F}_0, r_0)}^{r_2(\mathcal{E}(r_0, w_0, \mathcal{F}_0), \mathcal{F}_0, r_0)} \frac{\varpi}{s^2} \frac{ds}{\sqrt{\mathcal{E} - \frac{k}{s} - \frac{\varpi}{2s^2}}}$$

Les changements de variable  $s \mapsto r$

$$r = \frac{\varpi}{\sqrt{2}s}$$

et  $r \mapsto \eta$

$$r = \sqrt{\mathcal{E}^2 - \frac{k^2}{2\varpi}} \cdot \sin \eta$$

conduisent à

$$\begin{aligned} \Theta &= \int_{\varpi/(\sqrt{2}r_2)}^{\varpi/(\sqrt{2}r_1)} \frac{dr}{\sqrt{\mathcal{E} - \frac{\sqrt{2}k}{2\varpi}r - r^2}} \\ &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\eta \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

2<sup>ème</sup> cas:  $\gamma = +2$  (*oscillateur harmonique*)

$$\Theta(r_0, w_0, \mathcal{F}_0) = \sqrt{2} \int_{r_1(\mathcal{E}(r_0, w_0, \mathcal{F}_0))}^{r_2(\mathcal{E}(r_0, w_0, \mathcal{F}_0))} \frac{\varpi}{s^3} \frac{ds}{\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{s^2} - k - \frac{\varpi}{\sqrt{2}s^4}}}$$

Les changements de variable  $s \mapsto r$

$$r = \frac{\varpi}{\sqrt{2}s^2}$$

et  $r \mapsto \eta$

$$r = \sqrt{\frac{\mathcal{E}^2}{2\varpi^2} - k} \cdot \sin \eta$$

conduisent à

$$\begin{aligned}
\Theta &= \frac{1}{2} \int_{\varpi/(\sqrt{2}r_2)}^{\varpi/(\sqrt{2}r_1)} \frac{dr}{\sqrt{\frac{\sqrt{2}\mathcal{E}}{\varpi}r - k - r^2}} \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\eta \\
&= \pi
\end{aligned}$$

□

**Remarque 14 :** Les trajectoires correspondant à des potentiels en  $-1/r$  ou  $r^2$  sont des ellipses ; ceci démontre la propriété suivante : si  $\varphi$  est une fonction analytique sur  $]0, +\infty[$ , et s'il existe un ensemble de mesure non nulle de données initiales pour lesquelles les trajectoires sont périodiques au sens de la proposition 13, alors presque toutes les trajectoires sont telles que  $t \mapsto x(t)$  décrit une ellipse.

**Remarque 15 :** Les résultats de la proposition 13 sont encore valables pour tout potentiel  $\varphi$  analytique (même localement en  $-1/r$  ou en  $r^2$ ) s'il existe une énergie critique non minimisante pour tout  $\mathcal{F}(x_0, v_0)$  correspondant à une trajectoire bornée avec donnée initiale  $(x_0, v_0)$ . C'est le cas en particulier pour tout potentiel  $\varphi$  tel que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{d\varphi}{dr}(r) < 0 \quad (23)$$

ou s'il existe une fonction  $\bar{\varphi}$  périodique de période  $R$  telle que

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \varphi(r + nR) = \bar{\varphi}(r) \quad \forall r \in ]0, R[ \quad (24)$$

On obtient alors de nouvelles versions du théorème de Jeans (théorème 6, corollaire 7) en remplaçant (H4a) par l'une des deux conditions (23) ou (24).

L'hypothèse (H4a) est une hypothèse très forte et il conviendrait de savoir si on peut l'affaiblir (elle sert uniquement à montrer que si  $\Theta(\alpha, \varpi)$  est à valeurs rationnelles pour un ensemble de paramètres  $(\alpha, \varpi)$  de mesure non nulle, alors  $\Theta(\alpha, \varpi)$  est en fait constante). La fin de la preuve de la proposition 13 utilise seulement l'hypothèse

$$\varphi \in C^4(]0, +\infty[)$$

qui permet de faire un développement à l'ordre 4 au voisinage du fond du potentiel  $\psi_{\mathcal{F}}$ .

## Références

- [BBDP] Batt J, Beresticky H, Degond P, Perthame B. *Some families of the Vlasov-Poisson system*. Arch. Rat. Mech. Anal. 104 no. 1 (1988) 79-103
- [BFH] Batt J, Faltenbacher W, Horst E. *Stationnary spherically symmetric models in stellar dynamics*. Arch. Rational Mech. Anal. 93 (1986) 159-183
- [BT] Binney J, Tremaine S. *Galactic Dynamics*. Princeton Univ. Press (1987)
- [D1] Dolbeault J. *Classification des solutions stationnaires axisymétriques régulières du système de Vlasov-Maxwell*. à paraître.
- [D2] Dolbeault J. *Solutions invariantes par translation, par rotation ou stationnaires en temps du système de Vlasov-Maxwell pour un plasma à plusieurs espèces de particules*. à paraître.
- [D3] Dolbeault J. *Classification des solutions pour un paquet de particules chargées obéissant aux équations de Vlasov-Maxwell, monocinétique dans une direction*. à paraître.
- [D4] Dolbeault J. *Remarks on the characteristics for a BGK type model : the case of trapped particles and an application to a model of magnetosphere*. à paraître.
- [D5] Dolbeault J. *Solutions stationnaires du système de Vlasov-Poisson (cas coulombien) : un schéma numérique pour la diode à vide et la jonction*. en préparation.
- [ER] Ehlers J, Rienstra W. *The locally isotropic solutions of the Liouville and Poisson equations*. Astrophys. J. 155 (1969) 105-116
- [G] Geigant E. *A generalized integral equation of Abel's type and the use of inversion techniques for the construction of stationary spherically symmetric solutions of the Vlasov-Poisson system*. en préparation.
- [J1] Jeans JH. *On the theory of star-streaming and the structure of the universe*. Month. Not. Royal Astr. Soc. 76 (1915) 70-84
- [J2] Jeans JH. *Problems of cosmogony and stellar dynamics*. Cambridge, University Press (1919)
- [LL] Landau L, Lifshitz E. *Mécanique*. Mir (1969)
- [L] Lynden-Bell D. *Stellar dynamics. Part I. Only isolating integrals should be used in Jeans theorem*. Mon. Nat. Roy. Astron. Soc. 124 no. 1 (1962) 1-9. *Part II. Potentials with isolating integrals*. Mon. Nat. Roy. Astron. Soc. 124



no. 2 (1962) 95-123