Mémoire de **M**aster **2 R**echerche

Contributions d’Einstein, De Sitter, Friedmann, et Lemaître à la cosmologie de 1917 à 1932

Par

Alain Bousselin, sous la direction de Philippe Nabonnand

Université de **L**orraine

Unité de **F**ormation et de **R**echerche
aux **S**ciences de l’**H**omme et de la **S**ociété

Faculté des Lettres et des Sciences Humaines
Département de philosophie

Spécialité : Logique, Epistémologie et Histoire des Sciences

<u>Date de soutenance</u> : le mercredi 14 septembre 2016

Sommaire

Remerciements

Je tiens à remercier les personnes qui ont, par leur enseignement et leurs conseils, permis que ce mémoire puisse voir le jour.

- Mes remerciements vont à mon Directeur de mémoire, Philippe Nabonnand, pour les conseils éclairés qu'il m'a prodigués, notamment dans la suggestion de mon plan de travail et la perspicacité de ses questions.
- Je remercie également tous les professeurs du Master 2 Recherche pour la qualité des sujets traités qui m'ont tous passionnés.
  Je pense particulièrement à ce qui ne m'était pas familier, c'est-à-dire à l'histoire et à la philosophie des sciences du vivant professées par l'historienne Isabelle Draelants, ainsi qu'à la théorie cellulaire sous la perspective philosophique enseignée par Frédéric Wieber.

- Je remercie Jacques Fric, membre influent de la Société Astronomique de France dont je fais partie, pour ses points de vue théoriques et je n'oublie pas que c'est à la lecture de ses écrits dans le cadre de la SAF, que la passion pour la relativité et la cosmologie m'a pris.
- Je remercie aussi Gilbert Pasqualini, ancien élève de l'Ecole Polytechnique, qui loin d'une retraite « pépère » m'a ouvert les yeux sur le calcul tensoriel et la relativité générale à l'Université Ouverte Lyon 1, ainsi que Gérald Grenier , enseignant à l'Université Claude Bernard Lyon 1 pour sa profonde maîtrise de la physique théorique.
- Je n'oublie pas Pierre Salati, ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure de la rue d'Ulm, pour la qualité et le niveau du cours de relativité générale qu'il m'a permis de suivre à l'Ecole Normale Supérieure de Lyon.

- Enfin, je remercie Vincent Dameron, mon voisin, ami et collègue du Conseil Municipal de Marsas, petit village de 71 habitants situé dans nos montagnes des Hautes-Pyrénées, pour m'avoir si gentiment prêté ses cours de l'Ecole Polytechnique.
  Ma pensée va aussi à Sylvie Palot, Christophe Cabarbaye, Guy Ricaud, Jérôme Dubau, tous membres du Conseil Municipal et à notre maire Philippe Viau pour l'indulgence qu'ils ont à mon égard lorsque je ne peux, hélas, être présent à certaines séances du Conseil.

Introduction

En 2016, le dictionnaire de français Larousse, via Internet, définit la cosmologie comme une « science qui étudie la structure, l'origine et l'évolution de l'Univers dans son ensemble ».

De fait, l'Univers a toujours fasciné les hommes et plus particulièrement les astronomes, depuis l'origine des temps.

Déjà, les penseurs anciens se posaient des problèmes qui les tourmentaient : d'où vient l'Univers ? est-ce un Univers fermé ou sans limites ? où va-t-il ?. Ainsi, la cosmologie remonte à l'éveil de l'astronomie, en Mésopotamie et en Egypte de – 3000 à – 2000, mais aucune preuve observationnelle ne permettait de confirmer les postulats. Il faut attendre le 17^{e}s et le développement des techniques d'observation pour que philosophes, physiciens, mathématiciens et astronomes proposent leur conception de l'Univers, à travers des hommes tels que Newton, Lambert, Wright, Kant et bien d'autres.

Au début du 20^{e}s, avant même la première publication d'Einstein de 1917, relative aux considérations cosmologiques issues de sa théorie de la relativité générale [1], s'il n'est encore question ni d'Univers en expansion, ni d'autres galaxies que la nôtre, la préface du cours d'Henri Poincaré professé à la Sorbonne [2], montre bien toutes les questions que se posaient les savants sur l'origine d'un monde cantonné à l'époque par notre galaxie.

Entre 1917 et 1932, les spéculations cosmologiques, qui restent malgré tout l'apanage d'une minorité d'astronomes mathématiciens, se fondent essentiellement, en grande partie, sur des schémas mathématiques rigoureux issus de la théorie de la relativité générale et associés à un contexte expérimental. Et chaque modèle cosmologique suscitant de nouveaux types d'observations, a constitué un levier intellectuel puissant pour tout un domaine de la science, qu'il s'agisse des mathématiques, de la physique théorique et de tout ce qui en découle, que ce soit en optique, en électronique, en informatique, en mécanique spatiale, etc..

Entre 1917 et 1932 (ainsi que de nos jours), c'est l'expérimentateur qui choisit le modèle cosmologique le plus conforme à la réalité parmi les divers modèles proposés par les théoriciens, afin d'étendre beaucoup plus loin les limites de L'Univers. Et dans cette période, le cosmologiste qui est aussi mathématicien-théoricien s'est bien plus rapproché de l'astrophysicien que du philosophe. Au point de créer une dualité théoricien-ingénieur, associée en une seule et même personne, du fait d'une cosmologie faisant partie intégrante de la science, au sens de l'existence des grandes théories scientifiques. Aussi, à partir de 1917, la cosmologie fait pleinement partie de la science au même titre que l'extraordinaire de la pensée humaine concernant les fondements de la physique qui ont jalonné les deux siècles qui nous ont précédés.

Sur le dépassement d'une certaine philosophie mécaniste, citons cette fameuse apostrophe d'Einstein que nous trouvons dans sa grande autobiographie de 1949 :
« Newton, pardonne-moi ; même pour un homme doué de ton incomparable puissance de réflexion et de création, il n'y avait à ton époque qu'une seule voie possible, tu l'as trouvée. Les concepts que tu as forgé guident encore la pensée physique d'aujourd'hui, bien que nous sachions maintenant qu'ils doivent être remplacés par d'autres, plus éloignés de la sphère de l'expérience immédiate, si nous voulons arriver à comprendre de façon plus profonde les phénomènes et leurs rapports. » [3].

L'objet de ce mémoire est de montrer la contribution d'Einstein, De Sitter, Friedmann et Lemaître dans l'élaboration des modèles cosmologiques relativistes et de les analyser. Il est structuré de la manière qui suit :

- **Chapitre 1 :** Nous effectuons le bilan d'une vue cosmologique de l'homme, qui traduit son regard et sa pensée sur le monde qui l'entoure, avant la première publication d'Einstein de 1917 relative à son modèle d'Univers statique : *« Kosmologische Betrachtungen zur allgemeine Relativitäts-theorie ».*

  Après avoir exprimé de manière générale la conception de l'homme sur son environnement, nous mentionnons les publications de quelques savants de divers pays, afin de souligner leurs points de vue.

  Tout ceci permet de prendre conscience du bond méthodologique apporté par l'article d'Einstein.

  Ainsi, ce premier chapitre prépare tout naturellement au chapitre 2 qui traite de la fondation de la cosmologie dite moderne et de son histoire de 1917 à 1932.

- **Chapitres 2 à 6** : Nous abordons de manière assez complète l'obtention des modèles cosmologiques relativistes en insistant sur les réflexion que l'on peut nourrir à propos des phénomènes de la nature tels que le temps, l'espace, la masse grave, la masse inertielle, l'inertie, le principe de relativité, etc.. Ces réflexions permettent de mieux comprendre l'intuition créatrice des divers protagonistes dans le choix de leurs postulats.

  Sans renoncer à un équilibre entre l'abstrait et le réel, citons Einstein pour sa réflexion concernant le développement moderne d'une théorie que nous trouvons dans son livre *« Conceptions scientifiques, morales et sociales »* de 1952 treaduit par Maurice Solovine :

  > *« La théorie de la relativité est un bel exemple du caractère fondamental du développement moderne de la théorie. C'est que les hypothèses de départ deviennent de plus en plus abstraites, de plus en plus éloignées de l'expérience. Mais, en revanche, on se rapproche davantage du but scientifique par excellence, qui est d'embrasser par déduction logique, au moyen d'un minimum d'hypothèses ou d'axiomes, un maximum d'expériences. Avec cela, la voie de la pensée qui va des axiomes aux expériences ou aux conséquences, devient de plus en plus longue et subtile. De plus en plus, le théoricien est forcé, dans la recherche des théories, de se laisser guider par des points de vue formels purement mathématiques, parce que l'expérience de l'expérimentateur en physique ne peut pas conduire aux régions de la plus haute abstraction ».*

L'annexe C est là pour montrer la mise en équation des modèles cosmologiques issus des équations tensorielles du champ de gravitation.

Dans la mesure du possible, notre étude s'effectue directement à partir des sources primaires dans la langue originale. La traduction de certaines sources primaires, ainsi que les sources secondaires, sont l'œuvre de spécialistes reconnus (par exemple Françoise Balibar pour bon nombre d'écrits d'Einstein).

Pour une meilleure compréhension des lecteurs, et pour gagner en clarté sur des résultats théoriques assez difficiles à cerner, je me suis permis de complémenter certains modèles par des démonstrations personnelles.

Bien évidemment, ceci n'enlève rien à l'approche historique que doit mettre en valeur le mémoire ; approche historique qui est de souligner le cheminement de la pensée des différents protagonistes dans le sens d'une histoire associée à l'évolution des idées, et de montrer la progression des connaissances, au fur et à mesure de la qualité des observations liées aux progrès de la technologie.

Tout au long des paragraphes constituant ces 5 chapitres, nous confrontons les résultats théoriques aux observations obtenues pendant la période considérée.

Afin de comprendre les tenants et les aboutissants des différents modèles cosmologiques présentés aux chapitres 2 à 5, il m'a paru souhaitable de traiter en annexes ce qui relève de l'outil mathématique nécessairement abstrait pour traiter ce genre de sujet. Nous trouvons donc les annexes suivantes :

- **Annexe A :** Elle aborde largement les bases du calcul tensoriel afin de comprendre qualitativement les mécanismes régissant l'établissement des équations de la théorie de la relativité générale que nous trouvons en annexe B, et plus encore, pourquoi le calcul tensoriel trouve dans cette théorie tout son importance.

- **Annexe B :** Il m'a parut judicieux de développer, au moins dans ses grandes lignes, les rudiments les plus significatifs de la relativité générale, car c'est à partir de cette théorie que prend naissance la cosmologie moderne, dont l'ultime objectif est sans conteste un des plus ambitieux que ce soit jamais fixé les hommes. En effet, il s'agit de comprendre la nature qui nous entoure, en formulant les lois fondamentales de l'Univers par l'étude globale de ses caractéristiques.

Sans avoir au préalable, appréhendé la géométrie de l'espace-temps que traduit la relativité générale, la cohérence de la cosmologie moderne à travers ses équations différentielles, est beaucoup moins perceptible. En effet, la compréhension de l'environnement dans lequel nous sommes plongés, c'est-à-dire la structure dynamique globale de la sphère céleste qui nous entoure, passe par une connaissance assez profonde de la signification précise de l'intervalle d'espace-temps.

La relativité générale est sans nulle doute le plus difficile de la théorie de la cosmologie. Et pour cela les cours professés par Pierre Salati, qu'il m'a permis de suivre à L'ENS de Lyon m'ont été d'un grand support. Si l'obtention des équations fondamentales de la cosmologie relativiste peut s'obtenir par un raisonnement newtonien (la théorie de la gravitation de Newton se retrouve à partir de celle d'Einstein en prenant pour limite les champs faibles), cette manière de raisonner n'est évidemment pas satisfaisante.

C'est la raison pour laquelle, une fois défini le principe du calcul tensoriel et les postulats de départ, nous avançons dans la connaissance de la relativité générale de manière progressive avec une grande rigueur mathématique, en évitant de vouloir faire « coller » aux équations tensorielles une image conceptuelle qui ne ferait que polluer la compréhension du tout.

En effet, si l'étincelle, c'est-à-dire l'intuition créatrice à l'origine, permet de poser les postulats de départ, il faut ensuite ne pas chercher à « voir les choses intuitivement », car les confins de l'Univers ne sont pas visibles. Ce sont les mathématiques qui permettent d'avancer lorsque l'intuition basée sur l'imagination se trouve à cours de ressources.

L'annexe B explique donc clairement comment Einstein arrive aux équations tensorielles de la relativité générale en soulignant implicitement la différence conceptuelle avec la gravitation telle que Newton la concevait.

Compte-tenu du recul que nous avons sur l'élaboration de la théorie de la relativité générale, je me suis permis de complémenter par des explications ou des équations assez simples, les commentaires contenus dans les sources primaires afin de gagner en clarté.
Le sujet du mémoire n'étant pas d'analyser le cheminement de la pensée d'Einstein dans l'établissement de la relativité générale, pour une meilleure compréhension des lecteurs, j'ai volontairement traité l'élaboration des équations tensorielles du champ gravitationnel par la méthode variationnelle associée au principe de moindre action, en m'inspirant de l'approche de Hilbert qui est beaucoup plus élégante que celle d'Einstein.

- **Annexe C :** Après avoir montré comment on obtient les équations tensorielles du champ de gravitation, nous sommes donc capables, dans cette annexe, de comprendre tout naturellement le détail de la mise en équation des modèles cosmologiques dont il est question aux chapitre 2 à 6.

Dans l'établissement de ces équations, une fois acquis le postulat d'espace-temps décrit par une variété pseudo-riemannienne à quatre dimensions, nous privilégions un raisonnement mathématique et toutes les déductions logiques qui font sa force. Le retour à la réalité physique s'effectuera en confrontant les résultats théoriques aux observations.

- **Annexe D :** La métrique de Friedmann-lemaître-Robertson-Walker (FLRW) décrit un espace-temps de géométrie homogène et isotrope. Elle a été développée entre autres par Friedmann, en cosmologie, pour la description d'Univers à grandes échelles. Elle constitue, de nos jours, l'outil principal amenant la construction du modèle cosmologique standard (la théorie du Big bang). Nous avons montré dans cette annexe comment elle s'obtient.

Chapitre 1

La cosmologie avant 1917

1.1- Situation générale

L'étymologie du mot cosmologie provient du grec ancien (monde / science) [10] et de logos (la raison). En 1761, Johann-Heinrich Lambert (1728-1777), mathématicien et philosophe de Mulhouse, avait imaginé l'Univers constitué de systèmes de plus en plus vastes tournant les uns autour des autres.

Le titre de la publication originale de Lambert *« Cosmologische Briefe über die Einrichtung des Weltbaues »* datant de 1761 contient le mot allemand « Cosmologische » qui sera repris dans la première publication d'Einstein de 1917 relative à cette discipline et qui marque la naissance de la cosmologie contemporaine.

Encore appelée cosmologie moderne, scientifique ou relativiste, la cosmologie devient, sous l'influence d'Einstein, une discipline physique à part entière, liée à l'astrophysique à travers ses relations à l'observation et à la physique théorique.

Antérieurement, de même que Lambert, Thomas Wright (1711-1786), astronome et mathématicien britannique, publie en 1750 à Londres son ouvrage *« On Original Theory or New Hypothesis of the Universe ».*

Dans ce recueil, il dessine la structure de la Voie Lactée, qu'il imagine comme une couche plate composée d'étoiles dans laquelle est immergée la Terre.

Cette idée sera reprise et développée part le philosophe allemand Emmanuel Kant (1724-1804), dans son ouvrage publié en 1755 à Koenigsberg et à Leipzig : *« Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels »* [4 : traduction C. Wolf].

Puis nous retiendrons le nom de William Herschel (1738-1822), astronome germano-britannique, qui promut le modèle de l'univers-île, obtenant une image de la notre Galaxie plate et allongée.

Ainsi, la théorie de l'univers-île est-elle au début du 20^{e}s, généralement considérée comme établie et à cette époque, l'image de notre Galaxie flottant dans un espace essentiellement vide, semblait convenir à la majorité des astronomes [5].

Aussi, au début du 20^{e}s, il n'est encore question ni d'Univers en expansion, ni d'autres galaxies que notre Voie Lactée. A cette époque, entre 1911 et 1915, lorsque Einstein travaille véritablement sur une conception nouvelle de la gravitation, les observations ne fournissent aucune raison d'envisager autre chose que des étoiles agencées de manière assez homogène et permanente.

Le monde observable est donc composé d'étoiles et de « nébuleuses » dont on ne sait pas encore qu'il s'agit de galaxies telle que la Voie Lactée [6].

Ces « nébuleuses » sont des objets célestes diffus, classés sous une même rubrique dans des catalogues, qui contiennent aussi les groupements d'étoiles de notre Galaxie.

Avant même le premier article d'Einstein de 1917, les scientifiques et les astronomes qui s'intéressaient à la structure de l'espace et de l'Univers étaient rares. Aussi, il convient d'effectuer un bilan, même sommaire, de leur travail concerné par la relativité restreinte aux alentours de 1910, par la relativité générale en 1916 et par le problème de l'origine du monde. Ces savants dont il est question dans ce qui suit, sont choisis parmi ceux qui, d'une part ont influencés Einstein dans ses réflexions (Seeliger, Poincaré, Schwarzschild), d'autre part ont marqués le paysage de la cosmologie par leurs recherches basées sur la mécanique nouvelle issue de la relativité de l'espace et du temps.

L''idée que la plupart des « nébuleuses » observées sont situées bien au-delà de la Voie Lactée s'est fait de manière progressive, et cette prise de conscience était une condition indispensable à la naissance de la cosmologie moderne.

1.2- Situation en France

1.2.1- Les travaux de Félix Tisserand et de Charles Wolf

Félix Tisserand (1845-1896) est un astronome français en charge de la direction de l'observatoire de Paris. Il fut professeur d'astronomie mathématique à la faculté des sciences de Paris et Poincaré lui succéda en 1896.

Charles Wolf (1827-1918) est lui aussi un astronome français. Diplômé de l'ENS, il fut professeur titulaire de la chaire d'astronomie physique de la faculté des sciences de Paris en 1893.

Wolf a publié en 1886 un document important et assez synthétique *« hypothèses cosmogoniques »* dont il mentionne avoir repris une série d'articles de Tisserand publiés dans le Bulletin astronomique de juillet 1884 à juillet 1885.

Ce document propose de résumer les différentes hypothèses d'ordre purement scientifique, par lesquelles les Astronomes et les Philosophes ont essayé d'expliquer le mode de formation des astres qui composent l'Univers.

Antérieur au cours de Poincaré à la Sorbonne datant de 1913, que nous citons en Introduction, puisque l'ouvrage de Wolf date de 1886, ce dernier expose les hypothèses cosmogoniques associées à la formation du système solaire telle que décrits par les travaux de Laplace sur sa mécanique céleste, en n'oubliant pas ceux de Kant sur le sujet.

Son principal but était de *« montrer que la théorie de Laplace répond encore aujourd'hui le mieux possible aux conditions que l'on est en droit d'exiger d'une hypothèse cosmogonique. »*.

1.2.2- Les travaux d'Henri Poincaré

Henri Poincaré (1854-1912) est un mathématicien, physicien, philosophe et ingénieur français. Il est un contributeur majeur de la théorie de la relativité restreinte. Ses recherches concernent la physique, l'optique, l'astronomie, la mécanique et les mathématiques.

En 1896, il est nommé professeur d'Astronomie mathématique et de mécanique céleste à la faculté des sciences de l'Université de Paris, et en plus professeur d'Astronomie générale à l'Ecole Polytechnique à partir de 1904.

En 1900, il est lauréat de la médaille d'Or de la Royal Astronomy Society de Londres et Président de la Société Astronomique de France en 1901 [7, 8, 9].

a) Une de nos références est le cours de Poincaré professé à la Sorbonne en1913 (voir Introduction). Dans ce cours, il n'est pas encore question de l'utilisation du mot « cosmologie ».

Abordant dans sa préface *« le problème de l'origine du monde comme ayant de tout temps préoccupé tous les hommes qui réfléchissent »*, en parlant du *« spectacle de l'Univers étoilé »*, l'auteur traite des hypothèses cosmogoniques relatives à la formation du système solaire. Le mot « cosmogonie » correspond à la définition actuelle du dictionnaire Larousse (2016) : « science de la formation des objets célestes tels que les planètes et les étoiles ».

Poincaré mentionne, entre autres, les travaux de Laplace sur la mécanique céleste et les travaux de Kant sur les conditions mécaniques du système planétaire. Il rappelle que les conceptions du philosophe allemand étaient étendues à l'ensemble du monde stellaire, c'est-à-dire à l'époque à toute la Voie Lactée.

b) Mentionnons également la publication de Poincaré *« La mécanique nouvelle »* parue en 1909.
Ce document prend à témoin le scepticisme des scientifiques à l'encontre de la mécanique de Newton, traitant du temps et de l'espace absolu. Il a pour objectif de montrer ce en quoi la mécanique nouvelle, basée sur des idées de relativité du temps et de l'espace, se doit de supplanter une conception dépassée par les nouvelles connaissances concernant les lois de la nature.
Cette motivation prend sa source chez Poincaré par, comme on peut le constater dans le document respectivement pages 172 et 173, *« l'invention fort ingénieuse du temps apparent* (travaux de Lorentz) » et *« les résultats tout à fait remarquables des délicates expériences réalisées par Michelson »*.
Notons que rien ne mentionne, dans le document, la publication d'Einstein de 1905 sur le sujet.

1.3- Situation en Allemagne

1.3.1- Les travaux de Hugo von Seeliger

Hugo von Seeliger (1849-1924) est un astronome allemand souvent considéré comme le plus important de son époque.
Einstein, dans un livre écrit en 1916 [10], précédant sa publication concernant son modèle d'Univers statique de 1917, fait part de ses réflexions sur l'Univers considéré comme un tout (chapitres XXX, XXXI, XXXII), en citant les travaux de Seeliger à propos de *« la difficulté de principe associée à la mécanique classique du ciel »*.
En effet, l'équation de Poisson traduisant la loi universelle de la gravitation de Newton en une théorie du potentiel gravitationnel, montre la difficulté bien connue de la cosmologie newtonienne : *« On sait que la condition aux limites newtoniennes, le potentiel gravitationnel Φ constant à l'infini spatial, conduit à l'idée que la densité de matière devient nulle à l'infini »* (Einstein dans sa publication de 1917, traduction de F. Balibar).
Ce qui suppose que l'on puisse trouver dans l'Univers un lieu, autour duquel, le champ gravitationnel de la matière considérée à grande échelle possède la symétrie sphérique (un centre).
L'Univers aurait donc une sorte de centre , où la densité des étoiles est maximum, et à partir duquel cette densité va en diminuant pour être remplacée , à une distance assez importante, par un vide parfait [11].
L'univers newtonien serait donc matériellement fini dans un espace infini. Mais ceci est inconcevable.
Seeliger avait tenté en 1895 de résoudre cette problématique en proposant une modification de la loi d'attraction de Newton [12]. Il modifia l'équation de Poisson en y introduisant un terme proportionnel à Φ. Il atteignit ainsi l'objectif pour lequel la densité de matière est uniforme jusqu'à l'infini, sans qu'il en résulte des champs de gravitation infiniment grands. Ainsi le système cosmique n'a plus de centre, ce qui est beaucoup plus vraisemblable.

Nous verrons, lorsque nous traiterons le modèle statique d'Einstein de 1917, comment ce dernier proposera à la suite de Seeliger une modification de la loi de Newton, et nous expliquerons ce qui vient d'être écrit par des équations adéquates.

1.3.2- Les travaux de Karl Schwarzschild

Karl Schwarzschild (1873-1916) est un astronome allemand qui officia de 1901 à 1909 comme professeur à Göttingen où il travailla avec Hilbert et Minkowski.

Il est le premier à avoir trouvé fin décembre 1915 une solution statique aux équations gravitationnelles d'Einstein (les équations tensorielles du champ de gravitation libre).

En effet, seulement un mois après la publication de la théorie de la relativité générale (les quatre communications correspondant aux séances des 4, 11, 18 et 25 novembre 1915 à l'Académie de Prusse [13]), il avait calculé en détail la courbure de l'espace-temps à l'extérieur d'une étoile sphérique statique (sans rotation).

Il a ainsi donné naissance à la métrique dite de Schwarzschild décrivant la géométrie du même nom, qui eut un immense impact sur la manière d'appréhender les hypothèses qui conduiront à la connaissance de l'Univers.

La lettre que lui adressa Einstein le 9 janvier 1916 [14] montre bien l'influence de l'astronome allemand sur ses réflexions avant sa publication de 1917 . En effet, la solution de Schwarzschild décrit en relativité générale un espace centré sur une distribution sphérique. Et cette solution pose un problème à Einstein dans le sens où elle impose une conception minkowskienne de l'espace à l'infini dont l'inertie ne saurait s'expliquer sans interaction entres masses *: « L'inertie, dans ma théorie , c'est juste en fin de compte une interaction entre les masses, non pas une action dans laquelle, en plus des masses en question, « l'espace » en tant que tel participe. La caractéristique essentielle de ma théorie, c'est précisément qu'aucune propriété ne soit attribuée à l'espace en tant que tel ».*

1.4- Situation aux Etats-Unis

1.4.1- Les travaux de Heber Doust Curtis

Vers 1912, Einstein travaille pratiquement seul afin de pouvoir dire comment doit être conçu l'Univers, et ne se soucie pas beaucoup de ce qui se médite dans les observatoires américains sur la véritable réalité des apparences célestes.

Cependant, sur les bords du Pacifique, des astronomes scrutent la voûte céleste pour tirer le maximum de connaissance de cet Univers dont ils ne pensent pas, un jour, pouvoir être modéliser.

Heber Doust Curtis (1872 - 1942), astronome américain, est un des leurs. Vers 1912, il travaille à l'observatoire Lick situé au sommet du mont Hamilton à l'est de la ville de San José en Californie, observant en détail les étoiles lumineuses afin d'étudier leur vitesse radiale.

Ses travaux portent aussi sur la nature des nébuleuses et la taille de l'Univers. Ils expriment l'idée que l'Univers doit s'étendre au-delà de la Voie Lactée, en observant ce que nous savons être aujourd'hui la galaxie d'Andromède [15].

Ce qui conduisit aux Etats-Unis au Grand débat astronomique de 1920, qui montra l'intérêt des astronomes américains sur ce qui touche à l'Univers, au courant ou non de la publication d'Einstein de 1917.

En effet, ce débat porte sur la divergence des points de vue concernant l'échelle de l'Univers. Harlow Shapley (1885-1972) défend l'idée d'un Univers qui ne s'étend pas au-delà de la Voie Lactée. Curtis prétend le contraire.

Curtis s'intéresse aussi à la mécanique nouvelle et à son concept révolutionnaire véhiculé par la relativité de l'espace et du temps.

Ainsi, en 1911, il publie un mémoire sous la forme d'un recueil d'articles destiné aux astronomes, renvoyant à une bibliographie assez conséquente [16].

Ces articles mentionnent les travaux d'Einstein, Lorentz, Von Laue, Minkowski, Planck, Sommerfeld et Ehrenfest. Dans ce mémoire, Curtis mentionne que les conclusions de la théorie de la relativité restreinte ne sont pas moins que révolutionnaire.

Il insiste sur le fait que le mouvement d'un corps dans l'espace affecte ses dimensions, sa masse et le temps associé à son mouvement. Il souligne aussi que la vitesse de tout corpuscule ne peut excéder la vitesse de la lumière. Et il va jusqu'à affirmer que si la théorie de la relativité est vraie, alors la dynamique de Newton doit être abandonnée.

Il cite aussi Poincaré, relevant le fait qu'il soit possible que la gravitation puisse se propager à la vitesse de la lumière, et en soulignant qu'une telle théorie physique ne peut qu'intéresser les astronomes.

1.4.2- Le point de vue de Gavin J. Burns

Gavin J. Burns est un astronome américain relativement connu par ses écrits publiés dans la Revue des publications astronomiques (The Observatory, a monthly review of Astronomy), édité par Lewis et Hollis.

En effet, il publie en 1909 une théorie de la formation des queues cométaires par projection de particules électrisées en provenance du Soleil [17], et un mémoire sur l'histoire des comètes et des météorites [18].

Il s'intéresse aussi, de 1901 à 1914, à la qualité des observations en fonction de critères liés entre autre aux conditions atmosphériques associées à leur environnement.

Sa vision de l'espace-temps mérite que l'on s'y attarde, car elle caractérise assez bien les discussions sur la relativité restreinte dans les années 1910.

Citons le, tout simplement, pour avoir un aperçu des ses idées :

« Les défenseurs du principe de relativité ne semblent pas affirmer que les modifications de la masse, de l'espace et du temps sont réelles. Les changements censés avoir lieu, sont de la nature d'un expédiant, c'est-à-dire un moyen pour se tirer d'affaire, car le but d'assujettir le phénomène observé aux lois de la mécanique classique … La science physique présume un monde réel, et toutes les explications du phénomène sont basées sur des hypothèses. Le principe de relativité nous rappelle très clairement que la vérité philosophique n'est pas une réalité finale, mais qu'elle correspond à la façon dont l'esprit humain la conçoit. » [19].
Cette vision purement subjectiviste, c'est-à-dire selon laquelle tout ce qui existe n'a de réalité et de valeur qu'en fonction d'une conscience qui les lui donne, sera typique dans bon nombre de certaines interprétations ultérieures associés à la relativité.

Burns choisit donc de considérer l'aspect psychologique du principe de relativité. Il va même jusqu'à insister sur le fait que les lois de la science, incluant le principe de la gravitation, ne sont pas objectives mais qu'elles sont des créations de l'esprit humain. C'est-à-dire qu'elles font intervenir des éléments affectifs, des facteurs personnels dans leur interprétation. En d'autres termes que la réalité ne s'impose pas à l'esprit humain, indépendamment de toute interprétation.

1.5- Situation en Angleterre

1.5.1- Les travaux de Henry Crozier Plummer

Henry Crozier Plummer ((1849 – 1928) est un astronome anglais qui développa, en 1911, le modèle ou sphère de Plummer, qui est une loi de densité destinée à interpréter les observations des amas globulaires (groupement de forme sphérique composé d'une forte densité d'étoiles) et la symétrie sphérique des nébuleuses [20].

Lorsqu’il était encore étudiant à Oxford, il est le premier astronome à publier un article sur le principe de relativité dans le Journal astronomique britannique, quelques temps après la publication d’Einstein en 1905. Il s’intéresse à l’astronomie dynamique et sa seconde publication concerne la théorie de l’aberration qu’il publie en 1909 [21].

En 1910, il publie un article intitulé *« Aberration on the theory of, and the principle of relativity »* à la Royal Astronomical Society [22]. Dans ce document, Plummer insiste sur le fait que le principe de relativité est d’une grande portée pour ce qui concerne la compréhension réelle de la théorie de l’aberration, mais il indique que ce principe est loin d’être familier à bon nombre d’astronomes.

Soulignant aussi qu’il est impossible de trouver une preuve expérimentale du principe de relativité en considérant le mouvement absolu dans l’éther, Plummer a pour objectif de pallier cet inconvénient en présentant le principe de relativité dans le contexte de l’optique pure et il se base pour cela sur les travaux de Lorentz.

1.5.2- Les travaux de Arthur Eddington

Arthur Eddington (1882-1944) est un astrophysicien britannique qui se montre très tôt doué en mathématique, au point de recevoir des bourses qui lui permirent financer ses études au Trinity College de Cambridge

Il est surtout connu pour ses travaux sur la relativité générale. En effet, dès 1915, au moment même où il reçu de la Royal Astronomical Society les articles sur la gravitation d’Einstein, il s’intéresse à cette discipline, en cherchant une explication de l’avance du périhélie de Mercure que la théorie de Newton ne parvient pas à justifier [23].

Son livre *« Space, time and gravitation »* publié en 1921 [24], est remarquable par les explications concrètes sur l’espace-temps. Elles sont étayées par des mathématiques clairement agencées. Il convient de citer le chapitre XII concernant « La nature des choses » dans lequel l’auteur donne sa vision de l’Univers en projetant à la fois un regard épistémologique (la connaissance telle que les concepts associés aux mathématique et à la physique permettent de le concevoir) et philosophique (sa pensée sur le sujet).

Chapitre 2

Le modèle statique d'Einstein (1917)

2.1- Le concept d'espace-temps

L'espace-temps devenant partie intégrante de l'univers dans lequel est plongé notre planète, il nous paraît important d'insister sur la nouveauté de cette conception (la « mécanique relativiste » par rapport à la « mécanique classique »), en rappelant dans les sections correspondant à ce paragraphe, ce dont il s'agit, par quelques explications qui vont conduire notre réflexion.

2.1.1- L'influence d'Ernst Mach sur les réflexions d'Einstein

La critique des concepts physiques par Mach (1838-1916) fut très féconde dans le domaine de la mécanique. Dans son ouvrage *« Die mechanik in ihrer entwicklung »* publié en 1883 [25], Mach critique fortement les concepts et les fondements de cette mécanique très ancrée dans le raisonnement depuis Newton et Kant.

Dans sa lettre du 8 avril 1952 à Carl Seelig, Einstein écrit avoir été grandement influencé par le livre de Mach (1838-1916) à l'époque où il était étudiant :
« Ce livre me fit une impression profonde et durable dans la mesure où il était orienté vers les lois et les concepts fondamentaux. »

Dans ce livre, Mach remet en question à la fois les concepts d'espace et de temps, considérés comme un dogme, ainsi que la définition classique des systèmes d'inertie basés sur les propriétés absolues de l'espace et du temps.

Premièrement, pour Mach, l'espace et le temps sont dénués de sens en dehors de la matière. Il critique la conception de Newton pour qui le temps existe indépendamment de la matière et de l'Univers. En considérant donc que l'espace et le temps ne peuvent pas exister indépendamment de la matière, Mach permet d'en faire des grandeurs physiques. Ce n'est plus l'Univers qui est dans le temps mais le temps qui est dans l'Univers.

Deuxièmement, il émet l'hypothèse que les propriétés d'inertie des corps résultent de leur interaction avec les objets situés dans leur environnement, notamment avec les très grandes masses que sont les étoiles fixes réparties à de très grandes distances dans l'Univers. Aussi, dans un Univers vide, il résulterait l'absence d'inertie.

Cette proposition, toujours à l'état de conjecture, sera dénommée « principe de Mach » par Einstein et le conduira à s'interroger sur le principe d'équivalence des masses inertielles et pesantes ; réflexion qui s'avèrera utile, comme nous allons le voir, dans la conceptualisation initiale de la théorie de la relativité générale.

Ainsi, l'inertie , phénomène intrinsèque pour Galilée, relatif à un espace absolu pour Newton, devient un phénomène lié à la cosmologie pour Mach. Ce sera aussi le point de vue d'Einstein.

2.1.2- La critique des concepts d’espace absolu et de simultanéité des événements

Avant de remettre en question les concepts d’espace absolu et de simultanéité des événements, bien que ces principes aient été érigés en dogme jusqu’aux années 1900, interrogeons-nous sur le temps, sa création et son évolution par la manière de l’appréhender.

Dans notre vie de tous les jours, le temps et la durée sont des notions bien définies. Ils dépendent de notre mémoire lorsqu’ils évoquent un passé fortement influencé par le souvenir de perceptions sensorielles d’événements. Cette conscience d’une suite linéaire dans les événements de notre vécu constitue la notion subjective du temps.

Pourtant, le temps est une notion scientifique, et sans conteste, le temps scientifique est bien le temps que donnent les horloges qui rendent objectives les concepts de temps et de durée, permettant ainsi de synchroniser les individus vivant en collectivité.

Un phénomène physique quelconque peut servir d’horloge pourvu qu’il soit répétitif. Par exemple le sablier fournit une unité de temps courte, constante par hypothèse, constituant ainsi un accord tacite d’observateurs prêtant attention à ce phénomène. Nos horloges perfectionnées, donnent l’heure selon le même principe. Elles enregistrent les répétitions d’un phénomène fondamental, périodique, considéré constant par hypothèse : battement d’un pendule, d’un ressort, vibrations d’un cristal piézoélectrique de quartz.

Ainsi, la création de ce temps objectif et scientifique rectifie les impressions trompeuses d’un temps affectif et subjectif.

Dans l’idée de l’hypothèse du temps absolu, l’origine des temps est identique et tous les observateurs occupant n’importe quelle position peuvent affirmer simultanément que leur horloge marque le même instant t.

On peut donc qualifier ce temps d’absolu puisqu’il est indépendant du système de référence spatial dans lequel on le mesure. Et ce temps absolu est le temps donné par toutes les horloges présentes sur une photographie prise à un instant donné et pour laquelle la lumière émise par chaque horloge se propage à une vitesse infinie.

De fait, en mécanique classique, on parle d’un temps commun unifié qui s’écoule de la même manière pour tous les observateurs, et le problème de la synchronisation des horloges ne se pose même pas : le signal lumineux, qui permet de l’obtenir, parvient partout dans l’univers dès l’instant même où il a été émis.

Ainsi un événement *A*, au point de coordonnée x_1, y_1, z_1 de l’univers, qui se produit au même instant qu’un événement *B*, en un autre point de coordonnée x_2, y_2, z_2 de l’univers, possède un sens physique. En effet, la notion d’instantanéité de perception de n’importe quel événement se produisant dans n’importe quelle partie de l’univers est assimilée à un concept de temps absolu.

Mais à quelles conditions peut-on parler de temps scientifique absolu, de simultanéité absolue de deux événements se produisant dans l’univers observable ? On aimerait le temps absolu, mais cette éventualité consisterait à fermer les yeux, à pratiquer la politique de l’autruche, tant est déplaisante pour le philosophe comme pour le savant ses exigences.

En effet, le temps mesurable et mesuré ne saurait être absolu que dans un univers où tous les observateurs seraient instantanément informés des événements. Or, comme nous venons de le voir, cela impose la possibilité de propagation instantanée, donc de vitesse infinie : synchroniser des horloges à partir d'une horloge-maître mesurant le temps sidéral, suppose l'émission d'un signal lumineux se propageant instantanément.

Entre 1676, qui est le moment où l'astronome Römer (1644-1710) parvient à comprendre que la lumière a une vitesse finie (en observant la chronologie des mouvements des satellites de Jupiter) et 1905, qui représente la fin de l'espace absolu (associée à la théorie de la relativité restreinte), bons nombres d'astronomes, de mathématiciens, de physiciens et de philosophes, ont pu se sentir frustrés.

Comment imaginer rationnellement un espace absolu associé à des événements non synchronisables en tout point de l'univers, du fait de la finitude de la vitesse de la lumière. En effet, cela signifie une « relativité » du temps dans un concept d'espace absolu associé à un temps absolu !?

Il fallut donc se mettre à réfléchir, « faire feu de tout bois » c'est-à-dire, prendre, analyser, décortiquer, toute l'actualité scientifique et philosophique du moment dans un contexte, dans un autre contexte, en usant d'audace, d'imagination, de connaissance, de passion. C'est ce que fit Einstein, à l'âge de vingt ans, vers 1900.

Et dans un monde où tout est en mouvement par rapport à la sphère des fixes, l'explication classique du train en mouvement uniforme par rapport au quai a pour mérite d'être simple, de faire comprendre la notion de simultanéité relative et il ne faudrait pas conclure naïvement que la relativité au sens restreint concerne surtout les chemins de fer ! Pour deux astres quelconques *O* et *O'*de l'univers, deux événements simultanés pour *O* ne le seront pas pour *O'*.

Montrons que dans un monde où tout est en mouvement par rapport à la sphère des fixes, la notion de simultanéité n'est pas absolue et qu'elle dépend de l'observateur. Pour cela, on suppose de manière réaliste un univers dans lequel une transmission instantanée ne saurait exister et dans lequel la lumière serait l'agent d'information le plus rapide.

Soit un événement *A* associé à l'émission par une lampe *A* d'un bref signal lumineux. Soit un événement *B* associé également à l'émission par une lampe *B* d'un bref signal lumineux.

Les lampes *A* et *B*, au bord d'une ligne de chemin de fer, sont allumées par le passage d'un train : *A* s'allume quand la tête du train arrive en *A*, tandis que *B* s'allume quand la queue du train passe en *B*.

Un observateur *O* se place au milieu de *AB* et regarde à la fois les deux lampes, l'une située en *A*, l'autre située en *B*. S'il aperçoit ensemble les éclairs *A* et *B*, il les déclare simultanés.

Ainsi, l'observateur *O* situé au bord de la voie, aperçoit simultanément les deux éclairs. Il en déduit naturellement que la longueur du train mobile est égale à la distance séparant les deux lampes, c'est-à-dire à la distance *AB*.

Considérons maintenant un observateur *O'* situé au milieu du train regardant, lui aussi, les deux lampes *A* et *B*. Le train emporte *O'* à la rencontre du rayon issu de *A* tandis qu'il s'éloigne de la lumière issue de *B*. L'observateur *O'* voit d'abord l'éclair *A* puis l'éclair *B*. Pour lui, *A* précède *B* et donc les deux événements qui sont simultanés pour *O* ne le sont pas pour *O'* [26].

Ainsi, dans un univers privé de vitesses infinies, la simultanéité n'est pas absolue, donc le temps n'est pas absolu. Des observateurs en mouvement les uns par rapport aux autres attribueront des durées différentes à un même phénomène. Le temps dans cet univers a un caractère relatif.

2.1.3- L'intervalle d'espace-temps de la relativité restreinte sonne le glas de l'espace et du temps absolu

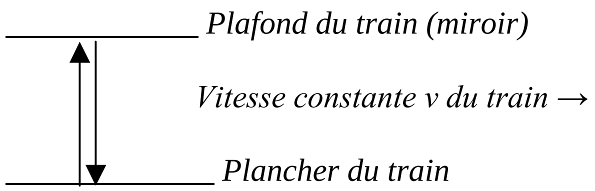
Comme nous l'avons vu, jusque dans les années 1900, l'espace est absolu, rigide et immuable. Le cadre de référence est la sphère des fixes (les étoiles lointaines considérées comme fixes) par rapport à laquelle on peut définir de façon absolue le mouvement d'un corps. Le temps est également absolu et universel, s'écoulant de façon uniforme et indépendante de toute influence extérieure.

La théorie de la relativité restreinte d'Einstein, précède de 10 ans celle de la relativité générale. Par une analyse subtile des mesures de distance et de durée, la relativité restreinte établit entre les notions d'espace et de temps une liaison inattendue, dont les célèbres formules de la transformation de Lorentz sont l'expression mathématique.

Exprimons le ralentissement du temps *t'* d'un système *S' (t')* en translation rectiligne de vitesse constante v non négligeable par rapport à la vitesse de la lumière, par rapport à un système S (t).

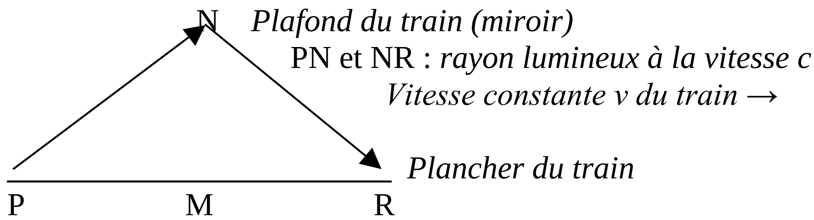
Ayant montré au paragraphe précédent que des observateurs en mouvement les uns par rapport aux autres attribuent des durées différentes à un même phénomène, cherchons à comparer ces durées en postulant l'invariance de la vitesse de la lumière « *c* » quel que soit le repère considéré. Reprenons l'exemple du train précédent en réalisant l'expérience suivante :

- Dans le train en mouvement, nous envoyons du plancher un rayon lumineux vers le plafond, où il est réfléchi par un miroir vers son point de départ. Si « *d* » est la hauteur du train, pour l'observateur O' dans le train, le temps *t'* mis par le rayon lumineux pour faire l'aller-retour est :



$$t' = 2d/c \qquad (1)$$

- Considérons maintenant le même événement vu par l'observateur O sur le quai de la gare :



Pendant l'expérience, le train se déplace par rapport au quai : pour l'observateur O sur le quai, le rayon lumineux part de P et arrive sur le miroir en N et il revient sur le plancher en R. Pour l'observateur O, le rayon lumineux a donc parcouru une distance plus longue (les deux côtés du triangle isocèle PNR au lieu de deux fois la hauteur *d*), mais avec la même vitesse *c*, ce qui lui a pris plus de temps.

Cette constatation s'exprime quantitativement à l'aide du théorème de Pythagore appliqué au triangle PNR de la manière suivante :

$$NM^2 = PN^2 - (PR/2)^2 \qquad (2)$$

Si « *t* » désigne la durée de l'événement pour l'observateur O au repos sur le quai, la distance parcourue par le rayon lumineux à l'aller est, pour cet observateur :

$$PN = (ct)/2 \qquad (3)$$

et la distance parcourue par le train pendant ce temps *t* est :

$$PR = vt \quad \text{soit} \quad (PR/2) = (vt)/2 \qquad (4)$$

Sachant que NM = *d*, injectons (3) et (4) dans (2) pour obtenir :

$$d^2 = [(ct)/2]^2 - [(vt)/2]^2 \quad \text{soit} \quad t^2 = 4\frac{d^2}{c^2}\left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) \qquad (5)$$

Injectons (1) dans (5) :

$$t' = t\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

c'est-à-dire en petites variations selon l'axe des *x* caractérisant un espace-temps à une dimension spatiale (v et c étant des constantes) :

$$c^2\, dt'^2 = c^2\, dt^2 - v^2\, dt^2$$

ou bien :

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - dx^2$$

Dans l'espace-temps tridimensionnel on obtient :

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

qui est le quadrivecteur de l'espace-temps de Minkowski encore appelé métrique de Minkowski. La métrique est une façon de mesurer la distance infinitésimale entre deux points voisins. De proche en proche, elle permet d'évaluer l'intervalle infinitésimal entre deux points quelconques de l'espace-temps, c'est-à-dire entre deux « événements » infiniment proches, repérés chacun par trois coordonnées de position (x, y, z) et une coordonnée d'instant t.

Nous dirons que cette métrique est une métrique relativiste euclidienne quadridimensionnelle spatio-temporelle de signature (+ – – –), trois dimensions d'espace, une de temps.

Pour $ds^2 = 0$ l'intervalle d'espace-temps est dit du genre lumière, pour $ds^2 > 0$ il est dit du genre temps et pour $ds^2 < 0$ on parle de genre espace.

Afin d'introduire un système de notation qui nous servira par la suite, on montre que l'on peut écrire ds^2 de la manière suivante :

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\; dy^\alpha\; dy^\beta \quad \textit{avec } \alpha, \beta = 1 \textit{ à } 4 \qquad (6)$$

pour obtenir :

$$ds^2 = \eta_{11}\,(dy^1)^2 + \eta_{22}\,(dy^2)^2 + \eta_{33}\,(dy^3)^2 + \eta_{44}\,(dy^4)^2$$

avec :

$$\eta_{11} = +1\ ; \quad \eta_{22} = \eta_{33} = \eta_{44} = -1\ ; \quad \eta_{21} = \ldots = \eta_{31} = \ldots = \eta_{43} = 0$$

et :

$$(dy^1)^2 = (c\, dt)^2\ ;\ (dy^2)^2 = dx^2\ ;\ (dy^3)^2 = dy^2\ ;\ (dy^4)^2 = dz^2$$

Les éléments $\eta_{\alpha\beta}$ sont les composantes de ce que nous appelons le tenseur $\boldsymbol{\eta}$ qui constitue l'objet structural le plus important dans la physique de l'espace-temps.

Il définit ce que l'on nomme, dans notre exemple de l'équation (6), la métrique de Minkowski, d'où son appellation de tenseur métrique. Le tenseur métrique est un objet mathématique définissant la géométrie de l'espace-temps. Il se présente comme une matrice dont les éléments sont les composantes du tenseur. Toute l'information géométrique est contenue dans ses composantes. En annexes A_2 à A_8, nous montrons à l'aide de quelques définitions basées sur le calcul différentiel, comment se construit un tenseur (voir l'écriture matricielle de $\boldsymbol{\eta}$ page 86).

L'intervalle entre deux « événements » infiniment proches est associé à la ligne d'univers subissant le temps propre *t'* de la relativité restreinte. On peut ainsi exprimer que le temps propre *t'* est le paramètre naturel, invariant, repérant un point c'est-à-dire un « événement » sur la trajectoire d'espace-temps comme l'écrit A. Rougé dans son cours sur la relativité à l'école polytechnique en 2004.

2.1.4- Réflexion sur l'espace-temps de la relativité générale

Nous pouvons suivre pas à pas le cheminement des réflexions d'Einstein, assez chaotiques, entre l'année 1907 et la fin de l'année 1915 par le nombre de ses écrits assez répandus.

C'est au cours de l'année 1907, qu'il envisage le principe d'équivalence (voir annexe B.1.1) afin de développer sa théorie de la relativité restreinte pour y incorporer la gravitation [27]. Et la fin de l'année 1915 marque la publication de ses quatre articles conduisant à la formulation définitive de la théorie de la relativité générale [28].

Sous la direction de Françoise Balibar (physicienne, historienne des sciences), aidée entre autres par Olivier Darrigol (historien des sciences), nous trouvons les écrits d'Einstein relatifs à ses travaux, au fur et à mesure des étapes clefs constituant les fondations qu'il met en place suite à ses réflexions [29].

Dans un livre intitulé *« Conceptions scientifiques, morales et sociales »* traduit de l'anglais par Maurice Solovine et publié en 1952 [30], Einstein décrit de manière assez concise la nouvelle métrique conforme au « principe d'équivalence » que nous expliquons en annexe B.1.1 avec les notions de masse inertielle et de masse pesante.

Ainsi, en 1952, Einstein, rappelant que la théorie de la relativité restreinte et la mécanique classique sont basées sur un point fondamental qui est le principe d'inertie associé à la première loi de Newton, stipulant que tout corps persévère dans l'état de mouvement uniforme en ligne droite lorsqu'aucune force ne le contraint à changer d'état, pose la question suivante :

« Les lois de la nature sont-elles valables seulement par rapport aux systèmes d'inertie ?

Ainsi, le fait, qu'à travers les transformations linéaires de Lorentz, la forme des lois de la nature restent inchangées quel que soit le changement des coordonnées associées à un repère (observateur) donné, est-il exclusif ? » [30].

La réponse d'Einstein est non, et pour être convaincant il développe l'argumentation suivante, après avoir rappelé le principe d'équivalence selon lequel la masse inertielle et la masse pesante, si différentes dans leur définition, sont caractérisées par le même nombre :

« *Des corps dans un champ de gravitation se comportent comme en l'absence d'un champ de gravitation si le système de référence employé est un système de coordonnées uniformément accéléré au lieu d'un système d'inertie. … Par cette interprétation, le système d'inertie perd sa signification et l'on a une « explication » de l'égalité de la masse pesante et de la masse inerte car la même propriété de la matière apparaît comme poids ou comme inertie , selon le genre de description. Envisagée au point de vue formel, l'admission d'un système de coordonnées, qui est accéléré par rapport aux coordonnées « d'inertie » originelles, signifie l'admission de transformations de coordonnées non linéaire, d'où une puissante extension de l'idée d'invariance, c'est-à-dire le principe de relativité. … . Quand on s'est vu forcé d'admettre des transformations de coordonnées non linéaires comme transformations entre systèmes de coordonnées équivalents, il paraît très simple d'admettre toutes les transformations continues* (par opposition à des transformations discrètes) *de coordonnées qui forment un groupe, c'est-à-dire d'admettre des systèmes de coordonnées curvilignes arbitraires dans lesquels les champs sont décrits par des fonctions régulières* (fonctions indéfiniment dérivables), *ceci constituant le principe même de la relativité générale.* » [30].

En d'autres termes, le fait de prendre l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$ (c'est-à-dire l'intensité du champ de gravitation) égale à l'accélération $\vec{\gamma}$ et d'écrire

$$\vec{F} = m\,\vec{\gamma} = m\,\vec{g} = \vec{P}$$

n'est pas anodin, car dans un cas l'accélération $\vec{\gamma}$ est due au contact d'une force $\vec{F}$ sur la masse inertielle (ou inerte du fait qu'elle ne soit pas entraînée par le champ de gravitation), alors que dans l'autre cas la masse pesante (ou grave du fait qu'elle subit le champ de gravitation) est affectée de la force $\vec{P}$ qui n'existe que si elle se trouve forcée à l'immobilisation (au repos) dans le champ de gravitation $\vec{g}$ (principe de l'action et de la réaction) et qui n'est autre que ce que l'on nomme *Poids* sur Terre.

En chute libre dans le champ $\vec{g}$, la masse m perd son poids (voir démonstration en annexe B.1.1) et donc n'est assujettie à aucune force, passant ainsi de l'état de masse pesante à l'état de masse inertielle, comme c'est le cas en relativité restreinte.

De fait, dans le champ de gravitation en un point *M* à l'instant *t*, l'objet de masse *m* subit les lois de la relativité restreinte basées sur la métrique de Minkowski. Dans une région de l'espace proche de M, la gravitation a pour effet d'augmenter la vitesse. Mais Einstein prend pour hypothèse que dans la région de l'espace infiniment proche de M, l'objet massique reste soumis à la théorie de la relativité restreinte.

En relativité générale, les effets de la gravitation ne s'interprètent donc pas comme une force engendrée par les corps massifs, mais se résorbent dans la structure géométrique même de l'Univers. Cette identification entre gravitation et géométrie impose un cadre mathématique nouveau : celui d'un espace-temps à quatre dimensions, pourvu d'une métrique non euclidienne.

Aussi, dans la zone infinitésimale autour du point M à l'instant t, Einstein définit une métrique basée sur un espace-temps défini par la géométrie riemannienne :

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\ dx^{\mu}\ dx^{\nu}\ .$$

Ainsi, en relativité générale, c'est-à-dire en présence de matière-énergie environnante, l'espace-temps est décrit comme un espace riemannien dont la courbure est contenue dans les composantes du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$, la matière-énergie courbant l'espace-temps.

La théorie de la relativité générale considère l'espace-temps comme une collection de petits morceaux d'espaces de Minkowski (tangentant sur une distance infinitésimale l'espace courbe riemannien) , ayant pour chacun d'eux les propriétés d'espace et de temps de la relativité restreinte.

La théorie relativiste d'Einstein est une théorie métrique interprétant la gravitation comme une manifestation de la courbure de l'espace-temps :
« S'appuyant sur l'égalité expérimentalement démontrée entre la masse pesante et la masse inerte, Einstein montra l'équivalence entre la force de gravitation et les forces d'inertie. Il en déduit que la force de gravitation est une apparence due à une courbure de l'espace-temps et développa sur cette base une nouvelle théorie de la gravitation dont celle de Newton n'est qu'une première approximation ».
Louis de Broglie [31].

La connexion des vecteurs de base de deux « plans tangents » infiniment rapprochés s'effectue à l'aide des symboles de Christoffel de deuxième espèce dont nous expliquons l'obtention en annexe B.1.5.
Cette connexion conduit à l'équation des géodésiques :

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0,$$

que nous démontrons en annexe B.1.4, et dans laquelle est paramétrée le temps propre τ de la relativité restreinte.

A titre indicatif, la Terre dans sa trajectoire autour du Soleil suit une géodésique pour laquelle le temps propre de la relativité restreinte est mesuré par notre montre. L'équation différentielle du mouvement de la Terre autour du Soleil, en relativité générale, s'obtient à l'aide de la métrique de schwarzschild, en utilisant les équations d'Euler-Lagrange déduites du principe de moindre action. Il en résulte l'expression de la trajectoire suivie par la terre.

Etiquette du classeur contenant les notes manuscrites d’Einstein pour ses conférences aux universités de Zurich et de Berlin en 1918 et 1919 (W. Isaacson, 2009. La vie d’un génie).

19. V.

Physikalische Erfahrungen immer Konstatierungen von Koinzidenzen. (Zeiträumliche Koinzidenzen) Diese finden dadurch Ausdruck, dass zwei oder mehr versch. Ereignisse dieselben Koordinaten $x\ y\ z\ t$ (bzw. $x_1 \ldots x_4$) haben. Dies ist die allein übrige Bedeutung der Koordinaten, wenn deren unmittelbare metrische Bedeutung dahinfällt. Dann ist keine Berechtigung dafür vorhanden, nur lineare orthogonale Subst. zuzulassen.

<u>Invarianz</u> für beliebige Transformationen gefordert (Verallgemeinerung der Gauss'schen Koordinaten). Dies ist verallgemeinertes Relativitätsprinzip. Streng genommen keine Wesensbedingung für Naturgesetze sondern nur Gesichtspunkt für Auswahl.

Fundamental-Invariante.

In sp. Relativitätstheorie

$(\Sigma x_\nu^2\, dx)$ $\quad \sum dx_\nu^2 = d\tau^2 \quad$ | wenn gestattet $d\tau = \sqrt{1-q^2}\, dt$

Unabhängig von der Wahl des Bezugssystems. Wenn Zeit unterz. speziell durch Uhr messbar, immer mittels Massstäben und Uhren. (Physikalisch sinnvolle Invariante)

Im Unendlich Kleinen soll spezielle Relativitätstheorie gelten.

$$-dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2 = ds^2$$

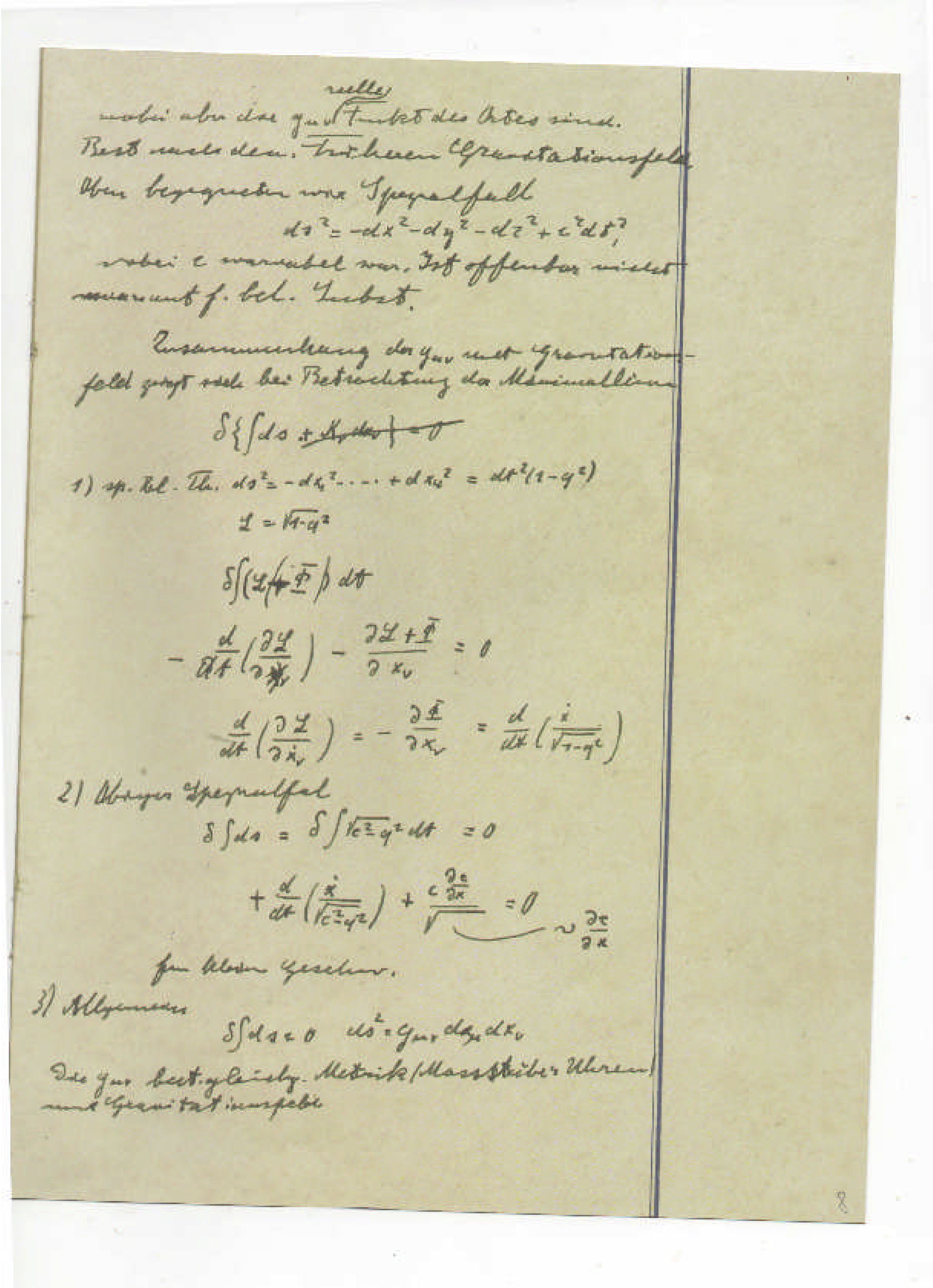
physikalisch sinnvolle Invariante, die zwei benachbarten Weltpunkten zugeordnet ist. Bei beliebiger Subst.

$$dX_\nu = \alpha_{\nu\sigma}\, dx_\sigma$$

Durch Einsetzen erhält man Form

$$ds^2 = \sum g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu,$$

Notes manuscrites page 7 :


wobei aber die $g_{\mu\nu}$ reelle Funktionen des Ortes sind.
Bestimmt werden die Funktionen Gravitationsfeld
Wir begegneten dem Spezialfall

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2,$$

wobei c variabel war. Ist offenbar nicht invariant f. bel. Substit.

Zusammenhang der $g_{\mu\nu}$ mit Gravitationsfeld zeigt sich bei Betrachtung der Minimallinien

$$\delta\{\int ds\} = 0$$

1) sp. Rel.-Th. $ds^2 = -dx_1^2 - \dots + dx_4^2 = dt^2(1-q^2)$

$$L = \sqrt{1-q^2}$$

$$\delta\int(L + \Phi)\,dt$$

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\nu}\right) - \frac{\partial (L+\Phi)}{\partial x_\nu} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\nu}\right) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1-q^2}}\right)$$

2) Obiger Spezialfall

$$\delta\int ds = \delta\int\sqrt{c^2-q^2}\,dt = 0$$

$$+\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{c^2-q^2}}\right) + \frac{c\frac{\partial c}{\partial x}}{\sqrt{}} = 0 \sim \frac{\partial c}{\partial x}$$

für kleine Geschw.

3) Allgemein

$$\delta\int ds = 0 \qquad ds^2 = g_{\mu\nu}\,dx_\mu dx_\nu$$

Die $g_{\mu\nu}$ best. gleichz. Metrik (Massstäbe, Uhren) und Gravitationsfeld.

8

Notes manuscrites page 8 :

Traduction : A. Leibivici, G. Trédaniel (W. Isaacson , 2009. La vie d'un génie).

Page 7 : *Les expériences physiques confirment toujours les coïncidences (Coïncidences périodiques). Celles-ci sont exprimées par le fait que deux ou plusieurs événements différents* ont les mêmes coordonnées, x,y,z,t ou x_1 à x_4. C'est la seule signification des coordonnées, si leur signification métrique va aussi loin. Il n'y a pas de justification pour permettre uniquement la substitution linéaire orthogonale.

L'invariance exigée pour toute transformation (généralisation des coordonnées de Gauss). C'est le principe généralisé de la relativité. A strictement parler, ce n'est pas la condition essentielle pour les lois naturelles, mais seulement le point de vue pour la sélection.

Invariants fondamentales.

Des théories de la relativité restreinte .

Si chronologiquement (Equation).

Indifféremment de la sélection du système de référence. Si chronologiquement surtout mesurable en utilisant des horloges, toujours au moyen de balances et horloges (Physiquement invariantes significatives).

La théorie de la relativité restreinte doit s'appliquer au domaine de l'infiniment petit (Equation).

Invariante physiquement significative, alloué à deux points adjacents du monde. Avec toute substitution
(Equation).

Par insertion, nous obtenons la forme
(Equation).

<u>Page 8</u> : mais ici $g_{\mu\nu}$ les valeurs sont des fonctions réelles de l'emplacement. Meilleur comme précédemment.

Champ gravitationnel. Au-dessus, nous avons rencontré un cas spécial
(Equation).

Ici c était variable. Il n'y a pas clairement d'invariante pour aucune substitution.

L'interrelation de $g_{\mu\nu}$ avec le champ de gravitation est démontré quand des lignes minimales sont considérées
(Equation).

1) Théorie de la relativité restreinte

(Equations).

2) *Cas particulier au-dessus*

(Equations) *pour vitesse faible*

3) *Général* (Equation)

La valeur $g_{\mu\nu}$ est déterminée simultanément par les métriques (balances et horloges) et par le champ de gravitation.

2.1.5- La structure de l'espace-temps dépend de son contenu matériel

Les équations du champ de gravitation d'Einstein sont le point de départ des équations régissant les modèles cosmologistes relativistes. Il convient donc de les exprimer en mentionnant ce que signifie chacun de leurs termes. Nous montrons en annexe B.3.2.2 comment elles se construisent.

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, elles doivent expliciter le couplage entre la géométrie de l'espace-temps et son contenu matériel, soit :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = K \, T_{\mu\nu} \qquad \text{avec } K = \frac{8\pi G}{c^4}$$

R

→ $T_{\mu\nu}$ sont les composantes du tenseur impulsion-énergie $\mathbf{T}_{\mu\nu}$ (voir §2.1.3 ce qu'est un tenseur). L'information liée à l'énergie (la matière) est contenue dans les composantes (nous montrons en annexe B.3.2.1 comment obtenir les composantes d'un tenseur),

→ $g_{\mu\nu}$ sont les composantes du tenseur métrique $\mathbf{g}_{\mu\nu}$. L'information géométrique est contenue dans les composantes. Nous verrons aux paragraphes 4, 5 et 6, qu'en cosmologie, le tenseur $\mathbf{g}_{\mu\nu}$ définit la métrique FLRW (Friedmann, Lemaître, Robertson, Walker) dont l'obtention est montrée en annexe D,

→ $R_{\mu\nu}$ sont les composantes du tenseur de Ricci $\mathbf{R}_{\mu\nu}$ que nous construisons en annexe B.2.2.6. Ces composantes sont fonction des connexions affines entre le référentiel minkowskien et le référentiel riemannien (connexions encore appelées connexions de Levi-Civita ou symboles de Christoffel de deuxième espèce). Les connexions sont fonction des $g_{\mu\nu}$, eux-mêmes dépendant des coordonnées curvilignes associées à la région <u>infiniment</u> proche de M (voir définition du point M au §2.1.4),

→ R est le scalaire de Ricci que nous construisons en annexe B.2.2.7. Il témoigne d'une courbure infinitésimale de l'espace-temps autour du point M,

→ K est un coefficient calculé par Einstein pour élaborer ses équations tensorielles de la gravitation en présence de matière, en considérant un champ gravitationnel statique et faible afin de retrouver la limite newtonienne de sa théorie (voir annexe B.3.2.2).

Le calcul tensoriel met en œuvre des équations tensorielles ayant la propriété d'être invariantes relativement à toute transformation des coordonnées. En effet, les équations qui expriment les lois de la nature doivent être invariantes relativement à tout observateur. Nous montrons en annexe A.9.1 la covariance des équations tensorielles aussi bien dans le cas d'un tenseur d'ordre 1 que d'un tenseur d'ordre 2.

Laissons Einstein s'exprimer à travers ses écrits :
« Pour expliquer l'égalité de la masse inerte et de la masse pesante dans les limites de la théorie, il est nécessaire d'admettre des transformations non linéaires des quatre coordonnées. Cela veut dire que le groupe des transformations de Lorentz et, par suite, le groupe des systèmes de coordonnées « permis » doivent être étendus.
Quel groupe de transformations de coordonnées doit alors être substitué au groupe des transformations de Lorentz ? Les mathématiques suggèrent une réponse qui est basée sur les recherches fondamentales de Gauss et de Riemann, c'est-à-dire que la substitution appropriée est le groupe de toutes les transformations continues(analytiques) des coordonnées. Dans ces transformations, la seule chose qui reste invariante est le fait que des points voisins ont à peu près les mêmes coordonnées ; le système de coordonnées exprime seulement l'ordre topologique des points dans l'espace (y compris son caractère quadridimensionnel). Les équations qui expriment les lois de la nature doivent être covariantes relativement à toutes les transformations continues des coordonnées. C'est là le principe de relativité général. » [32].

Et pour aller encore plus loin, citons Einstein lors d'une de ses conférences à Glasgow en 1933, dans laquelle il décrit les diverses étapes concernant la genèse de la théorie de la relativité générale :
« … Le principe de relativité de la masse inerte et de la masse pesante pouvait maintenant être formulé de façon très intuitive de la manière suivante : dans un champ de gravitation homogène, tous les mouvements se déroulent comme ils le font en l'absence de champ, par rapport à un système de coordonnées uniformément accéléré. Si ce principe valait pour n'importe quel processus (« principe d'équivalence »), il fallait y voir l'indication que, si on voulait parvenir à une théorie naturelle du champ de gravitation, il fallait élargir le principe de relativité à des systèmes de coordonnées en mouvement non uniforme les uns par rapport aux autres. Telles sont les réflexions qui m'occupèrent de 1908 à 1911 … .
Il s'agissait donc d'élaborer une théorie dont les équations conservent leur forme par une transformation non linéaire des coordonnées. … .
Il fallait donc trouver une nouvelle formulation de la loi de l'inertie qui, en l'absence de champ de gravitation véritable, et en utilisant un système inertiel comme système de coordonnées, s'identifie avec la formulation galiléenne du principe d'inertie. Formulation qui dit qu'un point matériel, sur lequel n'agit aucune force, est représenté dans l'espace à quatre dimensions par une ligne droite, c'est-à-dire par la ligne la plus courte, ou plus exactement par une courbe extrémale. Ce concept présuppose celui de longueur d'un élément de courbe, c'est-à-dire une métrique. En théorie de la relativité restreinte, cette métrique est – comme Minkowski l'a montré – quasi euclidienne, c'est-à-dire que le carré de la « longueur » ds d'un élément de courbe est une fonction quadratique bien déterminée des éléments différentiels des coordonnées.
Si maintenant l'on introduit d'autres coordonnées grâce à une transformation non linéaire, ds^2 *reste une fonction homogène des éléments différentiels des coordonnées, mais les coefficients de cette fonction (les* $g_{\mu\nu}$ *) ne sont plus des constantes – ce sont certaines fonctions des coordonnées. En termes mathématiques, on dira que l'espace physique (à quatre dimensions) est muni d'une métrique riemannienne. Les courbes extrémales de cette métrique que donnent la loi du mouvement d'un point matériel sur lequel n'agit aucune force mis à part des forces de gravitation. Les coefficients*

($g_{\mu\nu}$) de cette métrique décrivent aussi le champ de gravitation par rapport au système de coordonnées choisi. Ainsi dispose-t-on d'une formulation naturelle du principe d'équivalence, dont l'extension à des champs de gravitation quelconques représente une hypothèse tout à fait naturelle.
La solution du dilemme évoqué plus haut était donc la suivante : ce ne sont pas aux éléments différentiels des coordonnées, mais seulement à la métrique de Riemann qui leur est associée, qu'il faut attribuer une signification physique. Ainsi les bases d'une théorie de la relativité générale se trouvaient-elles établies. Mais il restait encore deux problèmes à résoudre :

1- *Etant donné une loi du champ exprimée dans les termes de la théorie de la relativité restreinte, comment faire pour la transposer au cas d'une métrique de Riemann ?*
2- *Quelle forme ont les lois différentielles qui déterminent la métrique de Riemann elle-même (c'est-à-dire les $g_{\mu\nu}$) ?*

C'est à répondre à ces questions que j'ai travaillé de 1912 à 1914 avec la collaboration de mon ami Marcel Grossmann. Nous nous sommes aperçus que les méthodes mathématiques nécessaires à la solution du problème 1 se trouvaient déjà toute prête dans le calcul différentiel de Ricci et Levi-Civita.
Pour ce qui est du problème 2, sa solution exigeait visiblement des expressions différentielles invariantes du deuxième ordre construites à partir des $g_{\mu\nu}$. Nous nous aperçûmes vite que celles-ci avaient déjà été élaborées par Riemann (tenseur de courbure). » [33] et [34].

Dans le cadre de la théorie de Newton, l'espace et le temps absolu font parties du décor dans lequel la théorie s'exerce. L'un comme l'autre sont donnés à l'avance, une fois pour toute, et ne participant pas à la théorie en tant que telle, ils ne sont pas des objets de la physique.

Citons Newton à ce sujet [35]:

« I. Le temps absolu, variant mathématiquement, sans relation à rien d'extérieur, coule uniformément , et s'appelle durée. » ,

« II. L'espace absolu, sans relation aux choses externes, demeure toujours similaire et immobile. ».

Dans la cosmologie newtonienne, l'Univers contient l'espace et se trouve de même contenu dans celui-ci. L'espace est posé à l'avance, demeure intouchable et du point de vue physique, il n'est rien d'autre qu'un cadre, une enveloppe originellement vide.

Au contraire, du point de vue de la conception du monde, la relativité générale demande à la cosmologie de définir le cadre dans la limite de sa propre structure formelle. Ainsi, se dessine le choix d'une infinité de modèles d'Univers, associée à des équations aux dérivées partielles directement issues de telle ou telle métrique correspondant à telle ou telle hypothèse d'espace-temps.

La théorie de la relativité générale oblige à repenser la cosmologie, car l'Univers devient un objet à part entière de la physique.

Citons ainsi Einstein dans sa lettre du 9 janvier 1916 à Schwarzschild :
« Si toutes les choses venaient à disparaître du monde, alors, pour Newton, il resterait l'espace inertiel galiléen ; mais, d'après ma conception, il ne resterait rien. » (traduction F. Balibar, Relativités II, Œuvres choisies 3, Seuil CNRS, page 88).

2.2- La possibilité d'un univers fini et cependant non limité

L'étude proprement dite du modèle d'Univers statique d'Einstein s'effectue directement à partir de sa publication du 15 février 1917 déjà citée et présentée à la séance du 8 février 1917 à l'Académie de Berlin. Sans changer quoi que ce soit au cheminement de la pensée du père de la cosmologie contemporaine, c'est-à-dire à l'ordre de ses paragraphes [36], nous nous permettons d'expliciter des notions fondamentales en physique , pour une meilleure compréhension du tout. En effet, les publications d'Einstein s'adressent à des physiciens de son niveau et souvent quelques mots de lui dans une simple phrase sont chers de sens. Sans cela, ce mémoire deviendrait vite inextricable.

2.2.1- La modification de la théorie de Newton

A l'aide des travaux effectués par Kepler (1571 – 1630) sur les corps célestes en orbite elliptique autour d'un objet massif, Newton (1642 – 1727) a émis sa loi universelle de la gravitation en 1687.

Cette loi exprime la force $\vec{F}$ exercée par un corps ponctuel, de masse M placé en un point O choisi pour origine, sur un autre corps de masse m en un point P à l'instant t tel que :

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{er}$$

$$\text{avec } \vec{r} = \vec{OP} = r\,\vec{er}$$

Les écrits de Newton [37] peuvent montrer que ce dernier se posait la question de comprendre comment le corps M à l'origine pouvait savoir qu'un autre corps de masse m se trouvait au point P afin d'exercer sur lui la force $\vec{F}$.

Il semble ainsi laisser aux philosophes l'action *« de tenter l'explication de la nature avec succès. »*. Ce qui fait dire assez injustement, en 1915, à Clodius Piat dans son livre sur Leibniz : « *Newton ne remonte pas aux causes ; il se borne à déduire les conséquences mathématiques qui découlent des faits ; son œuvre manque de philosophie.* » [38].

Pour Einstein, *« Depuis le temps de Newton, la théorie de l'action à distance fut toujours regardée comme artificielle. Les efforts ne manquèrent pas d'expliquer la gravitation par une théorie cinétique, c'est-à-dire en se basant sur des forces de collision de particules matérielles hypothétiques. »* (A. Einstein, Conceptions scientifiques, morales et sociales. Traduction Maurice Solovine, page 112).

Il faudra attendre Poisson (1781 – 1840) pour réécrire l'équation universelle de la gravitation de la manière suivante :

$$\vec{F} = m\left(-\frac{GM}{r^2}\vec{er}\right) = m\,\vec{g}$$

signifiant que la masse *M* au point *O* modifie les propriétés locales de l'espace en créant en chaque point, à la distance radiale *r*, une gravité *g* qui ne s'appelait pas encore champ gravitationnel ou champ de force de la gravitation puisque la notion de champ fut introduite progressivement par Faraday (1791-1867), Maxwell (1831-1879) et Hertz (1857-1894).

Ainsi, cette gravité (que nous appelons de nos jours champ gravitationnel)

$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\vec{er}$$

peut être interprétée comme ce que « ressent » la masse *m*, qui subit alors la force

$$\vec{F} = m\,\vec{g}\,.$$

La gravité (le champ gravitationnel ou champ de force de la gravitation), apparaît ainsi comme une propriété de l'espace due à la masse d'un corps. Une autre masse entrant en contact avec ce champ est soumise à une influence, une force, due au champ.

Ainsi, l'influence gravitationnelle n'est pas, dans ce cadre, créée et transportée instantanément d'un corps à l'autre, mais déjà présente dans tout l'espace sous la forme du champ et à son contact, un corps voit sa dynamique modifiée.

C'est sur ces bases que Poisson transforma, en 1813, la loi universelle de la gravitation de Newton, grâce à l'analyse vectorielle, en une théorie du potentiel gravitationnel Φ (assimilable à une quasi-théorie du champ gravitationnel) associée à l'équation, dite de Poisson ou équation de la théorie du potentiel, suivante :

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho$$

Ainsi, nous avons : $\vec{g} = -\,\vec{grad}\,\Phi = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{er}$ et $div\,\vec{g} = -\Delta\Phi$

$\Delta\Phi$ est le Laplacien de Φ en coordonnées sphérique et du fait du contexte du champ gravitationnel à symétrie sphérique, nous pouvons considérer le Laplacien comme dépendant uniquement de *r*.

Nous pouvons donc écrire l'équation de Poisson qui lie $\Delta\Phi$ constitué de dérivées partielles, à la matière de densité ρ associée à une sphère de rayon *r* de la manière suivante :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) = 4\pi G\rho\,.$$

A l'infini spatial, la densité de matière devient nulle, ayant pour conséquence un champ de gravitation nul.

Cet Univers newtonien matériellement centré, comme fini, dans un espace sans matière s'étendant à l'infini paraît inconcevable : « *Il ne semble guère possible de surmonter ces difficultés sur la base de la théorie newtonienne. On peut se poser la question de leur élimination grâce à une modification de la théorie de Newton.* » [39].

Alors, tout naturellement, Einstein propose à la suite de Seeliger, une modification de la loi de Newton, telle que l'équation de Poisson devienne :

$$\Delta\Phi - \lambda\Phi = 4\pi G\rho$$

soit :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) - \lambda\Phi = 4\pi G\rho,$$

et pour une extension infinie de l'espace on obtient

$$\Phi = -\frac{4G\rho_0}{\lambda},$$

c'est-à-dire une solution pour laquelle la matière composant les étoiles serait uniformément répartie dans l'espace. Dans ce cas, la densité ρ_0 représenterait la densité moyenne de matière dans l'univers et *« cette densité moyenne est constante partout jusqu'à l'infini, sans qu'il en résulte des champs de gravitation infiniment grands. On se libère également de la représentation peu vraisemblable d'un univers possédant une sorte de centre. »* [40].

Einstein souligne que la matière est ainsi en équilibre pour une certaine densité demeurant très faible, et que cet équilibre ne nécessite pas des forces de pression internes à la matière.

Il reconnaît qu'il introduit une modification et une complication de la loi de Newton qui sont nullement fondées sur l'expérience et la théorie, mais il ajoute que la loi de Newton n'est pas plus fondée sur des principes généraux et théoriques.

2.2.2- Les conditions aux limites associées à la théorie de la relativité générale

Il reste à Einstein de s'interroger sur les limites de l'Univers et pour cela, dans un premier temps, il va travailler sur les équations tensorielles de la gravitation telles qu'il les a présentées dans sa publication de novembre 1915 à l'Académie de Prusse. Dans ces équations, l'adjonction de la constante cosmologique λ que nous avons vu précédemment, n'est pas présente.

Nous verrons que la solution qu'il va mettre en avant pour ce qui concerne le problème des conditions aux limites (l'univers considéré comme un continuum spatialement clos), sera en totale adéquation avec l'idée précédente consistant à modifier la loi de Newton.

Ainsi donc, dans ce paragraphe, Einstein mentionne qu'avec l'aide du mathématicien Grommer, il a tenté en vain de chercher les conditions aux limites associées à ses équations tensorielles du champ gravitationnel en présence de matière :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = K\, T_{\mu\nu} \qquad \text{avec } K = \frac{8\pi G}{c^4}$$

Lorsqu'il admet l'échec de cette recherche, il reprend le concept associé à ses équations tensorielles du champ gravitationnel libre :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0,$$

lequel champ est engendré par une distribution de matière située à l'extérieur du point d'espace-temps considéré. Cet espace-temps est vide de matière. La première solution exacte de ces équations tensorielles (les équations relativistes de la gravitation), c'est-à-dire la solution qui résulte de la présence dans l'espace vide (de matière) d'une masse ponctuelle produisant un champ à symétrie sphérique, a été trouvée par Schwarzschild fin décembre 1915.

En février 1917, lors de l'écriture de la publication qui nous intéresse, Einstein connaissait la solution de Schwarzschild. Mais en novembre 1915, cette solution exacte n'existant pas encore, Einstein avait utilisé une solution approchée pour calculer le périhélie des planètes. Mais pour effectuer ce calcul, aussi bien de manière exacte que de manière approchée, les même conditions aux limites, à l'infini spatial, sont postulées, à savoir que les $g_{\mu\nu}$ cherchés doivent impérativement tendre vers les valeurs minkowskiennes

$\eta_{11} = +1$; $\eta_{22} = \eta_{33} = \eta_{44} = -1$; $\eta_{21} = \ldots = \eta_{31} = \ldots = \eta_{43} = 0$ pour un choix convenable du système de référence.

Se référençant au problème précédent associé aux planètes, Einstein postule qu'à l'infini spatial les $g_{\mu\nu}$ tendent vers les valeurs minkowskiennes

$$g_{11} = +1 \; ; \quad g_{22} = g_{33} = g_{44} = -1 \; ; \; g_{21} = \ldots = \eta_{31} = \ldots = \eta_{43} = 0,$$

et il envisage une première possibilité qu'il appelle possibilité (a) :

Mais ce point de vue lui déplait pour essentiellement deux raisons [41]:

- Ce contexte, positionnant le Soleil de manière fixe par rapport aux planètes du système solaire, centrant ainsi le système de référence planétaire autour du Soleil, rappelle l'espace absolu de Newton (en effet, dans *« Philosophiae naturalis principia mathematica »*, le mathématicien anglais écrit *« The center of the system of the world is immovable. … the common centre of gravity of the earth, and all the planets, is immovable. »* [P. Kersberg, 1989. The Invented Universe, page 46]. Et comme l'écrit Einstein *: « Cette manière de procéder, c'est-à-dire le fait de présupposer un choix particulier du système de référence est en contradiction avec l'esprit du principe de relativité »*. En effet, il s'agit de considérer l'Univers dans son ensemble.
- Cette conception est incompatible avec le principe de la relativité de l'inertie qui postule que l'inertie ne doit son existence que par rapport à la matière environnant, c'est-à-dire présente à une distance finie. En d'autres termes, que l'inertie est déterminée par la matière présente dans le fini et non influencée à l'infini car à l'infini spatial, c'est-à-dire dans l'espace vide de matière, l'inertie doit disparaître. Et cette solution n'est pas satisfaisante. Elle revient à admettre qu'une particule infiniment éloignée de toute masse aurait encore une inertie. En effet, Einstein a postulé ci-avant qu'à l'infini spatial les $g_{\mu\nu}$ doivent impérativement tendre vers les valeurs minkowskiennes. L'inertie serait donc en quelque sorte influencée et non déterminée par la matière. Ce serait en contradiction avec le « principe de Mach » de détermination complète de la métrique par la matière.

La seconde possibilité envisagée par Einstein, qu'il appelle possibilité (b), consiste à renoncer à une définition universelle des conditions à l'infini, en imposant ces conditions pour chaque problème particulier, conditions qui n'auraient donc de valeur que par rapport à ce problème. Il s'agit d'une solution inattaquable mais qui revient, pour Einstein, à se résigner à la facilité : *« Je dois confesser qu'il m'est difficile sur cette question de principe de me résigner à ce point. Je ne m'y résoudrais que si tous les efforts pour parvenir à une conception satisfaisante se révélaient inutiles. »* [41].

Alors, Einstein avouant qu'il n'a pas réussi à poser des conditions universelles aux limites pour l'infini spatial, invente une troisième possibilité. En effet, puisqu'il est impossible de définir les conditions à l'infini, il supprime tout simplement l'infini et il envisage de considérer le Monde comme un continuum fermé selon ses dimensions spatiales. De fait, aucune condition aux limites n'est plus requise et cette esquive est le premier acte de la Cosmologie contemporaine.

Citons ainsi Einstein : *S'il était possible de considérer l'univers comme un continuum clos pour ce qui est de son extension spatiale, on n'aurait nullement besoin de telles conditions aux limites* (l'infini spatial). *»* [41].

Déjà dans une lettre à Besso du 14 mai 1916 [42], Einstein aborde en matière de gravitation, les limites à l'infini, en se demandant dans quelle mesure il n'existerait pas un Univers fini, c'est-à-dire un Univers dont l'étendue finie serait fixée par la nature, et dans lequel toute inertie serait vraiment relative.

Cette troisième possibilité consiste donc à modifier la théorie de Newton en introduisant la constante cosmologique λ dans l'équation de Poisson. Einstein, dans son article de 1917, insiste sur le fait que cette idée (l'obtention de $\Phi = f(\rho_0)$ *: voir §2.2.1*) a pour conséquence de voir *« s'évanouir »* les conditions aux limites à l'infini spatial et qu'elle rejoint celle qui consiste à considérer le continuum d'Univers, c'est-à-dire son étendue spatiale, *« comme fermé sur lui-même et de volume spatial (tridimensionnel) fini. »*.
Ainsi, dans une théorie de la cosmologie conséquente de la relativité générale, Einstein évoque toujours l'exigence machienne (voir §2.1.1) qu'il défend très fermement et qui consiste à ne pas avoir d'inertie par rapport à l'espace vide de matière mais uniquement une inertie des masses les unes par rapport aux autres. Aussi, la modification de l'équation de Newton et l'idée de l'Univers spatialement clos sont en totale adéquation avec cette exigence sur l'inertie.

Il termine donc ce paragraphe en mentionnant que la mise en œuvre de ce modèle d'Univers requiert une modification des équations tensorielles du champ de gravitation, en introduisant la constante cosmologique.

2.2.3- L'univers spatialement clos avec une distribution uniforme de matière

Dans sa publication "*Kosmologische Betrachtungen zur allgemeine Relativitäts – theorie*"du 15 février 1917, Einstein a posé trois hypothèses pour la cosmologie. Détaillons dans ce qui suit chacune des ces trois hypothèses.

a) <u>Première hypothèse : l'Univers est homogène et isotrope</u> [43]

Nous savons, d'après la théorie de la relativité générale, que les propriétés géométriques de l'espace-temps sont conditionnées par la répartition de la matière et que le caractère métrique de cette théorie associe un continuum spatio-temporel à quatre dimensions déterminé en chaque point par la matière qui s'y trouve et par son état.

A l'échelle des phénomènes locaux, le manque d'uniformité dans la répartition de la matière a pour conséquence une structure métrique du continuum assez compliquée. Mais pour un Univers considéré dans son ensemble, c'est-à-dire pour des espaces qui sont infiniment grands, la matière qui est répartie sur ces espaces tellement immenses, peut être considérée comme uniformément distribuée. Ainsi, dans tout l'espace, la distribution de matière peut être considérée comme homogène (son apparence générale ne dépend pas de la position de l'observateur) et d'une densité moyenne (de matière) ρ, partout durablement au repos. En effet, les mouvements de la matière sont seulement locaux et de vitesses faibles par rapport à la vitesse de la lumière, comme c'est le cas dans notre système solaire, c'est-à-dire localement dans la Voie Lactée.

Pour ce qui concerne l'isotropie de l'Univers, cette hypothèse est implicitement contenue dans la publication de 1917 du fait de l'esprit du principe de relativité qui rejette tout aspect de l'espace qui dépendrait de la direction dans lequel on l'observe.

Cette première hypothèse constitue ce que nous appelons aujourd'hui le principe cosmologique qui est étayé par des observations robustes , sur plusieurs dizaines de milliards d'années-lumière pour l'ensemble de l'Univers observable.

b) Deuxième hypothèse : l'univers est statique

En postulant que la distance moyenne entre les étoiles (ou encore le « rayon » R de l'Univers) ne dépend pas du temps, Einstein émet comme hypothèse essentielle que l'Univers est globalement statique, c'est-à-dire fini [43].

Aussi, en modifiant la loi de Newton par le fait d'introduire la constante cosmologique λ dans ses équations du champ en présence de matière, Einstein résolvait le problème des conditions aux limites pour l'infini spatial (obtention de $\Phi = f(\rho_0)$ *: voir §2.2.1*), et ceci lui permit de concevoir son modèle d'Univers statique. En effet, il n'existait en 1917 aucun indice permettant de supposer que l'Univers fût dans un état non statique, d'autant que des préjugés philosophiques séculaires étayaient la notion d'un Univers immuable.

Les équations d'Einstein, avec leur constante cosmologique, entraînent une solution cosmologique statique : l'Univers statique d'Einstein.

c) Troisième hypothèse : l'Univers clos conduit à une définition spatiale d'hypersurface à trois dimensions (l'espace $\mathbf{S}^3$)

On peut se demander comment Einstein, abordant le « problème cosmologique », a pu émettre l'idée du concept de l'hypersphère à 4 dimensions spatiales.

En fait, cette idée semble lui avoir été imposée par la structure de la métrique spatiotemporelle minkowskienne à quatre dimensions, une de temps et trois d'espace.

De là, la considération d'un espace sphérique de Riemann à trois dimensions dans le sens d'une hypersurface (l'espace $\mathbf{S}^3$), prenant une valeur finie $2\ \pi^2\ R^3$ et plongé dans l'espace euclidien à quatre dimensions spatiales.

En fait, l'espace euclidien E_4 est un espace fictif qu'Einstein a imaginé pour obtenir l'expression $2\ \pi^2\ R^3$ [44].

Mentionnons que *« cet espace auxiliaire, euclidien et fictif* (l'hypersphère) *doit naturellement être distingué de l'espace-temps, qui a bien quatre dimensions, mais n'est ni euclidien ni fictif. »* [45].

Dans sa publication, Einstein conduit en effet le raisonnement suivant :

« Nous partons d'un espace euclidien des $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, à quatre dimensions ; soit $d\sigma$ l'élément linéaire : $D\sigma^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 + d\xi_4^2$.

Dans cet espace nous considérons l'hypersurface : $R^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2$,

où R désigne une constante. Les points de cette hypersurface constituent un continuum à trois dimensions, un espace sphérique de rayon de courbure R. » [46].

Il considère l'élément $g_{\mu\nu}$ associé au temps dans le tenseur géométrique spatiotemporel comme constant (métrique statique) du fait que *« toutes les grandeurs sont indépendantes de la coordonnée temporelle. »* [46].

Cependant, comme le signale Jacques Merleau-Ponty page 40 de son livre sur la cosmologie du 20^{e}s, cette possibilité de l'espace clos (fermé) à trois dimensions spatiales est une hypothèse abstraite ne se référant à aucune propriété connue de la nature physique.

Mais pour Einstein, ceci n'est pas fondamental. En effet, depuis Gauss et Riemann les théoriciens de la géométrie expriment les propriétés intrinsèques des surfaces sans nécessairement avoir recours à un système de référence dont le nombre de dimensions dépasse celui de la « variété » qu'il s'agit de décrire.

Et cette façon de procéder s'applique sans problème aux variétés riemanniennes, que nous avons décrit précédemment, et qui présente dans leur structure spatiotemporelle trois dimensions spatiales.

L'hypothèse auxiliaire de l'espace euclidien à quatre dimensions ne sert qu'à définir de manière commode l'espace $\mathbf{S}^3$. Cette hypothèse n'introduit aucun postulat d'ordre physique ou épistémologique. Et si difficilement imaginable que soit l'espace

« sphérique », aucune difficulté de principe ne s'oppose à ce qu'Einstein puisse le considérer comme une figuration adéquate des propriétés géométriques de l'espace physique [47].

2.3- Sur l'adjonction d'un terme supplémentaire aux équations de champ de la gravitation

Ayant fixé la structure de l'espace par des hypothèses à priori d'homogénéité, d'isotropie et de staticité, en introduisant la constante cosmologique λ dans l'équation de Poisson (voir §2.2.1), la théorie du champ gravitationnel doit être remaniée.

En effet, comme l'exprime Einstein dans ce paragraphe, les équations tensorielles de la relativité générale

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = K T_{\mu\nu}$$

doivent permettre l'hypothèse d'un Univers spatialement clos [48].

Aussi, il mentionne que les équations tensorielles précédentes *« autorisent une extension immédiate compatible avec le postulat de la relativité, tout à fait analogue à l'extension de l'équation de Poisson »* [48].

« Il suffit d'ajouter dans le membre de gauche de l'équation du champ le tenseur fondamental $g_{\mu\nu}$ multiplié par la constante universelle – λ, sans pour autant détruire la covariance générale » [48] :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \lambda g_{\mu\nu} = K T_{\mu\nu} .$$

Et cette modification est licite car elle ne contredit aucun des postulats de la relativité générale qui sont :

→ La covariance : l'expression des lois de la physique doit être indépendante du choix des coordonnées permettant de repérer l'espace-temps,

→ L'équivalence : Les forces d'inertie sont de même nature que les forces de gravitation,

→ La détermination de la métrique par la matière : Les propriétés métriques de l'espace-temps sont en chaque point déterminées par la distribution des masses et de l'énergie dans le voisinage de ce point.

De plus, la divergence nulle pour le tenseur

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \lambda g_{\mu\nu} \right)$$

prouve que les nouvelles équations tensorielles du champ vérifient bien le principe de conservation de l'impulsion-énergie.

2.4- Calcul et résultat

L'équation associée au modèle d'Univers statique d'Einstein est la suivante :

$$\lambda = \frac{K\rho}{2} = \frac{1}{R^2}$$

avec $K = \frac{8\pi G}{c^4}$ en prenant pour ρ la densité d'énergie de la matière cosmique non-relativiste, sachant que la densité d'énergie relativiste sous forme de rayonnement est négligeable [89].

L'équation précédente peut aussi s'écrire :

$$\lambda = \frac{4\pi G}{c^4} \rho = \frac{1}{R^2} \qquad (2)$$

« La constante universelle λ nouvellement introduite détermine donc aussi bien la densité moyenne de la distribution ρ qui peut rester en équilibre que le rayon R de l'espace sphérique et son volume $2\pi^2R^3$.
La masse totale de l'univers est, selon notre conception, finie et en fait égale à

$$M = \rho\, 2\pi^2 R^3$$ » [49].

Nous montrerons en annexes, que l'équation (2) associée au modèle statique d'Einstein peut être obtenue très facilement en posant dans les équations de Friedmann les hypothèses d'Einstein [50]:

- Son Univers est spatialement clos ($k=1$),
- La matière au repos ne subit aucune pression,
- La densité de la matière est permanente, immuable, c'est-à-dire indépendante du temps.

2.5- Véracité du modèle obtenu

En 1917, les astronomes n'avaient pas encore observé le système des galaxies en expansion.

D'ailleurs les nébuleuses n'étaient pas encore reconnues comme un ensemble d'étoiles formant une galaxie et rien n'indiquait que le monde puisse s'étendre au-delà de la Voie Lactée [51].

Ainsi, l'Univers statique pouvait constituer une hypothèse plausible, d'autant plus *« qu'en 1917, la Philosophie de la science physique était encore sous l'empire de la Mécanique céleste »* [52].

L'analyse des équations (2) montre que le modèle imaginé par Einstein est très instable. En effet, pour une très faible fluctuation de la densité d'énergie de matière ou de rayonnement dans un sens ou dans l'autre, la constante cosmologique fluctue et entraîne une variation du rayon de l'Univers.

Malgré son faux départ, Einstein a posé les principes cosmologiques fondamentaux d'un Univers homogène et isotrope. Ces principes n'ont encore jamais été mis en défaut par les observations les plus modernes.

Et ses réflexions sur l'inertie, la masse grave, la masse inertielle et la disparition du poids d'une masse en chute libre, ont donné naissance à des questionnements nouveaux.

Et même si en 1917, Einstein n'a pas résolu le problème cosmologique de manière satisfaisante, il a semé des idées nouvelles dont vont s'inspirer bons nombres d'émules que nous allons découvrir maintenant.

Chapitre 3

L'Univers sans masse matérielle mais non sans énergie de De Sitter (1917)

Willem de Sitter (1872-1934) est un mathématicien, physicien et astronome néerlandais. Il étudie les mathématiques à l'Université de Groningue située au nord des Pays-Bas. Puis il intègre le laboratoire d'astronomie de Groningue. De 1897 à 1899, il travaille à l'observatoire du Cap en Afrique du sud. En 1908, il est nommé à la chaire d'astronomie de l'Université de Leyde et dès 1919, il devient directeur de l'Observatoire de Leyde jusqu'à sa mort.

Dès 1916, il entretient avec Einstein une correspondance qui va s'avérer fructueuse, pour ce qui concerne le développement de solutions cosmologiques à partir de la relativité générale [53].

Ils collaborent même pendant un certain temps, proposant en 1932 une théorie concernant un nouveau modèle d'Univers [54] que nous analyserons au §6.

Pour ce qui nous préoccupe, c'est-à-dire le modèle de De Sitter de 1917, nous travaillons entre autres sur sa publication du 30 juin 1917. Il s'agit de la publication en Astronomie *« On the curvature of space »* que le savant hollandais a présenté lors de sa conférence à la Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences le 30 juin 1917.

Nous travaillons également sur les sources secondaires associées à des auteurs reconnus comme spécialistes du domaine tels que Jacques Merleau-Ponty, Pierre Kerszberg et Jean-Pierre Luminet.

Les écrits relatifs à la controverse Einstein-De Sitter à propos de ce modèle sont étudiés directement à partir de la publication d'Einstein de 1918, traduite par Françoise Balibar et Olivier Darrigol.

3.1- Le principe de Mach remis en question

Moins de deux mois après la publication d'Einstein présentée à l'Académie de Berlin le 8 février 1917, De Sitter propose une autre solution cosmologique aux équations relativistes de la gravitation.

Rappelons que la position de De Sitter sur les conditions aux limites selon la théorie de la relativité générale ne rejoint pas celle d'Einstein. Pour De Sitter, il convient d'éviter de se poser la moindre question concernant la condition aux limites, et paradoxalement elle est inattaquable pour Einstein. En effet, comme l'écrit Einstein dans sa publication de 1917 suite à ses entrevues plusieurs fois à Leyde avec le savant néerlandais, rien n'empêche de spécifier les $g_{\mu\nu}$ tout simplement *« comme on avait l'habitude jusqu'à présent de spécifier expressément les conditions initiales temporelles »*.

De Sitter critique la conception d'Einstein à propos du principe de Mach, en notant déjà dans ses écrits de 1916 :

« Einstein rejette aussi l'espace absolu, mais apparemment il se cramponne aux « ferne Massen ». Il me semble qu'Einstein fait ici une erreur » [55].

Pour De Sitter qui est astronome, Einstein peuple l'ensemble de l'espace tridimensionnel d'une quantité de matière très au-deçà de celle qu'il connaît [56]. Et pourquoi, selon l'astronome néerlandais, ne pas considérer dans l'Univers les étoiles comme quantité de matière négligeable vis-à-vis de l'énergie que peuvent émettre ces astres cosmiques. A priori, c'est un point de vue qui se défend.

En fait, De Sitter s'en prend à l' « école de Mach ». Pour lui, le champ des $g_{\mu\nu}$ peut être déterminé sans la matière. Les formes de matières qui emplissent l'Univers de De Sitter, comme les étoiles, sont considérées comme des sources d'énergie qui n'engendrent pas de gravitation. Ou bien encore, ces objets célestes visibles ne sont pas assez nombreux dans l'Univers pour être responsables de la gravitation. Et cela soulève un conflit avec le principe de Mach, puisque aucune masse de l'Univers n'est susceptible d'être à l'origine de l'inertie locale [57].

Einstein, dans une publication du 7 mars 1918 " *Königlich preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*" [58, traduction F. Balibar], s'oppose à la recevabilité de la solution de De Sitter des équations du champ dans lesquelles les composantes $T_{\mu\nu}$ du tenseur impulsion-énergie $\mathbf{T}_{\mu\nu}$ sont égales à zéro pour tous les indices. Il va même jusqu'à écrire que si la solution de De Sitter était valable partout, on aurait montré que le but qu'il s'était proposé en introduisant la constante λ n'aurait pas été atteint, car la relativité générale ne constitue un système satisfaisant que si les qualités physiques de l'espace seul sont complètement déterminées par la matière.

3.2- L'abandon du temps cosmique tel qu'Einstein le conçoit dans sa métrique riemannienne de 1917

Comparons la métrique riemannienne d'Einstein relative à son Univers hypersphérique statique à la métrique riemannienne de De Sitter.

Il n'est pas difficile d'exprimer en coordonnées sphériques la distance quadratique dl^2 entre deux points voisins de l'hypersurface sphérique à trois dimensions plongée dans l'espace euclidien à quatre dimensions. Cette distance à laquelle on ajoute le terme $- c^2 dt^2$, n'est rien d'autre que l'intervalle quadratique ds^2 d'espace-temps dans l'Univers modélisé par le savant allemand.

Ce modèle est construit pour être stationnaire et sa symétrie sphérique est seulement spatiale. Einstein résout ainsi le problème des conditions à l'infini en adoptant un Univers spatialement fermé. La courbure de l'espace a pour conséquence une quantité de matière finie mais sans limite.

La métrique purement spatiale d'Einstein est la suivante :

$$dl^2 = R_e^2 \, [\, d\chi^2 + \sin^2\chi \, (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2 \,)].$$

D'où la métrique spatiotemporelle riemannienne :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R_e^2 \, [\, d\chi^2 + \sin^2\chi \, (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2 \,)]. \qquad \text{(A)}$$

R_e est le rayon de l'Univers dans le modèle d'Einstein.

De Sitter pousse à son maximum la symétrie du modèle relativiste, en donnant au temps le même statut que l'une quelconque des trois dimensions spatiales. Son modèle, comme celui d'Einstein, est stationnaire (il ne varie pas au cours du temps) ; mais sa symétrie sphérique est spatio-temporelle.

Il n'est pas très difficile non plus d'exprimer en coordonnées sphériques la métrique riemannienne de De Sitter en considérant que le temps t est interprété, de même que les trois coordonnées d'espace, comme quatre coordonnées de l'espace riemannien [59]. En plongeant cette surface sphérique à quatre dimensions dans un espace euclidien à cinq dimensions, la métrique de De Sitter, d'un point de vue spatial, est la suivante :

$$ds^2 = R_d^2 \{ d\omega^2 + \sin^2\omega \, [d\chi^2 + \sin^2\chi \, (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)] \} \quad [60], [61].$$
R_d est le rayon de l'Univers dans le modèle de De Sitter.

Pour $\omega \to \pi/2$ et en posant $d\omega = \frac{i\,c\,dt}{R_d}\cos\chi$ c'est-à-dire $d\omega^2 = \frac{-c^2 dt^2}{R_d^2}\cos^2\chi$

On obtient :
$$ds^2 = -\,c^2 \cos^2\chi \; dt^2 + R_d^2 \, [d\chi^2 + \sin^2\chi \, (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)]$$
c'est-à-dire :
$$ds^2 = c^2 \cos^2\chi \; dt^2 - R_d^2 \, [d\chi^2 + \sin^2\chi \, (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)] \quad \text{(B)} \quad [62], [63]$$
puisque la métrique ds^2 est considérée aussi bien avec la signature $- + + +$ que $+ - - -$.

Nous constatons que la métrique (B) comme la métrique (A) sont des métriques statiques car les coefficients de dt, $d\chi$, $d\theta$, $d\varphi$ sont indépendant de t (R_e et R_d sont des constantes puisque les univers sont statiques).
La seule différence entre les deux métriques est, dans la métrique (B), la présence du terme $\cos^2\chi$ associé au coefficient de dt^2.

Il résulte donc de la différence entre les deux métriques, que la variable t dans (A) ne peut avoir le même sens géométrique et physique que la variable t dans (B). Dans (A), t est le temps cosmique. En effet, dans l'Univers d'Einstein il est supposé que la matière soit animée de mouvements relativement lents. De fait, les systèmes associés aux différents corpuscules de matière ont des vitesses relativement lentes les uns par rapport aux autres. Pour un repère dans lequel la matière est au repos moyen, Einstein définit le temps propre de la relativité restreinte qu'il considère comme un temps cosmique de mesure universelle (temps mesuré par une horloge associée en permanence au repère dans lequel la matière est au repos moyen).
De fait, les divers corpuscules de l'Univers ainsi que le repère pour lequel la matière est au repos moyen, ont des vitesses relatives très en deçà de la vitesse de la lumière. Nous pouvons donc supposer que le temps dans l'Univers (temps cosmique) est partout le même. Et ce temps peut être considéré comme le temps propre sur la Terre (mesuré par nos horloges) parcourant sa ligne d'Univers (géodésique) autour du Soleil (vitesse de la Terre en rotation et en translation demeurant constante).

Par contre, dans (B), aucune caractéristique physique ne s'apparente à une telle coordonnée de temps comme dans le modèle d'Einstein.

3.3- Calcul, résultat et véracité du modèle obtenu

Pour $\chi = \pi/2$, la métrique (B) devient :
$$ds^2 = -\, R_d^2 \, [d\chi^2 + d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2] \quad \text{(B')}$$
Le ralentissement du temps en relativité restreinte (§ 2.1.3) nous apprend que pour $\beta \to 1$ c'est-à-dire $v \to c$ le temps t' s'écoule de plus en plus lentement jusqu'à se bloquer (dans un Univers de lumière le temps n'existe pas).

Or la trajectoire d'un photon (rayon lumineux) est une géodésique du genre lumière pour laquelle le temps propre n'existe pas, c'est-à-dire que
$$ds = c\, d\tau = 0.$$
La métrique (B') s'annulant pour :
$$d\chi = d\theta = d\varphi = 0,$$
sur l'hypersurface associée à $\chi = \pi/2$ et $d\chi = d\theta = d\varphi = 0$, le temps ne s'écoule plus, tout est bloqué.

Autour de l'horizon $\chi = \pi/2$, c'est-à-dire pour $\chi \to \pi/2$ relatif à une distance accrue de cet horizon cosmologique, le temps tend à s'écouler de moins en moins vite, signifiant une dilatation de la période de vibration des ondes lumineuses. Ainsi, la fréquence de vibration plus petite émises par ces ondes lumineuses peut expliquer le décalage spectral vers le rouge dans certaines régions de l'espace associée à la fuite des nébuleuses découvertes par Vesto Slipher en 1915.

D'où la conclusion de De Sitter :

« About a systematic displacement towards the red of the spectral lines of nebulae we can, however, as yet say nothing with certainty. If in the future it should be proved that very distant objects have systematically positive apparent radial velocities, this would be an indication that the system B, and not A, would correspond to the truth" [64].

De Sitter est sur la piste de l'interprétation cosmologique des décalages vers le rouge, mais cependant le pas n'est pas franchi, car le savant hollandais, comme Einstein, garde à l'esprit la conception d'un Univers statique, dont les propriétés intrinsèques ne doivent pas changer au cours du temps [65].

Pour Einstein, sa publication du 7 mars 1918, référencée au §3.1, connue comme sa controverse avec De Sitter, l'arrêt du cours des choses pour $\chi = \pi/2$ et $d\chi = d\theta = d\varphi = 0$, équivaut à une accumulation de masse sur la surface $r = R_e\,(\pi/2)$ correspondant à $\chi = \pi/2$:

« Que le système de De Sitter ne puisse pas correspondre au cas d'un univers sans matière, mais bien plutôt à celui d'un monde dont la matière est tout entière concentrée sur la surface $r = R_e\,(\pi/2)$, c'est ce qu'il serait probablement possible de démontrer par passage à la limite d'une distribution spatiale à une distribution superficielle de matière » [66].

Ainsi, d'après Einstein, l'Univers de De Sitter donné pour vide, est vide partout ailleurs, mais non là. Il n'est donc pas homogène et ne satisfait pas au postulat d'uniformité placé à la base de la cosmologie.

L'équation associée au modèle d'Univers de De Sitter est la suivante [67].

$$R = \sqrt{\frac{3}{\lambda}}$$

Nous montrerons en annexes, que l'équation précédente peut être obtenue facilement en posant dans les équations de Friedmann les hypothèses de De Sitter :

- la matière est absente et la pression est nulle,
- le temps cosmique n'existe pas,
- L'espace correspond à une géométrie riemannienne ($k=1$).

Par ailleurs, en tenant compte du temps cosmique mais en conservant l'hypothèse d'une matière absente, les équations de Friedmann aboutissent à l'équation différentielle suivante :

$$R'' - \frac{\lambda c^2}{3} R = 0$$

En intégrant cette équation de manière classique, on obtient :

$$R(t) = C\, e^{\sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}}\, t}$$

qui est la solution associée à un rayon $R(t)$ de l'Univers sans matière mais sous l'influence d'une énergie matérialisée par la constante cosmologique λ.

Cette fonction exponentielle $R(t)$ fortement croissante en fonction du paramètre λ, a l'avantage de montrer l'influence de la constante cosmologique sur l'expansion de l'espace. L'Univers de De Sitter devient donc un « mouvement sans matière ». Il a été réutilisé plus récemment pour décrire la phase d'inflation à expansion très rapide , censée avoir eu lieu dans les tout premiers instants de l'Univers [68].

La métrique de De Sitter ne peut sérieusement être considérée comme un modèle d'Univers plausible, car les propriétés de l'espace-temps y sont indépendantes de la matière. C'est en tout cas l'opinion d'Einstein pour qui le principe de Mach impose que les coefficients $g_{\mu\nu}$ de la métrique du tenseur géométrique soient entièrement déterminés par la distribution de matière.

Chapitre 4

Le modèle d'univers périodique et fermé de Friedmann (1922)

Alexandre Friedmann (1888-1925) est un mathématicien russe diplômé de l'université de Saint-Pétersbourg.

En 1922, assez tardivement du fait de la première guerre mondiale, il apprend l'existence de la théorie de la relativité générale. Aussitôt, il commence à en chercher les solutions exactes, en entrevoyant le premier que cette théorie associant la gravitation, l'espace et le temps, permet l'étude de la dynamique de l'Univers.

Notre étude du modèle d'Univers périodique et fermé de Friedmann s'effectue à partir de sa publication de 1922 « On the Curvature of Space » [69]. Bien que nous nous concentrons sur le modèle cosmologique fermé, nous étudions aussi le contenu de sa publication de 1924 « On the possibility of a world with constant negative curvature of space » [70]. Cette publication ouvre la perspective des 3 modèles d'Univers associés à une courbure spatiale positive, nulle et négative, dix ans avant les publications de Robertson et Walker.

En effet, le fait de traduire la métrique de Friedmann (appelée de nos jours métrique FLRW : Friedmann, Lemaître, Robertson, Walker) dans le cas le plus général, nous permet d'obtenir les deux équations différentielles de Friedmann (solution cosmologique générale des équations tensorielles du champ) valables pour tout type d'Univers : statique, dynamique, avec ou sans matière, avec ou sans constante cosmologique.

Si les résultats auxquels parvient Friedmann sont clairement exposés, les équations intermédiaires pour parvenir au but ne sont pas toujours assez commentées. C'est la raison pour laquelle nous étudions aussi les écrits d'Einstein relatifs aux travaux de Friedmann. Ces écrits se trouvent dans sa publication de 1931 *« Zum Kosmologischen Problem der allgemeinen Relativitätstheorie »* [71] et dans son recueil de 1945 *« The meaning of relativity »* [72].

4.1- La métrique de Friedmann : cas général

Comme stipulé par le principe cosmologique d'Einstein, Friedmann fait abstraction des hétérogénéités locales tels que les étoiles et les nébuleuses. On entend alors par densité de masse, la densité de masse dans des espaces qui sont infiniment grands par rapport aux dimensions des étoiles.

L'espace étant homogène et isotrope, le mathématicien russe considère un temps cosmique tel qu'à tout moment, la métrique de l'espace est la même en tous les points et suivant toutes les directions.

Les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie de l'univers implique que le tenseur de courbure s'exprime dans les termes de la métrique suivante dont les coefficients sont constants :

$$dl^2 = g_{\lambda\rho} \; dx^\lambda \; dx^\rho \quad \text{avec } \lambda, \rho = 1, 2, 3$$

Une telle métrique de courbure constante à 3 dimensions est caractérisée par l'équation suivante, dans laquelle Ψ est une constante :

$$R_{\lambda\rho\sigma\nu} = \Psi \left(g_{\lambda\sigma} \, g_{\rho\nu} - g_{\lambda\nu} \, g_{\rho\sigma} \right) \qquad [72]$$

Les propriétés de courbure ne dépendant que de la constante Ψ, Friedmann et Einstein (reprenant les travaux de Friedmann après coup [72]), distinguent trois cas pour un univers homogène et isotrope :

→ $\Psi > 0$: caractérise un univers à courbure positive, soit un espace fermé définissant un Univers fini. Ce cas correspond à un espace $\mathbf{S}^3$ (un espace sphérique de dimension 3),

→ $\Psi = 0$: caractérise un univers à courbure nulle tendant vers l'infini. Ce cas est associé à une expansion de l'univers selon une trame à symétrie sphérique,

→ $\Psi < 0$: caractérise un univers à courbure négative, soit un espace ouvert. Ce cas est associé à la géométrie hyperbolique bâtie par Lobatchevski (1792 – 1856).

Après quelques transformations simples, l'élément de distance spatiale dl^2 se généralise ,en coordonnées sphériques (r,θ,φ), de la manière suivante (l'obtention de cette expression est exprimée en annexe D) :

$$dl^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \quad d\varphi^2) + \frac{k r^2 dr^2}{a^2 - k r^2},$$

soit :

$$dl^2 = \left(\frac{1}{1 - k \frac{r^2}{a^2}} \right) dr^2 + r^2 \, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \quad d\varphi^2 .$$

avec :

→ $k = 1$ lorsque $\Psi > 0$,

→ $k = 0$ lorsque $\Psi = 0$,

→ $k = -1$ lorsque $\Psi < 0$ (ce contexte n'est pas analysé car il ne semble pas, ce jour, correspondre à un modèle susceptible de convenir à la réalité),

→ « a » est le rayon de l'Univers en fonction du temps cosmique t, encore appelé facteur d'échelle comme nous allons le voir. Le signe de la dérivée par rapport au temps t de a(t) renseigne sur l'évolution de l'Univers (voir §4.3 et §5),

→ t est le temps cosmique. Selon la relativité restreinte, ce temps est le temps associé à tout observateur. Pour ce qui nous concerne, il s'agit du temps local dont l'écoulement est mesuré avec notre montre, par nous, observateurs sur la Terre,

→ « r » est la coordonnée sphérique de longueur pour $k = 0$.

L'obtention de « a » pour $k = 1$ (voir annexe D), peut se comprendre par analogie d'un espace $\mathbf{S}^3$ inclus dans $\mathbf{R}^4$ avec l'espace $\mathbf{S}^2$ inclus dans $\mathbf{R}^3$: la Terre présente une surface sphérique $\mathbf{S}^2$ finie sans bord dans un espace à trois dimensions. L'espace sphérique $\mathbf{S}^3$ est elle aussi finie et sans bord dans l'espace euclidien à 4 dimensions décrit par Einstein au §2.2.3.c.

Friedmann, ayant introduit le temps dans l'expression du rayon de l'Univers, la dynamique de ce dernier est associée à son expansion. Pour un observateur sur Terre, toutes les distances séparant deux objets astronomiques sont comobiles car elles suivent l'expansion de l'Univers matérialisée par la fonction a(t). La métrique décrivant le modèle cosmologique homogène et isotrope de Friedmann doit le faire par l'intermédiaire d'un facteur d'échelle tel que deux distances r et σ subissant l'expansion puissent se mettre sous la forme suivante :

$$\left(\frac{dr}{d\sigma}\right) = a(t)$$

Ainsi, la métrique $dl^2 = \left(\frac{1}{1-k\frac{r^2}{a^2}}\right) dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \; d\varphi^2$

s'écrit $dl^2 = a^2(t)\, d\sigma^2 \left(\frac{1}{1-k\sigma^2}\right) + a^2(t)\,\sigma^2\, d\theta^2 + a^2(t)\, \sigma^2 \sin^2\theta \; d\varphi^2$

et la métrique spatiotemporelle $ds^2 = c^2dt^2 - dl^2$

a pour expression $ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\, d\sigma^2 \left(\frac{1}{1-k\sigma^2}\right) - a^2(t)\,\sigma^2\, d\theta^2 - a^2(t)\, \sigma^2 \sin^2\theta \; d\varphi^2$.

Il s'agit de la métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) permettant de décrire un espace-temps homogène et isotrope. Suivant les préférences géographiques ou historiques, la métrique FLRW est souvent appelée métrique de Friedmann-Lemaître ou encore métrique de Robertson-Walker.

Il est commode ,pour les calculs suivants, d'utiliser une variable temporelle sans dimension $\eta(t)$ définie par :

$$d\eta = \frac{cdt}{a(t)}.$$

Alors $a(t)$ devient une fonction de η notée $a(\eta)$.

Ainsi, la variable t est remplacée par la variable η.

Nous pouvons donc écrire : $cdt = a(\eta)\; d\eta$.

La métrique spatiotemporelle devient alors :

$$ds^2 = a^2(\eta)\, d\eta^2 - a^2(\eta)\left(\frac{d\sigma^2}{1-k\sigma^2}\right) - a^2(\eta)\,\sigma^2\, d\theta^2 - a^2(\eta)\,\sigma^2 \sin^2\theta \; d\varphi^2$$

4.2- Les deux équations de Friedmann

Sous sa forme tensorielle, la métrique de Friedmann devient $ds^2 = g_{\mu\nu}\; dx^\mu\, dx^\nu$,

avec pour μ et ν variant de 0 à 3 : $g_{\mu\nu} = 0$ pour $\mu \neq \nu$

$$dx^0 = d\eta \Rightarrow \left(dx^0\right)^2 = d\eta^2$$

$$dx^1 = d\sigma \Rightarrow \left(dx^1\right)^2 = d\sigma^2$$

$$dx^2 = d\theta \Rightarrow \left(dx^2\right)^2 = d\theta^2$$

$$dx^3 = d\varphi \quad \Rightarrow \left(dx^3\right)^2 = d\varphi^2 .$$

Ainsi : $g_{00} = a^2(\eta)$

$$g_{11} = \left(\frac{-a(\eta)^2}{1-k\sigma^2}\right)$$

$$g_{22} = -a^2(\eta)\,\sigma^2$$

$$g_{33} = -\ a^2(\eta)\,\sigma^2\ \sin^2\theta .$$

La matrice du tenseur fondamental $g_{\mu\nu}$ étant diagonale, ses éléments peuvent s'écrire

$g^{\mu\nu} = \dfrac{1}{g_{\mu\nu}}$ et cette écriture nous servira pour la suite.

La théorie de la relativité générale repose, comme nous en avons parlé au §2.1.4 et au §2.1.5, sur le calcul des symboles de Christoffel de deuxième espèce (voir annexe B.1.5) permettant de connecter en un point M à l'instant t, la métrique riemannienne (les $g\mu\nu$).

Aussi, la solution dynamique des équations tensorielles d'Einstein en présence de matière, passe, comme le fait Friedmann dans sa publication de 1922, par le calcul des connexions affines (les symboles de Christoffel de deuxième espèce) à partir de la métrique FLRW.

La relativité générale est une théorie définie localement en un point *M* à l'instant *t*. Friedmann a considéré en ce point *M* à l'instant *t*, la grandeur dynamique « a » fonction de la coordonnée de temps.

Einstein écrivait dans sa publication *« The Meaning of Relativity » datant de 1945*, en considérant les travaux de Friedmann: *« Nous abandonnons donc par là même, l'hypothèse selon laquelle l'expression du champ métrique est indépendante du temps »* [72].

Citons Einstein, dans son livre de vulgarisation *« Über das sogenannte Kosmologische Problem »* traduit par Maurice Solovine et publié en 1933 : *« Il résulte que dans l'état actuel de nos connaissances, le fait qu'une densité de matière différente de zéro ne doit pas être mise en relation avec une courbure spatiale, mais avec une expansion spatiale. Naturellement, nous ne voulons pas dire par là qu'une telle courbure (positive ou négative) n'existerait pas. Mais nous n'avons pour le moment, aucun indice de son existence »*. (La collecte des données apportées par le satellite WMAP lancé par la NASA en 2001 [premier bilan de 2003 confirmé par les résultats définitifs publiés en janvier 2010], montre que l'Univers serait en expansion accélérée et que la courbure de l'espace serait nulle).

A l'aide des symboles de Christoffel de deuxième espèce définis en annexe B.1.5, Friedmann calcule les composantes du tenseur de Ricci défini en annexe B.2.2.6, afin de trouver la solution dynamique des équations tensorielles d'Einstein en présence de matière. Cette solution dynamique se présente sous la forme d'une équation différentielle du deuxième ordre en *t* (temps cosmique) à coefficients constants et à second membre constant. Il s'agit de la première équation de Friedmann.

Intégrer cette équation différentielle, solution non statique des équations tensorielles d'Einstein en présence de matière, consiste à définir les lois globales, macroscopiques du phénomène qui constitue l'Univers en expansion (ou en contraction). Friedmann a donc découvert de manière purement théorique la dynamique de l'Univers, c'est-à-dire son expansion, qui est ni plus ni moins que la théorie du Big-Bang, et ceci bien avant les observations de Hubble, en 1929, sur la vitesse de récession des galaxies.

Tout calcul fait, le tenseur de Ricci $\boldsymbol{R}_{\mu\nu}$ dont l'expression se trouve en annexe B.2.2.6 se présente sous la forme d'une matrice diagonale de composantes :

$$R_{00} = -\,3\left(\frac{a''a - a'^2}{a^2}\right)$$

$$R_{11} = \frac{1}{\left(1-k\sigma^2\right)}\left(\frac{a''a + a'^2 + 2ka^2}{a^2}\right)$$

$$R_{22} = \sigma^2\left(\frac{a''a + a'^2}{a^2} + 2k\right)$$

$$R_{33} = \sigma^2\sin^2\theta\left(\frac{a''a - a'^2}{a^2}\right) + 2k\,\sigma^2\sin^2\theta + \frac{2a'^2}{a^2}\,\sigma^2\sin^2\theta$$

avec : $a' = \frac{da}{d\eta}$ et $a'' = -\frac{d^2a}{d\eta^2}$.

Comme nous le verrons en annexe B.2.2.7, la courbure scalaire s'obtient par contraction du tenseur de Ricci, de la manière suivante :

$$g^{\mu\nu}\,R_{\mu\nu} = R^{\mu}_{\mu} = R$$

c'est-à-dire : $R = R^0_0 + R^1_1 + R^2_2 + R^3_3$

avec : $R^0_0 = g^{00}\,R_{00} = -\frac{3a''a}{a^4} + \frac{3a'^2}{a^4}$

$$R^1_1 = g^{11}\,R_{11} = -\frac{1}{a^2}\left(\frac{a''a + a'^2}{a^2} + 2k\right)$$

$$R^2_2 = g^{22}\,R_{22} = -\frac{1}{a^2}\left(\frac{a''a + a'^2}{a^2} + 2k\right)$$

$$R^3_3 = g^{33}\,R_{33} = -\frac{1}{a^2}\left(\frac{a''a + a'^2}{a^2} + 2k\right)$$

soit $R = -\frac{6}{a^3}\left(a'' + ka\right)$.

Nous montrerons en annexe B.3.1.1 que les composantes du tenseur $\boldsymbol{T}_{\mu\nu}$ sont les suivantes :

$$T_{00} = \rho \qquad T_{11} = T_{22} = T_{33} = P \qquad T_{01} = \ldots = T_{32} = 0.$$

Le principe cosmologique définissant une pression négligeable dans l'Univers, seule les composantes tensorielles du champ, indicée $_{00}$, sont retenues.

En injectant la composante R_{00} du tenseur de Ricci, la composante g_{00} du tenseur métrique, la courbure scalaire R et la composante T_{00} du tenseur impulsion-énergie dans l'équation tensorielle du champ en présence de matière et en tenant compte de la constante cosmologique, on obtient :

$$R_{00} - \frac{1}{2}\,g_{00}R - \lambda\,g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4}\,T_{00}$$

c'est-à-dire :

$$-3\left(\frac{a''a-a'^2}{a^2}\right) - \frac{1}{2}\ a^2\left(-\frac{6}{a^3}\right)\left(a''+ka\right) - \lambda a^2 = \frac{8\pi G}{c^4}\ T_{00}$$

$$\frac{3a'^2}{a^2} + 3k - \lambda a^2 = \frac{8\pi G}{c^4}\ T_{00} \qquad (3)$$

Nous voulons obtenir une équation faisant intervenir la variable temporelle ct à la place de la variable η.

Souvenons-nous que nous avions effectué précédemment le changement de variable suivant :

$$c\,dt = a\ d\eta \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\eta} = \frac{a}{c}.$$

Nous pouvons donc écrire : $\frac{da}{d\eta} = \frac{da}{cdt}\frac{cdt}{d\eta} = \frac{da}{dt}\frac{dt}{d\eta} = \frac{da}{dt}\frac{a}{c} = a'.$

Soit la relation tensorielle remarquable suivante :

$$T_{00}\left(x^0\right) = \frac{\partial x'^0}{\partial x^0}\frac{\partial x'^0}{\partial x^0}\ T_{00}\left(x'^0\right)$$

$$T_{00}\left(\eta\right) = \frac{dct}{d\eta}\frac{dct}{d\eta}\ T_{00}\left(ct\right)$$

$$T_{00}\left(\eta\right) = c^2\left(\frac{dt}{d\eta}\right)^2 T_{00}\left(ct\right)$$

$$T_{00} = a^2\ \rho$$

L’équation (3) devient :

$$3\frac{\left(\frac{da}{dt}\frac{a}{c}\right)^2}{a^2} + 3k - \lambda a^2 = \frac{8\pi G}{c^4}\ a^2\ \rho$$

$$\frac{3}{c^2}\frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{3k}{a^2} - \lambda = \frac{8\pi G}{c^4}\ \rho$$

$$\frac{3a'^2}{a^2} + \frac{3kc^2}{a^2} - \lambda c^2 = K\ c^2\ \rho$$

Il s’agit de la première équation de Friedmann telle que nous la trouvons dans sa publication de 1922.

→ a est le rayon d’expansion de l’Univers tel que défini par le modèle standard de la cosmologie,

→ k est le coefficient décrivant selon sa valeur à *1 ,0, –1* un Univers respectivement de courbure positive, nulle, négative ($k = 1$ dans la publication de Friedmann de 1922),

→ G est la constante universelle de Newton,

→ c est la constante de la vitesse de la lumière,

→ ρ est la densité d’énergie de la matière cosmique pour $K = \frac{8\pi G}{c^4}$ sachant que pour Friedmann et Einstein $K = \frac{8\pi G}{c^2}$ car ρ est une densité de matière,

→ λ est la constante cosmologique. Dans la publication de Friedmann, l'équation n'est pas affectée du coefficient c^2 car Friedman intègre ce coefficient c^2 dans son expression de λ .

La deuxième équation de Friedmann s'obtient en dérivant la première par rapport au temps puis en faisant intervenir dans le résultat obtenu l'équation traduisant le premier principe de la thermodynamique. L'univers est considéré comme un système isolé qui n'échange aucune chaleur avec l'extérieur.

Tout calcul fait, on obtient :

$$\frac{a'^2}{a^2} + \frac{2aa''}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} - \lambda c^2 = -K c^2 P$$

qui est une équation différentielle du deuxième ordre en t (temps cosmique) à coefficients constants et à second membre constant. Le coefficient k est égal à *1* et la pression P est considérée comme nulle dans la publication de Friedmann de 1922.

4.3- Le modèle périodique et fermé de 1922

Dans son article de 1922, Friedmann a pour but de déduire la structure géométrique de l'Univers à partir du principe cosmologique que nous avons vu au §2.2.3.a.

Si les hypothèses physiques sont celles d'Einstein et de De Sitter, puisqu'elles sont issues du principe cosmologique, Friedmann émet l'hypothèse que l'on ne trouve ni chez Einstein, ni chez De Sitter, qui se résume au fait que si l'espace est de courbure constante à un instant donné, son rayon de courbure peut varier en fonction du temps. Il suppose dans cet article de 1922 que cette courbure est positive.

La dynamique de ce cosmos dominé principalement par la matière, est déterminée par une loi de variation de son rayon « a » en fonction du temps « t » sous la forme paramétrique suivante :

$$a = \frac{A}{2}(1 - \cos\eta) \quad (4) \qquad \text{et} \qquad t = \frac{A}{2c}(\eta - \sin\eta) \quad (5)$$

dans laquelle :

- « A » représente le rayon de l'univers dans sa phase d'expansion maximale,
- « c » est la vitesse de la lumière,
- « η » est l'angle obtenu par changement de variable dans le procédé d'intégration de la première équation différentielle de Friedmann dans un univers homogène, isotrope, de pression négligeable par rapport à la densité de matière. Cet angle peut aussi être interprété comme la distance paramétrique angulaire de l'horizon cosmologique au temps « t »,
- « t » est le temps cosmique. Selon la relativité restreinte, ce temps est le temps propre de l'observateur, c'est-à-dire le temps local associé à la galaxie dans laquelle il se trouve.

Nous montrerons en annexe C.3 que le système des deux équations paramétriques précédentes est obtenu en intégrant la première équation de Friedmann munie des hypothèses suivantes :

- la constante cosmologique est négligeable comme mentionné par Friedmann dans son article de 1922,
- l'Univers est dominé par la matière cosmique non relativiste sachant que la densité relativiste sous forme de rayonnement est négligeable.

- La courbe $a(\eta)$ résultant du système paramétrique représenté par les équations (4) et (5) s'appelle une cycloïde.
- La fonction « a » telle que représentée par l'équation (4) est tracée en fonction de l'angle η auquel correspond point par point un temps t calculé au moyen de l'équation (5).
- La fonction $a(\eta)$ est définie dans le domaine $\eta \subset [0, 2\pi]$.
- Calculons la dérivée première de la fonction $a(t)$:

L'équation (5) permet d'écrire $\frac{dt}{d\eta} = \frac{A}{2c} - \frac{A}{2c}\cos\eta$, soit $\frac{d\eta}{dt} = \eta'(t) = \frac{2c}{A(1-\cos\eta)}$.

L'équation (4), $a = \frac{A}{2}(1-\cos\eta)$, est une fonction de fonction de la forme $y = f[u(t)]$, qui admet pour dérivée première $y' = f'(u)u'(t)$ c'est-à-dire $a'(t) = a'(\eta)\eta'(t)$.

Sachant que $a'(\eta) = \frac{da}{d\eta} = \frac{A}{2}\sin\eta$, la dérivée première cherchée, matérialisant la vitesse d'expansion ou de contraction de l'univers est :

$$a'(t) = \frac{da}{dt} = \frac{A}{2}\sin\eta \; \frac{2c}{A(1-\cos\eta)} = c\frac{\sin\eta}{(1-\cos\eta)}.$$

- Calculons la dérivée seconde de la fonction $a(t)$:

Il s'agit de dériver la fonction $a'(t) = f[\eta(t)]$ qui est, elle aussi, une fonction de fonction encore appelée fonction composée de t.

On peut écrire $a'' = \frac{d^2a}{dt^2} = f'(\eta)\eta'(t)$, soit $f'(\eta) = \frac{da'}{d\eta} = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{c\sin\eta}{1-\cos\eta}\right) = \left(\frac{U}{V}\right)'$.

Or nous savons que $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$ d'où $f'(\eta) = \frac{c\cos\eta(1-\cos\eta) - \sin\eta \, c\sin\eta}{(1-\cos\eta)^2}$,

c'est-à dire $f'(\eta) = \frac{-c}{(1-\cos\eta)}$.

On obtient donc

$$a'' = \frac{d^2a}{dt^2} = f'(\eta)\,\eta'(t) = \left[\frac{-c}{(1-\cos\eta)}\right]\left[\frac{2c}{A(1-\cos\eta)}\right] = \frac{-2c2}{A}\,\frac{1}{(1-\cos\eta)^2} \qquad (6).$$

Or l'équation (4), $a = \frac{A}{2}(1-\cos\eta)$, donnant $A = \frac{2a}{(1-\cos\eta)}$, en reportant cette dernière expression obtenue pour A dans l'équation (6), nous obtenons la dérivée seconde cherchée qui matérialise pour l'univers, la décélération de son expansion ou l'accélération de sa contraction $a''(t) = \frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{c^2}{a}\frac{1}{(1-\cos\eta)}$.

- Etude des limites de $a(t)$:
  - Pour $\eta = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$
  - Pour $\eta = \pi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi A}{2c} \quad \Rightarrow \quad a = A$
  - Pour $\eta = 2\pi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi A}{c} \quad \Rightarrow \quad a = 0$ (équation se trouvant dans l'article de 1922).

L'expression « a » est maximale pour $\eta = \pi$ c'est-à-dire pour $t = \frac{\pi A}{2c}$.

- Etude des limites de $a'(t)$:
  - Nous avons $t \to 0$ lorsque $\eta \to 0$:

pour $\eta \to 0$, on obtient la forme indéterminée $a'(t) = c\frac{\sin\eta}{(1-\cos\eta)} \to \frac{0}{0}$

que nous levons en appliquant la règle de Lhôpital qui consiste à dériver le numérateur N et le dénominateur D de l'expression précédente,

soit : $\left(\frac{N'}{D'}\right)_{\eta\to 0} = \left(\frac{c\cos\eta}{\sin\eta}\right)_{\eta\to 0} = \frac{+c}{+0,...} = +\infty$ d'où $a'(t) \to +\infty$ pour $t \to 0^+$

▪ Nous avons $t = \frac{\pi A}{2c}$ lorsque $\eta = \pi$, d'où $a'(t) = c\frac{\sin\eta}{(1-\cos\eta)} = 0$, ainsi la vitesse d'expansion s'annule au temps $t = \frac{\pi A}{2c}$ correspondant à une expansion maximale.

▪ Nous avons $t \to \frac{\pi A}{c}$ lorsque $\eta \to 2\pi$, d'où $a'(t) \to -\infty$

L'étude aux limites de $a'(t)$ peut donc se résumer de la façon suivante :

▪ Pour $t \subset \left]0, \frac{\pi A}{2c}\right]$ la vitesse $a'(t)$ du rayon de l'univers passe de l'infini à zéro, montrant ainsi la décélération de l'expansion. Le signe du vecteur vitesse $a'(t)$ est positif.

▪ Pour $t \subset \left[\frac{\pi A}{2c}, \frac{\pi A}{c}\right[$ la vitesse $a'(t)$ passe de zéro à l'infini (en valeur absolue), montrant l'accélération de la contraction du rayon «a» du monde. Le signe du vecteur vitesse $a'(t)$ est négatif.

- Etude des limites de $a''(t)$:

▪Pour $t \to 0$ c'est-à-dire $\eta \to 0$ on a $a''(t) \to -\infty$

▪Pour $\frac{\pi A}{2c}$ c'est-à-dire $\eta = \pi$ on a $a''(t) = \frac{-c^2}{2A}$

▪Pour $t \to \frac{\pi A}{c}$ c'est-à-dire $\eta \to 2\pi$ on a $a''(t) \to -\infty$

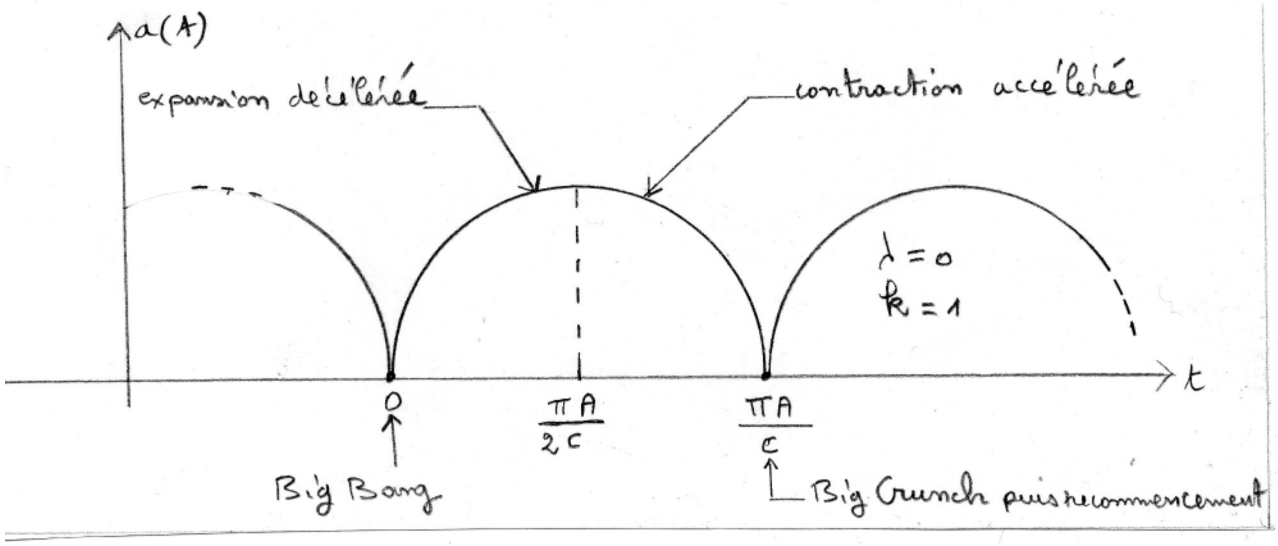
Le signe du vecteur accélération $a''(t)$ est toujours négatif.

- En conclusion :

▪ Pour $t \subset \left]0, \frac{\pi A}{2c}\right]$ le vecteur vitesse $a'(t)$ est positif, le vecteur accélération $a''(t)$ est négatif et agit donc comme une décélération. Au fur et à mesure de l'expansion du rayon $a(t)$ de l'Univers, la vitesse $v = a'(t)$ décroît ainsi que l'énergie cinétique $\frac{1}{2}mv^2$ d'hypothétiques particules que l'on peut supposer subir la vitesse de l'expansion. Ainsi, l'énergie gravitationnelle opposée à l'énergie cinétique viendrait freiner le mouvement d'expansion, jusqu'à l'immobiliser fugitivement au temps $t = \frac{\pi A}{2c}$.

A l'instant précis $t = \frac{\pi A}{2c}$, la gravitation matérialisée par l'accélération $a''(t) = \frac{-c^2}{2A}$ du champ de gravitation dû à la matière cosmique environnante, semble montrer son effet en se mettant à contracter l'univers.

▪ Pour $t \subset \left[\frac{\pi A}{2c}, \frac{\pi A}{c}\right[$ le vecteur vitesse $a'(t)$ est négatif, le vecteur accélération $a''(t)$ est toujours négatif mais agit cette fois-ci comme une accélération car il est de même sens que le vecteur vitesse. Aussi, le rayon $a(t)$ de l'Univers subit une contraction accélérée, il s'effondre sur lui-même, jusqu'à ce que $a(t)$ s'annule puis le cycle reprend selon une périodicité $\frac{\pi A}{c}$ comme l'indique Friedmann et comme montré dans le dessin ci-après.



Pour $t = \frac{\pi A}{2c}$ on a $a(t)=A$

4.4- Commentaires

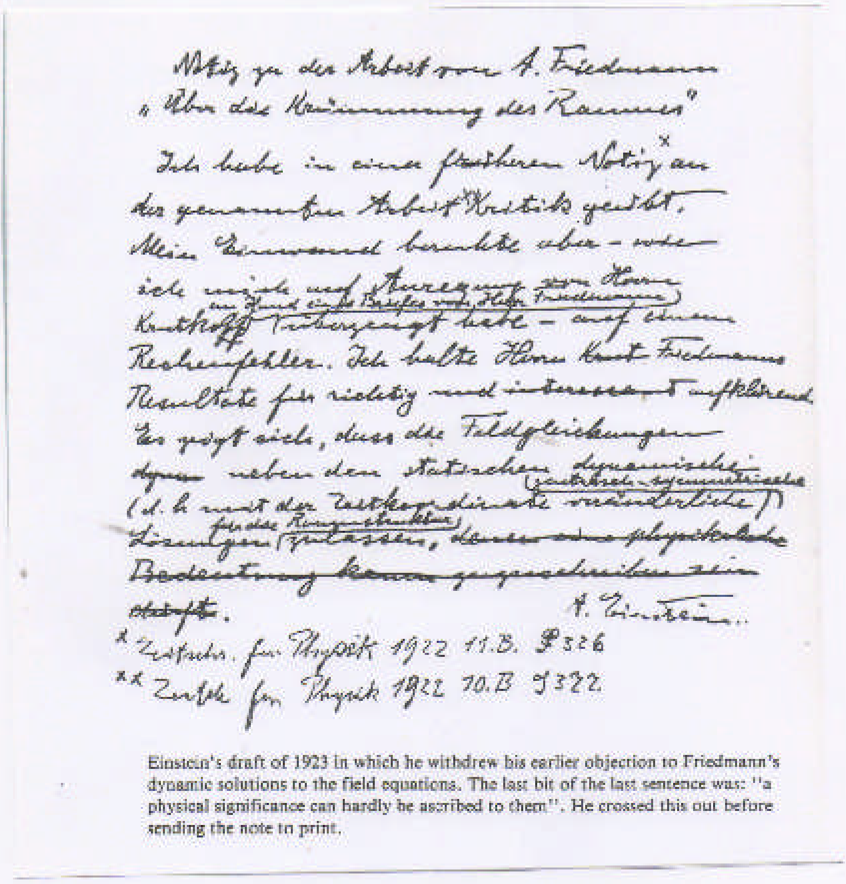
- A partir des équations tensorielles d'Einstein concernant le champ gravitationnel en présence de matière (voir § 2.1.5), Friedmann exprime une solution non statique. Ainsi, il découvre en 1922, de manière purement théorique, la dynamique de l'Univers, c'est-à-dire son expansion possible en fonction du temps ; et ceci bien avant les observations de Hubble sur la vitesse de récession des galaxies en 1929.

La correspondance Einstein-Friedmann via *« Zeitschrift für Physik »* montre qu'Einstein critiqua sévèrement l'article de Friedmann en écrivant qu'il faisait une erreur de raisonnement. Puis quelques mois plus tard, dans le même journal, Einstein reconnaîtra avoir fait une erreur de calcul en interprétant le travail de Friedmann. Il écrira même :

« *Je tiens les résultats de M. Friedmann pour justes et éclairants* ».

L'analyse, à ce sujet, du brouillon d'Einstein ci-après, montre une phrase qu'il n'a pas publiée dans le journal de physique. Cette phrase stipulait qu'il était à peine possible d'attribuer une signification physique à la solution non statique de l'équation tensorielle du champ gravitationnel en présence de matière. C'est dire toute la portée limitée de son acquiescement, qui ne s'appuie donc alors que sur la validité de la solution du point de vue mathématique et rien de plus.

- Friedmann termine son article de 1922 en mentionnant que les connaissances sont insuffisantes pour étayer les équations du modèle par un calcul numérique qui permettrait de décider de son réalisme. Cependant, pour $\lambda = 0$ et une masse d'Univers estimée à 5.10^{21} masses solaires, il détermine une période d'Univers de 10 milliards d'années en ajoutant que ces chiffres n'ont pas d'autres significations qu'une simple illustration de son calcul. L'absence de toute allusion de la part de Friedmann à une vérification possible des résultats auxquels son modèle conduit, relève de la sérénité glaciale du mathématicien. Le véritable inventeur de l'expansion cosmique n'a pas dit que l'expansion devait se voir, alors que la prévision théorique du plus prestigieux phénomène astronomique jamais observé était à sa portée.



Notiz zu der Arbeit von A. Friedmann
„Über die Krümmung des Raumes"

Ich habe in einer früheren Notiz[x] an der genannten Arbeit[xx] Kritik geübt. Mein Einwand beruhte aber – wie ich mich ~~auf Anregung von Herrn~~ Krutkoff an Hand eines Briefes von Herrn Friedmann überzeugt habe – auf einem Rechenfehler. Ich halte Herrn ~~Kurt~~ Friedmanns Resultate für richtig ~~und interessant~~ aufklärend. Es zeigt sich, dass die Feldgleichungen ~~dyn~~ neben den statischen dynamische (zentrisch-symmetrische) (d. h. mit der Zeitkoordinate veränderliche) für die Raumstruktur Lösungen zulassen, ~~denen eine physikalische Bedeutung kaum zuzuschreiben sein dürfte~~.

A. Einstein.

[x] Zeitschr. für Physik 1922 11. B. S. 326

[xx] Zeitschr. für Physik 1922 10. B S. 322

Einstein's draft of 1923 in which he withdrew his earlier objection to Friedmann's dynamic solutions to the field equations. The last bit of the last sentence was: "a physical significance can hardly be ascribed to them". He crossed this out before sending the note to print.

Brouillon concernant l'acquiescement d'Einstein à propos des solutions dynamiques des équations tensorielles de la gravitation (en présence de matière) trouvées par Alexandre Friedmann.

Publié dans le journal Zeitschrift für Physic vol. XVI, 1923, p. 228.

(P. Kersberg, 1989. The Invented Universe. Première page).

<u>Traduction</u> (F. Balibar) :

Note sur le travail de A. Friedmann « Sur la courbure de l'espace »

Dans une note antérieure X, j'ai critiqué le travail susmentionné XX. Mais - comme je m'en suis convaincu à l'instigation de M. Krutkoff et grâce à une lettre de M. Friedmann - mon objection était fondée sur une erreur de calcul. Je tiens les résultats de M. Friedmann pour juste et éclairants. Ils montrent que les équations du champ admettent de l'espace à symétrie centrale, en plus des solutions statiques, des solutions dynamiques c'est-à-dire variant avec les coordonnées de temps).

<u>Phrase biffée</u> : Solutions auxquelles il est à peine possible d'attribuer une signification physique.

X Zeitschrift für Physik 1922 vol.11.B p.228 ; XX Zeitschrift für Physik 1922 vol.10.B p.377.

Chapitre 5

Le modèles dynamique de Lemaître (1927) et le modèle standard actuel

Georges Lemaître (1894-1966) est un chanoine belge, ingénieur, astronome, cosmologiste et passionné de mathématiques. Tout au long de sa vie professionnelle, il a de nombreux échanges aussi bien avec des théoriciens comme Einstein et Eddington qu'avec des astronomes de génie tels que Hubble et Slipher.

IL publie en 1927 un article de cosmologie [73] qui montre que les équations tensorielles d'Einstein relatives au champ de gravitation en présence de matière, admettent des solutions cosmologiques non statiques. Ces solutions conduisent aux deux équations de Friedmann que nous trouvons au §2 page 52 de son article. Lemaître ne fait aucune référence aux travaux antérieurs du savant russe datant de 1922, pourtant publiés dans Zeitschrift für Physik, la revue de physique théorique la plus connue à cette époque. Cette absence est étrange. On peut expliquer ceci par le fait que Lemaître ne connaissait pas l'allemand [74]. De son aveu même, les travaux de Friedmann lui ont été signalés par Einstein au fameux Congrès Solvay de 1927.

En fait, si Friedmann n'a pas su associer à ses travaux théoriques la dimension observationnelle, il n'en fut pas de même pour Lemaître qui affiche la volonté de tenir compte des données d'observation de l'époque. Et pour cela, il se rend aux Etats-Unis au début des années 1920 pour compulser les données d'observation de Hubble sur les distances des nébuleuses (que l'on n'appelle pas encore galaxies) et leur vitesse radiale, en même temps qu'il entreprend une thèse de doctorat sur les champs gravitationnels dans les fluides en relativité générale [75].

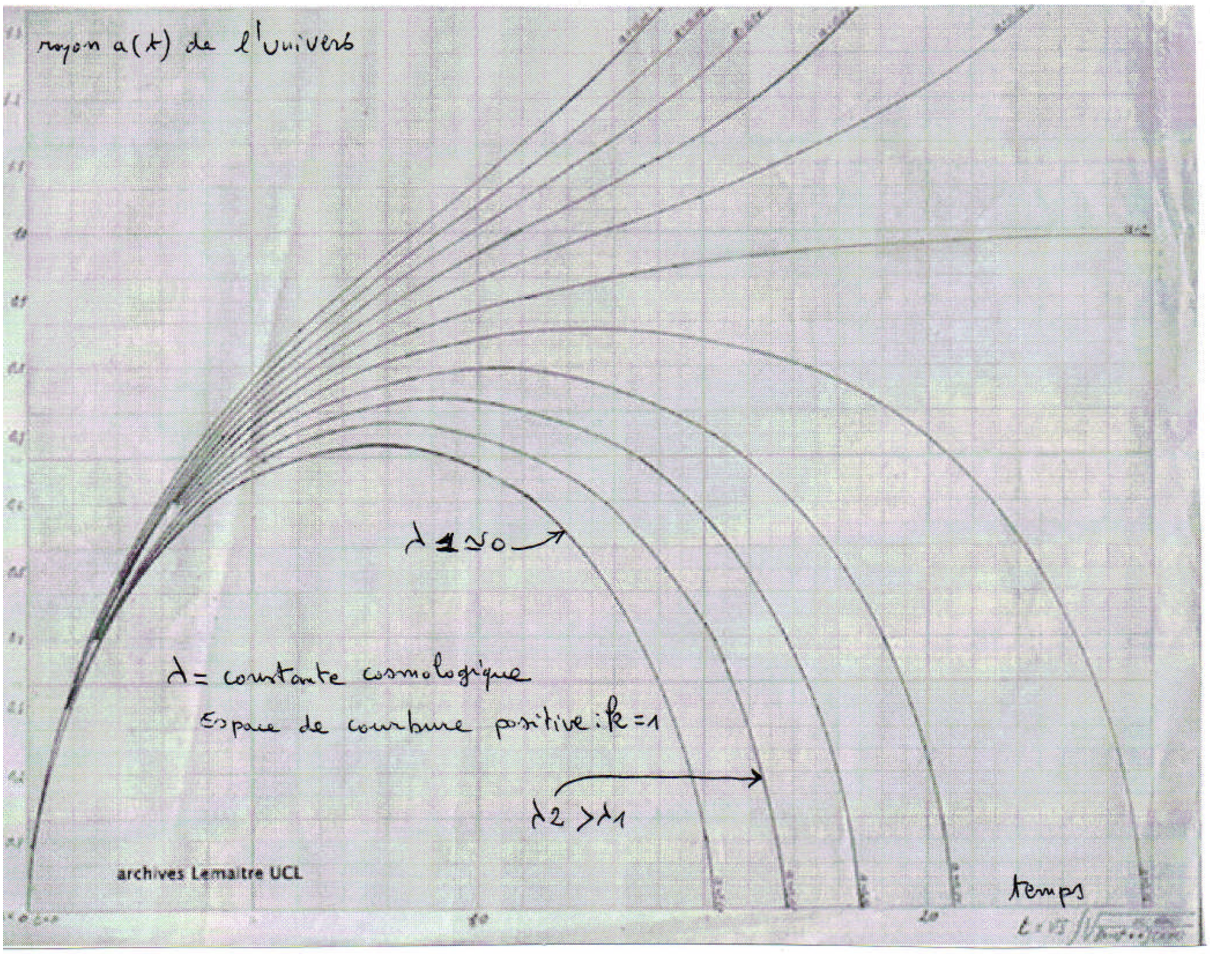
Ainsi, comme indiqué dans l'article de Lemaître de 1927, en utilisant les 42 nébuleuses figurant dans la liste de Hubble, Lemaître introduit pour la première fois l'idée que les vitesses de récession des nébuleuses extragalactiques sont la conséquence cosmique de l'Univers dans le cadre de la relativité générale. Lemaître énonce donc clairement la relation de proportionnalité entre la vitesse de récession et la distance des galaxies, cette loi que Hubble ne publiera qu'en 1929.

Soulignons que Hubble, auquel est attribuée la paternité de l'expansion l'Univers, n'a admis qu'avec beaucoup de réticence que la récession des galaxies puisse résulter de l'expansion de l'espace. Et dans un de ses ouvrages de 1936, *« The Realm of the Nebulae »*, il commet l'erreur de considérer le décalage spectral comme un pur effet Doppler dû à une vitesse de fuite propre des galaxies et non pas comme un effet de l'expansion, c'est-à-dire de l'augmentation du rayon d'échelle de l'espace au cours du temps.

Au lieu de considérer le monde statique d'Einstein comme stade initial à partir duquel commence le modèle dynamique, Lemaître impressionné par la nouvelle mécanique quantique, préfère penser que l'Univers a commencé son expansion à partir d'un état initial singulier qu'il nomme l'atome primitif. Ainsi, entre Einstein et le savant belge va se creuser le fossé d'une controverse qui ne se résoudra pas : celle de la naissance même de l'Univers [76].

Nous trouvons ci-après le diagramme réalisé par Lemaître en 1927 (issu de ses archives) et qui montre les évolutions temporelles du rayon de l'Univers en fonction de la constante cosmologique pour un espace de courbure positive *(k=1)*. On passe ainsi de l'Univers fermé de Friedmann que nous avons vu précédemment à l'Univers dynamique « ouvert » dans le temps, c'est-à-dire en expansion perpétuelle quelle que soit sa courbure positive.

Pour un rayon d'Univers *a(t)* infiniment grand et devenant rapidement croissant, le deuxième terme du membre de gauche de la première équation de Friedmann (voir §4.2) devient négligeable au point de pouvoir s'affranchir de la constante *k*. Nous sommes donc à la limite d'un Univers quasiment plat (quasi-euclidien avec *k* très peu différent de zéro) tel que les données de 2003 obtenues par le satellite américain WMAP nous le suggèrent et que confirme l'actuel satellite Planck lancé le 14 mai 2009 (mission ESA : European Space Agency).



La dynamique d'un Univers plat (euclidien avec *k=0*) dominé par la matière classique, la matière noire et l'énergie noire modélisée par la constante cosmologique λ de la relativité générale, est déterminée par une loi de variation de son rayon « *a* » en fonction du temps « *t* » de la forme suivante [77] :

$$a(t) = a_0\ \hat{a}(t) = a_0 \left(\sqrt{\frac{\Omega m0}{\Omega\lambda 0}}\right)^{2/3} \left(sh\left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega\lambda 0}\, H_0 t\right)\right)^{2/3} \qquad (7)$$

dans laquelle :

- Ω_{m0} = 0,26 est le paramètre cosmologique (constante) de densité associé à la matière noire et à la matière classique (époque actuelle). L'Univers serait composé à 83% d'une matière inconnue dite noire car la matière classique n'explique pas, à elle seule, la dynamique des amas de galaxies.
- $\Omega_{\lambda 0}$ = 0,74 est le paramètre cosmologique (constante) de densité associé à l'énergie noire (époque actuelle). La constante λ serait responsable de l'accélération de l'Univers. La théorie moderne l'associe à une composante énergétique (l'énergie noire) dont la nature donne naissance à beaucoup de théories encore très spéculatives.

- a_0 est le rayon d'Univers (époque actuelle).
- $H_0 = 72$km s^{-1} Mpc^{-1} est la constante de Hubble de l'époque actuelle.
- $a(t)$ est le rayon de l'Univers.
- $\hat{a}(t)$ est le rayon réduit de l'Univers, sans dimension, dont l'écriture résulte du premier principe de la thermodynamique appliqué à un cosmos qui engendre lui-même l'espace dans lequel il s'étend et perdure. Ce cosmos peut être considéré comme un système isolé qui n'échange aucune chaleur avec l'extérieur qui n'existe pas et dont la pression est négligeable. La densité de matière ρ est donc constante ($a_0{}^3\rho_0 = a^3(t)\,\rho(t)$) et on peut écrire : $\rho(t) = \rho_0\,[\ \hat{a}\ (t)\ ]^{-3}$.

Les données consolidées sont toutes fournies par le satellite WMAP en 2010. Nous montrerons en annexe C.4 que l'équation (7) est obtenue en intégrant, comme suggéré à l'époque par le savant belge pour ce type de travaux, la première équation de Friedmann-Lemaître que l'on trouve dans son article de 1927 avec les hypothèses récentes suivantes :

- contrairement au modèle précédent de Friedmann, il est tenu compte de la constante cosmologique,
- en plus de l'énergie noire, l'Univers est dominé par la matière cosmique non relativiste (la matière classique et la matière noire) sachant que la densité relativiste sous forme de rayonnement est négligeable,
- afin de retrouver le modèle standard actuel, nous tenons compte des mesures fournies par le satellite WMAP et comme ces mesures le suggèrent nous considérons un Univers plat euclidien ($k = 0$), et ceci depuis l'origine du monde par hypothèse.

L'équation (7) peut se mettre sous la forme :

$$a(x) = \beta(shx)^{2/3} \quad \text{avec} \quad \beta = a_0\ 0{,}71 \quad \text{et} \quad x = \frac{3}{2}\sqrt{\Omega\lambda 0}\,H_0 t \quad (8).$$

- La fonction $a(x)$ est définie dans le domaine $x \subset [0, +\infty[$

- Calculons la dérivée première de la fonction $a(x)$ par rapport à x : $a = \beta(shx)^{2/3} = \beta\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^{2/3}$:

Il s'agit d'une fonction de la forme $a = \beta(u)^n$ avec $u = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $n = \frac{2}{3}$,

soit $\frac{da}{dx} = a' = \beta n (u)^{n-1} u' = \frac{2}{3}\beta u^{-1/3} u' = \frac{2}{3}\beta\left[\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^{-1/3}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\right] = \frac{2}{3}\frac{\beta}{\sqrt[3]{4}}\left[\left(\frac{e^x + e^{-x}}{(e^x - e^{-x})^{1/3}}\right)\right]$

- Calculons la dérivée seconde de la fonction $a(x)$ par rapport à x : $\frac{d^2a}{dx^2} = a'' = \frac{da'}{dx}$:

La dérivée première est une expression de la forme $a' = \frac{2}{3}\frac{\beta}{\sqrt[3]{4}}\left[\frac{U}{V}\right]$

dans laquelle $U = (e^x + e^{-x})$ et $V = v^n = (e^x - e^{-x})^{1/3}$, soit $\frac{da'}{dx} = a'' = \frac{2}{3}\frac{\beta}{\sqrt[3]{4}}\left[\frac{U'V - V'U}{V^2}\right]$

dont $U' = (e^x - e^{-x})$ et $V' = (v^n)' = n v^{n-1} v' = \frac{1}{3}(e^x - e^{-x})^{-2/3}(e^x + e^{-x})$.

On obtient donc : $a'' = \frac{2}{3}\frac{\beta}{\sqrt[3]{4}}\left[(e^x - e^{-x})^{2/3} - \frac{1}{3}\frac{(e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^{4/3}}\right]$

- Etude des limites de $a(x)$:
  - Pour $x = 0 \Rightarrow a = 0$
  - Pour $x \to +\infty \Rightarrow a \to +\infty$ sans asymptote

- Etude des limites de $a'(x)$:

▪ Pour $x \to 0^+ \Rightarrow a' \to +\infty$

▪ Pour $x \to +\infty \Rightarrow a' \to +\infty$

- Etude des limites de $a''(x)$:

▪ $x \to 0^+ \Rightarrow a'' \to -\infty \Rightarrow$ concavité de $a(t)$ tournée vers les $a < 0$

▪ $x \to +\infty \Rightarrow a'' \to +\infty \Rightarrow$ concavité de $a(t)$ tournée vers les $a > 0$

- Calculons le temps t_i correspondant à la transition « décélération – accélération » de l'univers :

L'égalité $a''(x_i) = a''(t_i) = 0$ est satisfaite lorsque la courbe $a(t)$ amorce son point d'inflexion, c'est-à-dire lorsque l'expansion du monde passe de sa phase décélérée à sa phase accélérée.

Soit $a''(x) = 0$ c'est-à-dire lorsque $\left[\left(e^x - e^{-x}\right)^{2/3} - \frac{1}{3}\frac{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}{\left(e^x - e^{-x}\right)^{4/3}}\right] = 0$, ce qui est équivalent à

$e^{2x} + \frac{1}{e^{2x}} = 4$ qui donne $X + \frac{1}{X} = 4$ en posant $X = e^{2x}$, c'est-à-dire $X^2 - 4X + 1 = 0$

dont la solution réaliste est $x_i = 0{,}66$ c'est-à-dire $t_i = 6{,}9$ milliards d'années compte tenue des mesures effectuées par le satellite WMAP (voir expression 8).

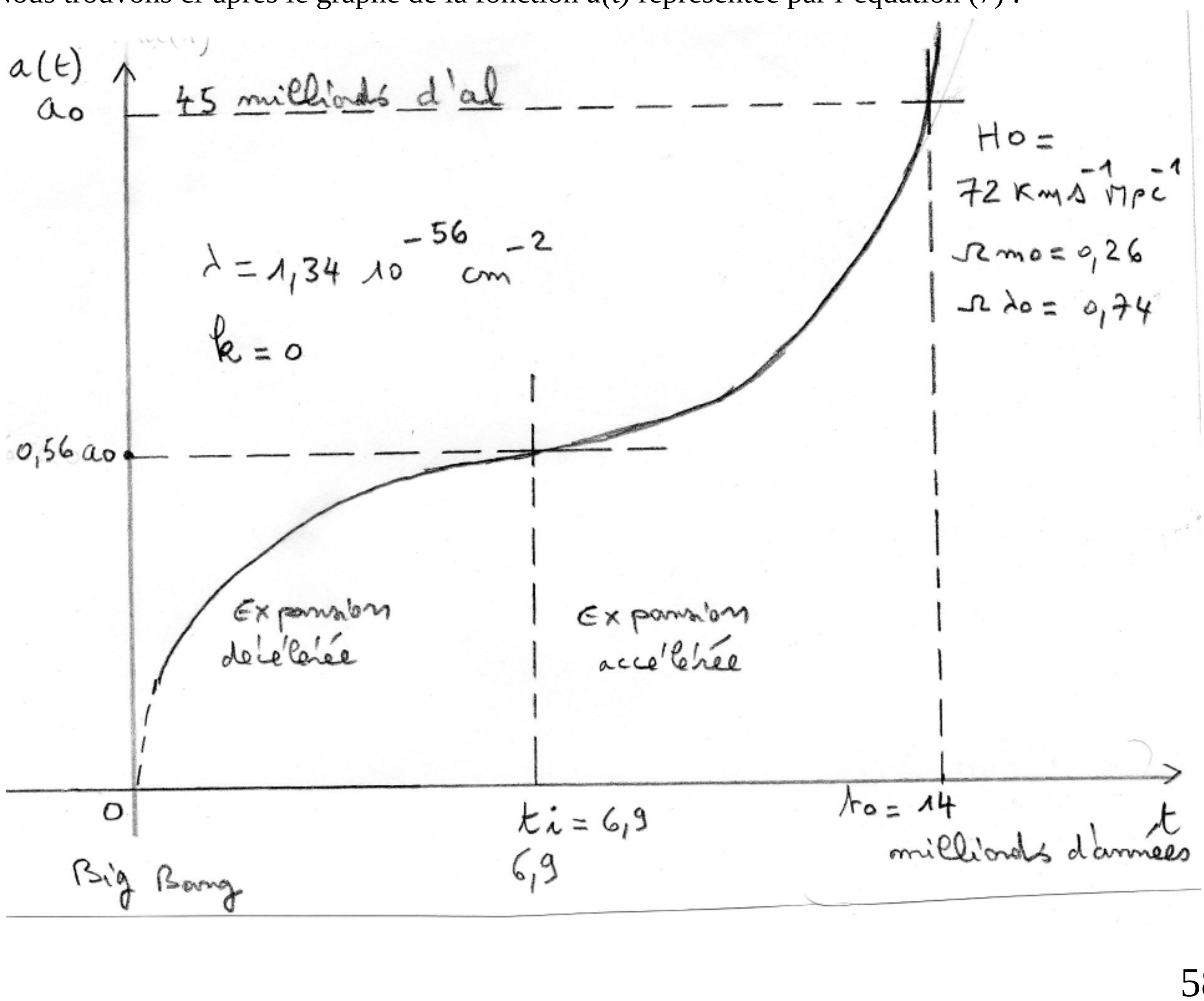
- Rayon $a(t_i)$ de l'univers à la transition « décélération – accélération » de l'expansion :

$$a(x_i) = a(t_i) = \beta(sh x)^{2/3} = a_0\ 0{,}71\,(sh 0{,}66)^{2/3} = a_0\ 0{,}71 \left(\frac{e^{0{,}66} - e^{-0{,}66}}{2}\right)^{2/3} = 0{,}56\ a_0 .$$

- Âge de l'Univers:

$$H_0 = \frac{da/dt}{a_0} \Rightarrow dt = \frac{da}{H_0 a_0} \Rightarrow \int_0^{t_0} dt = \int_0^{a_0} \frac{da}{H_0 a_0} \Rightarrow t_0 = 1/H_0 \approx 14 \text{ Milliards d'années.}$$

- Nous trouvons ci-après le graphe de la fonction $a(t)$ représentée par l'équation (7) :



Chapitre 6

L'Univers euclidien d'Einstein-De Sitter (1932)

Après la découverte de Hubble et de sa publication en 1929 sur la récession des nébuleuses, Einstein admet la réalité de l'expansion et regrette d'avoir introduit la constante cosmologique λ, qu'il va considérer longtemps comme la plus grande erreur de sa vie.

Et cela d'autant plus qu'en 1930, Eddington prouve l'instabilité du modèle statique de 1917. Aussi, Einstein publie en 1931 un article *« Zum Kosmologischen Problem der allgemeinen Relativitätstheorie »* où il cite Friedmann et ses deux équations différentielles, et où il reconnaît définitivement l'expansion, sans introduire le terme λ dont il écrit n'être *« pas satisfaisant du point de vue théorique.»* (traduction F. Balibar).

En outre, Einstein mentionne : « *Il convient donc ici de décider dans quelle mesure nous pouvons, comme le fait Friedmann, négliger l'influence du rayonnement. »*

Dans cet article de 1931, Einstein exprime ce que l'on nomme aujourd'hui la constante de Hubble, mais il ne parle pas du rapport de Lemaître de 1927 qui contient à peu près tout ce dont il est question dans cet article.

Contrairement à leur conception en 1917 d'un Univers statique, Einstein et De Sitter écrivent ensemble l'article *« On the Relation between the Expansion and the Mean Density of the Universe »* présenté à la National Academy of sciences (Proceedings, volume xviii, 1932, pages 213-214) par l'Observatoire du Mont Wilson, le 25 janvier 1932. Dans cet article, ils montrent qu'un Univers euclidien en expansion est aussi possible sans l'introduction d'une courbure spatiale, d'une pression et d'une constante cosmologique. Il suffit pour cela que la densité de matière cosmique ρ soit égale à la densité critique ρ_c c'est-à-dire comme nous le verrons au paragraphe C.4, que l'énergie potentielle gravitationnelle compense exactement l'énergie cinétique dans un contexte de champ gravitationnel à symétrie sphérique.

Cet article est novateur dans le sens où il pose l'hypothèse d'une matière noire *« concentrée dans les nébuleuses »* car les observations de l'époque indiquent une densité de matière classique observable très inférieure à la densité critique requise pour le modèle. La densité de matière cosmique ρ est donc associée à la matière classique et à la matière noire.

Dans cet article de 1932, Einstein et De Sitter arrivent à l'équation $\frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{cdt}\right)^2 = \frac{1}{3}\frac{8\pi G}{c^2}\rho$ qui n'est autre que la première équation de Friedmann dans laquelle $k=0$ (Univers euclidien du fait que $\rho = \rho_c$) et $\lambda = 0$.

La dynamique d'un Univers plat (euclidien car $k=0$) dominé par la matière classique et la matière noire, sans énergie noire (modélisée par la constante cosmologique λ de la relativité générale), est déterminée par une loi de variation de son rayon « a » en fonction du temps « t » de la forme suivante : $a(t) = K' t^{2/3}$ avec $K' = a_0 \left(\frac{3}{2}H_0\right)^{2/3}$.

Nous montrerons en annexes que la fonction précédente est obtenue en intégrant la première équation de Friedmann dans laquelle $\lambda = k=0$.

Conclusion

Depuis les travaux d'Einstein, de De Sitter, de Friedmann et de Lemaître, la cosmologie est étroitement associée aux développements de l'astronomie et de l'astrophysique, elles-mêmes fortement dépendantes des progrès de la physique.

En fait, c'est essentiellement par l'observation que la cosmologie a pu progresser. La découverte de l'existence d'autres galaxies et de leur fuite les unes par rapport aux autres (le résultat en 1929 des observations de Hubble), a étayé les raisonnements de Friedmann et de Lemaître sur la dynamique de l'Univers et par la-même le bien fondé de la relativité générale.

De là, une remontée vers le passé et la découverte du fond diffus cosmologique (FDC) par Penzias et Wilson en 1964. Ce fond diffus constitue le rayonnement fossile provenant de l'Univers datant de 380000 ans lorsque la température, en se refroidissant, a provoqué la naissance de la matière atomique. En effet, en devenant moins opaque, l'espace a permis à la lumière de s'échapper. Et c'est bien cette détection du FDC qui a donné foi à l'idée de l'atome primitif, préfigurant la notion de Big-Bang qui fut, avant 1964, un terme péjoratif inventé par Fred Hoyle pour dénigrer dans une série d'émissions radiophoniques des années 1950, la théorie de Lemaître soutenue par George Gamow.

Parmi les modèles que nous avons analysés, le plus pertinent, celui qui se rapproche le plus du modèle standard actuel est celui de Lemaître. En effet ce modèle répond à la fois aux trois critères suivants :

- il est réaliste du point de vue de la connaissance actuelle de la gravitation : la théorie de la relativité générale,
- il est explicatif de l'observation de l'Univers (principe de causalité),
- il est prédictif dans le sens où la théorie de l'atome primitif (le Big Bang) a prédit l'existence du Fond Diffus cosmologique.

Cependant, si le mémoire de 1917 d'Einstein est resté un document d'une grande importance dans son œuvre, c'est certainement parce que la pensée relativiste, par sa remise en question de l'Univers, a soulevé un renouveau concernant l'interrogation cosmologique de la philosophie de la nature que le positivisme en physique avait fait s'effacer. En effet, la mécanique classique, au début du 20^{e}s, avait été inapte à favoriser une représentation cohérente de l'Univers total. Einstein a, pour ainsi dire, reposé le problème en essayant de le solutionner.

L'histoire des sciences montre que les progrès de la connaissance sont associés à des réflexions issues de théories basées sur des postulats *a priori*, et que toute la subtilité consiste à confronter la théorie à l'expérience afin d'écarter toute spéculation. C'est ce à quoi Lemaître s'est efforcé, en effectuant sa tournée des observatoires américains (1925) avant de publier son article sur la dynamique de l'Univers. Il fut ainsi le premier à oser émettre l'idée que les vitesses de récession des nébuleuses puissent être liées à l'expansion de l'Univers. Et de là, le concept de l'atome primitif préfigurant, pour l'abbé Lemaître, la notion de commencement développé dans son article de 1931 *« The expanding Universe »* (Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol.91, p490-501).

Il semblerait que l'homme reste, tout au long de sa vie, influencé par le poids de ses préjugés et la manière dont il s'est construit. Einstein, qui avait révolutionné la science en 1905 en abordant la relativité du temps, n'a pas osé, dix ans plus tard, remettre en question le dogme de l'univers en vigueur au début du 20^{e}s. En effet, il en est venu à « bricoler » ses équations pour décréter que l'Univers ne peut être que statique et donc fini, c'est-à-dire figé pour l'éternité.

De même Friedmann, excellent mathématicien, affiche une sérénité glaciale vis-à-vis des mathématiques, car pas le moins du monde ému par ses découvertes, il ne mentionne une quelconque allusion, dans ses mémoires, sur une vérification possible de ses hypothèses par l'observation.

Et que penser de Hubble qui considère le décalage spectral qu'il observe, comme un pur effet Doppler dû à une vitesse de fuite propre des galaxies, et non pas comme un effet de l'expansion.

Annexe A

Définition et propriétés des tenseurs [43, 78, 79, 80]

A.1- Notion d'Espace Vectoriel

Par définition, on appelle « Espace » un « Ensemble » muni d'une structure. Un Espace Vectoriel E est une structure composée d'éléments appelés des vecteurs notés $\vec{A}$ (représenté en caractère gras par **A**) , $\vec{B}$ (c'est-à-dire **B**), munis d'une loi de composition interne (notée +), construit à partir d'un corps K (souvent celui des nombres réels ou des nombres complexes), et vérifiant les propriétés suivantes :

$\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$, $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0}$, $K.\mathbf{A}=K\mathbf{A} \Rightarrow -1.\,\mathbf{A}=-\mathbf{A}$ (*K* est un élément du corps K)

Les EV munis d'un produit scalaire sont des EV Préhilbertiens appelés également EV Pré-euclidiens.

Si K est le corps R ou C, on identifie $E_n = K^n$ qui est un EV de dimension n, à un espace affine ε_n de même dimension. On muni donc E_n d'une base définie par les vecteurs de base suivants : $\mathbf{e}_\alpha$ avec $1 \leq \alpha \leq n$.

A.2- Composantes contravariantes d'un vecteur : vecteur contravariant

Par définition, on appelle composantes contravariantes d'un vecteur **A** les uniques éléments A^α de K tel que $\mathbf{A}= \sum_{\alpha=1}^{n} A^\alpha \mathbf{e}_\alpha = A^1\,\mathbf{e}_1 + \ldots + A^n\,\mathbf{e}_n$.

Les composantes contravariantes sont donc les composantes habituelles de l'algèbre linéaire. Et en appliquant la convention d'Einstein sur l'indice répété α on écrit pour simplifier : $\mathbf{A}= A^\alpha\,\mathbf{e}_\alpha$.

A.3- Composantes covariantes d'un vecteur : vecteur covariant

Pour l'espace vectoriel précédent E_n rapporté à la base $\mathbf{e}_\alpha$, le produit scalaire de **A** par un vecteur de base $\mathbf{e'}_\mu$ s'écrit $\mathbf{A}.\,\mathbf{e'}_\mu = (A^\alpha\,\mathbf{e}_\alpha).\,\mathbf{e'}_\mu = A^\alpha\,(\mathbf{e}_\alpha.\mathbf{e'}_\mu) = A'_\mu$

Par définition, ces produits scalaires notés A'_μ s'appellent les composantes covariantes du vecteur **A** dans la base $\mathbf{e}_\alpha$ et ces composantes sont donc définies par $A'_\mu = \mathbf{A}.\,\mathbf{e'}_\mu$

De même, on peut écrire $\mathbf{A}.\,\mathbf{e}_\alpha = (A'^\mu\,\mathbf{e'}_\mu).\,\mathbf{e}_\alpha = A'^\mu\,(\mathbf{e'}_\mu.\mathbf{e}_\alpha) = A_\alpha$ d'où par définition ces produits scalaires s'appellent les composantes covariantes du vecteur **A** dans la base $\mathbf{e'}_\mu$ et ces composantes sont donc définies par $A_\alpha = \mathbf{A}.\,\mathbf{e}_\alpha$

A.4- Particularité des composantes des vecteurs contravariants et covariants par rapport à celles de leur vecteur de base ; indice répété et indice libre

Ce paragraphe tient largement compte des définitions établies au §A.2 et au §A.3.

- <u>Montrons que les composantes contravariantes de **A** se transforment de manière contraire à celles des vecteurs de base (d'où la dénomination « contravariantes ») :</u>

Soit **A** à la fois exprimé dans la base $\mathbf{e}_\alpha$ tel que $\mathbf{A} = A^\alpha\,\mathbf{e}_\alpha$ et dans la base $\mathbf{e'}_\mu$ tel que $\mathbf{A} = A'^\mu\,\mathbf{e'}_\mu$ (relations a).

▪ Dans la base $\mathbf{e}_\alpha$ la différentielle totale du vecteur $\mathbf{A} = f\,(x^\alpha)$ s'écrit: $d\mathbf{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha = \mathbf{e}_\alpha\, dx^\alpha$

▪ Dans la base $\mathbf{e'}_\mu$ la différentielle totale du vecteur $\mathbf{A} = f\,(x'^\mu)$ s'écrit : $d\mathbf{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x'^\mu} dx'^\mu = \mathbf{e'}_\mu\, dx'^\mu$

Sachant que dans l'espace euclidien considéré le vecteur **A** est un invariant, les deux relations précédentes permettent d'écrire :

$$\partial x^{\alpha}\, \boldsymbol{e}_{\alpha} = \partial x'^{\mu}\, \mathbf{e'}_{\mu} \Rightarrow \boldsymbol{e}_{\alpha} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\, \mathbf{e'}_{\mu} \quad \text{(relation b).}$$

De même les relations (a) donnent :

$$A^{\alpha}\, \mathbf{e}_{\alpha} = A'^{\mu}\, \mathbf{e'}_{\mu} \Rightarrow A^{\alpha} = \frac{e'_{\mu}}{e_{\alpha}} A'^{\mu} \Rightarrow A^{\alpha} = \frac{\frac{\partial \vec{A}}{\partial x'^{\mu}}}{\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^{\alpha}}} A'^{\mu} \Rightarrow A^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} A'^{\mu} \quad \text{(relation c).}$$

Les relations (c) et (b) montrent que les composantes contravariantes de **A** se transforment de manière contraire de celles des vecteurs de base.

- <u>Montrons que les composantes covariantes de **A** se transforment comme les vecteurs de base (d'où la dénomination « covariantes ») :</u>

▪ Dans la base $\mathbf{e}_{\alpha}$ nous pouvons toujours écrire : $d\mathbf{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x^{\alpha}} dx^{\alpha} = \mathbf{e}_{\alpha}\, dx^{\alpha}$

▪Dans la base $\mathbf{e'}_{\mu}$ nous pouvons aussi toujours écrire : $d\mathbf{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x'^{\mu}} dx'^{\mu} = \mathbf{e'}_{\mu}\, dx'^{\mu}$

Sachant que dans l'espace euclidien considéré le vecteur **A** est un invariant, les deux relations précédentes permettent d'écrire : $\partial x^{\alpha}\, \boldsymbol{e}_{\alpha} = \partial x'^{\mu}\, \mathbf{e'}_{\mu} \Rightarrow \boldsymbol{e}_{\alpha} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\, \mathbf{e'}_{\mu}$ (relation b).

De plus, nous savons que : $A_{\alpha} = \mathbf{A}.\, \mathbf{e}_{\alpha} = \mathbf{A}.\, \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\, \mathbf{e'}_{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} (\mathbf{A}.\, \mathbf{e'}_{\mu}) = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} A'_{\mu}$

D'où : $A_{\alpha} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} A'_{\mu}$ (relation d).

Les relations (d) et (b) montrent que les composantes covariantes de **A** se transforment comme les vecteurs de base.

- <u>Indice répété et indice libre :</u>

Dans les relations (b), (c), (d), l'indice répété μ (encore appelé indice muet) est l'indication de la sommation (voir §2.1.3) et la variation de l'indice se fait sur tout le domaine possible, par exemple de 0 à n.

L'indice libre α n'est pas répété, il n'y a donc pas de sommation à effectuer sur cet indice. Si aucune indication contraire n'est donnée, tout indice libre prend les mêmes valeurs que l'indice répété.

A.5- Dimension et ordre d'un tenseur ; définition du tenseur d'ordre 1

- <u>Dimension et ordre (encore appelé rang) d'un tenseur ;</u>

Nous représentons les tenseurs en caractère gras, tout comme les vecteurs. Dans le cas présent, nous avons travaillé sur un vecteur $\mathbf{A} = A^{\alpha}\, \mathbf{e}_{\alpha}$ muni d'un seul indice α variant de 0 à n. La lettre n traduit la dimension de l'espace dans lequel le vecteur **A** est représenté. Aussi, nous dirons par définition que le vecteur est un tenseur d'ordre 1 avec comme nombre de composantes $dimension^{ordre} = n^1 = n$.

Un tenseur d'ordre 2 qui s'écrit $\mathbf{A} = A^{\alpha\beta}\, (\mathbf{e}_{\alpha} \otimes \mathbf{e}_{\beta})$ [riche de 2 indices α et β] et de dimension 4 (voir §2.1.3), possède $dimension^{ordre} = 4^2 = 16$ composantes formant une matrice carrée (ces composantes sont encore appelées éléments de la matrice) contenant 4 lignes et 4 colonnes.

- <u>Définition du tenseur d'ordre 1 :</u>

▪ <u>Par définition</u> (voir démonstration au §A.4), un ensemble de n quantités A_{α} qui se transforme lors d'un changement de base dans un EV E_n selon les relations $A^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} A'^{\mu}$ et $A'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha}$ constitue les composantes contravariantes d'un tenseur d'ordre 1.

▪ <u>Par définition</u> (voir démonstration au §A.4), un ensemble de n quantités A_{α} qui se transforme lors d'un changement de base dans un EV E_n selon les relations $A_{\alpha} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} A'_{\mu}$ et $A'_{\mu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} A_{\alpha}$ constitue les composantes covariantes d'un tenseur d'ordre 1.

A.6-Composantes contravariantes d'un tenseur: tenseur contravariant d'ordre 2

Le calcul tensoriel a été inventé par les deux mathématiciens italiens Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) et Tullio Levi-Civita (1873-1941). En 1900, Ils publièrent un ouvrage intitulé *La théorie des tenseurs dans les méthodes de calcul différentiel et leurs applications* qu'Einstein utilisa afin de mieux maîtriser le calcul tensoriel dans le développement de la théorie de la relativité générale.

L'être mathématique que constitue le tenseur doit être considéré comme un super vecteur caractérisé par des propriétés supplémentaires du fait de sa richesse en indices. Aussi, le tenseur contravariant le plus simple s'obtient en multipliant les composantes contravariantes de deux vecteurs $\mathbf{V} = V^\alpha\, \mathbf{e}_\alpha$ et $\mathbf{W} = W^\beta\, \mathbf{e}_\beta$, dont chacune des base $\mathbf{e}_\alpha$ et $\mathbf{e}_\beta$ est différente, en effectuant les combinaisons maximum sur les deux indices autant de fois que le permet la dimension de l'Espace Vectoriel E_n considéré. Le résultat obtenu donne une suite de $\textit{dimension}^{\,ordre} = n^2$ éléments formant une matrice et ces éléments matriciels sont les composantes contravariantes du tenseur.

La relation (c) du paragraphe A.4 permet d'écrire : $V^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} V'^\mu$ et $W^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\eta} W'^\eta$

Les composantes contravariantes $A^{\alpha\beta}$ du tenseur contravariant **A** sont la suite des n^2 éléments sur lesquelles on effectue les combinaisons maximum sur les deux indices autant de fois que le permet la dimension de l'Espace Vectoriel E_n. Ces composantes contravariantes sont obtenues de la manière suivante : $A^{\alpha\beta} = V^\alpha W^\beta = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\eta} V'^\mu W'^\eta = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\eta} A'^{\mu\eta}$

Par définition, nous appelons composantes contravariantes d'un tenseur **A** d'ordre 2, un objet mathématique qui est décrit, par rapport à tout système de coordonnées , au moyen de n^2 quantités vérifiant la loi de transformation suivante : $A^{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\eta} A'^{\mu\eta}$.

Le tenseur **A** s'écrit $\mathbf{A} = \mathbf{V}\otimes\mathbf{W}$ (produit tensoriel des tenseurs **V** et **W** d'ordre 1). Le symbole $\otimes$ est défini par la manière dont on a formé les quantités $V^\alpha W^\beta$ et l'ordre dans lequel on les a classé pour former le tenseur **A**.

Dans le cas de deux Espaces Vectoriels E_n identiques, le tenseur **A** s'écrit : $\mathbf{A} = A^{\alpha\beta} (\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta)$ où le produit tensoriel $(\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta)$ est associé aux vecteurs de base de l'Espace Vectoriel $E_n \otimes E_n$ que l'on écrit $E_n^{(2)}$.

A.7- Composantes covariantes d'un tenseur : tenseur covariant d'ordre 2

La relation (d) du paragraphe A.4 permet d'écrire : $V_\alpha = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} V'_\mu$ et $W_\beta = \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\beta} W'_\eta$.

Les composantes covariantes $A_{\alpha\beta}$ du tenseur covariant **A** sont la suite des n^2 éléments sur lesquelles on effectue les combinaisons maximum sur les deux indices autant de fois que le permet la dimension de l'Espace Vectoriel E_n. Ces composantes covariantes sont obtenues de la manière suivante : $A_{\alpha\beta} = V_\alpha W_\beta = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\beta} V'_\mu W'_\eta = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\beta} A'_{\mu\eta}$

Par définition, nous appelons composantes covariantes d'un tenseur **A** d'ordre 2, un objet mathématique qui est décrit, par rapport à tout système de coordonnées , au moyen de n^2 quantités vérifiant la loi de transformation suivante : $A_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\beta} A'_{\mu\eta}$.

A.8- Tenseur mixte d'ordre 2

Soit deux vecteurs $\mathbf{V} = V^\alpha\, \mathbf{e}_\alpha$ et $\mathbf{W} = W_\beta\, \mathbf{e}^\beta$, de l'Espace Vectoriel E_n, dont chacune des bases $\mathbf{e}_\alpha$ et $\mathbf{e}^\beta$ est différente. Les relations (c) et (d) du §A.4 permettent d'écrire :

$$V^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} V'^\mu \quad \text{et} \quad W_\beta = \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\beta} W'_\eta$$

Les composantes mixtes $A^{\alpha}{}_{\beta}$ du tenseur mixte **A** sont la suite des n^2 éléments sur lesquelles on effectue les combinaisons maximums sur les deux indices autant de fois que le permet la dimension de l'Espace Vectoriel E_n. Ces composantes mixtes sont obtenues de la manière suivante :

$$A^{\alpha}{}_{\beta} = V^{\alpha} W_{\beta} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\beta}} V'^{\mu} W'_{\eta} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\beta}} A'^{\mu}{}_{\eta}$$

<u>Par définition</u>, nous appelons composantes mixtes d'un tenseur **A** d'ordre 2, un objet mathématique qui est décrit, par rapport à tout système de coordonnées , au moyen de n^2 quantités vérifiant la loi de transformation suivante : $A^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\beta}} A'^{\mu}{}_{\eta}$

A.9- Propriétés des tenseurs

A.9.1- Covariance des équations tensorielles

Il s'agit de montrer que les équations tensorielles possèdent la propriété d'être invariantes relativement à toute transformation des coordonnées afin d'appuyer les écrits d'Einstein que nous avons mentionnés au §2.1.5 à propos des équations exprimant les lois de la nature.
En d'autres termes, ceci sous-entend que les lois de la nature sont conservées pour tout observateur situé dans telle ou telle partie de l'univers.
Et comme l'écrit Einstein lui-même, l'idée de l'utilisation d'équations contenant intrinsèquement le principe de covariance pour élaborer sa théorie, lui a été suggéré par la relativité restreinte basée sur la métrique euclidienne de Minkowski qui définit l'intervalle d'espace-temps suivant (voir §2.1.3) : $ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\ dy^{\alpha}\ dy^{\beta}$.

En effet, la grandeur quadratique obtenue est invariante relativement aux transformations de Lorentz, c'est-à-dire quel que soit un observateur associé à un repère défini par une base naturelle arbitraire. Les travaux de Minkowski concernant la fusion de l'espace et du temps sous la forme de la métrique précédente font suite à la publication d'Einstein de 1905 sur la dilatation du temps et la contraction des longueurs relativement à deux observateurs en mouvement uniforme l'un par rapport à l'autre.

A.9.1.1- Equation tensorielle formée de tenseurs d'ordre 1

Soit la relation $A^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} A'^{\mu}$ vue au §A.5, associée au vecteur **A** de composantes contravariantes A^{α} sur la base $\mathbf{e}_{\alpha}$. Considérons un autre vecteur **S** de composantes contravariantes S^{α} sur la même base $\mathbf{e}_{\alpha}$.

L'équation tensorielle $A^{\alpha} = S^{\alpha}$ sur la base $\mathbf{e}_{\alpha}$ permet d'écrire : $\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} A'^{\mu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} S'^{\alpha} \Rightarrow$ d'où l'équation tensorielle $A'^{\mu} = S'^{\alpha}$ sur la base $\mathbf{e'}_{\mu}$ (voir §A.3). L'équation tensorielle de départ sur la base $\mathbf{e}_{\alpha}$ est donc invariante relativement à toutes les transformations continues des coordonnées de la base $\mathbf{e}_{\alpha}$ vers la base base $\mathbf{e'}_{\mu}$ dans l'espace vectoriel E_n.

A.9.1.2- Equation tensorielle formée de tenseurs d'ordre 2

Soit la relation $A^{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\eta}} A'^{\mu\eta}$ vue au §A.6, associée au tenseur **A** de composantes contravariantes $A^{\alpha\beta}$ sur la base $\mathbf{e}_{\alpha} \otimes \mathbf{e}_{\beta}$ de l'Espace Vectoriel $E_n^{(2)}$. Considérons un autre tenseur **S** de composantes contravariantes $S^{\alpha\beta}$ sur la même base $\mathbf{e}_{\alpha} \otimes \mathbf{e}_{\beta}$.

L'équation tensorielle $A^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta}$ sur la base $\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta$ permet d'écrire :

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\eta} A'^{\mu\eta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\eta} S'^{\mu\eta}$$

d'où l'équation tensorielle $A'^{\mu\eta} = S'^{\mu\eta}$ sur la base $\mathbf{e'}_\mu \otimes \mathbf{e'}_\eta$.

L'équation tensorielle de départ sur la base $\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta$ est donc invariante relativement à toutes les transformations continues des coordonnées de la base $\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta$ vers la base base $\mathbf{e'}_\mu \otimes \mathbf{e'}_\eta$ dans l'Espace Vectoriel $E_n^{(2)}$.

A.9.2- Manipulation des indices

Dans la pratique du calcul tensoriel , la manipulation des indices est primordiale. En effet, la règle de manipulation la plus caractéristique du calcul tensoriel est la modification arbitraire que l'on peut faire subir aux indices répétés et c'est cette règle que le débutant a le plus de peine à se formaliser.

A.9.2.1- Manipulation des indices à l'aide du symbole δ de Kronecker

Soit une base quelconque $\mathbf{e}_i$ d'un Espace Vectoriel euclidien E_n.

Par définition, n vecteurs $\mathbf{e}^k$ qui vérifient la relation $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^k = \delta_i^{\ k}$ sont appelés vecteurs réciproques (ou duaux) des vecteurs $\mathbf{e}_i$. Nous dirons que la base $\mathbf{e}^k$ est la base réciproque (ou duale) de la base $\mathbf{e}_i$. Les vecteurs réciproques sont notés avec des indices supérieurs.

Par définition, dans un repère quelconque, chaque vecteur réciproque $\mathbf{e}^k$ est orthogonal à tous les vecteurs $\mathbf{e}_i$ sauf pour k = i.

Par définition, on peut donc écrire : $\mathbf{e}_i.\mathbf{e}^k = \delta_i^{\ k} = 1$ si i=k ; $\mathbf{e}_i.\mathbf{e}^k = \delta_i^{\ k} = 0$ si i≠k, ce qui donne pour i, k, de 1 à 2 :

- $\mathbf{e}_1.\mathbf{e}^1 = ||\mathbf{e}_1||\ ||\mathbf{e}^1|| = \cos\varphi = 1 = \delta_1^{\ 1}$ car $\varphi \neq \pi/2$
- $\mathbf{e}_1.\mathbf{e}^2 = ||\mathbf{e}_1||\ ||\mathbf{e}^2|| = \cos\varphi = 0 = \delta_1^{\ 2}$ car $\varphi = \pi/2$
- $\mathbf{e}_2.\mathbf{e}^1 = ||\mathbf{e}_2||\ ||\mathbf{e}^1|| = \cos\varphi = 0 = \delta_2^{\ 1}$ car $\varphi = \pi/2$
- $\mathbf{e}_2.\mathbf{e}^2 = ||\mathbf{e}_2||\ ||\mathbf{e}^2|| = \cos\varphi = 1 = \delta_2^{\ 2}$ car $\varphi \neq \pi/2$

Montrons que $\omega_j^{\ i}\,\delta_i^{\ k} = \omega_j^{\ k}$ pour n = 2 et i, j, k, de 1 à 2. L'indice i est répété et donc chaque ligne correspondant à l'indice libre k est sommée sur i. On a : $\omega_j^{\ i}\,\delta_i^{\ k} = \sum_{i=1}^{2} \omega_j^{\ i}\,\delta_i^{\ k}$

$$\text{Pour } k = 1 : \omega_j^{\ i}\,\delta_i^{\ k} = \omega_j^{\ 1}\,\delta_1^{\ 1} + \omega_j^{\ 2}\,\delta_2^{\ 1} = \omega_j^{\ 1} = \omega_j^{\ k}$$
$$\text{Pour } k = 2 : \omega_j^{\ i}\,\delta_i^{\ k} = \omega_j^{\ 1}\,\delta_1^{\ 2} + \omega_j^{\ 2}\,\delta_2^{\ 2} = \omega_j^{\ 2} = \omega_j^{\ k}$$
$$\text{D'où } \omega_j^{\ i}\,\delta_i^{\ k} = \omega_j^{\ k}$$

A.9.2.2- Contraction des indices répétés pour un tenseur donné

a) Tenseur mixte d'ordre 2 tel que les composantes du tenseur soient ramenées de $A^\alpha_{\ \beta}$ à $A^\beta_{\ \beta}$ puis à A **constituant un scalaire** (un scalaire est un tenseur d'ordre 0 et de dimension 1)

Soit le tenseur mixte **A** d'ordre 2 vu au §A.8 (de composantes mixtes $A^\alpha_{\ \beta}$) que nous considérons à 4 dimensions, c'est-à-dire pour lequel n = 4 et α, β variant de 1 à 4. Nous savons (voir §A.5) que ce tenseur possède 16 composantes formant une matrice carrée.

De même que pour le tenseur $\boldsymbol{\eta}$ (composantes $\eta_{\alpha\beta}$ vues au §2.1.3) associé au quadrivecteur de l'espace-temps de Minkowski, nous supposons que les composantes mixtes du tenseur **A** sont nulles pour $\alpha \neq \beta$ tel que chaque élément du tenseur puisse s'écrire $A^\alpha_{\ \beta}\,\delta_\alpha^{\ \beta}$ (la matrice carrée est diagonale).

Le §A.9.2.1 permet d'écrire : $A^\alpha_{\ \beta}\,\delta_\alpha^{\ \beta} = A^\beta_{\ \beta} = A$ = scalaire, prouvons le :

soit $A^\alpha_{\ \beta} = A^\alpha_{\ \beta}\,\delta_\alpha^{\ \beta} = A^\beta_{\ \beta} = V^\beta W_\beta \Rightarrow \sum_{\beta=1}^{4} V^\beta W_\beta = V^1 W_1 + V^2 W_2 + V^3 W_3 + V^4 W_4 = A$

qui n'est autre que l'expression du produit scalaire des deux vecteurs **V** et **W**.

La matrice carrée pour laquelle tous les éléments sont différents de zéro, est plus riche en information que la matrice diagonale pour laquelle on a seulement les éléments associés aux indices

$\alpha = \beta$. Mais le choix de multiplier les éléments du tenseur mixte par le symbole de Kronecker a permis de contracter indices de 2 à 0 afin d'obtenir le scalaire A interprétable.

b) Tenseur mixte d'ordre 4 tel que les composantes du tenseur soient ramenées de R^i_{acj} à R^i_{aci} puis à R_{ac}

Soit le tenseur mixte **A** de composantes mixtes R^i_{acj} . Comme expliqué au §A.9.2.2.a, nous pouvons contracter ce tenseur d'origine en multipliant ses composantes par δ_i^j tel que $R^i_{acj}\ \delta_i^j = R^i_{aci}$. Ce tenseur obtenu est équivalent au tenseur d'origine, mais moins riche en indice c'est-à-dire en précision si ce tenseur est associé à un phénomène physique.

Appliquons la loi du quotient (ce que nous avons vu au § A.8) :

$$R^i_{aci} = \cancel{\frac{\partial x^i}{\partial x'^\mu}} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^a} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^c} \cancel{\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^i}} R^\mu_{\eta\beta\lambda}$$

Soit $\lambda = \mu$

$$R^i_{aci} = \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^a} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^c} \cancel{\frac{\partial x'^\mu}{\partial x'^\mu}} R^\mu_{\eta\beta\mu}$$

Ainsi : $$R^i_{aci} = \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^a} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^c} R^\mu_{\eta\beta\mu} \text{ d'où } R^i_{aci} = R_{ac} = \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^a} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^c} = R_{\eta\beta} = R^\mu_{\eta\beta\mu}.$$

A.9.2.3- Démonstration de $g_{ij}\, g^{jh} = \delta_i^h$

▪ Soit le vecteur **V** exprimé sur la base $\mathbf{e}_i$ et le vecteur **W** sur la base $\mathbf{e}_j$, alors :

$\mathbf{V} = V^i\, \mathbf{e}_i$ et $\mathbf{W} = W^j\, \mathbf{e}_j \Rightarrow \mathbf{V}.\mathbf{W} = (\mathbf{e}_i.\mathbf{e}_j)\, V^i\, W^j = g_{ij}\, V^i\, W^j$ (1)

▪ Soit **V** exprimé sur la base duale $\mathbf{e}^i$ et **W** sur la base duale $\mathbf{e}^h$, alors :

$\mathbf{V} = V_i\, \mathbf{e}^i$ et $\mathbf{W} = W_h\, \mathbf{e}^h \Rightarrow \mathbf{V}.\mathbf{W} = (\mathbf{e}^i.\mathbf{e}^h)\, V_i\, W_h = g^{ih}\, V_i\, W_h$ (2)

▪ La relation (1) peut s'écrire : $\mathbf{V}.\mathbf{W} = V^i\, (g_{ij}\, W^j)$ (3)

▪ Soit $\mathbf{W}.\ \mathbf{e}_i = (W^j\, \mathbf{e}_j).\ \mathbf{e}_i = W^j\, (\mathbf{e}_j.\mathbf{e}_i) = W^j\, (\mathbf{e}_i.\mathbf{e}_j) = W^j\, g_{ij}$

<u>Par définition</u> (voir §A.3), on a $\mathbf{W}.\ \mathbf{e}_i = W_i$ avec W_i qui sont les composantes covariantes du vecteur **W** sur la base $\mathbf{e}_j \Rightarrow$ donc $W_i = W^j\, g_{ij} = g_{ij}\, W^j$ (4)

▪ En injectant (4) dans (3), on obtient : $\mathbf{V}.\mathbf{W} = V^i\, W_i$ (5)

▪ Soit $\mathbf{W}.\ \mathbf{e}^j = (W_h\, \mathbf{e}^h).\ \mathbf{e}^j = W_h\, (\mathbf{e}^h.\mathbf{e}^j) = W_h\, (\mathbf{e}^j.\mathbf{e}^h) = W_h\, g^{jh}$

<u>Par définition</u>, on a $\mathbf{W}.\ \mathbf{e}^j = W^j$ qui sont les composantes contravariantes du vecteur **W** sur la base $\mathbf{e}^h \Rightarrow$ donc $W^j = W_h\, g^{jh} = g^{jh}\, W_h$ (6)

▪ La relation (1) peut s'écrire : $\mathbf{V}.\mathbf{W} = W^j\, (g_{ij}\, V^i)$ (7)

▪ En injectant (6) dans (1), on a : $\mathbf{V}.\mathbf{W} = g_{ij}\, V^i\, g^{jh}\, W_h = g_{ij}\, g^{jh}\, V^i\, W_h$ (8)

▪ En égalisant (5) et (8), on a : $V^i\, W_i = g_{ij}\, g^{jh}\, V^i\, W_h$ qui est vérifiée pour $g_{ij}\, g^{jh} = \delta_i^h$ lorsque $h = i$

▪ Du coup on déduit $g_{ij}\, g^{ij} = 1$ et $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\, g^{ij} \right)$ avec par exemple pour n = 2 :

$$\sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} g_{ij}\, g^{ij} \right) = \sum_{i=1}^{2} \left(g_{i1} g^{i1} + g_{i2} g^{i2} \right) = \sum_{i=1}^{2} \left(g_{i1} g^{i1} + g_{i2} g^{i2} \right)$$

c'est-à-dire : $$g_{11} g^{11} + g_{22} g^{22} = \frac{g_{11}}{g_{11}} + \frac{g_{22}}{g_{22}} = 1 + 1 = 2$$

qui est la dimension n de l'espace (dans notre exemple il s'agit d'un espace à 2 dimensions).

A.9.2.4- Rôle d'ascenseur des tenseurs fondamentaux g_{ij} ou g^{ij} pour le passage des indices de haut en bas ou de bas en haut

a) Passer un indice de haut en bas

Nous avons vu au §A.9.2.3 :

$$\mathbf{W}.\ \mathbf{e}_i = (W^j\, \mathbf{e}_j).\ \mathbf{e}_i = W^j\, (\mathbf{e}_j.\mathbf{e}_i) = W^j\, (\mathbf{e}_i.\mathbf{e}_j) = W^j\, g_{ij}$$

Or <u>par définition</u> : $\mathbf{W}.\ \mathbf{e}_i = W_i$ d'où $W_i = W^j\, g_{ij}$

Le tenseur fondamental g_{ij} permet donc d'obtenir pour le vecteur **W** exprimé sur la base $\mathbf{e}_j$, ses composantes covariantes W_i à partir de ses composantes contravariantes W^j.

b) Passer un indice de bas en haut

Nous avons vu au §A.9.2.3 :

$$\mathbf{W}.\ \mathbf{e}^j = (W_h\ \mathbf{e}^h).\ \mathbf{e}^j = W_h\ (\mathbf{e}^h.\mathbf{e}^j) = W_h\ (\mathbf{e}^j.\mathbf{e}^h) = W_h\ g$$

Or par définition : $\mathbf{W}.\ \mathbf{e}^j = W^j$ d'où $W^j = W_h\, g^{jh}$

Le tenseur fondamental g^{jh} permet donc d'obtenir pour le vecteur **W** exprimé sur la base $\mathbf{e}^h$, ses composantes contravariantes W^j à partir de ses composantes covariantes W_h.

A.9.3- Critère général de tensorialité

A.9.3.1- Critère de tensorialité

La première de reconnaître le caractère tensoriel d'une quantité consiste à démontrer que cette quantité résulte directement de la définition même d'un tenseur. Pour cela, comme exprimé respectivement aux § A.5, A.6, A.7, A.8 il faut vérifier :

$$A^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\ A'^{\mu}\quad ;\quad A_{\alpha} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\ A'_{\mu}\quad ;$$

$$A^{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\ \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\eta}}\ A'^{\mu\eta}\quad ;\quad A_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\ \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\beta}}\ A'_{\mu\eta}\quad ;\quad A^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\ \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\beta}}\ A'^{\mu}$$

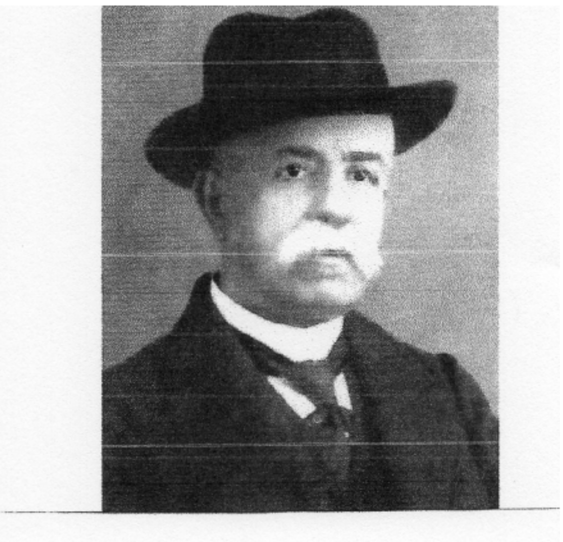
A.9.3.2- Critère général de tensorialité

Si le résultat du produit d'une quantité avec tout tenseur arbitraire est un tenseur, alors la quantité est aussi un tenseur.

Soit la relation $ds^2 = g_{\mu\nu}\ dx^{\mu}\ dx^{\nu}$ vue au §2.1.4 Les quantités dx^{μ} et dx^{ν} sont chacune les composantes d'un tenseur arbitraire d'ordre 1 (car un indice μ et un indice β) puisqu'il s'agit des composantes d'un vecteur. Nous savons que les quantités $dx^{\mu}\ dx^{\nu} = dx^{\mu\nu}$ sont les composantes contravariantes du tenseur **dx**.

Nous pouvons écrire (voir §A.9.2.2.a): $ds^2 = g_{\mu\nu}\ dx^{\mu}\ dx^{\nu} = g_{\mu\nu}\ dx^{\mu\nu} = A_{\mu}^{\mu} = A = scalaire$

Le résultat du produit de la quantité $g_{\mu\nu}$ avec le tenseur $dx^{\mu\nu}$ étant un tenseur (le scalaire A est un tenseur d'ordre zéro), alors la quantité $g_{\mu\nu}$ constitue les composantes covariantes d'un tenseur **g**.



Tullio Levi-Civita Gregorio Ricci-Cubastro

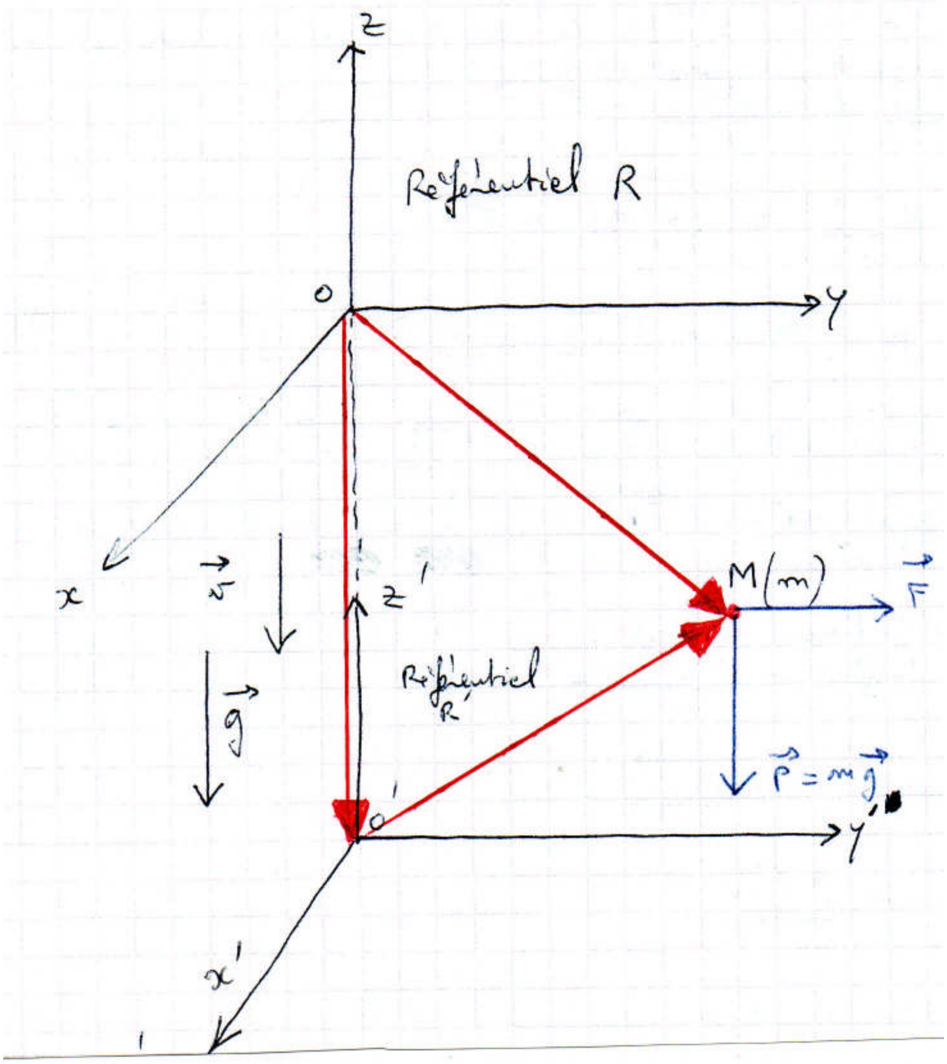
Annexe B

La théorie de la relativité générale (1915)

B.1- Principe d'équivalence, géométrie riemannienne et connexion affine

B.1.1- Démonstration théorique du principe d'équivalence

La figure ci-après représente deux référentiels R et R' situés respectivement au 40ème étage d'une tour et dans un ascenseur tombant en chute libre à partir du 40ème étage précédent.



La masse m au point M située dans l'ascenseur est affectée d'une force **F** telle que montré sur la figure. La force résultante agissant sur m est donc égale à **F** + **P** avec **P** = m**g**.

L'équation de la cinématique décrivant le mouvement de l'ascenseur associé au repère orthonormé o' x' y'z' et en chute libre, s'écrit dans le reférentiel R, sachant que $|z| = \int v\, dt$ (avec $v = gt+k_1$ et $g = |d^2z|/dt^2$) :

$|z| = 1/2gt^2+k_1+k_2 \Rightarrow |z| = 1/2gt^2 =$ **OO'** pour l'hypothèse z = 0 à t = 0.

La relation de Chasle permet d'écrire globalement :

$$\mathbf{OM}=\mathbf{OO'}+\mathbf{O'M} \Rightarrow d^2\mathbf{OM}/dt^2 = d^2\mathbf{OO'}/dt^2 + d^2\mathbf{O'M}/dt^2$$

D'où $$m\, d^2\mathbf{OM}/dt^2 = m\, d^2\mathbf{OO'}/dt^2 + m\, d^2\mathbf{O'M}/dt^2 = \mathbf{P}+\mathbf{F}$$

c'est-à-dire : $$\mathbf{F} = m\, d^2\mathbf{OO'}/dt^2 + m\, d^2\mathbf{O'M}/dt^2 - \mathbf{P}$$

ou encore : $$\mathbf{F} = mg + m\, d^2\mathbf{O'M}/dt^2 - mg \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = m\, d^2\mathbf{O'M}/dt^2.$$

Cette dernière relation montre que dans le référentiel R' en chute libre, le poids $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ associé à la masse grave (encore appelée masse gravifique ou masse de gravitation) est éradiqué.
La relation $\mathbf{F} = m\, d^2\mathbf{O'M}/dt^2$ issue de la seconde loi de Newton ou principe fondamental de la dynamique de translation, est associée à la masse inertielle m (la masse dont il est question dans la première loi de Newton relative au principe de l'inertie, encore appelée masse inerte par rapport à la masse grave). Le fait de considérer la masse grave et la masse inertielle comme identique exprime ce que nous nommons en physique : le principe d'équivalence.

B.1.2- Principe de la géométrie riemannienne [78, 79, 80]

Soit l'espace $\mathbf{S}^3$ (dont nous avons parlé au §4.1), de coordonnées curvilignes u^1, u^2 et u^3, plongée dans un espace à 4 dimensions de coordonnées cartésiennes x, y, z, w dans un repère orthogonal (o,x,y,z,w). En passant de la dimension 3 à la dimension 4, nous avons rajouté fictivement un axe de coordonnée supplémentaire ow qui est orthogonal aux 3 axes du sous-espace à 3 dimensions.
Traitons de manière analytique la variation infinitésimale d'un élément linéaire dl de cet espace $\mathbf{S}^3$ afin de retrouver les composantes covariantes $g_{\mu\nu}$ du tenseur métrique $\mathbf{g}$ de Riemann (voir §2.1.4).
Nous pouvons écrire :

$$x = x(u^1, u^2, u^3) \ ; \ y = y(u^1, u^2, u^3) \ ; \ z = z(u^1, u^2, u^3) \ ; \ w = w(u^1, u^2, u^3)$$

Soit:

$$\begin{aligned} dx &= (\partial x/\partial u^1)\, du^1 + (\partial x/\partial u^2)\, du^2 + (\partial x/\partial u^3)\, du^3 \\ dy &= (\partial y/\partial u^1)\, du^1 + (\partial y/\partial u^2)\, du^2 + (\partial y/\partial u^3)\, du^3 \\ dz &= (\partial z/\partial u^1)\, du^1 + (\partial z/\partial u^2)\, du^2 + (\partial z/\partial u^3)\, du^3 \\ dw &= (\partial w/\partial u^1) du^1 + (\partial w/\partial u^2)\, du^2 + (\partial w/\partial u^3)\, du^3 \end{aligned}$$

Dans l'espace constitué par le plan tangent euclidien attaché au point M de la variété riemannienne (voir §2.1.4), nous relions sur une distance infinitésimale l'espace pseudo-riemannien à l'espace euclidien de la manière suivante :

$$|\mathbf{dOM}|^2 = (dOM)^2 = dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2$$

Tout calcul fait on obtient :

$$\begin{aligned} dl^2 = {} & [(\partial x/\partial u^1)^2 + (\partial y/\partial u^1)^2 + (\partial z/\partial u^1)^2 + (\partial w/\partial u^1)^2]\, du^1\, du^1 \\ & +[\partial x/\partial u^1\, \partial x/\partial u^2 + \partial y/\partial u^1\, \partial x/\partial u^2 + \partial z/\partial u^1\, \partial z/\partial u^2 + \partial w/\partial u^1\, \partial w/\partial u^2]\, du^1\, du^2 \\ & +[\partial x/\partial u^1\, \partial x/\partial u^3 + \partial y/\partial u^1\, \partial y/\partial u^3 + \partial z/\partial u^1\, \partial z/\partial u^3 + \partial w/\partial u^1\, \partial w/\partial u^3]\, du^1\, du^3 \\ & +[\partial x/\partial u^2\, \partial x/\partial u^1 + \partial y/\partial u^2\, \partial y/\partial u^1 + \partial z/\partial u^2\, \partial z/\partial u^1 + \partial w/\partial u^2\, \partial w/\partial u^1]\, du^2\, du^1 \\ & +[(\partial x/\partial u^2)^2 + (\partial y/\partial u^2)^2 + (\partial z/\partial u^2)^2 + (\partial w/\partial u^2)^2]\, du^2\, du^2 \\ & +[\partial x/\partial u^2\, \partial x/\partial u^3 + \partial y/\partial u^2\, \partial y/\partial u^3 + \partial z/\partial u^2\, \partial z/\partial u^3 + \partial w/\partial u^2\, \partial w/\partial u^3]\, du^2\, du^3 \\ & +[\partial x/\partial u^3\, \partial x/\partial u^1 + \partial y/\partial u^3\, \partial y/\partial u^1 + \partial z/\partial u^3\, \partial z/\partial u^1 + \partial w/\partial u^3\, \partial w/\partial u^1]\, du^3\, du^1 \\ & +[\partial x/\partial u^3\, \partial x/\partial u^2 + \partial y/\partial u^3\, \partial y/\partial u^2 + \partial z/\partial u^3\, \partial z/\partial u^é + \partial w/\partial u^3\, \partial w/\partial u^2]\, du^3\, du^2 \\ & +[(\partial x/\partial u^3)^2 + (\partial y/\partial u^3)^2 + (\partial z/\partial u^3)^2 + (\partial w/\partial u^3)^2]\, du^3\, du^3 \qquad (9) \end{aligned}$$

c'est-à-dire : $dl^2 = g_{11} du^1 du^1 + g_{12}\, du^1\, du^2 + g_{13}\, du^1\, du^3 + g_{21}\, du^2\, du^1 + g_{22}\, du^2\, du^2 + + g_{23}\, du^2\, du^3 + g_{31}\, du^3\, du^1 + g_{32}\, du^3\, du^2 + g_{33}\, du^3\, du^3$

soit : $dl^2 = g_{\mu\nu}\, du^\mu\, du^\nu$ avec μ et ν variant de 1 à 3.

Sur la base naturelle $\mathbf{e}_k$ nous avons : $\mathbf{OM} = u^k\, \mathbf{e}_k \Rightarrow \mathbf{dOM} = \mathbf{e}_k\, du^k$ (10).

La différentielle totale du vecteur $\mathbf{OM} = f\,(u^k)$ s'écrit: $\mathbf{dOM} = (\partial \mathbf{OM}/\partial u^k)\, du^k$ (11).

En égalisant (10) et (11), on obtient : $\mathbf{e}_k = (\partial \mathbf{OM}/\partial u^k)$ avec k = 1,2,3.

Les vecteurs de base du repère cartésien sont respectivement **i**,**j**,**k**,**l**, sur les 4 axes ox, oy, oz et ow $\Rightarrow \mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} + w\mathbf{l}$

ainsi : $(\partial \mathbf{OM}/\partial u^k) = (\partial x\mathbf{i} + \partial y\mathbf{j} + \partial z\mathbf{k} + \partial w\mathbf{l}) /\partial u^k = \mathbf{e}_k$

soit : $(\partial \mathbf{OM}/\partial u^1) = (\partial x\mathbf{i} + \partial y\mathbf{j} + \partial z\mathbf{k} + \partial w\mathbf{l}) /\partial u^1 = \mathbf{e}_1$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} (|\partial \mathbf{OM}|/\partial u^1)^2 &= (\partial x/\partial u^1)^2 + (\partial y/\partial u^1)^2 + (\partial z/\partial u^1)^2 + (\partial w/\partial u^1)^2 = \mathbf{e}_1.\, \mathbf{e}_1 = g_{11} \\ (|\partial \mathbf{OM}|/\partial u^2)^2 &= (\partial x/\partial u^2)^2 + (\partial y/\partial u^2)^2 + (\partial z/\partial u^2)^2 + (\partial w/\partial u^2)^2 = \mathbf{e}_2.\, \mathbf{e}_2 = g_{22} \\ (|\partial \mathbf{OM}|/\partial u^3)^2 &= (\partial x/\partial u^3)^2 + (\partial y/\partial u^3)^2 + (\partial z/\partial u^3)^2 + (\partial w/\partial u^3)^2 = \mathbf{e}_3.\, \mathbf{e}_3 = g_{33} \end{aligned}$$

Nous avons donc démontré l'expression $g_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu.\, \mathbf{e}_\nu$ pour μ = ν d'après la correspondance avec la relation (9). La démonstration avec μ ≠ ν ne pose pas de problème.

En appliquant toutes les relations qui précèdent tel que :

$$x = x(u^1, u^2, u^3) = x(\chi, \theta, \varphi) = a\sin\chi\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = y(u^1, u^2, u^3) = y(\chi, \theta, \varphi) = a\sin\chi\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = z(u^1, u^2) = z(\chi, \theta) = a\sin\chi\cos\theta$$
$$w = w(u^1) = zw\,\chi) = a\cos\chi\ ,$$

on retrouve la métrique spatiale riemannienne de l'hypersphère en coordonnées sphériques standard (χ,θ,φ) sur S^3 telle que : $dl^2 = a^2\left[d\chi^2+\sin^2\chi\left(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2\right)\right]$

c'est-à-dire : $dl^2 = a^2\, d\chi^2 + a^2 \sin^2\chi\, d\theta^2 + a^2 \sin^2\chi \sin^2\theta\, d\varphi^2$

avec : $g_{11} = a^2$; $g_{22} = a^2\sin^2\chi$; $g_{33} = a^2\sin^2\chi\sin^2\theta$; $g_{12} = g_{13} = \ldots = g_{32} = 0$

et : $du^1\, du^1 = d\chi^2$; $du^2\, du^2 = d\theta^2$; $du^3\, du^3 = d\varphi^2$.

B.1.3-Caractérisation des éléments $g_{\mu\nu}$ du tenseur métrique spatiotemporel de Riemann par rapport aux éléments $\eta_{\mu\nu}$ du tenseur métrique spatiotemporel de Minkowski

Einstein imagina de se servir du tenseur métrique de Riemann et de caractériser ses éléments $g_{\mu\nu}$ par rapport aux éléments $\eta_{\alpha\beta}$ du tenseur métrique de Minkowski afin de considérer le temps propre de la relativité restreinte en tout point de l'espace-temps riemannien. La puissance du calcul différentiel associé à la notion de dérivées partielles permet de relier sur une distance infinitésimale l'espace pseudo-riemannien à l'espace euclidien.

La méthode la plus simple consiste à utiliser le résultat du §A.9.3.1 : $g_{\mu\nu} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}\ \eta_{\alpha\beta}$

avec : x^μ et x^ν les coordonnées curvilignes associées au tenseur métrique riemannien $g_{\mu\nu}$ de la géométrie riemannienne ; y^α et y^β les coordonnées cartésiennes associées au tenseur métrique minkowskien de la géométrie euclidienne.

Nous avons $y^\alpha = y^\alpha(x^\mu)$ et $y^\beta = y^\beta(x^\nu)$ et par exemple en dimension 3 :

$$dy^1 = (\partial y^1/\partial x^1)\, dx^1 + (\partial y^1/\partial x^2)\, dx^2 + (\partial y^1/\partial x^3)\, dx^3$$
$$dy^2 = (\partial y^2/\partial x^1)\, dx^1 + (\partial y^2/\partial x^2)\, dx^2 + (\partial y^2/\partial x^3)\, dx^3$$
$$dy^3 = (\partial y^3/\partial x^1)\, dx^1 + (\partial y^3/\partial x^2)\, dx^2 + (\partial y^3/\partial x^3)\, dx^3$$

La dérivée partielle des fonctions y^1, y^2, y^3, au point M, à l'instant t, sont rangés dans une matrice m à 3 lignes et 3 colonnes, que l'on appelle matrice jacobienne.

B.1.4- Equation des géodésiques d'une particule en chute libre

Pour une particule de masse m au point M à l'instant t, nous sommes ramené à un référentiel inertiel dans lequel la masse pesante (encore appelée masse grave) devient masse inertielle. Ainsi, l'accélération au point M et à l'instant t =τ est nulle et nous pouvons écrire $\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dy^\alpha}{d\tau}\right) = 0$. Sachant que $y^\alpha = f(x^\mu)$, la différentielle partielle dy^α s'écrit $dy^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\, dx^\mu$, d'où $\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = 0 \Rightarrow$ La relation *(uv)'=vu'+uv'* donne :

$$\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\right)+\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\right)\left(\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}\right) = 0 \qquad (12).$$

Sachant que $d\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\right) dx^\nu \Rightarrow \left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\right) = \left(\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right)\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}$, (12) devient :

$$\left(\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right)\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}+\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\right)\left(\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}\right) = 0$$

En multipliant les 2 termes de l'équation précédente par $\partial x^i/\partial y^\alpha$, on obtient :

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\right)\left(\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right)\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}+\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\right)\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\right)\left(\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}\right)=0 \qquad (13).$$

Or $(\partial x^i/\partial y^\alpha)(\partial y^\alpha/(\partial x^\mu) = 1$ si $\mu = i$ (égale 0 si $\mu \neq i$ car $x^i \neq f(x^\mu)$ $\Rightarrow (\partial x^i/\partial y^\alpha)(\partial y^\alpha/(\partial x^\mu) = \delta_\mu{}^i$ $\Rightarrow$ le terme de droite de l'équation (13) n'est valide que pour $\mu = i$.

Ainsi, l'équation (13) devient : $$\left(\frac{d^2 x^i}{d\tau^2}\right)+\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\right)\left(\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right)\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}=0.$$

Nous obtenons donc l'équation des géodésiques qui traduisent la ligne d'Univers d'une particule de masse m en chute libre au point M et à l'instant t, sous l'action du champ gravitationnel.

B.1.5- La connexion affine

Dans l'équation des géodésiques vue au §B.1.4, le facteur $\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\right)\left(\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right)$ doit retenir notre attention. En effet, ce facteur nous renseigne sur le passage du référentiel minkowskien associé aux coordonnées cartésiennes y^α au référentiel riemannien associé aux coordonnées curvilignes x^μ, x^ν et x^i (voir §B.1.3).

Aussi le facteur $\Gamma_\mu{}^i{}_\nu = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\right)\left(\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right)$ est appelé connexion affine, dite aussi connexion de Levi-Civita, et les coefficients correspondants à cette connexion portent le nom de symboles de Christoffel de deuxième espèce.

Afin de pouvoir calculer de manière pratique les symboles de Christoffel de deuxième espèce, dont nous mentionnons le rôle dans le §2.1.4, exprimons ces symboles en fonction des éléments $g_{\mu\nu}$ du tenseur métrique **g**.

- Soit $g_{\sigma i}\,\Gamma_\mu{}^i{}_\nu = \Gamma_{\mu\sigma\nu}$ (voir §A.9.2.4) appelé symboles de Christoffel de 1ère espèce.
- Soit $g_{\sigma i} = \eta_{\alpha\beta}\,\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\sigma}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^i}$ (voir §A.7) $\Rightarrow$ $\Gamma_{\mu\sigma\nu} = (\eta_{\alpha\beta}\,\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\sigma}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^i})\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\right)\left(\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right)=\Gamma_{\nu\sigma\mu}$.

Dans le 2ème facteur de $\Gamma_\mu{}^i{}_\nu$ l'indice α étant répété, on peut le changer par γ :

D'où : $$\Gamma_{\mu\sigma\nu} = (\eta_{\alpha\beta}\,\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\sigma}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^i})\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^\gamma}\right)\left(\frac{\partial^2 y^\gamma}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right) = \eta_{\alpha\beta}\,\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\sigma}(\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\gamma})\left(\frac{\partial^2 y^\gamma}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right)$$

Or $\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\gamma} = \delta_\gamma{}^\beta$ car : $\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\gamma} = 0$ si $\beta \neq \gamma$ et $\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\gamma} = 1$ si $\beta = \gamma$ $\Rightarrow$ $$\Gamma_{\mu\sigma\nu} = \eta_{\alpha\beta}\,\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\sigma}\left(\frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right) \qquad (14)$$

Sachant que $g_{\sigma\nu} = \eta_{\alpha\beta}\,\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\sigma}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}$, nous avons $\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} = \eta_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\sigma}\right)\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta}\,\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\sigma}\left(\frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right)$

En injectons (14) dans ce qui précède, nous obtenons : $$\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} = \eta_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\sigma}\right)\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\sigma\mu}.$$

Sachant que $\eta_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha.\mathbf{e}_\beta = \mathbf{e}_\beta.\mathbf{e}_\alpha = \eta_{\beta\alpha}$, on peut écrire : $$\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} = \eta_{\beta\alpha}\left(\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\sigma \partial x^\mu}\right)\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\sigma\mu} \qquad (15)$$

D'après (14), les indices de (15) donnent: $$\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} = \Gamma_{\sigma\nu\mu} + \Gamma_{\nu\sigma\mu} \quad (A)$$

En changeant les indices (μ en σ, σ en ν, ν en μ), on a : $$\frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\sigma} = \Gamma_{\nu\mu\sigma} + \Gamma_{\mu\nu\sigma} \quad (B)$$

En changeant les indices (μ en ν, σ en μ, ν en σ), on a : $\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} = \Gamma_{\mu\sigma\nu} + \Gamma_{\sigma\mu\nu}$ (C)

Nous pouvons écrire : $A - B + C = \Gamma_{\sigma\nu\mu} + \Gamma_{\nu\sigma\mu} - \Gamma_{\nu\mu\sigma} - \Gamma_{\mu\nu\sigma} + \Gamma_{\mu\sigma\nu} + \Gamma_{\sigma\mu\nu}$

Sachant que : $\Gamma_{\mu\nu\sigma} = \Gamma_{\sigma\nu\mu}$; $\Gamma_{\sigma\mu\nu} = \Gamma_{\nu\mu\sigma}$; $\Gamma_{\nu\sigma\mu} = \Gamma_{\mu\sigma\nu}$ $\Rightarrow$ $A - B + C = 2\,\Gamma_{\mu\sigma\nu}$

d'où $\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} = 2\,\Gamma_{\mu\sigma\nu}$ c'est-à-dire $\Gamma_{\mu\sigma\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\sigma}}\right)$.

Sachant que $g^{i\sigma}\,\Gamma_{\mu\sigma\nu} = \Gamma_{\mu\ \nu}^{\ i}$ on a $g^{i\sigma}\,\Gamma_{\mu\sigma\nu} = \frac{1}{2}\,g^{i\sigma}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\sigma}}\right)$, c'est-à-dire :

$$\Gamma_{\mu\ \nu}^{\ i} = \frac{1}{2}\,g^{i\sigma}\left(\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right)$$

qui est l'expression nécessaire au calcul des symboles de Christoffel de deuxième espèce.

B.2- Déformation et courbure de l'espace-temps

B.2.1- La métrique caractérise la déformation de l'espace-temps

B.2.1.1- Idée de base de la relativité générale

En absence de gravitation, la trajectoire d'espace-temps d'une particule libre est indépendante de sa masse. Cette trajectoire est une ligne droite, géodésique de l'espace de Minkowski, paramétrée naturellement par l'écoulement de son temps propre τ. Dans ce cas, la particule se meut sous l'effet de sa masse inertielle. En présence d'un champ de gravitation, la trajectoire est donnée par un ensemble de segments de droite infinitésimaux qui la décrivent localement dans une suite de référentiels en chute libre associé chacun à la propre déformation (courbure) du continuum d'espace–temps, selon l'effet de l'action mutuelle des masses présentes dans l'Univers. Chacun des référentiels en chute libre est paramétré à un instant t donné, par son temps propre τ tel que t = τ. Le principe d'équivalence permet donc de considérer l'espace-temps de la relativité générale comme une collection de petits morceaux d'espaces de Minkowski, de la même manière que la surface de la terre peut être associée à une collection de petits morceaux d'espaces euclidiens à deux dimensions.

B.2.1.2- Principe de la connexion entre deux plans tangents voisins situés à une distance infinitésimale l'un de l'autre

Nous venons d'exprimer qu'à l'instant t et en tout point M de l'espace-temps associé à un champ de gravitation, il est possible de choisir un système de coordonnées localement inertiel. De fait, dans une région suffisamment petite autour de ce point M, les lois de la nature sont celles d'un système de coordonnées cartésiennes ne subissant pas les effets du champ de gravitation, c'est-à-dire essentiellement sous l'influence des lois de la relativité restreinte. Il faut donc se poser la question de relier dans cette région infinitésimale, en utilisant les principes du calcul différentiel, la déformation locale de la chronogéométrie de l'espace-temps exprimée par les éléments du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ associé à ses coordonnées curvilignes, le système localement inertiel lié à ses coordonnées cartésiennes. Et comme nous l'avons vu au §B.1.3, les coordonnées curvilignes sont exprimées par x^{μ} et x^{ν} alors que les coordonnées cartésiennes le sont par y^{α} et y^{β}. Au §B.1.2, les coordonnées curvilignes sont exprimées par u^1, u^2 et u^3 alors que les coordonnées cartésiennes le sont par x, y, z, w dans le repère orthogonal (o,x,y,z,w).

B.2.1.3- Les outils de la connexion

Afin d'obtenir les opérateurs de différentiation qui possèdent les mêmes propriétés que les différentielles partielles dans l'espace de Minkowski, il faut établir au point M une connexion entre la variation des coordonnées curvilignes associées à l'espace-temps de la relativité générale (géométrie riemannienne : les coordonnées x^{μ}) et la variation des coordonnées cartésiennes associées à l'espace-temps de la relativité restreinte (géométrie euclidienne). En d'autres termes, il

faut décrire comment sont raccordés les petits morceaux d'espaces de Minkowski concrétisés par des plans tangents infiniment voisins.
On défini donc la différentielle absolue D appliquée au vecteur $\mathbf{V} = v^i\,\mathbf{e}_i$ telle que

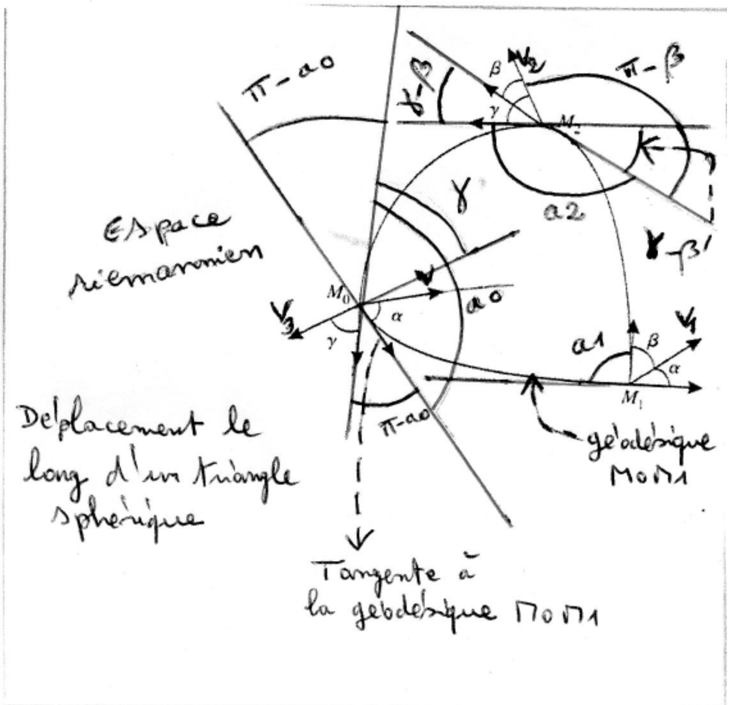
$$Dv^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^\mu} dx^\mu + v^\nu\, \Gamma_{\mu\ \nu}^{\ i}\, dx^\mu \ ,$$

et cette différentielle absolue est associée à la dérivée covariante $\dfrac{Dv^i}{dx^\mu} = \dfrac{\partial v^i}{\partial x^\mu} + v^\nu\, \Gamma_{\mu\ \nu}^{\ i}$.

Le facteur $\Gamma_{\mu\ \nu}^{\ i}$ réalise la connexion entre la différentielle absolue du vecteur **V** (associée aux coordonnées curvilignes et à leur changement de base dans la variété différentielle : géométrie riemannienne) et la différentielle classique $dv^i = \dfrac{\partial v^i}{\partial x^\mu} dx^\mu$ (associée à la base constante au point M : géométrie euclidienne).
Ce facteur $\Gamma_{\mu\ \nu}^{\ i}$ est la connexion de Levi-Civita que nous avons exprimé au §B.1.5 et dont les symboles de Christoffel de deuxième espèce sont fonction du tenseur métrique et de ses dérivées partielles.
Nous allons démontrer au paragraphe B.2.2.5 que la courbure de l'espace-temps est définie mathématiquement comme une fonction des $g_{\mu\nu}$ et de leurs dérivées (tenseur de courbure de Riemann-Christoffel), via les symboles de Christoffel de deuxième espèce.
En effet, en géométrie différentielle, le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel est la façon la plus courante pour caractériser la courbure des variétés peudo-riemanniennes, c'est-à-dire des variétés disposant de connexions affines (les symboles de christoffel).

B.2.2- La courbure de l'espace-temps [81]

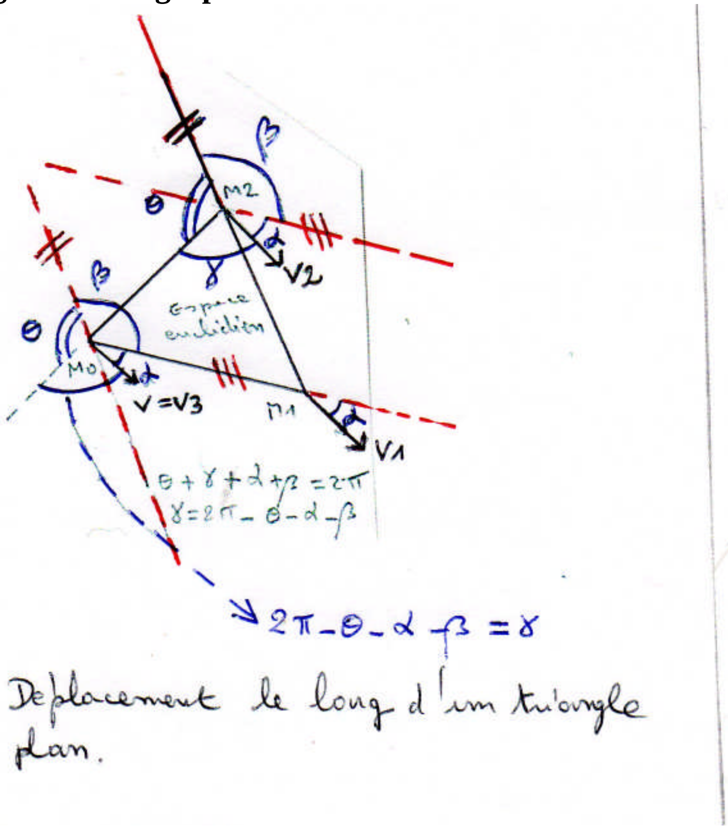
B.2.2.1- Déplacement le long d'un triangle sphérique



La figure ci-avant représente un triangle sphérique $M_0\ M_1\ M_2$ formé par les intersections de trois géodésiques. Nous nommons a_0, a_1, a_2, les valeurs des angles respectifs des tangentes aux géodésiques aux points M_0, M_1, M_2. Considérons un vecteur **V** qui fait au point M_0 un angle α avec la tangente en ce point à la géodésique allant de M_0 à M_1.
Effectuons un transport parallèle de **V** le long de $M_0\ M_1$ (**V** forme le même angle α avec la tangente tout au long de son parcours sur la géodésique $M_0\ M_1$. Appelons $\mathbf{V}_1$ le vecteur **V** lorsqu'il est

transporté parallèlement de M_1 à M_2. Les vecteurs **V** et $\mathbf{V_1}$ équipollents, c'est-à-dire qu'ils ont même module. En M_1, $\mathbf{V}_1$ fait avec la tangente à la géodésique $M_1\,M_2$ un angle $\beta = (\pi - a_1 - \alpha)$.
En transportant parallèlement $\mathbf{V}_1$ le long de la géodésique $M_1\ M_2$, on obtient le vecteur $\mathbf{V}_2$ équipollant à $\mathbf{V}_1$ en M_2. En M_2, $\mathbf{V}_2$ fait avec la tangente à la géodésique $M_2\,M_0$ un angle γ. Ensuite, en effectuant un transport parallèle de $\mathbf{V}_2$ le long de la géodésique $M_2\,M_0$, on obtient $\mathbf{V}_3$ en M_0.
Ainsi, après ce transport parallèle selon le circuit fermé $M_0\,M_1\,M_2\,M_0$, le vecteur initial **V** a tourné d'un angle $\Omega = (a_0 + a_1 + a_2 - \pi)$.

B.2.2.2- Déplacement le long d'un triangle plan



La figure ci-avant représente un triangle plan $M_0\ M_1\ M_2$ formé par les intersections de trois géodésiques qui sont des droites dans l'espace euclidien. Considérons un vecteur **V** qui fait au point M_0 un angle α avec le segment de droite $M_0\,M_1$. Après un transport parallèle selon le circuit fermé $M_0\,M_1\,M_2\,M_0$, le vecteur $\mathbf{V}_3$ vient se confondre avec la vecteur initial **V** montrant que dans ce cas, l'angle de rotation Ω est nul.

B.2.2.3- Quantités Ω^j_v définissant une rotation faisant passer d'une base à l'autre suite au déplacement associé à un cycle: méthode d'Elie Cartan

Le calcul du déplacement associé à un cycle élémentaire nous permet d'exprimer la rotation subie par un vecteur après un transport par équipollence le long d'un cycle.
Nous allons suivre la méthode imaginée par Elie Cartan (1869-1951) [81], excellent mathématicien français, issue de l'Ecole Normale Supérieure de la rue d'Ulm, dont les principaux travaux portent sur les applications géométriques des groupes de Lie, l'affinage de certains outils mathématiques de la relativité générale et la théorie des spineurs.
Natif de Dolomieu dans l'Isère, fils d'un maréchal-ferrant, le jeune Elie est remarqué très tôt par l'instituteur de son école communale et, dès l'âge de 10 ans, il obtient une bourse complète au concours des bourses des lycées.
Il est le père du mathématicien Henri Cartan, du physicien et résistant Louis Cartan mort en déportation, et de la mathématicienne Hélène Cartan. Sa plus jeune sœur, Anna Cartan, a été élève de Marie Curie à l'ENS de Sèvres, puis a enseigné en Lycée après avoir obtenu l'agrégation de mathématique.

Dans le livre d'Elie Cartan, nous trouvons très peu de figures géométriques. En effet, que peut signifier pour des espaces à n dimensions une approche mentale analogue à celle que nous percevons dans notre espace euclidien et familier à trois dimensions ? Il en est d'ailleurs de même pour ce qui relève de l'espace-temps dans lequel se trouvent les quadrivecteurs à 4 dimensions (trois d'espace et une de temps). En fait, en ayant assimilé les tenants et les aboutissants de ce que représentent les transformations de Lorentz, le principe d'équivalence et des invariants, la relativité du temps, le calcul tensoriel, la géométrie de Riemann, etc…, les postulats et les règles logiques de la mathématique, nous amènent tout naturellement aux déductions qui nous font admettre les équations de la relativité générale. Et la confirmation de la théorie aux observations nous rassurera toujours un peu plus sur la véritable réalité des choses.
Considérons donc, comme le fait Elie Cartan, deux systèmes distincts de différentiation désignés respectivement par les symboles d et δ, associés à un cycle infiniment petit.
Soit un point M de coordonnées curvilignes x^i appartenant à un espace de Riemann. A partir des coordonnées curvilignes x^i, considérons des variations dx^i associées au vecteur $\mathbf{MM_1}$ tel que le point M_1 soit infiniment proche du point M. Les coordonnées du point M_1 s'écrivent donc $x^i + dx^i$. Puis, à partir des coordonnées curvilignes $x^i + dx^i$, considérons des variations δx^i associées au vecteur $\mathbf{M_1M_3}$ tel que le point M_3 soit infiniment proche du point M_1. Les coordonnées du point M_3 s'écrivent : $x^i + dx^i + \delta(x^i + dx^i) = x^i + dx^i + \delta x^i + \delta dx^i$ (1).
Effectuons maintenant à partir des coordonnées curvilignes x^i, des variations δx^i associées au vecteur $\mathbf{MM_2}$ tel que le point M_2 soit infiniment proche du point M. Les coordonnées du point M_2 s'écrivent donc $x^i + \delta x^i$. Puis, à partir des coordonnées curvilignes $x^i + \delta x^i$, considérons des variations dx^i associées au vecteur $\mathbf{M_2M_4}$ tel que le point M_4 soit infiniment proche du point M_2. Les coordonnées du point M_4 s'écrivent : $x^i + \delta x^i + d(x^i + \delta x^i) = x^i + \delta x^i + dx^i + d\delta x^i$ (2).
Les points $\mathbf{M_3}$ et $\mathbf{M_4}$ coïncident si les équations (1) et (2) sont égales, c'est-à-dire si

$$x^i + dx^i + \delta x^i + \delta dx^i = x^i + \delta x^i + dx^i + d\delta x^i \quad \text{soit} \quad \delta dx^i = d\delta x^i \quad (3),$$

c'est-à-dire si les deux différentiations sont interchangeables. Dans ce cas, si $f(x^i)$ est une fonction deux fois continûment dérivables des variables x^i, on a :

- $\frac{\delta f}{\delta x^i} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \Rightarrow \delta f = \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\delta x^i$; la relation sur les dérivées *(uv)'=vu'+uv'* permet d'écrire :

$$\frac{d\delta f}{dx^j} = \delta x^i \frac{d}{dx^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) + \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{d\delta x^i}{dx^j} \Rightarrow d\delta f = d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)\delta x^i + \frac{\partial f}{\partial x^i}\,d\delta x^i$$

$$\Rightarrow d\delta f = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)dx^j\,\delta x^i + \frac{\partial f}{\partial x^i}\,d\delta x^i \Rightarrow d\delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\delta x^i dx^j + \frac{\partial f}{\partial x^i}\,d\delta x^i \quad (4)$$

- $\frac{df}{dx^i} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x^i}\,dx^i \Rightarrow$ La relation *(uv)'=vu'+uv'* donne :

$$\frac{\delta df}{\delta x^j} = dx^i \frac{\delta}{d\delta x^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) + \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\delta dx^i}{\delta x^j} \Rightarrow \delta df = \delta\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)dx^i + \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\delta dx^i$$

$$\Rightarrow \delta df = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)\delta x^j dx^i + \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\delta dx^i \Rightarrow \delta df = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\delta x^i dx^j + \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\delta dx^i \quad (5)$$

En injectant (3) dans (5), on obtient $\delta df = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\delta x^i dx^j + \frac{\partial f}{\partial x^i}\,d\delta x^i$ (6) d'où (6)=(4) $\Rightarrow d\delta f = \delta df$ (7).

Aussi, si f est une fonction quelconque des coordonnées, on a $d\delta f=\delta df$: Elie Cartan considère dans sa démonstration que les deux différentiations sur le vecteur effectuant le déplacement associé à un cycle élémentaire sont interchangeables entre elles. Ceci à condition que la construction des deux systèmes distincts de différentiation désignés par les symboles d et δ, associé au cycle élémentaire MM_3 via M_1 et MM_4 via M2, soit telle que M_3 et M_4 coïncident.
Analysons de manière approfondie le passage des vecteurs de base du point M à M_3 en développant les deux trajets MM_1M_3 et MM_2M_3 (M_4 devenant M_3), tels que défini précédemment en début de ce §B.2.1.3.

Plus simplement qu'Elie Cartan, nous allons travailler uniquement sur la variation des vecteurs de base le long du cycle.

Considérons un espace vectoriel E_n associé à un espace ponctuel ε_n de la géométrie ordinaire euclidienne. Quand on développe sur l'espace euclidien le trajet MM_1 du cycle, en partant d'une position déterminée, les vecteurs de base du repère attaché au point M subissent des variations géométriques élémentaires données par $d\mathbf{e}_\nu = \omega^i{}_\nu\, \mathbf{e}_i$ (8), dont :

▪ l'indice libre ν repère dans la dimension n de l'Espace Vectoriel E_n les différentielles $d\mathbf{e}_\nu$ associées aux variations des vecteurs de la base naturelle $\mathbf{e}_i$ sur cette même base $\mathbf{e}_i$.

▪ l'indice répété i défini les composantes contravariantes des vecteurs $d\mathbf{e}_\nu$ sur la base naturelle $\mathbf{e}_i$.

En d'autres termes :

▪ $\mathbf{M} = y^m\, \mathbf{e}_m{}^0$: vecteur **M** dans un repère cartésien $\mathbf{e}_m{}^0$ avec m de 1 à n.

▪ $\mathbf{e}_i = \partial\mathbf{M}/\partial x^i = (\partial y^m/\partial x^i)\, \mathbf{e}_m{}^0$ (voir §B.1.2) avec x^i les coordonnées curvilignes pour i de 1 à n.

▪ $d\mathbf{e}_i = (\partial\mathbf{e}_i/\partial x^\mu)\, dx^\mu$ avec x^μ les coordonnées curvilignes pour μ de 1 à n (les mêmes que x^i).

▪ $d\mathbf{e}_\nu = \omega^i{}_\nu\, \mathbf{e}_i = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \omega^i{}_\nu\, \mathbf{e}_i \right)$ avec $\omega^i{}_\nu = \Gamma_\mu{}^i{}_\nu\, dx^\mu$ qui se démontre très facilement.

Afin de ne pas mélanger les deux systèmes distincts de différentiation désignés respectivement par les symboles d et δ, nous écrivons : $d\mathbf{e}_\nu = \omega^i{}_\nu\, \mathbf{e}_i = (\omega^i{}_\nu)_d\, \mathbf{e}_i$ (9).

De même, le développement du trajet MM_2 du cycle donne : $\delta\mathbf{e}_\nu = \omega^i{}_\nu\, \mathbf{e}_i = (\omega^i{}_\nu)_\delta\, \mathbf{e}_i$ (10).

Le développement du trajet MM_1M_3 tels que défini en début de ce §B.2.1.3, donne un point d'arrivée M_3 et une nouvelle base naturelle $(\mathbf{e}_\nu)_3$ telle que : $(\mathbf{e}_\nu)_3 = \mathbf{e}_\nu + d\mathbf{e}_\nu + \delta(\mathbf{e}_\nu + d\mathbf{e}_\nu)$.

Le développement du trajet MM_2M_3 donne un point d'arrivée M_3 et une nouvelle base naturelle $(\mathbf{e'}_\nu)_3$ telle que : $(\mathbf{e'}_\nu)_3 = \mathbf{e}_\nu + \delta\mathbf{e}_\nu + d(\mathbf{e}_\nu + \delta\mathbf{e}_\nu)$.

Le passage de la base naturelle $(\mathbf{e}_\nu)_3$ à la base naturelle $(\mathbf{e'}_\nu)_3$ est donné par l'équation suivante :

$$(\mathbf{e'}_\nu)_3 - (\mathbf{e}_\nu)_3 = d\delta\mathbf{e}_\nu - \delta d\mathbf{e}_\nu \qquad (11).$$

En injectant dans le second membre de (11) les expressions connues pour $d\mathbf{e}_\nu$ et $\delta\mathbf{e}_\nu$ données respectivement par les équations (9) et (10), on obtient :

$(\mathbf{e'}_\nu)_3 - (\mathbf{e}_\nu)_3 = d[(\omega^i{}_\nu)_\delta\, \mathbf{e}_i] - \delta[(\omega^i{}_\nu)_d\, \mathbf{e}_i]$ (12) ; la relation *(uv)'=vu'+uv'* permet d'écrire :

$d[(\omega^i{}_\nu)_\delta\, \mathbf{e}_i] = \mathbf{e}_i\, d(\omega^i{}_\nu)_\delta + (\omega^i{}_\nu)_\delta\, d\mathbf{e}_i \Rightarrow$ dans le terme de droite, en remplaçant l'indice répété i par j, on a : $d[(\omega^i{}_\nu)_\delta\, \mathbf{e}_i] = \mathbf{e}_j\, d(\omega^j{}_\nu)_\delta + (\omega^i{}_\nu)_\delta\, d\mathbf{e}_i$.

De même : $\delta[(\omega^i{}_\nu)_d\, \mathbf{e}_i] = \mathbf{e}_j\, \delta(\omega^j{}_\nu)_d + (\omega^i{}_\nu)_d\, \delta\mathbf{e}_i$.

L'équation (12) s'écrit donc : $(\mathbf{e'}_\nu)_3 - (\mathbf{e}_\nu)_3 = \mathbf{e}_j\, d(\omega^j{}_\nu)_\delta + (\omega^i{}_\nu)_\delta\, d\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j\, \delta(\omega^j{}_\nu)_d - (\omega^i{}_\nu)_d\, \delta\mathbf{e}_i$

soit : $(\mathbf{e'}_\nu)_3 - (\mathbf{e}_\nu)_3 = [d(\omega^j{}_\nu)_\delta - \delta(\omega^j{}_\nu)_d]\, \mathbf{e}_j + (\omega^i{}_\nu)_\delta\, d\mathbf{e}_i - (\omega^i{}_\nu)_d\, \delta\mathbf{e}_i$ (13).

Remplaçons l'indice répété i de l'équation (9) par j, on a donc: $d\mathbf{e}_\nu = (\omega^j{}_\nu)_d\, \mathbf{e}_j$, puis l'indice libre ν par i, pour obtenir : $d\mathbf{e}_i = (\omega^j{}_i)_d\, \mathbf{e}_j$.

Effectuons de même pour l'équation (10), d'où : $\delta\mathbf{e}_i = (\omega^j{}_i)_\delta\, \mathbf{e}_j$.

L'équation (13) s'écrit donc : $(\mathbf{e'}_\nu)_3 - (\mathbf{e}_\nu)_3 = [d(\omega^j{}_\nu)_\delta - \delta(\omega^j{}_\nu)_d + (\omega^i{}_\nu)_\delta\, (\omega^j{}_i)_d - (\omega^i{}_\nu)_d\, (\omega^j{}_i)_\delta]\, \mathbf{e}_j$, c'est-à-dire : $(\mathbf{e'}_\nu)_3 - (\mathbf{e}_\nu)_3 = \Omega^j{}_\nu\, \mathbf{e}_j$ (14) $\Rightarrow$ $d\delta\mathbf{e}_\nu - \delta d\mathbf{e}_\nu = \Omega^j{}_\nu\, \mathbf{e}_j$ du fait de l'équation (11).

avec: $\Omega^j{}_\nu = d(\omega^j{}_\nu)_\delta - \delta(\omega^j{}_\nu)_d + (\omega^i{}_\nu)_\delta\, (\omega^j{}_i)_d - (\omega^i{}_\nu)_d\, (\omega^j{}_i)_\delta$ (15).

Le résultat de l'équation (15) confirme celui d'Elie Cartan que nous trouvons au §157 en bas de la page 181 de son livre [124].

Les bases $(\mathbf{e}_\nu)_3$ et $(\mathbf{e'}_\nu)_3$ associées aux deux développements ont des orientations différentes mais des origines qui coïncident ($\delta dx^i = d\delta x^i$). Par suite, les quantités $\Omega^j{}_\nu$ définissent une rotation qui fait passer d'une base à l'autre.

B.2.2.4- Les quantités $\Omega^j{}_\nu$ sont les composantes d'un tenseur : démonstration

On peut toujours considérer des vecteurs d'une base naturelle associée à des coordonnées curvilignes contravariantes (voir§A.4), à savoir : $\mathbf{e}_\nu = (\partial x'^l/\partial x^\nu)\, \mathbf{e'}_l$.

▪ Effectuons alors $d\mathbf{e}_\nu = d[(\partial x'^l/\partial x^\nu)\, \mathbf{e'}_l]$ c'est-à-dire $d\mathbf{e}_\nu = d(\partial x'^l/\partial x^\nu)\, \mathbf{e'}_l + (\partial x'^l/\partial x^\nu)\, d\mathbf{e'}_l$.
Puis faisons $\delta d\mathbf{e}_\nu = \delta[d(\partial x'^l/\partial x^\nu)\, \mathbf{e'}_l + (\partial x'^l/\partial x^\nu)\, d\mathbf{e'}_l]$ pour obtenir :

$$\delta d\mathbf{e}_\nu = \delta d(\partial x'^l/\partial x^\nu)\, \mathbf{e'}_l + d(\partial x'^l/\partial x^\nu)\, \delta\mathbf{e'}_l + \delta(\partial x'^l/\partial x^\nu)\, d\mathbf{e'}_l + (\partial x'^l/\partial x^\nu)\, \delta d\mathbf{e'}_l \quad (16)$$

▪ En effectuant aussi $\delta\mathbf{e}_\nu = \delta[(\partial x'^l/\partial x^\nu)\, \mathbf{e'}_l]$, le raisonnement qui précède donne

$$d\delta\mathbf{e}_\nu = d\delta(\partial x'^l/\partial x^\nu)\, \mathbf{e'}_l + \delta(\partial x'^l/\partial x^\nu)\, d\mathbf{e'}_l + d(\partial x'^l/\partial x^\nu)\, \delta\mathbf{e'}_l + (\partial x'^l/\partial x^\nu)\, d\delta\mathbf{e'}_l \quad (17)$$

▪ Réalisons (16) – (17) $\Rightarrow$ $d\delta\mathbf{e}_v - \delta d\mathbf{e}_v = (\partial x'^l/\partial x^v)\,(d\delta\mathbf{e'}_l - \delta d\mathbf{e'}_l)$ (18).

▪ Les équations (11) et (14) permettent d'écrire : $d\delta\mathbf{e'}_l - \delta d\mathbf{e'}_l = \Omega'^k_l\,\mathbf{e'}_k$ (19). Ainsi les quantités $(d\delta\mathbf{e'}_l - \delta d\mathbf{e'}_l)$ se trouvent être les déplacements géométriques des nouveaux vecteurs de la base naturelle $\mathbf{e'}_l$.

▪ (11),(14),(18) donnent : $d\delta\mathbf{e}_v - \delta d\mathbf{e}_v = \Omega^j_v\,\mathbf{e}_j = (\partial x'^l/\partial x^v)\,(d\delta\mathbf{e'}_l - \delta d\mathbf{e'}_l)$ (20).

En injectant (19) dans (20), on a : $\Omega^j_v\,\mathbf{e}_j = (\partial x'^l/\partial x^v)\,\Omega'^k_l\,\mathbf{e'}_k$ (21).

Or nous avons démontré au §A.4 pouvoir écrire : $\mathbf{e'}_k = (\partial x^j/\partial x'^k)\,\mathbf{e}_j$, ainsi l'équation (21) devient : $\Omega^j_v\,\mathbf{e}_j = (\partial x'^l/\partial x^v)\,\Omega'^k_l\,(\partial x^j/\partial x'^k)\,\mathbf{e}_j$ (22).

On obtient donc : $\Omega^j_v = (\partial x^j/\partial x'^k)\,(\partial x'^l/\partial x^v)\,\Omega'^k_l$ (23).

En conclusion, les quantités Ω^j_v respectant le critère de tensorialité vu au §A.9.3.1, nous pouvons affirmer que ces quantités sont les composantes mixtes d'un tenseur du second ordre.

B.2.2.5- Tenseur de courbure (Riemann-Christoffel) issu du tenseur de rotation d'Elie Cartan

Evaluons les composantes mixtes Ω^j_v du tenseur de rotation infinitésimal.

Soit l'équation (15) : $\Omega^j_v = d(\omega^j_v)_\delta - \delta(\omega^j_v)_d + (\omega^i_v)_\delta\,(\omega^j_i)_d - (\omega^i_v)_d\,(\omega^j_i)_\delta$

Travaillons sur chacun des termes du membre de droite de l'équation (15) :

▪ Nous avons vu au §B.2.2.3 : $(\omega^j_v)_\delta = \Gamma^j_{sv}\,\delta x^s$. Soit $d(\omega^j_v)_\delta = d(\Gamma^j_{sv}\,\delta x^s)$.

Nous pouvons écrire : $d(\Gamma^j_{sv}\,\delta x^s) = (d\Gamma^j_{sv})\,\delta x^s + \Gamma^j_{sv}\,d\delta x^s$ car $(uv)'=vu'+uv'$.

D'où : $d(\omega^j_v)_\delta = [(\partial\Gamma^j_{sv}/\partial x^r)dx^r]\,\delta x^s + \Gamma^j_{sv}\,d\delta x^s$.

▪ De même, $(\omega^j_v)_d = \Gamma^j_{rv}\,dx^r$ donne $\delta(\omega^j_v)_d = [(\partial\Gamma^j_{rv}/\partial x^s)\delta x^s]\,dx^r + \Gamma^j_{rv}\,\delta dx^r$, ce qui permet d'écrire

$$d(\omega^j_v)_\delta - \delta(\omega^j_v)_d = [(\partial\Gamma^j_{sv}/\partial x^r)dx^r]\,\delta x^s + \Gamma^j_{sv}\,d\delta x^s - [(\partial\Gamma^j_{rv}/\partial x^s)\delta x^s]\,dx^r + \Gamma^j_{rv}\,\delta dx^r .$$

L'indice répété r du dernier terme de droite pouvant être remplacé par s, alors le fait d'obtenir $\delta dx^s = d\delta x^s$ donne : $d(\omega^j_v)_\delta - \delta(\omega^j_v)_d = (\partial\Gamma^j_{sv}/\partial x^r)dx^r\,\delta x^s - (\partial\Gamma^j_{rv}/\partial x^s)\delta x^s\,dx^r$ (24).

▪ Sachant que les deux derniers termes de droite de (15) peuvent s'écrire :

$(\omega^i_v)_\delta\,(\omega^j_i)_d = \Gamma^i_{sv}\,\delta x^s\;\Gamma^j_{ri}\,dx^r$ et $(\omega^i_v)_d\,(\omega^j_i)_\delta = \Gamma^i_{rv}\,dx^r\;\Gamma^j_{si}\,\delta x^s$, on obtient :

$$(\omega^i_v)_\delta\,(\omega^j_i)_d - (\omega^i_v)_d\,(\omega^j_i)_\delta = \Gamma^i_{sv}\,\delta x^s\;\Gamma^j_{ri}\,dx^r - \Gamma^i_{rv}\,dx^r\;\Gamma^j_{si}\,\delta x^s$$

c'est-à-dire : $(\omega^i_v)_\delta\,(\omega^j_i)_d - (\omega^i_v)_d\,(\omega^j_i)_\delta = (\Gamma^i_{sv}\,\Gamma^j_{ri} - \Gamma^i_{rv}\,\Gamma^j_{si})\,dx^r\,\delta x^s$ (25).

L'équation (15) peut donc s'écrire : Ω^j_v = (24) + (25) , c'est-à-dire :

$$\Omega^j_v = (\partial\Gamma^j_{sv}/\partial x^r) - \partial\Gamma^j_{rv}/\partial x^s + \Gamma^i_{sv}\,\Gamma^j_{ri} - \Gamma^i_{rv}\,\Gamma^j_{si})\,dx^r\,\delta x^s \quad (26).$$

Sachant que : $\Gamma^j_{sv} = \Gamma^j_{vs}$; $\Gamma^j_{rv} = \Gamma^j_{vr}$; $\Gamma^i_{sv} = \Gamma^i_{vs}$; $\Gamma^i_{rv} = \Gamma^i_{vr}$; l'équation (26) devient :

$$\Omega^j_v = (\partial\Gamma^j_{vs}/\partial x^r) - \partial\Gamma^j_{vr}/\partial x^s + \Gamma^i_{vs}\,\Gamma^j_{ri} - \Gamma^i_{vr}\,\Gamma^j_{si})\,dx^r\,\delta x^s .$$

▪ Le tenseur de Riemann-Christoffel apparaît dans la relation précédente comme suit :

$$R_v{}^j{}_{rs} = \frac{\partial\Gamma^j_{vs}}{\partial x^r} - \frac{\partial\Gamma^j_{vr}}{\partial x^s} + \Gamma^i_{vs}\,\Gamma^j_{ri} - \Gamma^i_{vr}\,\Gamma^j_{si} \quad (27)$$

et correspond à l'expression trouvée par Elie Cartan page 184 de son livre [81].

▪ D'où l'expression du tenseur de rotation infinitésimal : $\Omega^j_v = R_v{}^j{}_{rs}\,dx^r\,\delta x^s$.

▪ Montrons que les quantités $R_v{}^j{}_{rs}$ sont les composantes d'un tenseur :

Appliquons pour cela le critère général de tensorialité vu au §A.9.3.2 : les quantités dx^r et δx^s étant les composantes contravariantes de deux vecteurs arbitraires, leur contraction avec $R_v{}^j{}_{rs}$ donnent le tenseur mixte $\mathbf{\Omega}$ de composantes Ω^j_v , alors $\mathbf{R}$ de composantes $R_v{}^j{}_{rs}$ est aussi un tenseur.

B.2.2.6- Tenseur de Ricci

L'exigence de la validité de la relativité restreinte localement, c'est-à-dire au point M et à l'instant t, nécessite l'écriture de l'équation : $R_v{}^j{}_{rs} = 0$.

En effet, ceci implique la nullité du tenseur de rotation infinitésimal au point M et à l'instant t : $\Omega^j_v = R_v{}^j{}_{rs}\,dx^r\,\delta x^s$, garantissant ainsi par l'absence de courbure en ce point M au temps t, une

géométrie euclidienne relative à l'espace de Minkowski associé à une métrique où l'intervalle d'espace-temps ds^2 est déterminé par un élément infinitésimal linéaire.
Mais laissons Einstein s'exprimer à ce sujet dans sa synthèse finale sur les fondements de la théorie de la relativité générale publiée dans les annales de physique en 1916 : *« L'importance mathématique du tenseur de Riemann-christoffel tient au fait suivant. Si le continuum est tel qu'il y ait un système de coordonnées par rapport auquel les $g_{\mu\nu}$ sont des constantes, alors toutes les composantes du tenseur de Riemann-Christoffel sont nulles. … . La nullité du tenseur de Riemann est donc une condition nécessaire pour qu'un choix approprié du système de référence entraîne la constance des $g_{\mu\nu}$. Dans notre problème, ce cas correspond à celui où, par un choix adéquat du système de coordonnées dans un domaine fini, la théorie de la relativité restreinte est valable.* [82].
La relativité d'Einstein étant une théorie géométrique à 4 dimensions (une de temps, trois d'espace), le §A.5 stipule que le nombre de composantes des tenseurs mis en jeux soit au nombre de 16, formant une matrice carrée 4x4 dont le nombre d'indices de chaque élément de la matrice égal à deux est parfaitement adapté. Il convient d'effectuer certaines sommations sur ses composantes pour le réduire à un tenseur d'ordre deux. Comme indiqué par Elie Cartan dans son ouvrage page 202, le tenseur de Riemann-Christoffel admet donc un tenseur contracté que nous obtenons de la manière suivante :

$$R_{\nu\ \ rs}^{\ j} = 0 \ \Rightarrow\ g^{r}_{j}\, R_{\nu\ \ rs}^{\ j} = 0 \ \Rightarrow\ R_{\nu\ \ js}^{\ j} = 0 \ \Rightarrow\ R_{\nu s} = 0 \qquad (28).$$

Il s'agit du tenseur de Ricci. Les quantités $R_{\nu s}$ sont obligatoirement les composantes d'un tenseur puisque le tenseur de Ricci est obtenu par contraction des indices répétés associés au tenseur de Riemann-Christoffel. En fonction des symboles de Christoffel de deuxième espèce, le tenseur de Ricci s'écrit, en nous rapportant à la relation (27) :

$$R_{\nu s} = R_{\nu\ \ js}^{\ j} = \frac{\partial \Gamma^{j}_{\nu s}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial \Gamma^{j}_{\nu j}}{\partial x^{s}} + \Gamma^{i}_{\nu s}\Gamma^{j}_{ji} - \Gamma^{i}_{\nu j}\Gamma^{j}_{si} \qquad (29)$$

B.2.2.7- Scalaire de Ricci encore appelé courbure scalaire R

L'équation (28) peut s'écrire (voir §A.9.2.4.b) : $R_{\nu s} = 0 \ \Rightarrow\ g^{\nu s} R_{\nu s} = 0 \ \Rightarrow\ R^{\nu}_{\nu} = R = 0$ (30)
Il s'agit de la courbure scalaire ou scalaire de Ricci obtenu par contraction de l'indice répété ν associé au tenseur R^{ν}_{ν}. Ce scalaire R, différent de zéro, témoigne d'une courbure infinitésimale de l'espace-temps autour du point M c'est-à-dire dans la variété différentielle riemannienne. Le scalaire R est appelé *courbure riemannienne scalaire* de l'espace par Elie Cartan page 202 de son livre. Il s'agit d'une expression invariante, garante de la conservation des lois de la nature. En d'autres termes, d'une expression invariante quel que soit le repère défini par telle ou telle base naturelle arbitraire. Ceci de manière similaire à un vecteur de l'espace euclidien que l'on sait par nature invariant pour tout système de coordonnées cartésiennes définie leurs par ses vecteurs de base arbitraire **i**,**j**,**k**.
Comme nous le verrons ci-après, tout le travail de Hilbert pour trouver les équations tensorielles de la relativité générale par l'intégrale d'action basée sur le principe de moindre action, repose sur l'invariance du scalaire de Ricci.

B.3- Champ gravitationnel dans le vide et en présence de matière

B.3.1- Champ gravitationnel dans le vide

Le travail que nous effectuons dans ce paragraphe est largement inspiré de celui d'Hilbert que nous trouvons dans le document [83] référencé en bibliographie.

B.3.1.1- Position du problème : la mécanique analytique [84]

En mécanique analytique, les systèmes sont décrits par la fonction dite de Lagrange, encore appelée lagrangien ou densité lagrangienne pour ce qui nous préoccupe. Cette mécanique est

formulée de manière différente de ce que Newton nous a habitué, c'est-à-dire qu'elle ne fait appel à aucune notion de force. Ce formalisme est parfaitement adapté à la théorie des champs et à la théorie du champ de gravitation. Aussi, les équations tensorielles traduisant l'action du champ gravitationnel au point M d'espace-temps à l'instant t, engendré par une distribution de matière située à l'extérieur de M, est le résultat du calcul de l'intégrale d'action S conformément au principe de mondre action qui stipule que la nature choisit toujours, parmi toutes les possibilités qui s'offrent à elle, la voie qui minimise sa dépense d'énergie.
Le principe de moindre action consiste à trouver un chemin, dans le volume infinitésimal d'espace-temps associé à la densité lagrangienne L dans la variété riemannienne, tel qu'entre deux extrémités A et B fixes, la variation de l'intégrale d'action soit extrémale (au sens minimaliste). La densité lagrangienne L est exprimée par la fonction scalaire des coordonnées curvilignes de la variété riemannienne et de leurs dérivées, c'est-à-dire par le système constitué par les $g_{\mu\nu}$ et leurs dérivées. Les variations de l'intégrale d'action (l'intégrale de la densité lagrangienne par unité de volume) permet de déterminer l'évolution du système, grâce au principe variationnel ; de sa minimalisation est issue l'ensemble des équations différentielles appelées équations d'Euler-Lagrange. L'intégrale d'action est reliée à l'énergie cinétique et à l'énergie potentielle gravitationnelle.

B.3.1.2- Recherche des invariants sous l'intégrale d'action telle que ces invariants répondent aux critères demandés pour l'expression de la densité lagragienne

Afin de garantir l'invariance des lois de la nature suite à tout changement de base naturelle arbitraire, nous devons trouver sous l'intégrale d'action S :

- l'élément de volume invariant par transformation des coordonnées
- la densité lagrangienne obligatoirement invariante par rapport aux changement des coordonnées et obligatoirement fonction scalaire des coordonnées curvilignes de la variété riemannienne et de leurs dérivées.

a) Elément de volume

Nous avons vu au §2.1.4 l'expression $ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$ avec $g_{\mu\nu}$ représentant les composants du tenseur métrique **g**. Dans le cas de la théorie de la relativité générale, cette expression est associée au concept d'espace-temps à 4 dimensions (une de temps, trois d'espace), et fait appel au tenseur **g** dont les composantes forment les éléments $g_{\mu\nu}$ d'une matrice diagonale m à 4 lignes et 4 colonnes. Nous pouvons facilement démontrer que le déterminant g de la matrice m associée aux composantes $g_{\mu\nu}$ du tenseur métrique **g** est égal au produit des éléments $g_{\mu\nu}$ de sa diagonale, c'est-à-dire $g = \prod_{\mu=\nu=1}^{\mu=\nu=4} g^{\mu\nu}$.

De plus, une étude du développement de la forme quadrilinéaire alternée et antisymétrique $(dx'^1, dx'^2, dx'^3, dx'^4)$ associé au repère minkowskien suivant une base B de l'Espace Vectoriel E_4 associé aux coordonnées curvilignes de la variété riemannienne telle que $B = (dx^1, dx^2, dx^3, dx^4)$ donne :

$$|g'|^{1/2}\,(dx'^1, dx'^2, dx'^3, dx'^4) = |g|^{1/2}\,(dx^1, dx^2, dx^3, dx^4)$$

car dans l'espace minkowskien on a $|g'|^{1/2} = 1$.
Le fait de pouvoir écrire : $|g'|^{1/2}\,(dx'^1, dx'^2, dx'^3, dx'^4) = |g|^{1/2}\,(dx^1, dx^2, dx^3, dx^4)$
montre, par transitivité, que l'élément de volume $|g|^{1/2}\, d^4x$ est invariant par transformation des coordonnées.

b) Densité lagrangienne

Il faut trouver une densité lagrangienne invariante, faisant intervenir d'une manière ou d'une autre le tenseur spatiotemporel $g_{\mu\nu}$, au point M à l'instant t, et ses dérivées. Nous pouvons donc essayer directement avec la quantité suivante, sachant d'avance grâce à Hilbert, que c'est la bonne hypothèse.
Soient donc les composantes contravariantes $g_{\mu\nu}$ du tenseur métrique spatiotemporel et celles covariantes $R_{\nu s}$ du tenseur de Ricci. Nous avons vu au §B.2.1.7 que la sommation $g^{\nu s} R_{\nu s}$ donne la courbure scalaire R d'un espace pseudo-riemammien, donc une expression invariante au point M à

l'instant t. Il s'agit du seul invariant convenable puisque la gravitation est interprétée comme une manifestation de la courbure de l'espace-temps.

B.3.1.3- Intégrale d'action S appliquée à la relativité générale

D'après tout ce qui vient d'être dit, l'intégrale d'action est la suivante :S = $\int_{(v)} R|g|^{1/2}\, d^4X$ (31).

Avec R = $g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ (voir 30)

et $R_{\mu\nu} = \partial\Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\sigma}/\partial x^{\nu} - \partial\Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu}/\partial x^{\sigma} + \Gamma_{\mu}{}^{\rho}{}_{\sigma}\Gamma_{\nu}{}^{\sigma}{}_{\rho} - \Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu}\Gamma_{\sigma}{}^{\rho}{}_{\rho})$ provenant du tenseur $R_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu\sigma}$ contracté sur σ.

En posant R = R* – L, nous obtenons $R\,|g|^{1/2} = R^*|g|^{1/2} - L|g|^{1/2}$

avec $R^* = g^{\mu\nu}(\partial\Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\sigma}/\partial x^{\nu} - \partial\Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu}/\partial x^{\sigma})$ (32) et $L = g^{\mu\nu}(\Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu}\Gamma_{\sigma}{}^{\rho}{}_{\rho} - \Gamma_{\mu}{}^{\rho}{}_{\sigma}\Gamma_{\nu}{}^{\sigma}{}_{\rho})$ (33).

B.3.1.3.1- Transformation du terme $R^*|g|^{1/2}$

Soit : $R^*|g|^{1/2} + \Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu}[\partial(g^{\mu\nu}|g|^{1/2})/\partial x^{\sigma}] - [\partial(g^{\mu\nu}|g|^{1/2})/\partial x^{\sigma}]\,\Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu} + [\partial(g^{\mu\nu}|g|^{1/2})/\partial x^{\nu}]\,\Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\sigma} - \Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\sigma}[\partial(g^{\mu\nu}|g|^{1/2})/\partial x^{\nu}]$, qui ne change rien à $R^*|g|^{1/2}$; en appliquant *vu'+uv'= (uv)'*, on obtient :

$$\int_{(v)} R^*|g|^{1/2} d^4X = \int[\partial(g^{\mu\nu}|g|^{1/2}\,\Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\sigma})/\partial x^{\nu}]\,d^4x - \int[\partial(g^{\mu\nu}|g|^{1/2}\,\Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu})/\partial x^{\sigma}]\,d^4x$$
$$+\int\Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu}[\partial(g^{\mu\nu}|g|^{1/2})/\partial x^{\sigma}]\,d^4x - \int\Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\sigma}[\partial(g^{\mu\nu}|g|^{1/2})/\partial x^{\nu}]\,d^4x \quad (34).$$

▪ Travaillons sur le premier terme du membre de droite de l'équation (34) :

Sachant que $|g| = \det g_{\mu\nu}$, on peut écrire $|g| = f_1(g_{\mu\nu})$; de plus sachant que $\Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\sigma} = f_2(g_{\mu\nu})$, on peut écrire $(g^{\mu\nu}|g|^{1/2}\,\Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\sigma}) = f(g_{\mu\nu})$ d'où $\int[\partial(g^{\mu\nu}|g|^{1/2}\Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\sigma})/\partial x^{\nu}]\,d^4x = \int[\partial f(g^{\mu\nu})/\partial x^{\nu}]\,d^4x$

$$= \int[\partial f(g^{\mu\nu})/\partial x^{\nu}]\,dx^{\nu}\,d^3x = \int_{(s)}\int_A^B d\,f(g_{\mu\nu})\,d^3X = \int_{(s)}[f]_A^B ds.$$

Le calcul variationnel appliqué au principe de moindre action sur $\int[\partial(g^{\mu\nu}|g|^{1/2}\Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\sigma})/\partial x^{\nu}]\,d^4x$ donne : $\delta\int[\partial(g^{\mu\nu}|g|^{1/2}\Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\sigma})/\partial x^{\nu}]\,d^4x = \delta\int_{(s)}[f]_A^B ds = \int_{(s)}\delta f(B)ds - \int_{(s)}\delta f(A)ds$. Or il n'y a aucune variation de $f(g_{\mu\nu})$ aux points A et B car A et B sont les frontières d'intégration de l'intégrale d'action. Ainsi, grâce à ces conditions de bord :

$$\delta f(B) = \delta f(A) = 0 \quad\Rightarrow\quad \int[\partial(g^{\mu\nu}|g|^{1/2}\Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\sigma})/\partial x^{\nu}]\,d^4x = 0.$$

De la même manière on a : $\int[\partial(g^{\mu\nu}|g|^{1/2}\,\Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu})/\partial x^{\sigma}]\,d^4x = 0$.

Le terme $R^*|g|^{1/2}$ de l'équation (34) devient donc :

$$R'^*|g|^{1/2} = \Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu}[\partial(g^{\mu\nu}|g|^{1/2})/\partial x^{\sigma}] - \Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\sigma}[\partial(g^{\mu\nu}|g|^{1/2})/\partial x^{\nu}] \quad (35).$$

Soient les identités tensorielles remarquables suivantes :

$$\partial(g^{\mu\nu}|g|^{1/2})/\partial x^{\sigma} = (-g^{\nu\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\mu}{}_{\sigma} - g^{\mu\alpha}\Gamma_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\sigma} + g^{\mu\nu}\Gamma_{\sigma}{}^{\beta}{}_{\beta})\,|g|^{1/2} \quad (36).$$
$$\partial(g^{\mu\nu}|g|^{1/2})/\partial x^{\nu} = -g^{\nu\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\mu}{}_{\nu}\,|g|^{1/2} \quad (37).$$

En injectant (36) et (37) dans (35), nous obtenons :

$$R'^*|g|^{1/2} = (-g^{\nu\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\mu}{}_{\sigma} - g^{\mu\alpha}\Gamma_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\sigma} + g^{\mu\nu}\Gamma_{\sigma}{}^{\beta}{}_{\beta})\,|g|^{1/2}\,\Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu} + g^{\nu\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\mu}{}_{\nu}\,|g|^{1/2}\,\Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\sigma} \quad (38).$$

▪Travaillons sur le dernier terme du membre de droite de l'équation (38): les indices μ, β, σ, α, étant répétés, on les change respectivement par α, μ, β, σ, et l'on obtient : $g^{\mu\nu}\Gamma_{\sigma}{}^{\beta}{}_{\beta}\,|g|^{1/2}\,\Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu}$ (39).

(38) devient : $R'^*|g|^{1/2} = -g^{\nu\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\mu}{}_{\sigma}\,|g|^{1/2}\Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu} - g^{\mu\alpha}\Gamma_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\sigma}\,|g|^{1/2}\Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu} + 2\,g^{\mu\nu}\Gamma_{\sigma}{}^{\beta}{}_{\beta}\Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu}\,|g|^{1/2}$ (40).

En changeant l'indice répété β en ρ, du dernier terme du membre de droite de (40), on obtient :

$$R'^*|g|^{1/2} = -g^{\nu\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\mu}{}_{\sigma}\,|g|^{1/2}\Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu} - g^{\mu\alpha}\Gamma_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\sigma}\,|g|^{1/2}\Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu} + 2\,g^{\mu\nu}\Gamma_{\sigma}{}^{\rho}{}_{\rho}\Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu}\,|g|^{1/2} \quad (41).$$

▪Travaillons sur le premier terme du membre de droite de l'équation (41): les indices μ, β, α, étant répétés, on les change respectivement par α, μ, ρ, et l'on obtient : $-g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu}{}^{\rho}{}_{\sigma}\Gamma_{\nu}{}^{\sigma}{}_{\rho}\,|g|^{1/2}$ (42).

▪Travaillons sur le 2ème terme du membre de droite de (41): les indices ν, α, étant répétés, on les change respectivement par ρ, ν, puis μ et ν sont interchangés, d'où : $-g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu}{}^{\rho}{}_{\sigma}\Gamma_{\nu}{}^{\sigma}{}_{\rho}\,|g|^{1/2}$ (43).

Compte-tenu de (42) et (43), (41) devient : $R'^*|g|^{1/2} = 2\,g^{\mu\nu}(\Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu}\Gamma_{\sigma}{}^{\rho}{}_{\rho} - \Gamma_{\mu}{}^{\rho}{}_{\sigma}\Gamma_{\nu}{}^{\sigma}{}_{\rho})\,|g|^{1/2}$ (44).

Compte-tenu de (33), l'équation (44) permet d'écrire : $R'^{*} |g|^{1/2} = 2L\ |g|^{1/2}$ (45).
Pour calculer la variation de l'intégrale d'action (31), il suffit de calculer la variation de la nouvelle intégrale d'action : $S' = X = \int_{(v)} (2L-L)|g|^{1/2} d^4X = \int \mathscr{L}\, d^4x$ avec $\mathscr{L} = L\ |g|^{1/2}$
où les dérivées secondes de $g_{\mu\nu}$ ont disparues : $\delta S' = \delta\int g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu}\, \Gamma_{\sigma}{}^{\rho}{}_{\rho} - \Gamma_{\mu}{}^{\rho}{}_{\sigma}\, \Gamma_{\nu}{}^{\sigma}{}_{\rho})\ |g|^{1/2}\, d^4x$ (46).

B.3.1.3.2- Variation de l'intégrale d'action

Soit δ_1 et δ_2 de (46) : $\delta_1 = \delta\, (g^{\mu\nu}\, \Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu}\, \Gamma_{\sigma}{}^{\rho}{}_{\rho} |g|^{1/2})$ (47) et $\delta_2 = \delta\, (g^{\mu\nu}\, \Gamma_{\mu}{}^{\rho}{}_{\sigma}\, \Gamma_{\nu}{}^{\sigma}{}_{\rho})\ |g|^{1/2})$ (48)
Pour transformer (47) et (48), nous allons utiliser les propriétés suivantes :

$\delta(BAC) = B\delta AC + AC\delta B$ (49)

$\delta(AB)=A\delta B+B\delta A \Rightarrow A\delta B=\delta(AB)-B\delta A \Rightarrow C(A\delta B)=C[\delta(AB)-B\delta A]=C\delta(AB)-CB\delta A$ (50)

$\delta(ABC)=BC\delta A+AC\delta B+Ab\delta C$ (51)

$\delta(A+B)=\delta A+\delta B$ (52)

a) Transformation de δ_1

En changeant respectivement les indices répétés σ,ρ, par α,β, en posant $A= g^{\mu\nu} |g|^{1/2}$, $B= \Gamma_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu}$, $C= \Gamma_{\sigma}{}^{\beta}{}_{\beta}$, en utilisant (49),(50), et les deux identités tensorielles $\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\beta} |g|^{1/2} = (\partial |g|^{1/2}) / \partial x^{\alpha}$, $(\partial g^{\alpha\nu} |g|^{1/2}) / \partial x^{\nu} = - g^{\mu\nu}\, \Gamma_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu} |g|^{1/2}$, on obtient :
$\delta_1 = \Gamma_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu}\, \delta[g^{\mu\nu} (\partial |g|^{1/2}) / \partial x^{\alpha}] - \Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\beta}\, \delta[(\partial g^{\alpha\nu}\ |g|^{1/2}) / \partial x^{\nu}] - \Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\beta}\, \Gamma_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu}\, \delta[g^{\mu\nu}\ |g|^{1/2}]$ (53)

a) Transformation de δ_2

En travaillant sur (48), en posant $A= g^{\mu\nu} |g|^{1/2}$, $B= \Gamma_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\beta}$, $C= \Gamma_{\mu}{}^{\beta}{}_{\alpha}$, en faisant usage des relations (49),(50),(51), de l'identité tensorielle $g^{\nu\beta}\, \Gamma_{\beta}{}^{\mu}{}_{\sigma} + g^{\mu\alpha}\, \Gamma_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\sigma} = -(\partial g^{\mu\nu}) / \partial x^{\sigma}$ et en pratiquant le calcul tensoriel tel que nous l'avons montré au §B.3.1.3.1, on obtient :

$$\delta_2 = \Gamma_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\beta}\, \delta(|g|^{1/2} [(\partial g^{\nu\beta}) / \partial x^{\alpha}]) - \Gamma_{\mu}{}^{\beta}{}_{\alpha}\, \Gamma_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\beta}\, \delta[g^{\mu\nu} |g|^{1/2}] \quad (54)$$

c) Valeur de $\delta\mathscr{L}$

La variation de l'intégrale d'action (équation 46) s'écrit : $\delta S' = \delta\int \mathscr{L}\, d^4x = \int \delta\mathscr{L}\, d^4x = \int(\delta_1-\delta_2)\, d^4x$.
En travaillant sur $\delta\mathscr{L} = (\delta_1 - \delta_2)$, en faisant usage de la relation (52), de la relation *(uv)'=vu'+uv'* sur les dérivées, du tenseur de Ricci, et en pratiquant le calcul tensoriel tel que nous l'avons montré au §B.3.1.3.1, on obtient : $\delta\mathscr{L} = R_{\mu\nu}\, \delta[g^{\mu\nu} |g|^{1/2}]$ (55), soit : $\delta S' = \int R_{\mu\nu}\, \delta[g^{\mu\nu} |g|^{1/2}]\, d^4x$ (56).

B.3.1.4- Première forme de l'équation tensorielle d'Einstein dans le vide : $R_{\mu\nu} = 0$

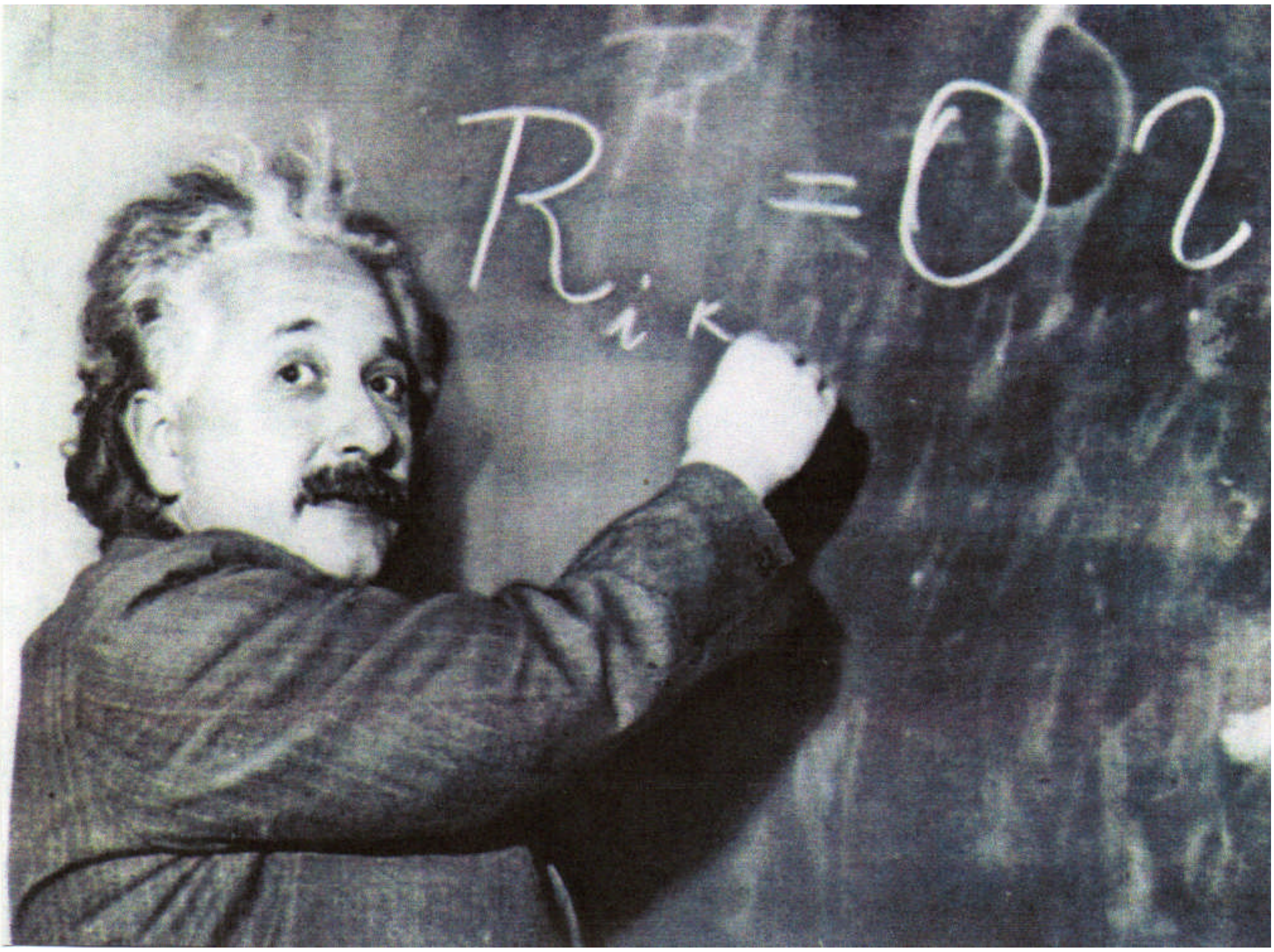
Comme expliqué au §B.3.1.1, la variation de l'intégrale d'action est extrémale pour l'équation $R_{\mu\nu}\, \delta[g^{\mu\nu} |g|^{1/2}] = 0$.

Aussi, la première forme de l'équation tensorielle du champ de gravitation d'Einstein dans le vide est donc :

$$R_{\mu\nu.} = 0.$$

La solution statique de la théorie de la relativité générale pour le vide (de matière) dans un champ de gravitation à symétrie sphérique, est donnée par la métrique de Schwarzschild.

Or l'équation $R_{\mu\nu.} = 0$ simple en apparence, est nécesaire au calcul des $g_{\mu\nu}$ de la métrique de Schwarzschild.
Et ce sont ces $g_{\mu\nu}$ qui permettent d'établir d'une part la trajectoire d'espace-temps d'une planète autour du soleil, d'où est issu le calcul du périhélie de Mercure, et d'autre part la déviation des rayons lumineux frôlant le soleil, qui servira de test de la théorie par Eddington en 1919.



B.3.1.5- Deuxième forme de l'équation tensorielle d'Einstein dans le vide : $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R = 0$

Pour trouver l'autre condition qui extrémalise la variation de l'intégrale d'action, il faut travailler sur l'expression $\delta[g^{\mu\nu}|g|^{1/2}]$.

En travaillant sur les identités tensorielles suivantes :

- $\partial g / \partial x^{\nu} = g\, g^{\lambda\mu} (\partial g_{\lambda\mu} / \partial x^{\nu})$ (57)
- $(1/2)\, \partial g / \partial x^{\nu} = g\, (\partial \ln|g|^{1/2}) / \partial x^{\nu})$ (58)
- $|g|^{1/2} (\partial \ln|g|^{1/2} / \partial x^{\nu}) = \partial |g|^{1/2} / \partial x^{\nu}$ (59)
- $\delta |g|^{1/2} = (\partial |g|^{1/2} / \partial x^{\nu})\, \delta x^{\nu}$ (60)
- $\delta g_{\lambda\mu} = (\partial g_{\lambda\mu} / \partial x^{\nu})\, \delta x^{\nu}$ (61)
- $\delta g^{\mu\nu} = - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}\, \delta g_{\alpha\beta}$ (62),

on obtient : $\delta (g^{\mu\nu}|g|^{1/2}) = -[g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - (1/2)\, g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu}]\ |g|^{1/2}\, \delta g_{\alpha\beta}$ (63).

En injectant (63) dans (56), en sachant que $g|^{1/2}]\, d^4x = dv$, nous avons :

$$\delta S' = -\int R_{\mu\nu}\, [g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - (1/2)\, g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu}]\, \delta g_{\alpha\beta}\, dv \qquad (64).$$

Ainsi, l'autre condition qui rend extrémale la variation δS'de l'intégrale d'action est l'annulation de la fonction $R_{\mu\nu}\, [g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - (1/2)\, g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu}]$, soit : $R_{\mu\nu}\, g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - (1/2)\, g^{\alpha\beta} R_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu}] = 0$ (65).

L'équation (65) peut s'écrire (voir §A.9.2.4.b) : $g^{\nu\beta} R_{\nu}{}^{\alpha} - (1/2)\, g^{\alpha\beta} R_{\nu}{}^{\nu} = 0$ (66),

c'est-à-dire : $R^{\alpha\beta} - (1/2)\, g^{\alpha\beta} R = 0$ (67).

Rien ne nous interdit de multiplier les deux membres de (67) par $g_{\alpha\mu}\, g_{\beta\nu}$, soit :

$$g_{\alpha\mu}\, g_{\beta\nu}\, (R^{\alpha\beta} - (1/2)\, g^{\alpha\beta} R = 0 \ \Rightarrow\ g_{\beta\nu}\, g_{\mu\alpha}\, R^{\alpha\beta} - (1/2)\, g_{\beta\nu}\, g_{\mu\alpha}\, g^{\alpha\beta} R = 0$$

d'où :

$$g_{\beta\nu} R_\mu{}^\beta - (1/2)\, g_{\beta\nu}\, g_\mu{}^\beta R = 0$$

c'est-à-dire :

$$R_{\mu\nu} - (1/2)\, g_{\mu\nu} R = 0 \qquad (68).$$

L'équation (68) est la deuxième forme de l'équation tensorielle de la gravitation relativiste d'Einstein dans le vide. Nous allons nous servir de cette équation afin d'établir les équations tensorielles du champ de gravitation en présence de matière. De manière très schématique, il suffira comme nous le mentionnons au §2.1.5 de faire correspondre le premier membre de l'équation (68) représentant la géométrie spatiotemporelle de l'Univers, à la densité de matière-énergie présente dans l'Univers.
La recherche du premier membre de l'équation (68) est assez abstraite. Einstein ne parvenait pas à le trouver. Avec ce qu'il obtenait, il ne réussissait pas à obtenir des résultats meilleurs que ceux de Newton pour ce qui concerne le calcul du périhélie de Mercure. Heureusement, au milieu de l'année 1915, à Göttingen, où il donnait une série de conférences au sujet du fondement de sa théorie, Einstein fit la connaissance de Hilbert, le meilleur mathématicien du moment. Hilbert, très intéressé par l'approche mathématique originale de la gravitation, se proposa d'aider Einstein qui accepta avec un grand enthousiasme.
Comme nous l'avons écrit précédemment, le travail que nous avons effectué dans ce paragraphe est largement inspiré de celui d'Hilbert que nous trouvons dans le document [83] référencé en bibliographie. Dans ce document, nous trouvons aussi l'approche d'Einstein parvenant au même résultat qu'Hilbert mais de manière beaucoup plus intuitive, maniant physique et calcul tensoriel parfois assez loin de la rigeur exigée pout toute activité scientifique. Ce travail effectué sans Hilbert, fut entrepris lorque le physicien allemand comprit, à juste raison, que le mathématicien de Göttingen était en train d'usurper son travail de plus de dix ans afin de publier les équations de la relativité générale à son propre nom. Dans le document [83] nous trouvons toute la correspondance du mois de novembre 1915 entre Einstein et Hilbert à ce sujet.

B.3.2- Champ gravitationnel en présence de matière

B.3.2.1- Le tenseur Impulsion-Energie

Avant d'entreprendre l'étude du champ gravitationnel en présence de matière, nous devons définir le tenseur représentant la densité d'énergie dans l'univers. Les explications de ce paragraphe et les calculs qui s'y rapportent sont largement inspirés des travaux d'André LICHNEROWICZ que nous trouvons dans son ouvrage *« Eléments de calcul tensoriel »* aux Editions Jacques Gabay pages 148 à 191.

Nous pouvons considérer, sans perdre en précision, la densité d'énergie de la matière cosmique sans les rayonnements associés, sachant que la densité relativiste sous forme de rayonnement est négligeable. En effet, le tenseur obtenu permettra d'appliquer la relativité générale à l'infiniment grand de la cosmologie avec une bonne approximation.Il nous faut donc trouver la source de la gravitation responsable des fluctuations de la métrique $g_{\mu\nu}$ qui est ni plus ni moins que le tenseur impulsion-énergie $T_{\mu\nu}$ cherché.

L'équation du champ de gravitation d'Einstein étant une équation valable localement, nous devons considérer comme toujours, une petite région spatiale autour du point M à l'instant t de l'espace euclidien de la relativité restreinte. Au point de vue microscopique, tout milieu se compose de particules. Mais on peut se placer à un point de vue macroscopique et décrire le comportement d'un milieu continu (fluide) en fixant son attention non sur les particules individuelles, mais sur un petit volume. Au cours du temps, les particules entrent et sortent d'un tel élément de volume, chaque particule obéissant aux lois générales de la mécanique. Ainsi, au point M et à l'instant t, nous définissons une densité de matière cosmique ε et un vecteur vitesse $\mathbf{v}$. Ces deux éléments ε et $\mathbf{v}$ ne sont pas indépendants puisque le changement de densité dans un élément de volume est donné par le flux de matière cosmique qui traverse la surface de cet élément de volume. On aboutit ainsi à l'équation de la conservation de la masse, dite de continuité :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + div\left(\varepsilon \vec{v}\right) = 0 ,$$

écrite sous forme tensorielle générale en utilisant la dérivée covariante correspondant à l'espace euclidien à 3 dimensions dans un système de coordonnées curvilignes arbitraires :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{D\varepsilon v^k}{\partial x^k} = 0 .$$

Pour construire le tenseur $T_{\mu\nu}$, nous devons déterminer la forme tensorielle générale des équations du mouvement qui est en dynamique relativiste la traduction de l'équation classique de la conservation de la masse (voir ci-avant) et de l'équation générale de la dynamique des milieux continus, de la mécanique classique, suivante :

$$\frac{\partial\left(\varepsilon v^i\right)}{\partial t} + \frac{D(\varepsilon v^k v^i + t^{ki})}{\partial x^k} = f^i .$$

Il nous faut donc obtenir la forme relativiste des équations du mouvement d'un milieu continu. Pour cela, nous introduisons un système référentiel galiléen de repos instantané S_0 par rapport auquel la matière est au repos au point d'univers M à l'instant t et nous cherchons à écrire nos équations en M relativement à S_0. La matière se mouvant à la vitesse **v** au voisinage de M, nous calculons un vecteur-impulsion par unité de volume correspondant à un flux d'énergie traversant un élément de surface ds. Il suffit de substituer ce vecteur-impulsion dans les équations de la conservation de la masse et de la dynamique des milieux continus de la mécanique classique pour obtenir les équations relativistes du mouvement des milieux continus, valables au point M et dans le repère galiléen S_0 considéré. Nous obtenons les deux équations suivantes :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial v^k}{\partial x^k} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial (v^l t^{lk})}{\partial x^k} = 0$$

$$\frac{\varepsilon \partial v^i}{\partial t} - \frac{1}{c^2} t^{li} \frac{\partial v^l}{\partial t} + \frac{\partial t^{ki}}{\partial x^k} = f^i .$$

Ces équations pouvant être mises sous la forme tensorielle, valable dans un système de coordonnées curvilignes arbitraires, nous aboutissons aux équations fondamentales de la dynamique relativiste des milieux continus sous la forme de la dérivée covariante suivante :

$$\frac{D(\varepsilon c^2 U^\lambda U^\beta + t^{\lambda\beta})}{\partial x^\beta} = \varphi^\lambda .$$

Nous pouvons dès lors définir, dans le système de coordonnées galiléennes S_0 et au point M, le tenseur impulsion-énergie dans le cas où le milieu continu considéré est un fluide parfait :

$$T^{\lambda\beta} = \left(\rho + P\right) U^\lambda U^\beta - P g^{\lambda\beta} ,$$

soit : $$g_{\lambda\mu} g_{\beta\nu} T^{\lambda\beta} = g_{\lambda\mu} g_{\beta\nu} \left(\rho+P\right) U^\lambda U^\beta - g_{\lambda\mu} g_{\beta\nu} P g^{\lambda\beta} ,$$

c'est-à-dire : $$T_{\mu\nu} = (\rho+P) U_\mu U_\nu - P g_{\mu\nu}$$

avec U_μ désignant la quadrivitesse du fluide, $\rho = \varepsilon c^2$ sa densité d'énergie, P sa pression et $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ le tenseur métrique au point M et au temps t. On aboutit ainsi à une expression complètement covariante des composantes du tenseur impulsion-énergie d'un fluide parfait.

Rappelons que pour un fluide parfait, il n'y a ni transport de chaleur, ni viscosité, mais les particules ont des mouvements désordonnés qui donnent lieu à la pression P.

Il nous faut maintenant définir les composantes du tenseur $T_{\mu\nu}$ dans le référentiel inertiel cartésien local S coïncidant avec le référentiel S_0 où le fluide est au repos instantané au point M à l'instant t. La métrique au point M et à l'instant t est égale à la métrique de Minkowski, c'est-à-dire

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

→ Pour $\lambda = \mu = 0$, la métrique au point M est purement temporelle :

$$T_{00} = (\rho+P)U_0\,U_0 - P\,g_{00}.$$

Au point M, nous avons $g_{00} = \eta_{00} = 1$ et $U_0 = \frac{dx_0}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} = 1$, nous obtenons donc : $T_{00} = \rho$.

→ Pour μ # ν, la métrique au point M est purement spatiale.

Au point M, nous avons $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = 0$ car μ # ν et $U_\mu = \frac{dx_\mu}{dt} = U_\nu = \frac{dx_\nu}{d\tau} = 0$ (car les coordonnées x_μ, x_ν, pour μ, ν de 1à 3, ne sont pas fonction de $x_0 = t$), nous obtenons donc $T_{\mu\nu} = 0$.

→Pour $\lambda = \mu$ avec μ, ν de 1à 3, la métrique est purement spatiale.

Au point M, nous avons $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = -1$ et $U_\mu = \frac{dx_\mu}{dt} = U_\nu = \frac{dx_\nu}{d\tau} = 0$ (car les coordonnées x_μ, x_ν, pour μ, ν de 1à 3, ne sont pas fonction de $x_0 = t$), nous obtenons donc $T_{\mu\nu} = P$.

→ Les composantes du tenseur impulsion-énergie s'écrivent donc :

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}.$$

B.3.2.2- Les équations tensorielles d'Einstein en présence de matière

L'idée d'une théorie de la gravitation qui vient à l'esprit, comme le dit Einstein lui-même le 9 septembre 1913 lors de la réunion annuelle de la Société Suisse pour la recherche en sciences de la nature [85], c'est la généralisation de l'équation de Poisson $\Delta\Phi = 4\pi G\frac{\rho}{c^2}$ dans laquelle : G est la constante universelle de Newton, ρ est la densité d'énergie de la matière cosmique et $\frac{\rho}{c^2}$ la densité de matière cosmique. En effet, l'équation de Poisson permet de considérer la théorie de Newton comme une théorie du champ gravitationnel. Rappelons-nous qu'à l'époque de Newton, la notion de champ n'était pas encore connue.Ainsi, le membre de droite de l'équation de Poisson contient les sources d'énergie du champ en terme de matière. Celui de gauche comporte l'opérateur Laplacien, exprimé en coordonnées sphériques dans un contexte de symétrie sphérique, et agit sur le potentiel de gravitation Φ qui est la fonction inconnue. Cette idée simple qui consistait à construire une théorie de la gravitation sur un espace de Minkowski n'a jamais abouti, et nous comprenons pourquoi puisque l'espace euclidien ne peut se substituer à l'espace riemannien.

Néanmoins, la structure cherchée pour les équations du champ en présence de matière reprend celle de l'équation de Poisson :

→ dans le membre de droite figure les sources du champ, c'est-à-dire le tenseur impulsion-énergie localement au point M à l'instant t,

→ dans le membre de gauche se trouve tel quel, le tenseur d'Einstein décrivant la courbure de l'espace-temps $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\ g_{\mu\nu} R$ qui n'est autre que l'équation tensorielle de la relativité générale dans le vide, localement au point M à l'instant t.

Ainsi, à partir de l'équation de Poisson valable pour les champs faibles, Einstein bâtit intuitivement l'équation tensorielle de la relativité générale en présence de matière, valable quelle que soit l'intensité du champ. Et la structure cherchée pour les équations du champ en présence de matière doit impérativement comporter dans le membre de gauche un *tenseur conservatif* puisque le tenseur impulsion-énergie composant le membre de droite *est conservatif*. Des deux formes de l'équation d'Einstein dans le vide(voir §B.3.1.4 et B.3.1.5), seule la deuxième forme convient (la divergence du tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu} R$ est nulle donc *ce tenseur est conservatif*) car la première forme $R\mu\nu = 0$ constitue un tenseur *non conservatif*.

Ainsi les équations tensorielles du champ de gavitation en présence de matière sont :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\ g_{\mu\nu} R = K\ T_{\mu\nu}$$

Pour établir le coefficient K (voir §2.1.5), Einstein considére un champ gravitationnel statique et faible afin d'obtenir une métrique de l'espace local la plus proche possible de celle d'un espace de Minkowsi telle que $\left|h_{\mu\nu}\right| << 1$ dans l'expression $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. Puis, dans ce contexte, Einstein calcule la composante R_{00} du tenseur de Ricci et l'injecte dans l'équation tensorielle du champ en présence de matière. Ceci lui permet de retrouver l'équation de Poisson de la gravitation, considérée comme la limite newtonienne de la théorie. Ainsi, il valide sa théorie et confirme la valeur théorique du coefficient $K = \frac{8\pi G}{c^4}$.

Annexe C

Mises en équation des modèles cosmologiques à partir des équations de la relativité générale

C.1- Modèle d'Einstein (1917)

Les deux équations de Friedmann que nous avons vues au §4.2, elles-mêmes issues de l'équation tensorielle du champ de gravitation en présence de matière et en tenant compte de la constante cosmologique, sont les suivantes :

$$\frac{3a'^2}{a^2} + \frac{3kc^2}{a^2} - \lambda c^2 = K c^2 \rho \qquad (1)$$

$$\frac{a'^2}{a^2} + \frac{2aa''}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} - \lambda c^2 = -K c^2 P \qquad (2)$$

Le modèle de 1917 étant statique, le temps n'intervient pas dans les deux équations précédentes qui s'écrivent donc :

$$\frac{3k}{a^2} - \lambda = K\rho \qquad (3)$$

$$\frac{k}{a^2} - \lambda = -KP \qquad (4)$$

Pour *k=1* et *P*=0 les deux équations deviennent :

$$\frac{3}{a^2} - \lambda = K\rho \qquad (9)$$

$$\frac{1}{a^2} - \lambda = 0 \qquad (10)$$

L'équation (10) donne immédiatement $\lambda = \frac{1}{a^2}$ et en injectant l'expression obtenue pour λ dans (9) on obtient $\lambda = \frac{K\rho}{2} = \frac{1}{a^2}$ qui est l'équation du modèle statique d'Einstein telle que nous la trouvons dans « *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeine Relativitäts – theorie* » de 1917.

On comprend aisément en analysant l'équation du modèle statique, que ce modèle est très instable. En effet, cette équation nous montre que pour une très faible fluctuation de la densité d'énergie ρ de la matière non-relativiste, dans un sens ou dans l'autre, la constante cosmologie λ fluctue et a pour conséquence de faire varier le rayon *« a »* de l'Univers supposé statique.

C.2- Modèle de De Sitter (1917)

Dans ce modèle, nous considérons seulement la première équation de Friedmann car la deuxième équation est tributaire du premier principe de la thermodynamique. En effet, sachant que cet Univers est sans matière et sans pression, la deuxième équation du savant russe est irréaliste.

Soit donc la première équation de Friedmann :

$$\frac{3a'^2}{a^2} + \frac{3kc^2}{a^2} - \lambda c^2 = K c^2 \rho \qquad \text{avec } K = \frac{8\pi G}{c^4}.$$

Le modèle de De Sitter de 1917 étant statique, le temps n'intervient pas dans l'équation précédente qui peut donc s'écrire :

$$\frac{3kc^2}{a^2} - \lambda c^2 = K c^2 \rho \qquad (5).$$

Pour $k=1$ et $\rho = 0$, nous obtenons $a = \sqrt{\frac{3}{\lambda}}$ qui est le rayon du modèle statique de De Sitter et cette expression, en fonction de la constante cosmologique λ, se trouve dans son article de 1917 *« On the curvature of space »,* Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences, page 229.

C.3- Modèle périodique et fermé de Friedmann (1922)

La première équation de Friedmann s'écrit en absence de constante cosmologique :

$$\frac{3a'^2}{a^2} + \frac{3kc^2}{a^2} = K c^2 \rho \qquad (6).$$

En fixant la valeur k à 1 afin de nous situer dans un univers à géométrie sphérique, nous Obtenons:

$$\frac{3a'^2}{a^2} + \frac{3c^2}{a^2} = K c^2 \rho \qquad (7).$$

Nous voulons connaître l'évolution du rayon $a(t)$ du monde en fonction du temps et pour cela nous devons tenir compte des variations de la densité de matière non-relativiste $\rho(t)$ en fonction du temps.

Le §5 ayant expliqué le sens des relations $\rho(t) = \rho_0\, [\,\hat{a}(t)\,]^{-3}$ et $\hat{a}(t) = a_0\, a(t)$, la première équation de Friedmann peut donc s'écrire :

$$\frac{3a'^2}{a^2} + \frac{3c^2}{a^2} = K c^2 \rho_0\, [\,\hat{a}(t)\,]^{-3} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{3a'^2}{a^2} + \frac{3c^2}{a^2} = K c^2 \rho_0\, [a_0\, a(t)]^{-3},$$

soit
$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = c^2\left(\frac{A}{a} - 1\right) \quad (11) \qquad \text{avec } A = \frac{K \rho_0 a_0^3}{3} \quad (8).$$

Cette équation (11) précédente peut aussi se mettre sous la forme $\frac{da}{dt} = c\,\frac{(A-a)^{1/2}}{a^{1/2}}$ qui n'est autre que $\frac{a^{1/2}}{(A-a)^{1/2}}\, da = c\, dt$ (12), que nous allons intégrer membre à membre.

- L'intégration du second membre de (12) donne : $\int_0^t c\,dt = ct$.
- L'intégration du premier membre de (12) s'effectue de la manière suivante :

$$\int_0^a \sqrt{\frac{a}{A-a}}\, da = \int_0^a \frac{da}{\sqrt{\frac{A}{a} - 1}} = \int_0^a \frac{da}{\sqrt{\left(\frac{a}{A}\right)^{-1} - 1}} \qquad (13).$$

Le changement de variable $\frac{a}{A} = \sin^2 \eta/2$ soit $a = A \sin^2 \eta/2$ (14), c'est-à-dire $a = \frac{A}{2}(1 - \cos\eta)$ (15), permet d'écrire :

$$\frac{da}{d\eta} = \frac{A}{2}\sin\eta \;\Rightarrow\; da = \frac{A}{2}\sin\eta\; d\eta \qquad (16).$$

En injectant les expressions (14) et (16) dans (13), on obtient :

$$\int_0^\eta \frac{\frac{A}{2}\sin\eta\, d\eta}{\sqrt{\left(\frac{A\sin^2\frac{\eta}{2}}{A}\right)^{-1} - 1}} = \int_0^\eta \frac{\frac{A}{2}\sin\eta\, d\eta}{\frac{\cos\frac{\eta}{2}}{\sin\frac{\eta}{2}}} \quad .$$

La formule trigonométrique $\sin\eta = 2\sin\frac{\eta}{2}\cos\frac{\eta}{2}$ permet d'exprimer l'expression précédente de la manière suivante :

$$\int_0^\eta \frac{\frac{A}{2}\sin\eta\, d\eta}{\frac{\frac{\frac{1}{2}\sin\eta}{\sin\frac{\eta}{2}}}{\sin\frac{\eta}{2}}} = \int_0^\eta A \sin^2\eta/2 \;\; d\eta \,.$$

Et la formule trigonométrique $\sin^2\eta/2 = \frac{1}{2}(1-\cos\eta)$ permet décrire :

$$\int_0^\eta A \sin^2\eta/2 \;\; d\eta \;\; = \;\; \int_0^\eta \frac{A}{2}(1-\cos\eta) \;\; d\eta$$

soit $$\frac{A}{2}[\eta]_0^\eta \; - \; \frac{A}{2}[\sin\eta]_0^\eta \; = \; \frac{A}{2}(\eta-\sin\eta) .$$

Finalement l'intégration membre à membre de l'équation (12) donne :

$$\frac{A}{2}(\eta-\sin\eta) \; = \; ct \qquad (17).$$

En conclusion les équations (15) et (17) ont la forme paramétrique cherchée :

$$a = \frac{A}{2}(1-\cos\eta) \quad (18) \qquad \text{et} \qquad t = \frac{A}{2c}(\eta-\sin\eta) \quad (19).$$

- <u>On peut se poser la question de l'interprétation physique de l'angle η</u> : l'équation (19) permet d'écrire $t = \frac{A}{2c}(\eta-\sin\eta)$, soit $\frac{dt}{d\eta} = \frac{A}{2c}(1-\cos\eta)$ (20). En injectant (18) dans (20), on obtient $c\, dt = a\, d\eta \Rightarrow \int c\, dt = \int a\, d\eta \Rightarrow ct = a\, \eta$ (21).
L'expression (21) définissant l'horizon cosmologique au temps t, le rayon a de l'Univers multiplié par l'angle η correspond donc à la distance au-delà de laquelle se trouvent les objets que l'on ne peut percevoir du fait de la lumière n'ayant pas eu le temps de parcourir cette distance pour l'Univers au temps t. Ainsi, l'angle au centre η peut être interprété comme la distance paramétrique angulaire de l'horizon cosmologique au temps t.

C.4- Le modèle standard associé au modèle dynamique de Lemaître de 1927

La première équation de Friedmann munie de la constante cosmologique s'écrit :

$$\frac{3a'^2}{a^2} + \frac{3kc^2}{a^2} - \lambda c^2 = K c^2 \rho \,, \quad \text{soit encore} \quad \frac{3a'^2}{a^2c^2} + \frac{3k}{a^2} = K\rho + \lambda \,.$$

Comme indiqué en Introduction, la constante cosmologique λ est associée à une composante énergétique appelée énergie noire de densité d'énergie constante ρ_λ.
Ainsi, tout naturellement, la première équation de Friedmann s'écrit :

$$\frac{3a'^2}{a^2c^2} + \frac{3k}{a^2} = K\,(\rho + \rho_\lambda) \,.$$

En fixant la valeur k à 0 afin de nous situer dans un univers euclidien tel que renseigné par les données du satellite WMAP, nous obtenons

$$\frac{3a'^2}{a^2c^2} = K\,(\rho + \rho_\lambda).$$

Les relations vues au paragraphe précédent, $\rho\,(t) = \rho_0\, [\, \hat{a}\ (t)\,]^{-3}$, $\hat{a}\ (t) = a_0\ a(t)$, ainsi que $\rho_\lambda(t) = \rho_{\lambda 0} = constante$ (l'indice $_0$ signifiant toujours le contexte cosmique au temps t_0 d'aujourd'hui), la première équation de Friedmann devient :

$$\frac{3a'^2}{a^2c^2} = K\,(\,\rho_0\, \hat{a}^{-3} + \rho_{\lambda 0}\,) \qquad (22).$$

Einstein et De Sitter ont défini au §6 l'Univers euclidien en expansion sans constante cosmologique, lorsque la densité de matière cosmique ρ est égale à la densité critique ρ_c c'est-à-dire lorsque l'énergie potentielle gravitationnelle $\frac{GMm}{a}$ compense exactement l'énergie cinétique $\frac{1}{2}m(da/dt)^2$ dans un contexte de champ gravitationnel à symétrie sphérique.

Soit $\frac{G\, 4/3\pi\, a^3 \rho\, m}{a} = \frac{1}{2} m (da/dt)^2$ c'est-à-dire $\rho = \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$ avec $H = \frac{da}{dt}\frac{1}{a}$.

Dans le cas d'un Univers muni d'une constante cosmologique, nous démontrons facilement à l'aide de la première équation de Friedmann et en posant $\rho=\Omega_m\, \rho_c$ ainsi que $\rho_\lambda= \Omega_\lambda\, \rho_c$, que la valeur k est égale à 0 (Univers euclidien) pour $\Omega_m + \Omega_\lambda = 1$, c'est-à-dire pour $\rho + \rho_\lambda = \rho_c$.

En considérant l'époque actuelle on peut écrire $\rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$, $\rho_0=\Omega_{m0}\ \rho_{c0}$, $\rho_{\lambda 0}= \Omega_{\lambda 0}\ \rho_{c0}$.

De fait l'équation (22) (dans cette équation il est question de densité d'énergie de matière et il faut considérer $\rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} c^2$ au lieu de $\frac{3H_0^2}{8\pi G}$) s'écrit :

$$\frac{1}{H_0^2}\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)^2 = \Omega_{m0}\ \hat{a}^{-3} + \Omega_{\lambda 0} \qquad (23).$$

Sachant que $a(t) = a_0\ \hat{a}(t)$ (voir §2.4), l'équation (23) devient :

$$\frac{1}{H_0^2}\left(\frac{1}{a_0\, \hat{a}}\frac{a_0\, d\hat{a}}{dt}\right)^2 = \Omega_{m0}\ \hat{a}^{-3} + \Omega_{\lambda 0} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{H_0^2}\left(\frac{1}{\hat{a}}\frac{d\hat{a}}{dt}\right)^2 = \Omega_{m0}\ \hat{a}^{-3} + \Omega_{\lambda 0}\,,$$

c'est-à-dire
$$\frac{(d\hat{a})^2}{\frac{\Omega_{m0}}{\hat{a}}+\Omega_{\lambda 0}\,\hat{a}^2} = H_0^2 dt^2 \ \Rightarrow\ \frac{\hat{a}^{1/2} d\hat{a}}{\sqrt{\Omega_{m0}+\Omega_{\lambda 0}\,\hat{a}^3}} = H_0\, dt \qquad (24).$$

En posant $u=\hat{a}^{3/2}$ (25), on obtient $\frac{du}{d\hat{a}} = \frac{3}{2}\hat{a}^{1/2}$ soit $\hat{a}^{1/2} d\hat{a} = \frac{2}{3} du$.

L'équation (24) peut donc se mettre sous la forme : $\frac{du}{\sqrt{\Omega_{m0}+\Omega_{\lambda 0}\, u^2}} = \frac{3}{2} H_0 dt$.

L'Univers euclidien permettant d'écrire $\Omega_{m0} = 1-\Omega_{\lambda 0}$, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{(1-\Omega_{\lambda 0})}}\ \frac{du}{\sqrt{\left[1+\frac{\Omega_{\lambda 0}}{(1-\Omega_{\lambda 0})}u^2\right]}} = \frac{3}{2} H_0 dt \qquad (26).$$

Posons : $y = \sqrt{\frac{\Omega_{\lambda 0}}{(1-\Omega_{\lambda 0})}}\, u$ (27) $\Rightarrow$ $u^2 = y^2\, \frac{(1-\Omega_{\lambda 0})}{\Omega_{\lambda 0}}$ et $du = \frac{\sqrt{(1-\Omega_{\lambda 0})}}{\sqrt{\Omega_{\lambda 0}}}\, dy$.

En remplaçant u^2 et du par leur expression ci-avant, dans l'équation (26), on obtient l'équation $\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{\lambda 0}}\ H_0 dt$ (28), que nous allons intégrer membre à membre.

▪ L'intégration du premier membre de (28) s'effectue de la manière suivante :

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \left[ln\,(y+\sqrt{y^2+1}\,)\right]_0^y .$$

Or $\left[ln\,(y+\sqrt{y^2+1}\,)\right]_0^y = ln\,(y+\sqrt{y^2+1}\,) - ln\,(0 + \sqrt{0+1}\,)$, c'est-à-dire :

$$\left[ln\,(y+\sqrt{y^2+1}\,)\right]_0^y = ln\,(y+\sqrt{y^2+1}\,).$$

▪ L'intégration du second membre de (28) donne :

$$\int_0^t \frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{\lambda 0}}\, H_0 dt = \frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{\lambda 0}}\, H_0 \left[\ t\ \right]_0^t = \frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{\lambda 0}}\ H_0\, t$$

L'intégration membre à membre de l'équation (28) donne en final :

$ln\,(y+\sqrt{y^2+1}\,) = \frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{\lambda 0}}\ H_0\, t \ \Rightarrow\ \text{Arg}\,sh y = \frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{\lambda 0}}\ H_0\, t \ \Rightarrow\ y = sh\left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{\lambda 0}}\, H_0 t\right)$ (29)

En injectant (25) dans (27), nous obtenons $y = \sqrt{\frac{\Omega_{\lambda 0}}{(1-\Omega_{\lambda 0})}}\ \hat{a}^{3/2}$ (30).

Les équations (29) et (30) permettent d'écrire :

$$\sqrt{\frac{\Omega\lambda 0}{(1-\Omega\lambda 0)}}\;\hat{a}^{3/2} = sh\left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega\lambda 0}\,H_0 t\right) \Rightarrow \hat{a}^{3/2} = \sqrt{\frac{(1-\Omega\lambda 0)}{\Omega\lambda 0}}\; sh\left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega\lambda 0}\,H_0 t\right),$$

soit $$\hat{a}(t) = \left(\sqrt{\frac{\Omega m 0}{\Omega\lambda 0}}\right)^{2/3}\left(sh\left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega\lambda 0}\,H_0 t\right)\right)^{2/3}$$

c'est-à-dire $$a(t) = a_0\;\hat{a}(t) = a_0\left(\sqrt{\frac{\Omega m 0}{\Omega\lambda 0}}\right)^{2/3}\left(sh\left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega\lambda 0}\,H_0 t\right)\right)^{2/3}.$$

C.5- Modèle d'Einstein-De Sitter (1932)

Rappelons que la première équation de Friedmann s'écrit en absence de constante cosmologique :

$$\frac{3a'^2}{a^2} + \frac{3kc^2}{a^2} = K\,c^2\,\rho \qquad \text{avec } K = \frac{8\pi G}{c^4}.$$

En fixant k à 0 afin de nous situer dans un univers euclidien, nous obtenons $\frac{3a'^2}{a^2c^2} = K\rho$.

Sachant que $\rho\,(t) = \rho_0\,[\,\hat{a}\,(t)\,]^{-3}$ et $a(t) = a_0\;\hat{a}(t)$, l'équation précédente s'écrit :

$$\frac{3a'^2}{a^2c^2} = K\,\rho_0\,[\,\hat{a}\,(t)\,]^{-3} \Rightarrow \frac{3}{c^2}\left(\frac{1}{a_0\,\hat{a}}\frac{a_0\,d\hat{a}}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{c^4}\,\rho_0\,[\,\hat{a}\,(t)\,]^{-3} \quad (31).$$

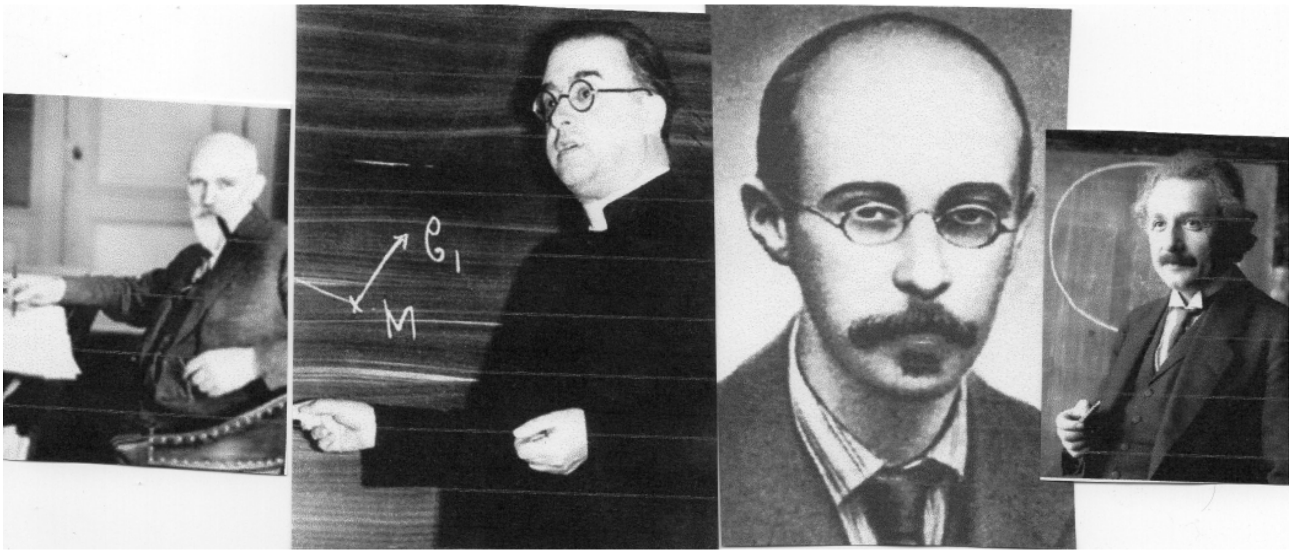
L'Univers étant euclidien et l'équation de Friedmann considérant une densité d'énergie de la matière cosmique, nous pouvons écrire : $\rho_0 = \rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}c^2$ (32).

En injectant (32) dans (31), nous obtenons $\hat{a}^{1/2}\,d\hat{a} = H_0\,dt$ (33) que nous allons intégrer membre à membre.

- L'intégration du second membre de (33) donne : $\int_0^t H_0\,dt = H_0\,t.$
- L'intégration du premier membre de (33) donne : $\int_0^a \hat{a}^{1/2}\,d\hat{a} = \frac{2}{3}\hat{a}^{3/2}.$

L'intégration membre à membre de l'équation (33) donne donc :

$$\frac{2}{3}\hat{a}^{3/2} = H_0\,t \Rightarrow \hat{a} = \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{2/3} \Rightarrow a(t) = K'\,t^{2/3} \quad \text{avec } K' = a_0\left(\frac{3}{2}H_0\right)^{2/3}.$$



Willllem de Sitter **Georges Lemaître** **Alexandre Friedmann** **Albert Einstein**

Annexe D

Obtention de la métrique FLRW

D.1- Coefficient de courbure *k = 1* : espace homogène et isotrope fermé (symétrie sphérique telle que l'espace sphérique S^3 soit plongé dans l'espace euclidien à 4 dimensions)

Soit l'espace euclidien à 4 dimensions dans lequel on plonge l'espace sphérique S^3. On obtient l'espace euclidien à 4 dimensions en rajoutant un axe de coordonnées supplémentaires qui est orthogonal aux trois axes du sous-espace à 3 dimensions.
D'où :

$$a^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \qquad (1)$$

La différentielle totale da^2 s'écrit :

$$da^2 = \frac{\partial a^2}{\partial x} dx + \frac{\partial a^2}{\partial y} dy + \frac{\partial a^2}{\partial z} dz + \frac{\partial a^2}{\partial w} dw$$

Soit :

$$da^2 = 2xdx+2ydy+2zdz+2wdw$$

La grandeur « *a* » est considérée comme constante au point M à l'instant t, d'où :

$$2xdx+2ydy+2zdz+2wdw=0$$

c'est-à-dire :

$$dw = \frac{-(xdx+ydy+zdz)}{w}$$

ou bien :

$$(dw)^2 = \frac{(xdx+ydy+zdz)^2}{w^2} \qquad (2)$$

L'équation (1) peut s'écrire :

$$w^2 = a^2 - x^2 - y^2 - z^2 \qquad (3)$$

Injectons (3) dans (2) :

$$(dw)^2 = \frac{(xdx+ydy+zdz)^2}{a^2-x^2-y^2-z^2} \qquad (4)$$

L'élément de longueur *dl* s'écrit dans l'espace euclidien à 4 dimensions de la manière suivante :

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 \qquad (5)$$

Injectons (4) dans (5) :

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{(xdx+ydy+zdz)^2}{a^2-x^2-y^2-z^2} \qquad (6)$$

D.2- Coefficient de courbure *k = 0* : espace homogène et isotrope tendant vers l'infini (symétrie sphérique telle que l'espace sphérique S^2 soit plongé dans l'espace euclidien à 3 dimensions)

Soit l'espace euclidien à 3 dimensions dans lequel on plonge l'espace sphérique S^2.
L'élément de longueur *dl'* s'écrit dans l'espace euclidien à 4 dimensions de la manière suivante :

$$dl'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad (7)$$

Les coordonnées sphériques standard (r, θ, φ) relatives à l'expansion à symétrie sphérique prennent leurs valeurs dans les intervalles suivants :

$$r \in [0 , + \infty] \quad , \quad \theta \in [0 , \pi] \quad , \quad \varphi \in [0 ,2\pi]$$

Elles sont reliées aux coordonnées cartésiennes x, y, z par :

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \quad , \quad y = r\sin\theta\sin\varphi \quad , \quad z = r\cos\theta \; .$$

D.3- Coefficient de courbure *k* = –1 : espace homogène et isotrope ouvert (espace hyperbolique H³ plongé dans l'espace euclidien à 4 dimensions)

Soit l'espace euclidien à 4 dimensions dans lequel on plonge l'espace hyperbolique H^3.
L'élément de longueur *dl''* s'écrit dans l'espace euclidien à 4 dimensions de la manière suivante :

$$dl''^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dw^2$$

dans laquelle la quatrième composante est imaginaire pure : $(i\, dw)^2 = -w^2$
En procédant de la même manière qu'au paragraphe D.1 on trouve :

$$dl''^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \frac{(xdx+ydy+zdz)^2}{a^2+x^2+y^2-+z^2} \qquad (8)$$

D.4- Expression générale pour *k = 1, 0, –1*

Les éléments de distance spatiale (6), (7), (8) satisfont pour $k = 1, 0, -1$ l'expression générale :

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + k\frac{(xdx+ydy+zdz)^2}{a^2-k\,(x^2+y^2+z^2)} \qquad (9)$$

D.5- Expression de la coordonnée sphérique *r* dans le cas où *k = 0*

Pour $k = 0$, l'ensemble des points de l'espace euclidien à 3 dimensions vérifie :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (10)$$

La différentielle totale dr^2 s'écrit :

$$dr^2 = \frac{\partial r^2}{\partial x}dx + \frac{\partial r^2}{\partial y}dy + \frac{\partial r^2}{\partial z}dz$$

soit :

$$dr^2 = \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial x}dx + \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial y}dy + \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial z}dz$$

c'est-à-dire :

$$dr^2 = 2xdx+2ydy+2zdz \qquad (11)$$

or
$$dr^2 = 2r\,dr \qquad (12)$$

Injectons (12) dans (11):

$$r\,dr = x\,dx + y\,dy + z\,dz \qquad (13)$$

D.6- Relation (7) exprimée en coordonnées sphériques standard

Les équations différentielles totales dx, dy, dz en fonction des coordonnées sphériques sont :

$\rightarrow$ $dx = \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial x}{\partial \varphi}d\varphi$

$$dx = \frac{\partial(r\sin\theta\cos\varphi)}{\partial r}dr + \frac{\partial(r\sin\theta\cos\varphi)}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial(r\sin\theta\cos\varphi)}{\partial \varphi}d\varphi$$

$$dx = sin\theta\ cos\varphi\ dr + r\ cos\theta\ cos\varphi\ d\theta - r\ sin\theta\ sin\varphi\ d\varphi \qquad (14)$$

$$\rightarrow\ dy = \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial y}{\partial \varphi}d\varphi$$

$$dy = \frac{\partial(r\sin\theta\sin\varphi)}{\partial r}dr + \frac{\partial(r\sin\theta\sin\varphi)}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial(r\sin\theta\sin\varphi)}{\partial \varphi}d\varphi$$

$$dy = sin\theta\ sin\varphi\ dr + r\ cos\theta\ sin\varphi\ d\theta - r\ sin\theta\ cos\varphi\ d\varphi \qquad (15)$$

$$\rightarrow\ dz = \frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial z}{\partial \varphi}d\varphi$$

$$dz = \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r}dr + \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial \varphi}d\varphi$$

$$dz = cos\theta\ dr - r\ sin\theta\ d\theta \qquad (16)$$

Injectons (14), (15), (16) dans (7) :

$$dl'^2 = (sin\theta\ cos\varphi\ dr + r\ cos\theta\ cos\varphi\ d\theta - r\ sin\theta\ sin\varphi\ d\varphi)^2 + (sin\theta\ sin\varphi\ dr + r\ cos\theta\ sin\varphi\ d\theta - r\ sin\theta\ cos\varphi\ d\varphi)^2 + (cos\theta\ dr - r\ sin\theta\ d\theta)^2$$

$$dl'^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta\ d\varphi^2) \qquad (17)$$

Sachant que (voir équation 7) :

$$dl'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Injectons (17), (10), (13) dans (9) :

$$dl^2 = dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta \quad d\varphi^2\right) + \frac{kr^2dr^2}{a^2 - kr^2}$$

soit :

$$dl^2 = \left(\frac{1}{1 - k\frac{r^2}{a^2}}\right) dr^2 + r^2\ d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \quad d\varphi^2 .$$

La métrique spatiotemporelle s’écrit :

$$ds^2 = c^2dt^2 - dl^2$$

Pour $\left(\frac{dr}{d\sigma}\right) = a(t)$ (voir explication au §4.1) :

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\ d\sigma^2 \left(\frac{1}{1 - k\sigma^2}\right) - a^2(t)\ \sigma^2\ d\theta^2 - a^2(t)\ \sigma^2 \sin^2\theta \quad d\varphi^2 .$$

Sources et Bibliographie

[1] A. Einstein (15 février 1917). Kosmologische Betrachtungen zur allgemeine Relativitäts – theorie. Sitzungberichte der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften.
[2] H. Poincaré (1913). Leçons sur les hypothèses cosmogoniques professées à la Sorbonne. Rédigées par H. Vergne. Librairie Hermann et Fils. Paris. Seconde édition.
[3] F. Balibar (1991). Science, Ethique, Philosophie. Albert Einstein. Oeuvres choisies 5. Seuil CNRS. Page 30.
[4] C. Wolf (1886). Hypothèses cosmogoniques. Examen des théories scientifiques modernes sur l'origine des mondes, suivi de la traduction de la théorie du ciel de Kant. Gauthier-Villars. Paris.
[5] F. Balibar (1993). Relativités II. Albert Einstein. Oeuvres choisies 3. Seuil CNRS. Deuxième partie : Cosmologie, Introduction page 85.
[6] J. Merleau-Ponty (1965). Cosmologie du 20ᵉs. Gallimard (nrf). Préface.
[7] Wikipedia. Henri Poincaré (21 septembre 2015).
[8] M. Paty (1994). Poincaré et le principe de relativité. Congrès international Nancy.
[9] S. Walter (2008). Henri Poincaré et l'espace-temps conventionnel. Cahiers de philosophie de l'Université de Caen.
[10] A. Einstein (1921 : 12ᵉ édition traduite par J. Rouvière). La théorie de la relativité restreinte et généralisée. Gauthier-Villars. Paris.
[11] A. Einstein (1921 : 12ᵉ édition traduite par J. Rouvière). La théorie de la relativité restreinte et généralisée. Gauthier-Villars. Paris. Page 92.
[12] H. Saleeger (1895). Über das Newton'sche Gravitationsgesetz. Astronomische Nachrichten. Vol. CXXXVII. Pages 129-136.
[13] F. Balibar (1993). Relativités I. Albert Einstein. Oeuvres choisies 2. Seuil CNRS. Page 167.
[14] F. Balibar (1993). Relativités II. Albert Einstein. Oeuvres choisies 3. Seuil CNRS. Deuxième partie §3 : Cosmologie, Introduction pages 87, 88 et note 8 page 88.
[15] Wikipedia. Heber Doust Curtis (23 septembre 2015).
[16] J. Crelinsten (2006). Einstein's Jury: The Race to Test Relativity. Princeton University Press. Pages 40 à 43.
[17] SAO/NASA Astrophysics Data System (ADS), Title : Revue des publications astronomiques, Journal : Bulletin Astronomique (1909), Série I, vol.27, page 445.
[18] SAO/NASA Astrophysics Data System (ADS), Title : Revue des publications astronomiques, Journal : Bulletin Astronomique (1909), Série I, vol.27, page 446.
[19] J. Crelinsten (2006). Einstein's Jury: The Race to Test Relativity. Princeton University Press. Pages 36 à 38.
[20] Wikipedia. Henri Crozier Plummer (24 septembre 2015).
[21] J. Crelinsten (2006). Einstein's Jury: The Race to Test Relativity. Princeton University Press**.** Page 28.
[22] SAO/NASA Astrophysics Data System (ADS), Title : Aberration on the theory of, and the principle of relativity, Authors: Plummer, H.C. , Journal: Monthly Notices of the Royal Astronomical Society (1910) vol 70, p 252-275.
[23] Wikipedia. Arthur Eddington (23 septembre 2015).
[24] A. Eddington (1921). Espace, Temps et Gravitation. Librairie Scientifique J. Hermann. Paris.
[25] E. Mach (1883). La mécanique. Exposé historique et critique de son développement. Traduction de E. Picard. Hermann. Paris (1904). Réédité par J. Gabay en 1987.
[26] A. Einstein (1905). Sur l'électrodynamique des corps en mouvement. De la relativité des longueurs et des temps. Annalen der Physik. Traduction de Maurice Solovine.
[27] A. Einstein (1907). Jahrbuch der Radioaktivität und Eleektroik. (F. Balibar: A. Einstein, Oeuvres choisies 2, Relativités I, Seuil CNRS, 1993, page 115).

[28] A. Einstein (1915). Preussische Akademie der Wissenschaften. (F. Balibar: A. Einstein, Oeuvres choisies 2, Relativités I, Seuil CNRS, 1993, page 168).
[29] F. Balibar (1993). Relativités I. Albert Einstein. Oeuvres choisies 2. Seuil CNRS. Pages 129 à178.
[30] A. Einstein (1952). Conceptions scientifiques, morales et sociales. Traduction de Maurice Solovine. Flammarion. Pages 52 à 55.
[31] L. Leprince-Ringuet (1950). Les inventeurs célèbres. Editions d'Art L. Mazenod. Page 260.
[32] A. Einstein (1952). Conceptions scientifiques, morales et sociales. Traduction de Maurice Solovine. Flammarion. Page 136.
[33] F. Balibar (1993). Relativités I. Albert Einstein. Oeuvres choisies 2. Seuil CNRS. Pages 131 et 132.
[34] A. Einstein (1958 : nouvelle édition). Comment je vois le monde. Traduction de Maurice Solovine. Flammarion. Pages 161 à 164.
[35] I. Newton (troisième édition 1726). Principia. Traduction par la Marquise du Châtelet. Dunod. Page 7.
[36] F. Balibar (1993). Relativités II. Albert Einstein. Oeuvres choisies 3. Seuil CNRS. Pages 88 à 98.
[37] I. Newton (troisième édition 1726). Principia. Traduction par la Marquise du Châtelet. Dunod. Avant-propos de Monsieur Newton, page XX.
[38] C. Piat (1915). Leibniz. Librairie Félix Alcan. Paris. Page 163.
[39] F. Balibar (1993). Relativités II. Albert Einstein. Oeuvres choisies 3. Seuil CNRS. Page 90.
[40] A. Einstein (1921 : 12e édition traduite par J. Rouvière). La théorie de la relativité restreinte et généralisée. Gauthier-Villars. Paris. Page 93.
[41] F. Balibar (1993). Relativités II. Albert Einstein. Oeuvres choisies 3. Seuil CNRS. Page 93.
[42] F. Balibar (1993). Relativités II. Albert Einstein. Oeuvres choisies 3. Seuil CNRS. Page 91.
[43] F. Balibar (1993). Relativités II. Albert Einstein. Oeuvres choisies 3. Seuil CNRS. Note 28 page 94.
[44] J. Merleau-Ponty (1965). Cosmologie du 20es. Gallimard (nrf). Page 40.
[45] J. Merleau-Ponty (1965). Cosmologie du 20es. Gallimard (nrf). Note 1 Page 40.
[46] F. Balibar (1993). Relativités II. Albert Einstein. Œuvres choisies 3. Seuil CNRS. Page 95.
[47] J. Merleau-Ponty (1965). Cosmologie du 20es. Gallimard (nrf). Page 41.
[48] F. Balibar (1993). Relativités II. Albert Einstein. Œuvres choisies 3. Seuil CNRS. Page 96.
[49] F. Balibar (1993). Relativités II. Albert Einstein. Œuvres choisies 3. Seuil CNRS. Page 97.
[50] F. Balibar (1993). Relativités II. Albert Einstein. Oeuvres choisies 3. Seuil CNRS. Page 94.
[51] SAO/NASA Astrophysics Data System (ADS). Title: The 1920 Shapley-Curtis Discussion: Bachground, Issues, and Aftermath (1995). Authors: Trimble, Virginia.
[52] J. Merleau-Ponty (1965). Cosmologie du 20es. Gallimard (nrf). Note 1 Page 46.
[53] F. Balibar (1993): Relativités II, Albert Einstein, Œuvres Choisies 3. Seuil CNRS. pages 99 à 102.
[54] F. Balibar (1993). Relativités II. Albert Einstein. Oeuvres choisies 3. Seuil CNRS. Pages 110 à 112.
[55] F. Balibar (1993). Relativités II. Albert Einstein. Oeuvres choisies 3. Seuil CNRS. Note 27 page 93.
[56] J. Merleau-Ponty (1965). Cosmologie du 20es. Gallimard (nrf). Page 54.
[57] J.P. Luminet (2004). L'invention du Big Bang. Page 39.
[58] A. Einstein (1918). Königlich preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte. Pages 270-272.
[59] F. Balibar (1993). Relativités II. Albert Einstein. Œuvres choisies 3. Seuil CNRS. Page 100.
[60] P. Kerszberg (1989). The Invented Universe. Oxford Science Publications. Page 180.
[61] W. de Sitter (30 juin 1917). On the curvature of space. Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences. Page 229.

[62] W. de Sitter (30 juin 1917). On the curvature of space. Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences. Page 230.
[63] J. Merleau-Ponty (1965). Cosmologie du 20^{e}s. Gallimard (nrf). Page 58.
[64] W. de Sitter (30 juin 1917). On the curvature of space. Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences. Page 236.
[65] J.P. Luminet (2004). L'invention du Big Bang. Page 40.
[66] F. Balibar (1993). Relativités II. Albert Einstein. Œuvres choisies 3. Seuil CNRS. Page 102.
[67] W. de Sitter (30 juin 1917). On the curvature of space. Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences. Page 229.
[68] J.P. Luminet (2005). L'univers chiffonné. Page 39.
[69] A. Friedmann (1922). Über die Krümmung des Raumes. Zeitschrift für Physik. P 377-386.
[70] A. Friedmann (1924). Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes. Zeitschrift für Physik. P 326-332.
[71] F. Balibar (1993). Relativités II. Albert Einstein. Œuvres choisies 3. Seuil CNRS. Pages 107 à 110.
[72] F. Balibar (1993). Relativités II. Albert Einstein. Œuvres choisies 3. Seuil CNRS. Pages 113 à 129.
[73] G. Lemaître (1927). Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant, rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. NASA Astrophysics Data System.
[74] J.P. Luminet (2004). L'invention du Big Bang. Editions du Seuil. Page 101.
[75] J.P. Luminet (2004). L'invention du Big Bang. Editions du Seuil. Page 89.
[76] J.P. Luminet (2004). L'invention du Big Bang. Editions du Seuil. Page 109.
[77] S. Balbus (2006). Astrophysique. Licence et Magistère de physique. ENS Ulm.
[78] A. Lichnerowicz (2007). Eléments de calcul tensoriel. Edition Jacques Gabay. Pages 148-191.
[79] J. Hladik (1999). Le cacul tensoriel en physique. Dunod.
[80] E. Cartan (1928). Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann. Gauthier-Villars.
[81] E. Cartan (1928). Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann. Gauthier-Villars. Pages 178 à 203.
[82] F. Balibar (1993). Relativités I. Albert Einstein ; Œuvres choisies 2. Seuil CNRS. Page 207.
[83] A.A. Logunov, M.A. Mestvirishvili, V.A. Petrov (2004). How were the Hilbert-Einstein equations discovered. Division of Theorical Physics, Russian Federation.
[84] J.P. Bourguignon (1995). Calcul variationnel. Ecole Polytechnique. Département de Mathématique.
[85] F. Balibar (1993). Relativités I. Albert Einstein ; Œuvres choisies 2. Seuil CNRS. Page 158.