SUGLI INTEGRALI DEFINITI IMPROPRII.

Memoria di **Ettore Bortolotti** (Bologna).

Adunanza dell'8 dicembre 1912.

INTRODUZIONE.

Per stabilire la convergenza di integrali impropri, sia che si tratti di integrali estesi ad intervalli infiniti e si cerchi il limite $\lim_{x=\infty} \int_{x_0}^x f(x) dx$, sia che si tratti di integrali di funzioni che hanno un punto A di infinito e si cerchi il limite $\lim_{x=A} \int_{x_0}^x f(x) dx$, v'ha una serie di criterî, i quali in sostanza si riducono a scegliere una funzione positiva monotona $\varphi(x)$ (infinitesima per $x = \infty$ nel primo caso, infinita per $x = A$ nel secondo), integrabile nell'intervallo considerato, e nell'esaminare il comportamento asintotico del rapporto $\frac{|f(x)|}{\varphi(x)}$.

Cotesti criterî cadono in difetto quando quel rapporto vada continuamente oscillando, ed abbia massimo limite infinito e minimo limite nullo. Ho ovviato a tale difetto con procedimento analogo a quello che il CESÀRO propose per la sommabilità delle serie non convergenti, sostituendo alla considerazione del limite (o del massimo limite) del rapporto $\frac{|f|}{\varphi}$, quella del limite della media del rapporto medesimo, cioè, nei casi considerati, delle espressioni:

$$(1) \quad \frac{1}{x - x_0} \left| \int_{x_0}^x \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx \right|, \quad \frac{1}{A - x} \left| \int_x^A \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx \right|.$$

Per la convergenza dell'integrale proposto basterà che la corrispondente espressione (1) abbia massimo limite finito.

La funzione $f(x)$ potrà essere supposta reale o complessa, e, se si vorrà considerare come dipendente da altre variabili, si determineranno facili criterî di convergenza uniforme.

Quanto alla $\varphi(x)$, la condizione di essere monotona ed integrabile non è necessaria: si possono dare condizioni assai meno restrittive, le quali, nel caso di integrali estesi ad intervalli infiniti, si enunciano nel modo seguente:

Per affermare la convergenza dell'integrale $\int_{x_0}^x f(x) dx$, basta che si provi la esistenza di due funzioni $\varphi(x)$, $\psi(x)$, tali che:

1° il prodotto $\varphi(x) \int_{x_0}^x \psi(x) dx$ sia infinitesimo per $x = \infty$;

2° la funzione $\left| \varphi'(x) \int_{x_0}^x \psi(x) dx \right|$ sia integrabile nell'intervallo x_0^∞ ;

3° il rapporto $\left| \frac{\int_{x_0}^x \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx}{\int_{x_0}^x \psi(x) dx} \right|$ abbia massimo limite finito per $x = \infty$.

Per $\psi = 1$ si ha la espressione (1), e le condizioni enunciate danno un criterio assai semplice di convergenza.

Le considerazioni ora svolte possono anche estendersi a variabili complesse $x = \xi + i\eta$, e ad integrali estesi a curve tracciate nel piano della variabile complessa.

Il comportamento assintotico delle espressioni (I), non solo serve a caratterizzare la convergenza dell'integrale proposto; ma serve a determinare la *rapidità di convergenza al limite*, o di *divergenza verso l'infinito*, dell'integrale medesimo.

Dimostrerò infatti che, se la funzione $\varphi(x)$ è reale, monotona, ed il suo integrale ha, nel punto che si vuol considerare, ordine finito di infinito o di infinitesimo (nel senso che sarà opportunamente chiarito), se per $x = \infty$ esiste limite determinato e finito (o nullo) per il rapporto $\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx$, allo stesso limite tende il rapporto dei due integrali $\int_{x_0}^x f(x) dx : \int_{x_0}^x \varphi(x) dx$, nel caso che essi divergano, od il rapporto degli integrali definiti singolari $\int_x^\infty f(x) dx : \int_x^\infty \varphi(x) dx$, nel caso della convergenza.

Un simile teorema si ha per integrali, estesi ad intervalli finiti, di funzioni che hanno punti di infinito nell'intervallo di integrazione, e, quando non esista limite determinato per i rapporti che si considerano, si hanno analoghe relazioni relative al massimo limite.

La condizione riguardante l'ordine di infinito dell'integrale $\int_{x_0}^x \varphi(x) dx$, per $x = \infty$, limiterebbe di troppo il campo di applicazione del nostro teorema; ma, qualora tale condizione non sia soddisfatta, se si determina una funzione $y = y(x)$ rispetto la quale l'integrale medesimo abbia ordine finito di infinito, e soddisfi le solite condizioni di continuità e monotonia, si avrà la formula più generale:

$$\lim_{x=\infty} \frac{\int_{x_0}^x f(x) dx}{\int_{x_0}^x \varphi(x) dx} = \lim_{x=\infty} \frac{1}{y(x) - y(x_0)} \int_{x_0}^x \frac{f(x)}{\varphi(x)} y'(x) dx.$$

Se ne ha un'altra analoga pel confronto di integrali convergenti, ed altre due per integrali estesi ad intervalli finiti. Ho dovuto considerare separatamente quei quattro casi, perchè non tutti i ragionamenti che si fanno per uno di essi si possono ripetere per gli altri, nè tutte le proposizioni hanno le loro corrispondenti. Per altro, ho avuto cura di condurre la esposizione in modo che le analogie avessero il massimo rilievo.

I risultamenti trovati per il confronto degli integrali hanno riscontro in certe proprietà delle *medie* aritmetiche trovate dal CESÀRO nei suoi studi di *aritmetica assintotica*. Ed infatti, in una sua Nota ¹⁾ troviamo il teorema:

« On a, pour n infini, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 \varepsilon_1 + \dots + a_n \varepsilon_n}{b_1 \varepsilon_1 + \dots + b_n \varepsilon_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{b_1 + \dots + b_n}$, pourvu que le second membre existe, et que le rapport des nombres $(b_1 + \dots + b_n) \varepsilon_{n+1}$, $b_1 \varepsilon_1 + \dots + b_n \varepsilon_n$, reste fini, tandis que leur différence croît à l'infini sans osciller ».

Questo teorema dà, per serie divergenti, un criterio analogo a quello che abbiamo riscontrato per gli integrali divergenti estesi ad intervallo infinito. Un teorema simile riguardante il rapporto dei resti di due serie convergenti, fu da me dato ²⁾; riprenderò qui l'argomento, e lo esporrò, nel Capitolo V, in modo più generale e completo, perchè sia ben chiarita tutta la portata di quei criteri, che ritengo assai utili.

Incomincerò questo mio studio con un breve capitolo, nel quale mi propongo di estendere alle quantità complesse i teoremi di CAUCHY e di L'HÔPITAL sul limite del quoziente di due infiniti o di due infinitesimi; perchè di tali teoremi dovrò poi fare uso continuo, e non mi risulta che quella estensione (benchè assai ovvia) sia ancor stata fatta, se non per qualche caso particolare.

In fine poi, darò un esempio della applicazione dei criteri trovati, nella ricerca della ascissa di convergenza di funzioni determinanti.

CAPIUTOLO I.

Sul limite del quoziente di quantità complesse in punti di infinito o di infinitesimo.

I. TEOREMA I. — Indichi f_n una variabile reale o complessa, determinata e finita per ogni valore finito intero di n , e φ_n una variabile reale, positiva, monotona ed infinita per $n = \infty$. Se esistono tre numeri l , L , M , tali che

$$(I) \quad n \geq M, \quad l(\varphi_{n+1} - \varphi_n) \leq |f_{n+1}| - |f_n| \leq L(\varphi_{n+1} - \varphi_n),$$

¹⁾ E. CESÀRO: a) *Sur les lois asymptotiques des nombres* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (Roma), vol. IV, 1° semestre 1888, pp. 452-457]. Debbo la indicazione di questa Nota ad una cortese comunicazione del sig. E. LANDAU. Io ero giunto ad un risultato poco dissimile generalizzando un noto teorema dello stesso CESÀRO: b) *Corso di Analisi algebrica con introduzione al Calcolo infinitesimale* (Torino, Bocca, 1894).

²⁾ E. BORTOLOTTI, *Convergenza di algoritmi infiniti* [Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Modena, serie III, vol. VII (1908), pp. 135-235], pp. 141-158.

ad ogni numero positivo ε potremo far corrispondere un numero μ tale che:

$$(2) \quad n \geq \mu, \quad l - \varepsilon \leq \frac{|f_n|}{\varphi_n} \leq L + \varepsilon.$$

Di fatto: dalle relazioni

$$n \geq M, \quad h = 1, 2, \dots, r, \quad l(\varphi_{n+h} - \varphi_{n+h-1}) \leq |f_{n+h}| - |f_{n+h-1}|, \\ |f_{n+h}| - |f_{n+h-1}| \leq L(\varphi_{n+h} - \varphi_{n+h-1}),$$

si ricava sommando

$$n \geq M, \quad l(\varphi_{n+r} - \varphi_n) \leq |f_{n+r}| - |f_n| \leq L(\varphi_{n+r} - \varphi_n),$$

da cui:

$$n \geq M, \quad l \left(1 - \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+r}} \right) \leq \left| \frac{f_{n+r}}{\varphi_{n+r}} \right| - \left| \frac{f_n}{\varphi_n} \right| \leq L \left(1 - \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+r}} \right),$$

$$n \geq M, \quad l - \left(l \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+r}} - \frac{|f_n|}{\varphi_{n+r}} \right) \leq \frac{|f_{n+r}|}{\varphi_{n+r}} \leq L + \left(\frac{|f_n|}{\varphi_{n+r}} - L \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+r}} \right).$$

Per le ipotesi poste, ai numeri ε , n fissati, faremo corrispondere un numero μ abbastanza grande perchè:

$$n + r \geq \mu, \quad \frac{|f_n|}{\varphi_{n+r}} < \varepsilon, \quad |L| \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+r}} < \varepsilon, \quad |l| \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+r}} < \varepsilon,$$

e, per questo stesso valore di μ , sarà soddisfatta la (2).

2. OSSERVAZIONE. — La dimostrazione fatta non esclude che, per determinati valori di n , le differenze finite $\varphi_{n+1} - \varphi_n$ possano annullarsi. È ovvio poi il considerare che, se $l \leq 0$, alla espressione $l - \varepsilon$ si può sempre, nella (2), sostituire 0.

3. TEOREMA II. — Indichi f_n una variabile reale o complessa, determinata e finita per ogni valore finito di n , infinitesima per $n = \infty$; φ_n una variabile reale positiva, monotona, infinitesima per $n = \infty$.

Se esistono tre numeri l , L , M , tali che:

$$(3) \quad n \geq M, \quad l(\varphi_n - \varphi_{n+1}) \leq |f_n| - |f_{n+1}| \leq L(\varphi_n - \varphi_{n+1}),$$

cio basta per concludere:

$$(4) \quad n \geq M, \quad l \leq \frac{|f_n|}{\varphi_n} \leq L.$$

Per la dimostrazione; dedotte, come pel teorema precedente, le formule:

$$n \geq M, \quad l(\varphi_n - \varphi_{n+r}) \leq |f_n| - |f_{n+r}| \leq L(\varphi_n - \varphi_{n+r}), \\ n \geq M, \quad l - \left(l \frac{\varphi_{n+r}}{\varphi_n} - \frac{|f_{n+r}|}{\varphi_n} \right) \leq \frac{|f_n|}{\varphi_n} \leq L + \frac{|f_{n+r}|}{\varphi_n} - L \frac{\varphi_{n+r}}{\varphi_n},$$

dalla considerazione che, per ogni valore fissato di n , i quozienti $\frac{\varphi_{n+r}}{\varphi_n}$, $\frac{|f_{n+r}|}{\varphi_n}$ sono infinitesimi per $r = \infty$, si ricava che, per ogni valore positivo ε , si ha

$$n \geq M, \quad l - \varepsilon \leq \frac{|f_n|}{\varphi_n} \leq L + \varepsilon,$$

e, poichè M non dipende da ε , sarà ancora vera la (4).

4. OSSERVAZIONE. — Analoga a quella fatta pel Teorema I.

5. TEOREMA III. — Indichi f_n una variabile reale o complessa, determinata e finita per ogni valore finito di n , e φ_n una variabile reale, positiva, monotona, infinita per $n = \infty$.

Dico che si ha sempre:

$$(5) \quad \max \lim_{n=\infty} \frac{|f_n|}{\varphi_n} \leq \max \lim_{n=\infty} \frac{|f_{n+1}| - |f_n|}{\varphi_{n+1} - \varphi_n},$$

$$(6) \quad \min \lim_{n=\infty} \frac{|f_n|}{\varphi_n} \geq \min \lim_{n=\infty} \frac{|f_{n+1}| - |f_n|}{\varphi_{n+1} - \varphi_n},$$

e che inoltre

$$(7) \quad \lim_{n=\infty} \frac{f_n}{\varphi_n} = \lim_{n=\infty} \frac{f_{n+1} - f_n}{\varphi_{n+1} - \varphi_n}^3,$$

se esiste determinato e finito (o nullo) il secondo membro.

Le formule (5), (6) sono immediata conseguenza del Teorema I e delle ipotesi poste. Per dimostrare la (7) poniamo:

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_{n+1} - f_n}{\varphi_{n+1} - \varphi_n} = \alpha,$$

cioè

$$\max \lim_{n=\infty} \left| \frac{f_{n+1} - f_n}{\varphi_{n+1} - \varphi_n} - \alpha \right| = 0$$

ossia

$$\max \lim_{n=\infty} \frac{|(f_{n+1} - \alpha \varphi_{n+1}) - (f_n - \alpha \varphi_n)|}{\varphi_{n+1} - \varphi_n} = 0,$$

e ne verrà

$$\max \lim_{n=\infty} \frac{|f_n - \alpha \varphi_n|}{\varphi_n} = 0,$$

cioè

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_n}{\varphi_n} = \alpha.$$

6. COROLLARIO. — Nelle ipotesi poste, se

$$\lim_{n=\infty} \frac{|f_{n+1}| - |f_n|}{\varphi_{n+1} - \varphi_n} = \infty,$$

si ha ancora

$$\lim_{n=\infty} \frac{|f_n|}{\varphi_n} = \infty.$$

Ciò come conseguenza della formula (6).

7. TEOREMA IV. — Indichi f_n una variabile reale o complessa, infinitesima per $n = \infty$, finita e determinata per ogni valore finito di n ; φ_n una variabile reale, positiva, monotona, infinitesima per $n = \infty$.

³⁾ La formola (7) si trova già dimostrata, per altra via, in una Memoria di W. SCHNEE, *Die Identität des CESÄROSCHEN und HÖLDERSCHEN Grenzwertes* [Mathematische Annalen, t. LXVII (1909), pp. 110-125], p. 112.

Dico che si ha sempre:

$$(8) \quad \max \lim_{n=\infty} \frac{|f_n|}{\varphi_n} \leq \max \lim_{n=\infty} \frac{|f_{n+1}| - |f_n|}{\varphi_{n+1} - \varphi_n},$$

$$(9) \quad \min \lim_{n=\infty} \frac{|f_n|}{\varphi_n} \geq \min \lim_{n=\infty} \frac{|f_{n+1}| - |f_n|}{\varphi_{n+1} - \varphi_n},$$

e che, inoltre:

$$(10) \quad \lim_{n=\infty} \frac{f_n}{\varphi_n} = \lim_{n=\infty} \frac{f_{n+1} - f_n}{\varphi_{n+1} - \varphi_n},$$

quando esiste determinato e finito (o nullo) il secondo membro.

La dimostrazione è al tutto analoga a quella fatta per il teorema precedente.

8. COROLLARIO. — Nelle ipotesi poste, se

$$\lim_{n=\infty} \frac{|f_{n+1}| - |f_n|}{\varphi_{n+1} - \varphi_n} = \infty,$$

si ha ancora:

$$\lim_{n=\infty} \frac{|f_n|}{\varphi_n} = \infty.$$

9. OSSERVAZIONE. — Se, come nel teorema precedente, si tratta di funzioni f_n , φ_n , infinitesime per $n = \infty$, quegli stessi valori di n che rendono $\frac{|f_{n+1}| - |f_n|}{\varphi_{n+1} - \varphi_n}$ minore di un determinato numero positivo ε , rendono anche il quoziente $\frac{|f_n|}{\varphi_n}$ minore di ε .

Da ciò facilmente si deduce che: se il quoziente $\frac{f_{n+1} - f_n}{\varphi_{n+1} - \varphi_n}$ è infinitesimo, per $n = \infty$, di ordine non inferiore a quello di una terza variabile ε_n , anche l'ordine di infinitesimo del quoziente $\frac{f_n}{\varphi_n}$, per $n = \infty$, è non inferiore a quello di ε_n . Ciò non implica che, nel senso ordinario, l'ordine del secondo quoziente debba essere non inferiore a quello del primo.

Similmente si scorge che, se $\lim_{n=\infty} \frac{f_{n+1} - f_n}{\varphi_{n+1} - \varphi_n} = \alpha$, quegli stessi valori di n che rendono

$$\left| \frac{f_{n+1} - f_n}{\varphi_{n+1} - \varphi_n} - \alpha \right| < \varepsilon, \quad \text{rendono anche} \quad \left| \frac{f_n}{\varphi_n} - \alpha \right| < \varepsilon.$$

Si noti che simili conclusioni non sarebbero valide per quozienti di variabili infinite per $n = \infty$: e nemmeno per quozienti di variabili infinitesime, relativamente alla loro rapidità di crescita, ove tali quozienti fossero infiniti per $n = \infty$. In quest'ultimo caso, peraltro, a render validi quei risultamenti basterebbe supporre monotona anche la variabile $|f_n|$ ⁴⁾.

⁴⁾ Per una trattazione più completa di questo argomento, si veda E. BORTOLOTTI: a) *Sul limite del quoziente di due funzioni* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie III, tomo VIII (1903), pp. 245-286], pp. 259-262; b) *Contributo alla teoria degli infiniti* [Ibid., id., tomo IX (1904), pp. 29-65], pp. 33-52; c) *Sul quoziente di funzioni monotone* [Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Modena, serie III, vol. VIII (1909), pp. 83-89].

10. Siano ora due funzioni $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ della variabile reale x e della variabile complessa y , le quali, per valori di x interni al tratto $x_0^- A$ e per un determinato valore y_0 della y , sono finite e derivabili parzialmente rispetto ad x . Supponiamo che anche la funzione $\Phi(x) = |\varphi(x, y_0)|$ sia derivabile, e che essa sia monotona ed infinita od infinitesima per $x = A$; nella supposizione di $\lim_{x=A} \varphi(x, y_0) = 0$ supponiamo che sia anche $\lim_{x=A} f(x, y_0) = 0$.

Se formiamo la successione x_n , $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$, sempre crescente e tendente al limite A , ponendo:

$$f_n = f(x_n, y_0), \quad \varphi_n = |\varphi(x_n, y_0)|$$

avremo soddisfatto le condizioni dei Teoremi III e IV; epperò, nella ipotesi che φ_n sia infinita per $n = \infty$, avremo le formule:

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \max_{n=\infty} \lim \frac{|f(x_n, y_0)|}{\varphi(x_n, y_0)} &\leq \max_{n=\infty} \lim \frac{|f(x_{n+1}, y_0)| - |f(x_n, y_0)|}{|\varphi(x_{n+1}, y_0)| - |\varphi(x_n, y_0)|} \\ &= \max_{n=\infty} \lim \frac{\frac{\partial}{\partial x} |f(x_n + \theta \Delta, y_0)|}{\frac{\partial}{\partial x} |\varphi(x_n + \theta \Delta, y_0)|}, \\ \min_{n=0} \lim \frac{|f(x_n, y_0)|}{\varphi(x_n, y_0)} &\geq \min_{n=\infty} \lim \frac{|f(x_{n+1}, y_0)| - |f(x_n, y_0)|}{|\varphi(x_{n+1}, y_0)| - |\varphi(x_n, y_0)|} \\ &= \min_{n=\infty} \lim \frac{\frac{\partial}{\partial x} |f(x_n + \theta \Delta, y_0)|}{\frac{\partial}{\partial x} |\varphi(x_n + \theta \Delta, y_0)|}. \end{aligned} \right.$$

Altre due formule analoghe si avranno per funzioni infinitesime, e, quando esista il limite del secondo membro, avremo ancora:

$$(12) \quad \lim_{n=\infty} \frac{f(x_n, y_0)}{|\varphi(x_n, y_0)|} = \lim_{n=\infty} \frac{f(x_{n+1}, y_0) - f(x_n, y_0)}{|\varphi(x_{n+1}, y_0)| - |\varphi(x_n, y_0)|} = \lim_{n=\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x_n + \theta \Delta, y_0)}{\frac{\partial}{\partial x} |\varphi(x_n + \theta \Delta, y_0)|}.$$

Considerando che le formule (11), (12) valgono indipendentemente dal modo con cui si suppone formata la successione x_n , purchè questa tenda ad A sempre crescendo, potremo enunciare il teorema:

11. TEOREMA V. — Se $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ sono funzioni della variabile reale x e della variabile complessa y ad un valore, determinate e finite per ogni punto x interno al tratto $x_0^- A$ (A finito od infinito) e per un dato valore y_0 della y ; se per cotesti valori esistono e sono finite le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$; se nel punto $x = A$ la funzione $|\varphi(x, y_0)|$ è infinita, o se entrambe le funzioni $f(x, y_0)$, $\varphi(x, y_0)$ sono infinitesime; se, infine, la

funzione $|\varphi(x, y_0)|$ nell'intervallo $x_0^- A$ è monotona, si hanno le relazioni:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \max \lim_{x=A-0} \left| \frac{f(x, y_0)}{\varphi(x, y_0)} \right| \leq \max \lim_{x=A-0} \frac{\frac{\partial}{\partial x} |f(x, y_0)|}{\frac{\partial}{\partial x} |\varphi(x, y_0)|}, \\ \min \lim_{x=A-0} \left| \frac{f(x, y_0)}{\varphi(x, y_0)} \right| \geq \min \lim_{x=A-0} \frac{\frac{\partial}{\partial x} |f(x, y_0)|}{\frac{\partial}{\partial x} |\varphi(x, y_0)|}; \end{array} \right.$$

e si ha inoltre:

$$(14) \quad \lim_{x=A-0} \frac{f(x, y_0)}{|\varphi(x, y_0)|} = \lim_{x=A-0} \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x, y_0)}{\frac{\partial}{\partial x} |\varphi(x, y_0)|},$$

se il secondo membro esiste.

12. TEOREMA VI. — Se le condizioni del teorema precedente sono soddisfatte in tutti

i punti y di un campo G ; se in questo il quoziente delle derivate $\frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)}{\frac{\partial}{\partial x} |\varphi(x, y)|}$ tende

uniformemente ad un limite determinato e finito (o nullo) α ; il quoziente $\frac{f(x, y)}{|\varphi(x, y)|}$ tenderà uniformemente a quel medesimo limite, nello stesso campo G .

Ciò per le considerazioni svolte al n° 9, dalle quali risulta che, nelle ipotesi poste, se per tutti i punti y di G è

$$A > x \geq x_\epsilon, \quad \left| \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)}{\frac{\partial}{\partial x} |\varphi(x, y)|} - \alpha \right| < \epsilon,$$

si ha altresì:

$$A > x \geq x_\epsilon, \quad \left| \frac{f(x, y)}{|\varphi(x, y)|} - \alpha \right| < \epsilon.$$

13. OSSERVAZIONE I. — Il teorema non si potrebbe, senz'altro, estendere al caso di funzioni infinite nel punto $x = a$, nè a quoziente infinito di funzioni infinitesime.

14. OSSERVAZIONE II. — Le medesime cose dette per le funzioni $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ valgono per funzioni $f(x, y, z, \dots)$, $\varphi(x, y, z, \dots)$ della variabile reale x e di due o più variabili reali o complesse $y, z, \dots$, le quali, rispetto ad x , godano delle proprietà dianzi richieste.

15. Sia data una funzione analitica $f(x)$ della variabile complessa $x = \xi + i\eta$ (ed eventualmente di altri parametri reali o complessi $y, z, \dots$), la quale in un determinato intorno T del punto $A = \alpha + i\beta$ del piano della variabile complessa è regolare e nulla in A , oppure in A ammette un polo.

Il punto A stesso potrà essere supposto a distanza finita od all'infinito.

Supponiamo ancora data una funzione reale positiva $\varphi(\xi)$, della variabile reale ξ , la quale, al tendere di ξ ad α per successioni sempre crescenti (sempre decrescenti), sia monotona ed infinita od infinitesima per $\xi = \alpha$, secondo che A è un punto di infinito od uno zero delle $f(x)$.

Immaginiamo una successione $x_n = \xi_n + i\eta_n$ di punti del campo T i quali tendano ad A per modo che ξ_n vada sempre crescendo (decrescendo). Le variabili $f_n = f(x_n)$, $\varphi_n = \varphi(\xi_n)$ potranno essere assoggettate alle formule dei Teoremi I, II.

Ora si noti che, posto $f(x) = P(\xi) + iQ(\eta)$, si ha:

$$f_{n+1} - f_n = \Delta x_n \left(\frac{\partial P}{\partial \xi} + i \frac{\partial Q}{\partial \xi} \right) + \varepsilon_1 \Delta x_n,$$

$$\varphi_{n+1} - \varphi_n = \Delta \xi_n \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \varepsilon_2 \Delta \xi_n,$$

$$\frac{f_{n+1} - f_n}{\varphi_{n+1} - \varphi_n} = \frac{\Delta \xi_n + i \Delta \eta_n}{\Delta \xi_n} \cdot \frac{\frac{\partial f}{\partial \xi} + \varepsilon_1}{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \varepsilon_2},$$

essendo $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, infinitesimi insieme con Δx_n .

Da questa formula, ed in modo interamente analogo a quello tenuto per la dimostrazione del Teorema V, si deduce che: *se si immagina, nel piano della variabile complessa, tracciata una linea $\eta = \eta(\xi)$ lungo la quale il punto $x = \xi + i\eta$ tenda ad A per ascisse sempre crescenti (decrescenti), avremo:*

$$(15) \quad \lim_{\xi=\alpha} \frac{f(\xi + i\eta)}{\varphi(\xi)} = \lim_{\xi=\alpha} \frac{\frac{\partial f}{\partial \xi}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}} \cdot \lim_{\xi=\alpha} \left(1 + i \frac{d\eta}{d\xi} \right),$$

purchè esista il secondo membro.

Se la linea $\eta = \eta(\xi)$ è tale che, lungo di essa si abbia

$$\lim_{\xi=\alpha} \frac{d\eta}{d\xi} = 0,$$

avremo la formula:

$$(16) \quad \lim_{\xi=\alpha} \frac{f(\xi + i\eta)}{\varphi(\xi)} = \lim_{\xi=\alpha} \frac{\frac{\partial f}{\partial \xi}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}},$$

purchè esista il secondo membro.

Le relazioni riguardanti il max lim ed il min lim sono analoghe a quelle trovate al Teorema V, e, per la convergenza uniforme, si ripeteranno le considerazioni fatte al Teorema VI.

16. I risultamenti trovati al n° precedente potrebbero estendersi al caso di funzioni φ dipendenti dal modulo $\rho = \text{mod}(x)$: quando per la $\varphi(\rho)$ si supponessero condizioni analoghe a quelle dianzi supposte per la $\varphi(\xi)$.

CAPITOLO II.

Criteri di convergenza per integrali definiti impropri.

17. TEOREMA I. — Se la funzione $b(x)$ è monotona ed integrabile nell'intervallo $x_0^- \infty$, si ha

$$\lim_{x=\infty} (x - x_0) b(x) = 0.$$

E difatti, nella nostra ipotesi, ad ogni numero positivo ε potremo coordinare un valore x_1 di x tale che

$$x > x_1, \quad \left| \int_{x_1}^x b(x) dx \right| < \varepsilon,$$

da cui, per essere $b(x)$ monotona,

$$x > x_1, \quad (x - x_1) |b(x)| < \varepsilon,$$

cioè

$$(2) \quad (x - x_0) |b(x)| < \varepsilon + (x_1 - x_0) |b(x)|.$$

Per le condizioni dell'enunciato $b(x)$ è infinitesima per $x = \infty$, dunque, in corrispondenza dei numeri ε , $x_1 - x_0$, troveremo un numero X tale che

$$x \geq X \geq x_1, \quad (x_1 - x_0) |b(x)| < \varepsilon,$$

ed avremo dalla (2)

$$x \geq X \geq x_1, \quad (x - x_0) |b(x)| < 2\varepsilon.$$

18. OSSERVAZIONE. — Se la funzione $b(x)$ dipende da un'altra variabile z (o da più altre variabili $z_1, z_2, \dots$), se l'integrale $\int_{x_0}^{\infty} b(x, z) dx$ converge uniformemente in un dato campo $G(z)$, la funzione $(x - x_0) b(x)$, è, per $x = \infty$, uniformemente infinitesima in quello stesso campo.

19. TEOREMA II. — Sieno date le funzioni $a(x, z)$, $b(x, z)$ della variabile reale x e della variabile complessa z , determinate, finite e ad un valore per ogni punto x a distanza finita del raggio $x_0^- \infty$, e per ogni punto z di un determinato campo $G(z)$; la $a(x, z)$ sia integrabile rispetto ad x in ogni intervallo finito $x_0^- x$, e la $b(x, z)$ sia derivabile rispetto ad x nei punti a distanza finita del raggio $x_0^- \infty$. Se per un valore z_0 appartenente a G sono soddisfatte le condizioni seguenti:

1° la funzione $(x - x_0) |b'(x, z_0)|$ è integrabile nell'intervallo $x_0^- \infty$,

2° la funzione $(x - x_0) b(x, z_0)$ è infinitesima per $x = \infty$,

3° la media $\left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x a(x, z_0) dx \right|$ ha max lim finito per $x = \infty$,

potremo affermare che la funzione $a(x, z_0) b(x, z_0)$ è integrabile nell'intervallo $x_0^- \infty$.

E, di fatti, consideriamo la identità ⁵⁾:

$$\int_{x_0}^x a b dx = b(x - x_0) \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x a dx - \int_{x_0}^x \left(\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x a dx \right) (x - x_0) b'(x) dx.$$

⁵⁾ Quando ciò non possa generare equivoco, scriveremo brevemente $a(x)$, $b(x)$, ..., o più semplicemente a , b , ..., in luogo di $a(x, z_0)$, $b(x, z_0)$, ...

Poichè la funzione $|(x - x_0)b'(x)|$ è integrabile da x_0 ad ∞ , ed il fattore $\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x a dx$ ha massimo limite finito, esisterà il limite

$$\lim_{x=\infty} \int_{x_0}^x \left(\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x a dx \right) (x - x_0) b'(x) dx.$$

Si ha poi

$$\lim_{x=\infty} b(x - x_0) \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x a dx = 0,$$

dunque esiste determinato e finito il limite del primo membro della identità scritta, cioè esiste l'integrale $\int_{x_0}^{\infty} a(x \zeta_0) b(x \zeta_0) dx$. C. D. D.

20. OSSERVAZIONE. — Ricordando il Teorema I (n° 17), vediamo che le condizioni enunciate per la $b(x, \zeta_0)$ sono certamente soddisfatte se questa funzione è reale, monotona, derivabile in tutti i punti $x > x_0$ a distanza finita, ed integrabile nell'intervallo $x_0^- \infty$.

21. Per calcolare l'integrale definito singolare $\int_{x_1}^x a b dx$, osserviamo che, per la ipotesi 3ª del nostro teorema, esistono due numeri L, X , tali che

$$(3) \quad x \geq X, \quad \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x a(x, \zeta_0) dx \right| < L;$$

d'onde:

$$(4) \quad x > x_1 \geq X, \quad \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_1}^x a dx \right| < \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x a dx \right| + \left| \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} a dx \right| < 2L.$$

Per le condizioni 1ª, 2ª, scelto un numero positivo ε , potremo determinare un numero X_1 (che prenderemo non minore di X) tale che sia contemporaneamente:

$$(5) \quad x > x_1 > X_1, \quad \int_{x_1}^x (x - x_0) |b'(x)| dx < \varepsilon, \quad |b(x - x_0)| < \varepsilon,$$

ma si ha identicamente:

$$\int_{x_1}^x a b dx = b(x - x_0) \frac{1}{x - x_0} \int_{x_1}^x a dx - \int_{x_1}^x \left(\frac{1}{x - x_0} \int_{x_1}^x a dx \right) (x - x_0) b'(x) dx,$$

e da questa, per le (4), (5), ricaviamo:

$$(6) \quad x > x_1 > X_1, \quad \left| \int_{x_1}^x a(x, \zeta_0) b(x, \zeta_0) dx \right| < 4\varepsilon L.$$

22. TEOREMA III. — Se le ipotesi poste al Teorema II si verificano per ogni valore di ζ nel campo G , e se, per i punti di questo si verificano le condizioni:

1° la variabile $(x - x_0)b(x, \zeta)$ è uniformemente infinitesima,

2° l'integrale $\int_{x_0}^x (x - x_0) |b'(x, \zeta)| dx$ converge uniformemente,

3° il rapporto $\frac{1}{x - x_0} \left| \int_{x_0}^x a(x, \zeta) dx \right|$ è limitato superiormente,

potremo concludere che anche l'integrale $\int_{x_0}^x a(x, z) b(x, z) dx$ converge uniformemente in quel medesimo campo.

E, difatti, se le condizioni (4), (5) sono soddisfatte in tutti i punti z di G per un medesimo valore X_1 , per questo stesso valore ed in quei medesimi punti sarà soddisfatta la (6).

23. TEOREMA IV ⁶⁾. — Se le funzioni $a(x, z)$, $b(x, z)$, per un valore $z = z_0$ del campo G , soddisfano le seguenti condizioni:

1° la funzione $a(x, z_0)$ è integrabile nell'intervallo $x_0^- \infty$,

2° la funzione $b(x, z_0)$ è derivabile in ogni punto a distanza finita e la funzione $|b'(x, z_0)|$ è integrabile nell'intervallo $x_0^- \infty$,

anche la funzione $a(x, z_0) b(x, z_0)$ è integrabile nell'intervallo $x_0^- \infty$.

E difatti, in tali ipotesi, ad ogni numero positivo ε faremo corrispondere un valore X , tale che

$$x > x_1 \geq X, \quad \left| \int_{x_1}^x a dx \right| < \varepsilon, \quad \int_{x_1}^x |b'(x)| dx < \varepsilon,$$

ed esiste un numero finito B tale che

$$x > x_0, \quad |b(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x b'(x) dx \right| + |b(x_0)| < B;$$

dunque avremo:

$$x > x_1 \geq X, \quad \left| \int_{x_1}^x a b dx \right| = \left| b \int_{x_1}^x a dx - \int_{x_1}^x \left(\int_{x_1}^x a dx \right) b'(x) dx \right| < \varepsilon (B + \varepsilon).$$

TEOREMA V. — Se le funzioni $a(x, z_0)$, $b(x, z_0)$ precedentemente considerate, soddisfano le seguenti condizioni:

1° la funzione $\left| \int_{x_0}^x a(x, z_0) dx \right|$ ha limite superiore finito nell'intervallo $x_0^- \infty$,

2° la funzione $b(x, z_0)$ è infinitesima per $x = \infty$,

3° la funzione $|b'(x, z_0)|$ è integrabile nell'intervallo $x_0^- \infty$,

anche la funzione $a(x, z_0) b(x, z_0)$ è integrabile nell'intervallo $x_0^- \infty$.

La dimostrazione è interamente analoga a quella fatta pel teorema precedente.

TEOREMA VI. — L'integrale $\int_{x_0}^x a(x, z) b(x, z) dx$ converge uniformemente nel campo $G(z)$ quando sono soddisfatte le condizioni seguenti:

1° la funzione $\left| \int_{x_0}^x a(x, z) dx \right|$ è limitata superiormente per tutte le coppie di valori

⁶⁾ Questo teorema ed i due che seguiranno corrispondono a teoremi noti sulle serie a termini complessi. Cfr. per es.: E. LANDAU, *Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen* [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München, t. XXXVI (1906), pp. 151-218], pp. 155-160.

x, z , che corrispondono a punti x del raggio $x_0^- \infty$ ed a valori di z contenuti in G ,

2° la funzione $b(x, z)$ per $x = \infty$, è uniformemente infinitesima nel campo G ,

3° l'integrale $\int_{x_0}^{\infty} |b'(x, z)| dx$ converge uniformemente nel campo G .

24. Il seguente teorema è alquanto più generale del Teorema II e si dimostra nello stesso modo:

TEOREMA VII. — L'integrale $\int_{x_0}^{\infty} a(x, z) b(x, z) dx$ è convergente se esiste una funzione $c(x, z)$ atta a soddisfare le condizioni seguenti:

1° la funzione $\left| b'(x) \int_{x_0}^x c(x) dx \right|$ è integrabile nell'intervallo $x_0^- \infty$,

2° la funzione $b(x) \int_{x_0}^x c(x) dx$ è infinitesima per $x = \infty$,

3° il rapporto $\frac{\left| \int_{x_0}^x a(x) dx \right|}{\left| \int_{x_0}^x c(x) dx \right|}$ ha massimo limite finito per $x = \infty$.

OSSERVAZIONE. — Le condizioni 1^a, 2^a, sono soddisfatte se le funzioni $b(x)$, $b(x)c(x)$ sono reali, positive, monotone ed integrabili nell'intervallo $x_0^- \infty$.

Per $c = 1$, si ha il Teorema II.

25. Per gli integrali di funzioni che hanno punti di infinito nell'intervallo di integrazione si hanno teoremi analoghi a quelli che più sopra abbiamo dimostrato, ed ora brevemente li esporremo.

TEOREMA I'. — Se la funzione $f(x)$ è monotona nel tratto $x_0^- A$ ed è integrabile propriamente od impropriamente nell'intervallo medesimo (compreso l'estremo A che si suppone a distanza finita), si ha

$$\lim_{x=A} (A - x)f(x) = 0.$$

Se $f(x)$ è finita per $x = A$ il teorema è evidente; supposto che $f(x)$ sia positiva, crescente ed infinita per $x = A$, dall'esistenza dell'integrale improprio $\int_x^A f(x) dx$, ricaviamo che ad ogni numero positivo ε si può coordinare un punto X del tratto $x_0^- A$, tale che

$$A > x \geq X, \quad \left| \int_x^A f(x) dx \right| < \varepsilon,$$

supponendo $f(x)$ positiva, e quindi non decrescente, avremo:

$$A > x > X, \quad (A - x)f(x) < \varepsilon.$$

e ciò prova l'enunciato.

OSSERVAZIONE. — Se la funzione $f(x)$ dipende anche da un'altra variabile z , e se l'integrale $\int_x^A f(x, z) dx$ converge uniformemente in un campo $G(z)$, la funzione $(A - x)f(x, z)$ è, per $x = A$, uniformemente infinitesima nello stesso campo.

26. TEOREMA II'. — Sieno date le funzioni $a(x, z)$, $b(x, z)$ della variabile reale x e della variabile complessa z , determinate, finite e ad un valore per tutti i punti interni all'intervallo x^-A e per i punti z di un determinato campo G ; la $a(x, z)$ sia integrabile in ogni tratto x_0^-x , $x < A$, e la $b(x, z)$ derivabile nei punti interni al segmento x_0^-A .

Se, per un dato valore $z = z_0$ di G , sono soddisfatte le condizioni seguenti:

1° l'integrale $\int_x^A (A - x) |b'(x, z_0)| dx$ esiste determinato e finito,

2° la funzione $(A - x)b(x, z_0)$ è infinitesima per $x = A$,

3° la media $\left| \frac{1}{A - x} \int_x^A a(x, z_0) dx \right|$ ha massimo limite finito per $x = A$;

dico che l'integrale $\int_{x_0}^A a(x, z_0) b(x, z_0) dx$ è determinato e finito.

Ricordando che $\int_{x_1}^x a dx = \int_{x_1}^A a dx - \int_x^A a dx$, facilmente dedurremo la identità:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^x a b dx &= -b(x)(A - x) \frac{1}{A - x} \int_x^A a dx + b(x_1)(A - x_1) \frac{1}{A - x_1} \int_{x_1}^A a dx \\ &\quad + \int_{x_1}^x \left(\frac{1}{A - x} \int_x^A a dx \right) (A - x) b'(x) dx. \end{aligned}$$

Per la ipotesi 3° esistono due numeri L, X tali che

$$A > x > X, \quad \left| \frac{1}{A - x} \int_x^A a dx \right| < L;$$

per le ipotesi 1°, 2°, ad ogni numero positivo ε potremo far corrispondere un numero X_1 (minore di A , e che prenderemo non minore di X), tale che

$$A > x > x_1 > X_1, \quad |(A - x)b(x)| < \varepsilon, \quad |(A - x_1)b(x_1)| < \varepsilon, \quad \int_{x_1}^x (A - x) |b'(x)| dx < \varepsilon,$$

e ne verrà perciò:

$$A > x > x_1 > X_1, \quad \left| \int_{x_1}^x a(x, z_0) b(x, z_0) dx \right| < 3L\varepsilon.$$

OSSERVAZIONE. — Se le funzioni $a(x, z_0)$, $b(x, z_0)$ sono infinite entrambe per $x = A$ e sono entrambe integrabili nel tratto x_0^-A , anche il loro prodotto sarà integrabile se, delle due funzioni a, b , l'una, per es. a , soddisfa la condizione

$$\max_{x=A} \lim \left| \frac{1}{A - x} \int_x^A a(x, z_0) dx \right| = L \text{ (finito)}$$

e l'altra è reale, monotona, derivabile nell'intervallo di integrazione.

27. TEOREMA III'. — Se le ipotesi poste al Teorema I' si verificano in tutti i punti z del campo G ; l'integrale $\int_{x_0}^A a(x, z) b(x, z) dx$ converge uniformemente in quel campo, se ivi sono soddisfatte le condizioni seguenti:

1° l'integrale $\int_x^A (A - x) b'(x, z) dx$ converge uniformemente,

2° la variabile $(A - x)b(x)$ è uniformemente infinitesima per $x = A$,

3° il rapporto $\left| \frac{1}{A - x} \int_x^A a(x, z) dx \right|$ è limitato superiormente.

28. TEOREMA IV'. — L'integrale $\int_{x_0}^A a(x, z)b(x, z)dx$ esiste determinato e finito se le a, b soddisfano le condizioni seguenti:

1° la funzione $a(x, z)$ è integrabile nell'intervallo $x_0^- A$,

2° la funzione $b(x, z)$ è derivabile nei punti interni a detto intervallo, ed esiste determinato e finito l'integrale $\int_{x_0}^A b'(x, z)dx$.

Tralasciamo le dimostrazioni degli enunciati teoremi, poichè sono al tutto simili a quelle date ai n° 22, 23 pei Teoremi III, IV; così pure tralasciamo dall'enunciare i criterî analoghi a quelli dei Teoremi V, VI, perchè troppo facilmente si deducono dalle cose già dette, e dal dimostrare il teorema seguente, che è una immediata generalizzazione del Teorema II'.

29. TEOREMA VII'. — L'integrale $\int_x^A a(x, z)b(x, z)dx$ è convergente se esiste una funzione $c(x, z)$ atta a soddisfare le condizioni seguenti:

1° L'integrale $\int_{x_0}^A |b'(x)| \left| \int_x^A c(x) dx \right| dx$ è convergente,

2° la funzione $b(x) \int_x^A c(x) dx$ è infinitesima per $x = A$,

3° il rapporto $\left| \frac{\int_x^A a(x) dx}{\int_x^A c(x) dx} \right|$ ha limite superiore finito nel tratto $x_0^- A$.

OSSERVAZIONE. — Le condizioni 1°, 2°, sono soddisfatte se le funzioni $b(x)$, $b(x)c(x)$, sono reali, positive, monotone ed integrabili nel tratto $x_0^- A$.

Il Teorema II' si deduce da questo col fare $c = 1$.

CAPITOLO III.

Rapidità relativa di tendenza al limite per integrali convergenti.

30. Avvertenza circa la definizione di «ordine di infinito» o di «infinitesimo». — L'ordine di infinito di una funzione $f(x)$, per un punto $x = A$ del suo campo di definizione, rispetto ad una funzione $\varphi(x)$ assunta come infinito del 1° ordine, è, per uso, rappresentato col numero m limite della espressione

$$(1) \quad m = \lim_{x \rightarrow A} \frac{\lg f(x)}{\lg \varphi(x)},$$

cui corrisponde la rappresentazione

$$f(x) = \varphi(x)^{m+\varepsilon(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow A} \varepsilon(x) = 0.$$

La ricerca del limite m è facilitata dalla relazione:

$$(2) \quad \lim_{x=A} \frac{\lg f(x)}{\lg \varphi(x)} = \lim_{x=A} \frac{f'(x)}{f(x)} : \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

la quale, nella ipotesi della esistenza del 2° membro, ha luogo in forza del Teorema V del Capitolo I, dato al n° 11.

Converremo, in quel che segue, di intendere per *ordine di infinito di $f(x)$ rispetto a $\varphi(x)$ nel punto $x = A$* , il limite del rapporto $\frac{f'(x)}{f(x)} : \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ quando questo esista; e, quando un tale limite non esista, posto

$$\max \lim_{x=A} \frac{f'(x)}{f(x)} : \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = L, \quad \min \lim_{x=A} \frac{f'(x)}{f(x)} : \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = l,$$

affermeremo che l'ordine di infinito della $f(x)$ rispetto a $\varphi(x)$ nel punto $x = A$, è non maggiore di L , e non minore di l .

Così, per es., quando diremo che una funzione $f(x)$ ha, per $x = \infty$, ordine m di infinito, rispetto alla x , vorremo dire che

$$(3) \quad m = \lim_{x=\infty} \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)},$$

quando diremo che $f(x)$ ha, per $x = \infty$, ordine finito di infinito, affermeremo la esistenza di due numeri L, x_L , tali che

$$x \geq x_L, \quad \frac{x f'(x)}{f(x)} < L;$$

etc.

La data definizione serve anche per stabilire l'ordine di infinitesimo di una funzione $f(x)$ rispetto ad una $\varphi(x)$ presa come infinitesimo principale per $x = A$; e, se si considerano gli infinitesimi come infiniti di ordine negativo, serve a dare l'ordine di $f(x)$ rispetto all'infinito del primo ordine $\varphi(x)$, comunque la $f(x)$ sia supposta.

Questo modo di determinare l'ordine di infinito, mentre coincide con quello comunemente usato in tutti i casi che si presentano nella pratica del calcolo infinitesimo, ha sul modo ordinario il vantaggio di una maggior facilità e sicurezza di calcolo. Non solo, infatti, valgono le regole relative agli ordini del prodotto e del quoziente (risultano immediatamente dal fatto che il logaritmo del prodotto è eguale alla somma dei logaritmi dei fattori); ma la regola che afferma essere l'ordine della funzione di funzione $z = \varphi(y)$, $y = f(x)$ eguale al prodotto degli ordini delle funzioni componenti, risulta immediatamente dall'esame della formula:

$$(4) \quad \frac{x \cdot \frac{\partial z}{\partial x}}{z} = \frac{x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}}{z} = \frac{x \cdot \frac{\partial y}{\partial x}}{y} \cdot \frac{y \cdot \frac{\partial z}{\partial y}}{z};$$

e con eguale facilità si dimostra la regola relativa agli ordini delle funzioni inverse; mentre tali regole non si possono in generale dimostrare quando l'ordine di infinito si definisca mediante la formula (1) 7).

7) Cfr. E. BORTOLOTTI, *Sul calcolo degli infiniti* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (Roma), vol. XVII, 1° semestre 1908, pp. 242-247], p. 245.

Aggiungeremo, poichè ciò ci servirà nel seguito, che, anche con la definizione ora proposta, ha luogo il seguente fatto: *se è data una funzione $z = f(x)$ infinita (od infinitesima) per $x = A$, e si può trovare una seconda funzione $y = \varphi(x)$ rispetto la quale l'ordine della prima si possa rappresentare con un simbolo opportuno μ ; se dalla $y = \varphi(x)$ si ricava la funzione inversa $x = \psi(y)$ e si fa la sostituzione $z = f[\psi(y)] = F(y)$, la funzione $F(y)$ che ne risulta ha ordine μ rispetto la variabile da cui dipende.*

Ciò per la relazione:

$$(5) \quad \frac{y \frac{\partial z}{\partial y}}{z} = \frac{y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y}}{z} = \frac{y \frac{\partial z}{\partial x} \frac{1}{\frac{\partial y}{\partial x}}}{z} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{z} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Da ciò risulta che, se con un insieme $[\mu]$ di simboli si possono rappresentare gli ordini di funzioni crescenti non più rapidamente di una funzione assegnata $y_1 = \varphi(x)$, posto

$$(6) \quad y_2 = \varphi(y_1), \quad y_3 = \varphi(y_2), \quad \dots, \quad y_n = \varphi(y_{n-1}), \quad \dots,$$

l'ordine di una data funzione $f(x)$, la quale cresca non più rapidamente di y_{n+1} , e non meno di y_n , si potrà rappresentare con l'accoppiare il numero n ad uno dei simboli $[\mu]$.

Le funzioni y_n sono le unità dei diversi ordini, nella classificazione degli infiniti compresi nel campo determinato dalla successione (6), ed il calcolo degli infiniti, per funzioni di un tal campo, praticamente si riduce a quello delle funzioni crescenti meno rapidamente di y_1 ⁸⁾.

31. Dati due integrali definiti $\int_{x_0}^x a(x)b(x)dx$, $\int_{x_0}^x b(x)dx$, i quali nel punto $x = A$ (a distanza finita) sono determinati e finiti (le funzioni sotto il segno possono essere infinite per $x = A$), per conoscere la loro *relativa rapidità di convergenza al limite* per $x = A$ occorre esaminare il rapporto $\int_x^A a b dx : \int_x^A b dx$. Quando non si possa applicare il teorema del n° 11, non avendo il rapporto delle funzioni sotto il segno limite determinato, gioveranno i teoremi seguenti, i quali, in generale, servono a cercare il *limite del quoziente di due infinitesimi, nei casi in cui cade in difetto il Teorema di L'HÔPITAL*.

32. TEOREMA I. — *Se le funzioni $a(x, z)$, $b(x, z)$ della variabile reale x e della variabile complessa z , sono determinate, finite e ad un valore in tutti i punti x interni all'intervallo $x_0^- A$ e nei punti z di un dato campo $G(z)$, integrabili nel tratto $x_0^- A$; se, inoltre, per $z = z_0$ la $b(x, z_0)$ è reale, monotona, derivabile nell'intervallo di integrazione,*

⁸⁾ E. BORTOLOTTI, *Sulla determinazione dell'ordine di infinito* [Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Modena, serie III, vol. V (1905), pp. LXII-LXXI]. Vedi anche la Memoria preventiva: E. BORTOLOTTI, *Sulla determinazione dell'ordine di infinito* [Atti della Società dei Naturalisti e Matematici di Modena, serie IV, vol. III (1901), pp. 13-77].

e l'integrale $\int_x^A b(x, z_0) dx$ ha per $x = A$ ordine finito (o nullo) di infinitesimo; si ha

$$(7) \quad \lim_{x=A} \frac{\int_x^A a(x, z_0) b(x, z_0) dx}{\int_x^A b(x, z_0) dx} = \lim_{x=A} \frac{1}{A-x} \int_x^A a(x, z_0) dx,$$

purchè il secondo membro sia determinato e finito (o nullo).

Difatti, se poniamo

$$(8) \quad v(x) = (A-x)b'(x),$$

abbiamo:

$$\int_{x_0}^x v dx = (A-x)b(x) - (A-x_0)b(x_0) + \int_{x_0}^x b(x) dx,$$

che, pel Teorema I del n° 15, dimostra la convergenza dell'integrale $\int_{x_0}^A v(x) dx$.

Per la osservazione fatta al Teorema II del n° 26, sappiamo che nelle nostre ipotesi anche l'integrale $\int_{x_0}^A a b dx$ è convergente.

Scriviamo allora:

$$\int_x^A a b dx = b(x) \int_x^A a dx + \int_x^A \left(\int_x^A a dx \right) b'(x) dx,$$

cioè:

$$\int_x^A a b dx = b(x)(A-x) \cdot \frac{\int_x^A a dx}{A-x} + \int_x^A \frac{\int_x^A a dx}{A-x} v(x) dx,$$

osservando che

$$-b(x)(A-x) = \int_x^A v dx - \int_x^A b(x) dx,$$

e ponendo

$$(9) \quad \lambda(x, z) = \frac{\int_x^A a(x, z) dx}{A-x},$$

avremo

$$\int_x^A a b dx = \lambda(x) \left\{ - \int_x^A v dx + \int_x^A b dx \right\} + \int_x^A \lambda v dx,$$

cioè

$$(10) \quad \frac{\int_x^A a b dx}{\int_x^A b dx} = \lambda(x) - \frac{\int_x^A v dx}{\int_x^A b dx} \left(\lambda(x) - \frac{\int_x^A \lambda(x) v(x) dx}{\int_x^A v(x) dx} \right).$$

Considerando ora che le $v(x)$ sono tutte positive, epperò che, per $x = A$, l'integrale $\int_x^A v dx$ va allo zero sempre decrescendo, potremo applicare il Teorema V del n° 11

(Capitolo I) e scrivere:

$$(11) \quad \lim_{x=A} \frac{\int_x^A \lambda(x) v(x) dx}{\int_x^A v(x) dx} = \lim_{x=A} \lambda(x).$$

D'altra parte, la condizione per $\int_x^A b(x) dx$ di avere ordine finito di infinitesimo, porta come conseguenza che esistono due numeri X, M , tali che

$$(12) \quad A > x \geq X, \quad \frac{(A-x)b(x)}{\int_x^A b(x) dx} < M,$$

e perciò avremo:

$$(13) \quad A > x \geq X, \quad -\frac{\int_x^A v(x) dx}{\int_x^A b(x) dx} = \frac{(A-x)b(x)}{\int_x^A b(x) dx} - 1, < M - 1.$$

Dunque, al tendere di x ad A , il secondo termine del secondo membro della formula (10) tende al limite zero, e rimane appunto:

$$\lim_{x=A} \frac{\int_x^A a b dx}{\int_x^A b dx} = \lim_{x=A} \lambda(x). \quad \text{C. D. D.}$$

33. TEOREMA II. — Se, nelle ipotesi del Teorema I, l'integrale $\int_x^A b(x, z_0) dx$, è infinitesimo del primo ordine e la variabile $|a(x, z_0) - \lambda(x, z_0)|$ ha massimo limite finito per $x = A$, la relazione

$$\lim_{x=A} \frac{\int_x^A a b dx}{\int_x^A b dx} = \lim_{x=A} \frac{1}{A-x} \int_x^A a dx,$$

ha luogo purchè esista uno qualunque dei due membri.

E difatti, applicando il Teorema V dato al n° 11 (Capitolo I), abbiamo:

$$\lim_{x=A} \left(\frac{\int_x^A a b dx}{\int_x^A b dx} - \lambda \right) = \lim_{x=A} \frac{\int_x^A a b dx - \lambda \int_x^A b dx}{\int_x^A b dx} = \lim_{x=A} \frac{-ab + \lambda b - \lambda' \int_x^A b dx}{-b},$$

cioè:

$$(14) \quad \lim_{x=A} \left(\frac{\int_x^A a b dx}{\int_x^A b dx} - \lambda \right) = \lim_{x=A} (a - \lambda) \left(1 - \frac{\int_x^A b dx}{(A-x)b} \right).$$

Ma, per essere $\int_x^A b dx$ infinitesimo del 1° ordine risulta

$$\lim_{x=A} \frac{\int_x^A b dx}{(A-x)b} = 1;$$

la (14) quindi dimostra il teorema.

34. Se poniamo :

$$(15) \quad \int_x^A a(x, z) b(x, z) dx = -f(x, z), \quad \int_x^A b(x, z) dz = -\varphi(x, z),$$

abbiamo :

$$a(x, z) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}},$$

d'onde il Teorema :

TEOREMA III. — Se le funzioni $f(x, z)$, $\varphi(x, z)$ della variabile reale x e della variabile complessa z sono determinate, finite, ad un valore e derivabili rispetto ad x per ogni punto x interno all'intervallo $x_0^- A$, e per i punti z di un dato campo G , e sono infinitesime entrambe per $x = A$; se inoltre $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ è, nel dato intervallo, reale monotona per ogni valore z di G , ed infine se la $\varphi(x, z)$ ha, per $x = A$, ordine finito di infinitesimo, si ha :

$$(16) \quad \lim_{x=A} \frac{f(x, z)}{\varphi(x, z)} = \lim_{x=A} \frac{1}{A-x} \int_x^A \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} dx,$$

purchè esista il 2° membro.

35. TEOREMA IV. — Nelle ipotesi dei Teoremi I, III, ed indipendentemente dalla esistenza dei secondi membri nelle formule (7), (16), si hanno le relazioni :

$$(17) \quad \max_{x=A} \lim \frac{\left| \int_x^A a b dx \right|}{\int_x^A b dx} \leq \max_{x=A} \lim \frac{\left| \int_x^A a dx \right|}{A-x} \left\{ 2 \max_{x=A} \lim \frac{(A-x)b(x)}{\int_x^A b dx} + 1 \right\}$$

$$(18) \quad \max_{x=A} \lim \left| \frac{f(x, z)}{\varphi(x, z)} \right| \leq \max_{x=A} \lim \frac{1}{A-x} \left| \int_x^A \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} dx \right| \left\{ 2 \max_{x=A} \lim \left| \frac{(A-x) \frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\varphi(x)} \right| + 1 \right\}.$$

Ciò in conseguenza della identità (10), delle ipotesi poste e delle formule (13) date al n° 11 (Capitolo I).

36. TEOREMA V. — Il rapporto $\frac{f(x, z)}{\varphi(x, z)}$, converge uniformemente al limite verso

cui tende per $x = A$, nel campo $G(z)$; se ivi il rapporto

$$\frac{1}{A-x} \cdot \int_x^A \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} dx$$

converge uniformemente e l'ordine di infinitesimo di $\varphi(x)$, per $x = A$, è limitato superiormente.

La dimostrazione si fa osservando che, se $\lim_{x=A} \frac{f(x, z)}{\varphi(x, z)} = \lambda(z)$, il massimo limite di $\left| \frac{f(x, z) - \lambda \varphi(x, z)}{\varphi(x, z)} \right|$, nelle ipotesi poste, si può, per la formula (18) rendere minore di un numero positivo arbitrario ε , col prendere x maggiore di un dato numero X , indipendentemente dal punto z del campo G .

37. La condizione, da noi imposta alla funzione $\varphi(x) = \int_x^A b(x) dx$, di aver ordine finito di infinitesimo è essenziale per la validità delle formule trovate ai n° precedenti 9). Peraltro si possono trovare formule analoghe per funzioni infinitesime di ordine superiore a qualunque numero assegnato, quando si riesca a trovare una funzione $y = y(x)$, reale, monotona, derivabile, a derivata monotona ¹⁰⁾, rispetto la quale la $\varphi(x)$ abbia ordine finito di infinitesimo. Di fatto, ricavata dalla $y = y(x)$ la inversa $x = \psi(y)$, la funzione

$$\Phi(y) = \int_{y(x)}^{y(A)} b(\psi(y)) \psi'(y) dy,$$

per quanto fu detto al n° 30, soddisferà le condizioni richieste, e potremo, applicando la formula (7), scrivere:

$$\lim_{y=\psi(A)} \frac{\int_{y(x)}^{y(A)} a(\psi(y)) b(\psi(y)) \psi'(y) dy}{\int_{y(x)}^{y(A)} b(\psi(y)) \psi'(y) dy} = \lim_{y=\psi(A)} \frac{1}{y(A) - y(x)} \int_{y(x)}^{y(A)} a(\psi(y)) dy,$$

ossia:

$$(19) \quad \lim_{x=A} \frac{\int_x^A a(x) b(x) dx}{\int_x^A b(x) dx} = \lim_{x=A} \frac{\int_x^A a(x) y'(x) dx}{y(A) - y(x)},$$

9) Cfr. E. BORTOLOTTI, *Convergenza di algoritmi infiniti* [Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Modena, serie III, vol. VII (1908), pp. 135-235], pp. 155-157.

¹⁰⁾ Pel rigore del ragionamento bisogna ammettere che, nell'intervallo $y(x) \sim y(A)$, sia monotono il prodotto $b(\psi(y)) \psi'(y)$: la quale condizione sarà in generale soddisfatta per le funzioni che si avranno a considerare.

che potremo anche scrivere:

$$(20) \quad \lim_{x=A} \frac{\int_x^A a(x)b(x)dx}{\int_x^A b(x)dx} = \lim_{x=A} \frac{\int_x^A a(x)y'(x)dx}{\int_x^A y'(x)dx}.$$

Ricordando le formule (15) potremo anche scrivere

$$(21) \quad \lim_{x=A} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=A} \frac{1}{y(A) - y(x)} \int_x^A \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} y'(x) dx.$$

Tutte queste formule valgono nella ipotesi che esistano determinati e finiti i secondi membri.

Dalle formule (19), (20), (21), si deducono come casi particolari le formule (7), (16), col fare $y(x) = x$. Si potrebbe, senza nessuna difficoltà, trovare formule analoghe alle (17), (18), e determinare condizioni sufficienti alla convergenza uniforme.

38. Una ulteriore generalizzazione del Teorema I ci è data dal seguente teorema:

TEOREMA VI. — *Le funzioni $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $b(x)c(x)$, siano determinate e finite in tutti i punti interni all'intervallo $x_0^- A$, integrabili nell'intero intervallo; se esse soddisfano le condizioni seguenti:*

1° *la $b(x)$ è derivabile in ogni punto interno al dato intervallo,*

2° *le funzioni $b(x)$, $b(x)c(x)$ sono, nel medesimo intervallo, reali e monotone,*

3° *il rapporto $\frac{b(x) \int_x^A c dx}{\int_x^A b c dx}$ ha limite superiore finito;*

si ha:

$$(22) \quad \lim_{x=A} \frac{\int_x^A a b dx}{\int_x^A b c dx} = \lim_{x=A} \frac{\int_x^A a dx}{\int_x^A c dx},$$

purchè esista il 2° membro.

Il Teorema I si ricava da questo col fare $c = 1$.

Dalla identità:

$$\frac{b \int_x^A c dx}{\int_x^A b c dx} = \frac{b c}{\int_x^A b c dx} : \frac{c}{\int_x^A c dx}$$

si scorge che la condizione 3ª equivale al supporre che: *la funzione $\int_x^A b c dx$ abbia ordine finito di infinitesimo, per $x = A$, rispetto all'infinitesimo principale $\int_x^A c dx$.* La formula (22) non è dunque sostanzialmente diversa dalla (20).

39. OSSERVAZIONE. — Applicando i risultamenti ottenuti ai n° 15, 16 nel Capitolo I, potremo estendere i teoremi precedenti al caso in cui la x sia una variabile complessa $x = \xi + i\eta$, ed il punto x si accosti al punto A muovendosi nel piano della variabile complessa in modo che la sua parte reale sia sempre crescente o sempre decrescente.

40. Per integrali estesi ad intervalli infiniti o per il confronto di funzioni infinite-sime nel punto dell'infinito si hanno i teoremi seguenti:

TEOREMA I'. — Se $a(x, z)$, $b(x, z)$ sono funzioni della variabile reale x e della variabile complessa z , date per ogni punto x a distanza finita del raggio $x_0 = \infty$ e per ogni z di un dato campo G , le quali per un valore dato di z , $z = z_0$ soddisfano le seguenti condizioni:

1° $a(x, z_0)$ è integrabile in ogni intervallo finito $x_0^- x$,

2° $b(x, z_0)$ è reale, positiva, monotona, derivabile, integrabile nell'intero intervallo $x_0^- \infty$,

3° la funzione $\int_x^\infty b(x, z_0) dx$ è, per $x = \infty$, infinitesima di ordine finito (o nullo); dico che si ha

$$(23) \quad \lim_{x=\infty} \frac{\int_x^\infty a(x, z_0) b(x, z_0) dx}{\int_x^\infty b(x, z_0) dx} = \lim_{x=\infty} \frac{\int_{x_0}^x a(x, z_0) dx}{x - x_0} \quad ^{11)},$$

purchè il secondo membro sia determinato e finito (o nullo).

Pongo

$$v(x) = -(x - x_0) b'(x),$$

da cui

$$\int_{x_0}^x v(x) dx = - \int_{x_0}^x (x - x_0) b'(x) dx = -(x - x_0) b(x) + \int_{x_0}^x b dx,$$

e, ricordando il teorema del n° 17 (Capitolo I), e la ipotesi 2^a, avremo:

$$(24) \quad \begin{cases} \int_{x_0}^\infty v dx = \int_{x_0}^\infty b dx, \\ \int_x^\infty v dx = (x - x_0) b(x) + \int_x^\infty b dx, \\ \frac{\int_x^\infty v dx}{\int_x^\infty b dx} = 1 + \frac{(x - x_0) b(x)}{\int_x^\infty b(x) dx}. \end{cases}$$

Ora, per la ipotesi 3^a, esistono due numeri X , M , tali che

$$x \geq X, \quad \frac{(x - x_0) b(x)}{\int_x^\infty b(x) dx} < M;$$

¹¹⁾ Con questa formula, al rapporto di due infinitesimi si sostituisce quello di due infiniti.

avremo dunque:

$$(25) \quad x \geq X, \quad \frac{\int_x^\infty v dx}{\int_x^\infty b dx} < 1 + M.$$

Pongo ancora:

$$\lambda(x) = \frac{\int_{x_0}^x a dx}{x - x_0}$$

e scrivo le identità:

$$(26) \quad \int_x^\infty a b dx = \int_{x_0}^\infty a b dx - \int_{x_0}^x a b dx = \int_{x_0}^\infty a b dx - (x - x_0) b \lambda - \int_{x_0}^x \lambda v dx.$$

Essendo per ipotesi finito il secondo membro della (23), dai teoremi dei numeri 19 e 17 (Capitolo II) ricaviamo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^\infty a b dx = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x - x_0) b(x) \lambda(x) = 0,$$

e rimane

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x \lambda(x) v(x) dx = \int_{x_0}^\infty a b dx;$$

perciò scriveremo:

$$\int_{x_0}^\infty a b dx = \int_{x_0}^x \lambda(x) v(x) dx + \int_x^\infty \lambda(x) v(x) dx,$$

ed avremo dalla (26)

$$\int_x^\infty a b dx = \int_x^\infty \lambda(x) v(x) dx - \lambda(x)(x - x_0) b(x),$$

e, dalla seconda delle (24),

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_x^\infty a b dx &= \int_x^\infty \lambda(x) v(x) dx + \lambda(x) \left(\int_x^\infty b(x) dx - \int_x^\infty v(x) dx \right) \\ \frac{\int_x^\infty a b dx}{\int_x^\infty b dx} &= \lambda(x) - \frac{\int_x^\infty v dx}{\int_x^\infty b dx} \left(\lambda(x) - \frac{\int_x^\infty \lambda(x) v(x) dx}{\int_x^\infty v(x) dx} \right). \end{aligned} \right.$$

Da questa identità segue il teorema enunciato, in modo analogo a quello tenuto per Teorema I al n° 32.

41. IL TEOREMA II, dato al n° 33, NON SI PUÒ ESTENDERE AL CASO DI $A = \infty$, del quale ora ci stiamo occupando.

Si dimostrano invece, in modo interamente analogo a quello tenuto per il caso del punto A a distanza finita, i teoremi seguenti:

TEOREMA III'. — Se le funzioni $f(x, \zeta)$, $\varphi(x, \zeta)$ della variabile reale x e della variabile complessa ζ sono determinate e finite, derivabili rispetto ad x , per tutti i valori

di χ di un determinato campo G e per i punti x a distanza finita del raggio $x_0 = \infty$, infinitesime entrambe per $x = \infty$, se $\varphi(x, \chi)$ è reale, la sua derivata è monotona rispetto ad x , ed il suo ordine di infinitesimo per $x = \infty$ è limitato superiormente, si ha:

$$(28) \quad \lim_{x=\infty} \frac{f(x, \chi)}{\varphi(x, \chi)} = \lim_{x=\infty} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} dx,$$

purchè il secondo membro sia determinato e finito (o nullo).

TEOREMA IV'. — Nelle ipotesi dei Teoremi I', III', si ha:

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \max_{x=\infty} \lim \left| \frac{\int_x^\infty a b dx}{\int_x^\infty b dx} \right| \leq \max_{x=\infty} \lim \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x a dx \right| \left\{ 2 \max_{x=\infty} \lim \frac{(x - x_0) b}{\int_x^\infty b dx} + 1 \right\} \\ \max_{x=\infty} \lim \left| \frac{f(x, \chi)}{\varphi(x, \chi)} \right| \leq \max_{x=\infty} \lim \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} dx \right| \left\{ 2 \max_{x=\infty} \lim \left| \frac{(x - x_0) \frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\varphi(x)} \right| + 1 \right\} \end{array} \right.$$

TEOREMA V'. — Il rapporto $\frac{f(x, \chi)}{\varphi(x, \chi)}$ converge uniformemente al limite, per $x = \infty$, nel campo $G(\chi)$, se ivi converge uniformemente il rapporto

$$\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} dx,$$

e l'ordine di infinitesimo della $\varphi(x, \chi)$ è limitato superiormente.

42. Per funzioni $\varphi(x) = \int_{x_0}^x b(x) dx$, le quali non abbiano ordine finito di infinitesimo per $x = \infty$, se esiste una funzione $y = y(x)$ soddisfacente le solite condizioni di derivabilità e monotonia, rispetto la quale $\varphi(x)$ abbia ordine finito di infinito, si hanno le formule:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x=\infty} \frac{\int_x^\infty a(x) b(x) dx}{\int_x^\infty b(x) dx} = \lim_{x=\infty} \frac{1}{y(x) - y(x_0)} \int_{x_0}^x a(x) y'(x) dx, \\ \lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{1}{y(x) - y(x_0)} \int_{x_0}^x \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} y'(x) dx, \end{array} \right.$$

le quali si dimostrano in modo analogo a quello tenuto per le formule (19), (21).

43. TEOREMA VI'. — *Se, conservando per le funzioni $a(x)$, $b(x)$ le condizioni enunciate al Teorema I', si trova una funzione $c(x)$ soddisfacente le solite condizioni di integrabilità e monotonia, e tale che il rapporto*

$$\frac{b(x) \int_x^\infty c(x) dx}{\int_x^\infty b(x) c(x) dx}$$

abbia limite superiore finito, si ha la formula:

$$(31) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_x^\infty a b dx}{\int_x^\infty b c dx} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_{x_0}^x a dx}{\int_{x_0}^x c dx},$$

purchè esista il secondo membro.

44. Osserviamo, infine, che i risultamenti ottenuti si possono estendere a funzioni della variabile complessa $x = \xi + i\eta$, ed a cammini percorsi sul piano della variabile complessa, con le avvertenze indicate ai n° 15, 16 del Capitolo I.

CAPITOLO IV.

Crescenza relativa di integrali divergenti.

45. La determinazione del limite del quoziente di due funzioni $f(x)$, $\varphi(x)$, le quali in uno stesso punto A sono entrambi infinite, mentre sono finite e derivabili nei punti interni di un dato intervallo $x_0^- A$, si può, in generale, ridurre alla determinazione della rapidità relativa di crescita degli integrali divergenti $\int_{x_0}^x f'(x) dx$, $\int_{x_0}^x \varphi'(x) dx$. I criteri che noi daremo saranno analoghi a quelli che, nel Capitolo precedente, abbiamo trovato per il confronto di funzioni infinitesime; e, per far meglio risaltare tali analogie, indicheremo con lo stesso numero d'ordine le proposizioni corrispondenti; tralasciando le dimostrazioni e gli svolgimenti che non dimandino metodi di indagini diversi da quelli già usati, o non presentino qualche speciale difficoltà.

E prima considereremo il caso che il punto A di definizione impropria sia quello dell'infinito.

46. TEOREMA I. — *Se le funzioni $a(x, \tau)$, $b(x, \tau)$ finite e ad un valore per i punti x a distanza finita del raggio $x_0^- \infty$ e per i punti τ di un dato campo G , integrabili in ogni intervallo finito $x_0^- x$, per un valore $\tau = \tau_0$ soddisfano le seguenti condizioni:*

1° *la funzione $b(x, \tau_0)$ per ogni $x > x_0$ è reale, monotona, derivabile,*

2° *l'integrale $\int_{x_0}^x b(x, \tau_0) dx$ è divergente ed ha ordine finito (o nullo) di infinito*

per $x = \infty$,

dico che si ha:

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_{x_0}^x a(x, z_0) b(x, z_0) dx}{\int_{x_0}^x b(x, z_0) dx} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x a(x, z_0) dx,$$

purchè il secondo membro sia determinato e finito (o nullo).

Ponendo

$$(2) \quad v(x) = (x - x_0) b'(x); \quad \lambda(x) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x a(x) dx,$$

troveremo l'identità:

$$(3) \quad \frac{\int_{x_0}^x a b dx}{\int_{x_0}^x b dx} = \lambda(x) + \frac{\int_{x_0}^x v dx}{\int_{x_0}^x b dx} \left(\lambda(x) - \frac{\int_{x_0}^x \lambda(x) v(x) dx}{\int_{x_0}^x v(x) dx} \right)$$

Poichè la $v(x) = (x - x_0) b'(x)$ conserva sempre il medesimo segno, la funzione $\int_{x_0}^x v(x) dx = (x - x_0) b(x) - \int_{x_0}^x b(x) dx$ avrà, per $x = \infty$, limite determinato, il quale, o sarà un numero finito C , o sarà infinito.

Nel secondo di questi casi potremo, applicando il Teorema V del n° 11, completare la dimostrazione al modo stesso che si fece pel Teorema del n° 32, al Capitolo III.

Nel primo caso, posto

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ (x - x_0) b(x) - \int_{x_0}^x b(x) dx \right\} = C,$$

poichè l'integrale $\int_{x_0}^x b dx$ è divergente per $x = \infty$, avremo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - x_0) b(x)}{\int_{x_0}^x b(x) dx} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_{x_0}^x v dx}{\int_{x_0}^x b dx} = 0.$$

Se ora si ha:

$$\max_{x \rightarrow \infty} \lim |\lambda(x)| = L,$$

sarà ancora

$$\max_{x \rightarrow \infty} \lim \left| \frac{\int_{x_0}^x \lambda v dx}{\int_{x_0}^x v dx} \right| \leq L,$$

epperò

$$\max_{x \rightarrow \infty} \lim \left| \lambda(x) - \frac{\int_{x_0}^x \lambda v dx}{\int_{x_0}^x v dx} \right| \leq 2L.$$

Dunque, nella nostra ipotesi,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_{x_0}^x v dx}{\int_{x_0}^x b dx} \left(\lambda - \frac{\int_{x_0}^x \lambda v dx}{\int_{x_0}^x v dx} \right) = 0$$

e dalla identità (3) si ricava che l'eguaglianza

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_{x_0}^x a b dx}{\int_{x_0}^x b dx} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x a dx$$

ha, nella nostra ipotesi, luogo, purchè esista uno dei due membri, quando si sappia che il secondo membro ha massimo limite finito.

47. TEOREMA II. — *Se alle ipotesi del Teorema I aggiungiamo una qualunque delle seguenti:*

A) la media $\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x a(x) dx$ ha massimo limite finito e la differenza

$$(x - x_0)b(x) - \int_{x_0}^x b(x) dx$$

ha limite finito,

B) la funzione $a(x)$ ha massimo limite finito, e l'integrale $\int_{x_0}^x b(x) dx$ è, per $x = \infty$, infinito del primo ordine,

la formula (1) vale, purchè esista uno dei due membri.

Nella ipotesi *A)* il teorema è stato dimostrato più sopra; nella ipotesi *B)* la dimostrazione si fa in modo interamente analogo a quello seguito al n° 33.

48. Se poniamo

$$f(x, z) = \int_{x_0}^x a(x, z) b(x, z) dx, \quad \varphi(x, z) = \int_{x_0}^x b(x, z) dx,$$

abbiamo il teorema:

TEOREMA III. — *Se le funzioni $f(x, z)$, $\varphi(x, z)$, della variabile reale x e della variabile complessa z , sono determinate, finite, ad un valore e derivabili rispetto ad x per ogni punto x a distanza finita del raggio x_0 e per i punti z di un dato campo G ; se la $\varphi(x, z)$ è, per $x = \infty$ infinita di ordine finito (o nullo) ed è reale, monotona, insieme con la sua derivata, in ogni intervallo finito $x_0^+ x$; si ha:*

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x, z)}{\varphi(x, z)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} dx,$$

purchè esista il secondo membro.

TEOREMA IV. — *Nelle ipotesi dei teoremi I, III, ed indipendentemente dalla esistenza*

dei secondi membri nelle formule (1), (5), si ha:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \max_{x=\infty} \lim \frac{\left| \int_{x_0}^x a b dx \right|}{\int_{x_0}^x b dx} &\leq \max_{x=\infty} \lim \frac{\int_{x_0}^x b dx}{x - x_0} \left[2 \max_{x=x_0} \lim \frac{(x - x_0) b(x)}{\int_{x_0}^x b dx} + 1 \right], \\ \max_{x=\infty} \lim \frac{f(x, \zeta)}{\varphi(x, \zeta)} &\leq \max_{x=\infty} \lim \frac{1}{x - x_0} \left| \int_{x_0}^x \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} dx \right| \left\{ 2 \max_{x=\infty} \lim \frac{(x - x_0) \frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\varphi(x)} + 1 \right\}. \end{aligned} \right.$$

49. Si stabiliscono condizioni per la *convergenza uniforme*, in modo analogo a quello tenuto al n° 36 del Capitolo III, e, quando la funzione $\varphi(x) = \int_{x_0}^x b(x) dx$ non abbia ordine finito di infinito, trovata una funzione $y = y(x)$, rispetto alla quale la $\varphi(x)$ abbia ordine finito, si hanno le formule:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \lim_{x=\infty} \frac{\int_{x_0}^x a b dx}{\int_{x_0}^x b dx} &= \lim_{x=\infty} \frac{\int_{x_0}^x a y' dx}{\int_{x_0}^x y' dx}, \\ \lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} &= \lim_{x=\infty} \frac{1}{y(x) - y(x_0)} \int_{x_0}^x \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} y'(x) dx. \end{aligned} \right.$$

O, sotto forma più generale: date tre funzioni $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, le quali soddisfino le solite condizioni di derivabilità e monotonia, e tali che l'integrale $\int_{x_0}^x b(x) c(x) dx$ abbia, per $x = \infty$, ordine finito di infinito, rispetto alla funzione, considerata come infinito del 1° ordine, $\int_{x_0}^x c(x) dx$, si ha la formula:

$$(8) \quad \lim_{x=\infty} \frac{\int_{x_0}^x a(x) b(x) dx}{\int_{x_0}^x b(x) c(x) dx} = \lim_{x=\infty} \frac{\int_{x_0}^x a(x) dx}{\int_{x_0}^x c(x) dx}.$$

Tutte queste formule valgono purchè esistano i secondi membri, e si dimostrano in modo interamente analogo a quello seguito al Capitolo III, per integrali convergenti.

50. Per integrali divergenti di funzioni che hanno punti di infinito (a distanza finita) nel loro intervallo di integrazione si hanno i teoremi seguenti:

TEOREMA I'. — Sieno date le funzioni $a(x, \zeta)$, $b(x, \zeta)$ per i punti x interni al segmento $x_0^- A$, e per i punti ζ di un determinato campo G : e supponiamo che per un valore $\zeta = \zeta_0$ di G esse soddisfino le condizioni seguenti:

1° la $a(x, \zeta_0)$ è integrabile in ogni tratto $x_0^- x$, $x < A$,

2° la $b(x, z_0)$ è reale, monotona, derivabile in ogni punto interno al segmento $x_0^- A$, infinita per $x = A$: il suo integrale $\int_{x_0}^x b(x) dx$, per $x = A$, è infinito di ordine finito (o nullo),

dico che si ha:

$$(9) \quad \lim_{x=A} \frac{\int_{x_0}^x a(x, z_0) b(x, z_0) dx}{\int_{x_0}^x b(x, z_0) dx} = \lim_{x=A} \frac{\int_x^A a(x, z_0) dx}{A - x},$$

purchè il secondo membro sia determinato e finito (o nullo) ¹²⁾.

E di fatti, poniamo:

$$(10) \quad v(x, z_0) = (A - x)b'(x, z_0), \quad \lambda(x, z_0) = \frac{1}{(A - x)} \int_x^A a(x, z_0) dx$$

e scriviamo le identità:

$$(11) \quad \int_{x_0}^x v(x) dx = \int_{x_0}^x (A - x)b'(x) dx = (A - x)b(x) - (A - x_0)b(x_0) + \int_{x_0}^x b(x) dx.$$

La esistenza di limite finito pel 2° membro della (9) suppone la integrabilità della $a(x)$ nel tratto $x_0^- A$; dunque potremo porre

$$\int_{x_0}^A a(x) dx = \alpha, \quad \int_{x_0}^x a(x) dx = \alpha - \int_x^A a(x) dx,$$

e scrivere la identità:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x a(x)b(x) dx &= b(x) \left(\alpha - \int_x^A a(x) dx \right) - \int_{x_0}^x \left(\alpha - \int_x^A a(x) dx \right) b'(x) dx, \\ &= -b(x)(A - x)\lambda(x) + \int_{x_0}^x \lambda(x)(A - x)b'(x) dx + b(x_0)\alpha, \end{aligned}$$

e, dalla (11),

$$\int_{x_0}^x a(x)b(x) dx = \lambda(x) \left\{ \int_{x_0}^x b(x) dx - \int_{x_0}^x v(x) dx - (A - x_0)b(x_0) \right\} + \int_{x_0}^x \lambda(x)v(x) dx + b(x_0)\alpha,$$

cioè:

$$\frac{\int_{x_0}^x a b dx}{\int_{x_0}^x b dx} = \lambda(x) + \frac{\int_{x_0}^x v dx}{\int_{x_0}^x b dx} \left\{ -\lambda(x) + \frac{\int_{x_0}^x \lambda(x)v(x) dx}{\int_{x_0}^x v(x) dx} \right\} + \frac{b(x_0)\alpha - (A - x_0)b(x_0)\lambda(x)}{\int_{x_0}^x b dx}.$$

Poichè $\lambda(x)$ ha massimo limite finito per $x = A$, $b(x_0)$, α , $(A - x_0)$ non dipendono da x , e l'integrale $\int_{x_0}^x b(x) dx$ tende all'infinito per $x = A$, si vede che il ter-

¹²⁾ Con la applicazione di questo teorema la ricerca del limite del rapporto di due infiniti si sostituisce a quella del rapporto di due infinitesimi.

mine

$$\frac{b(x_0)\alpha - (A - x_0)b(x_0)\lambda(x)}{\int_{x_0}^x b(x) dx}$$

è infinitesimo per $x = A$, e rimane

$$(12) \quad \lim_{x=A} \frac{\int_{x_0}^x a b dx}{\int_{x_0}^x b dx} = \lim_{x=A} \left\{ \lambda(x) + \frac{\int_{x_0}^x v dx}{\int_{x_0}^x b dx} \left[-\lambda(x) + \frac{\int_{x_0}^x \lambda(x)v(x) dx}{\int_{x_0}^x v(x) dx} \right] \right\}.$$

Si consideri ora che, essendo $v(x) = (A - x)b'(x)$ costantemente positiva, l'integrale $\int_{x_0}^x v dx$ è crescente; ed è inoltre, per la formula (11) e la supposizione della divergenza di $\int_{x_0}^x b(x) dx$, infinito per $x = A$.

Potremo dunque applicare il Teorema V dato al n° 11 del Capitolo I, e concludere

$$(13) \quad \lim_{x=A} \frac{\int_{x_0}^x \lambda(x)v(x) dx}{\int_{x_0}^x v(x) dx} = \lim_{x=A} \lambda(x).$$

Inoltre, per la condizione 2^a del nostro enunciato, esistono due numeri ε , M , tali che

$$A - x < \varepsilon, \quad \frac{(A - x)b(x)}{\int_{x_0}^x b(x) dx} < M,$$

e, per la formula (11), avremo:

$$(14) \quad \max \lim_{x=A} \frac{\int_{x_0}^x v dx}{\int_{x_0}^x b dx} \leq 1 + M.$$

Tenendo conto delle formule (13), (14), vediamo che la formula (12) dimostra il teorema.

51. *Non esiste nel nostro caso un teorema analogo al Teorema II dato al n° 47; cioè non possiamo enunciare una condizione, analoga a quella ivi contenuta, la quale ci permetta di affermare che la formula (9) è valida solo che esista uno dei due membri.*

Esistono invece i rimanenti teoremi, e si esprimono esattamente con le stesse formule che, nel Capitolo III, abbiamo dato coi n° (16) a (22). La loro dimostrazione non presenta alcuna difficoltà, dopo quanto abbiamo detto, epperò qui viene tralasciata.

52. Osserveremo in fine, che anche in questo caso si può supporre che *anche la variabile x sia complessa*, e che si tenda al punto A (finito od infinito) del piano della variabile complessa secondo curve assegnate, seguendo le avvertenze date ai n° 15, 16, del Capitolo I.

CAPITOLO V.

Serie di numeri complessi. Convergenza. Rapidità relativa di convergenza o di divergenza.

53. TEOREMA I. — La serie $\sum_1^\infty a_n b_n$ converge se le variabili, reali o complesse, a_n , b_n , soddisfano le condizioni seguenti:

1° la serie $\sum_1^\infty n |b_n - b_{n+1}|$ è convergente,

2° $\lim_{n \rightarrow \infty} n b_n = 0$,

3° la media $\frac{|a_1 + a_2 + \dots + a_n|}{n}$ ha limite superiore finito.

Ed infatti, posto $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, si ha l'identità:

$$\sum_{n=1}^m a_n b_n = \sum_{n=1}^m A_n (b_n - b_{n+1}) + A_m b_{m+1} = \sum_{n=1}^m \frac{A_n}{n} \cdot n (b_n - b_{n+1}) + \frac{A_m}{m} \cdot m b_{m+1};$$

dalla quale immediatamente risulta il teorema.

COROLLARIO. — La serie $\sum_1^\infty a_n b_n$ converge, se sono soddisfatte le condizioni seguenti:

1° la variabile b_n è reale, positiva, monotona,

2° la serie $\sum_1^\infty b_n$ è convergente,

3° la media $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ ha limite superiore finito.

E difatti dalle ipotesi 1°, 2°, si ricava $\lim_{n \rightarrow \infty} n b_n = 0$, e scrivendo l'identità

$$\sum_{n=m}^{m+r} n (b_n - b_{n+1}) = m b_m - (m+r) b_{m+r+1} + \sum_{n=m+1}^{m+r} b_n,$$

si vede che anche la serie $\sum n (b_n - b_{n+1})$ converge.

TEOREMA II. — Se le a_n , b_n , sono funzioni di una variabile z (reale o complessa) date in un campo G , ed in questo campo:

1° la serie $\sum n |b_n(z) - b_{n+1}(z)|$ converge uniformemente,

2° le variabili $n b_n(z)$ sono uniformemente infinitesime per $n = \infty$,

3° la media $\frac{|a_1(z_1) + \dots + a_n(z)|}{n}$ è, nel campo G , limitata superiormente,

anche la serie $\sum_1^\infty a_n(z) b_n(z)$ converge uniformemente nel campo G .

TEOREMA III. — La serie $\sum a_n b_n$ è convergente se si può trovare una variabile c_n atta a soddisfare le condizioni seguenti:

1° la serie $\sum_{n=1}^\infty |(b_n - b_{n+1})(c_1 + c_2 + \dots + c_n)|$ è convergente,

2° $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n (c_1 + c_2 + \dots + c_n) = 0$,

3° il rapporto $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{c_1 + c_2 + \dots + c_n}$ ha limite superiore finito.

54. Per ordine di infinito di una variabile f_n , per $n = \infty$, rispetto ad un'altra φ_n la quale è assunta come infinito del primo ordine, intenderemo il limite del rapporto

$$(1) \quad \lim_{n=\infty} \frac{f_{n+1} - f_n}{f_n} \cdot \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{\varphi_n};$$

ciò in corrispondenza della definizione data al n° 30.

55. TEOREMA IV. — Se esiste il limite (finito o nullo)

$$(2) \quad \lambda = \lim_{n=\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

della media aritmetica dei primi n rapporti dei termini corrispondenti nelle due serie $\sum a_n b_n$, $\sum b_n$, e la variabile b_n si suppone reale, monotona per ogni valore finito di n :

A) se la somma $b_1 + b_2 + \dots + b_n$ diverge ed ha, per $n = \infty$, ordine finito, o nullo, di infinito, si ha

$$(3) \quad \lim_{n=\infty} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \lim_{n=\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n};$$

B) se la serie $\sum b_n$ converge ed il suo resto $b_{n+1} + b_{n+2} + \dots$ ha, per $n = \infty$, ordine finito di infinitesimo, si ha

$$(4) \quad \lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1} b_{n+1} + a_{n+2} b_{n+2} + \dots}{b_{n+1} + b_{n+2} + \dots} = \lim_{n=\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Dimostrazione del Teorema IV, A):

Poniamo

$$(5) \quad \lambda_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \quad v_n = n(b_{n+1} - b_n)$$

e scriviamo la identità:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \lambda_n (b_1 + b_2 + \dots + b_n + v_1 + v_2 + \dots + v_n) - (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n),$$

cioè:

$$(6) \quad \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \lambda_n + \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \left(\lambda_n - \frac{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n}{v_1 + v_2 + \dots + v_n} \right).$$

Essendo la b_n monotona, le v_n avranno tutte il medesimo segno; epperò, se $|v_1 + v_2 + \dots + v_n|$ non tende all'infinito sempre crescendo, sarà convergente verso un numero determinato e finito.

In quest'ultimo caso avremo $\lim_{n=\infty} \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = 0$; inoltre, trovato un numero $K > |\lambda|$, tale che per ogni valore finito di n sia $|\lambda_n| < K$, avremo

$$\left| \lambda_n - \frac{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n}{v_1 + \dots + v_n} \right| < 2K;$$

onde, dalla formula (6) subito verrà l'enunciato teorema.

Se poi supponiamo che la serie $\sum v_n$ sia divergente, potremo, applicando il Teo-

rema III dato al n° 5 (Capitolo I), concludere che

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n}{v_1 + v_2 + \dots + v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n;$$

e, osservando che

$$(8) \quad \max \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \max \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n b_{n+1}}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} - 1 \right),$$

e che la condizione, per la $b_1 + \dots + b_n$, di avere ordine finito di infinito, ci assicura che il secondo membro della (8) è finito; vediamo come anche nel nostro caso, dalla identità (6) risulti dimostrato il teorema.

Dimostrazione del Teorema IV, B).

Per il corollario del Teorema I sappiamo che, nelle nostre ipotesi, la serie $\sum a_n b_n$ converge.

Poniamo:

$$(9) \quad \begin{cases} \sum_1^\infty b_n = b_0, & \sum_1^\infty a_n b_n = a_0 b_0, & \beta_n = b_{n+1} + b_{n+2} + \dots = b_0 - (b_1 + b_2 + \dots + b_n), \\ v_n = n(b_n - b_{n+1}), & v_1 + v_2 + \dots + v_n = b_1 + \dots + b_n - n b_{n+1}, \\ \sum_1^\infty v_n = \sum_1^\infty b_n = b_0, & \gamma_n = b_0 - (v_1 + v_2 + \dots + v_n) = v_{n+1} + v_{n+2} + \dots = \beta_n + n b_{n+1}; \end{cases}$$

se scriviamo la identità:

$$(10) \quad \begin{cases} a_{n+1} b_{n+1} + a_{n+2} b_{n+2} + \dots = a_0 b_0 - (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n) \\ \quad = a_0 b_0 - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_n v_n + \lambda_n (\beta_n - \gamma_n), \end{cases}$$

vediamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n) = a_0 b_0,$$

cioè

$$a_0 b_0 - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_n v_n = \lambda_{n+1} v_{n+1} + \lambda_{n+2} v_{n+2} + \dots;$$

sostituendo questa espressione nella (10) ne ricaveremo:

$$(11) \quad \frac{a_{n+1} b_{n+1} + a_{n+2} b_{n+2} + \dots}{b_{n+1} + b_{n+2} + \dots} = \lambda_n + \frac{\gamma_n}{\beta_n} \left(\frac{\lambda_{n+1} v_{n+1} + \lambda_{n+2} v_{n+2} + \dots}{v_{n+1} + v_{n+2} + \dots} - \lambda_n \right).$$

Poichè la variabile $v_{n+1} + v_{n+2} + \dots$ è, per $n = \infty$, infinitesima; e, per ogni valore finito di n , è monotona, potremo applicare il Teorema IV del n° 7 (Capitolo I) e scrivere:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{n+1} v_{n+1} + \lambda_{n+2} v_{n+2} + \dots}{v_{n+1} + v_{n+2} + \dots} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n;$$

inoltre, essendo

$$\max \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_n}{\beta_n} = \max \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n b_{n+1}}{b_{n+1} + b_{n+2} + \dots} \right),$$

per la condizione imposta alla $b_{n+1} + b_{n+2} + \dots$, di avere ordine finito di infinito, siamo sicuri che $\frac{\gamma_n}{\beta_n}$ è finito; la (11) quindi dimostra il teorema.

56. TEOREMA V. — Se alle ipotesi dell'enunciato nel Teorema IV, A) si aggiunge

una delle seguenti:

$$(I_2) \quad \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} [n b_{n+1} - (b_1 + b_2 + \dots + b_n)] = C \quad (\text{finito}), \\ \max \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = M \quad (\text{finito}), \end{cases}$$

II, la variabile $|a_n|$ ha massimo limite finito, e la variabile $b_1 + b_2 + \dots + b_n$ è infinita del 1° ordine; la relazione (3) ha luogo purchè esista uno qualsivoglia dei due membri.

Nel caso I il Teorema segue immediatamente dalla dimostrazione fatta.

Nel caso II, si dimostra osservando che

$$(I_3) \quad \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \lambda_n + \frac{b_1(a_1 - \lambda_n) + \dots + b_n(a_n - \lambda_n)}{b_1 + \dots + b_n},$$

e, applicando il Teorema III dato al n° 5 (Capitolo I), che

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1(a_1 - \lambda_n) + \dots + b_n(a_n - \lambda_n)}{b_1 + \dots + b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1(\lambda_{n-1} - \lambda_n) + \dots + b_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n) + b_n(a_n - \lambda_n)}{b_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ a_n - \lambda_n + (\lambda_{n-1} - \lambda_n) \frac{b_1 + \dots + b_n}{b_n} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \lambda_n) \left(1 - \frac{b_1 + \dots + b_n}{n b_n} \right) = 0. \end{aligned}$$

57. TEOREMA VI. — Nelle ipotesi del Teorema IV, si ha:

$$(I_4) \quad \begin{cases} \max \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \right| \leq \max \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right| \cdot \left[1 + 2 \max \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n b_{n+1}}{b_1 + \dots + b_n} \right], \\ \max \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + \dots}{b_{n+1} + b_{n+2} + \dots} \right| \leq \max \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right| \cdot \left[1 + 2 \max \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n b_{n+1}}{b_{n+1} + b_{n+2} + \dots} \right]. \end{cases}$$

58. TEOREMA VII. — Date due variabili A_n, B_n , le quali sono determinate e finite per ogni valore finito di n , infinite od infinitesime entrambe per $n = \infty$; se poniamo

$$\Delta B_n = B_{n+1} - B_n, \quad \Delta A_n = A_{n+1} - A_n,$$

se supponiamo che la variabile ΔB_n sia monotona e che B_n abbia ordine finito di infinito o di infinitesimo; avremo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \frac{\Delta A_r}{\Delta B_r}$$

quando esista il secondo membro.

Nel caso che il secondo membro non abbia limite determinato, il massimo limite del primo membro si determina con la applicazione del Teorema VI. E si vede come esso possa essere finito anche se il rapporto $\frac{\Delta A}{\Delta B}$ abbia massimo limite infinito.

59. TEOREMA VIII. — Date tre variabili a_n, b_n, c_n , delle quali la prima è finita per ogni valore finito di n , le altre sono reali, monotone insieme col loro prodotto $b_n \cdot c_n$; se il rapporto

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{c_1 + c_2 + \dots + c_n}$$

ha limite determinato e finito (o nullo),

A) se la somma $a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n$ è, per $n = \infty$, infinita di ordine finito

rispetto la variabile $c_1 + c_2 + \dots + c_n$, si ha ¹³⁾:

$$(15) \quad \lim_{n=\infty} \frac{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n}{b_1 c_1 + \dots + b_n c_n} = \lim_{n=\infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{c_1 + \dots + c_n},$$

B) se la serie $\sum b_n c_n$ converge, ed il resto $b_{n+1} c_{n+1} + b_{n+2} c_{n+2} + \dots$, è, per $n = \infty$, infinitesimo di ordine finito rispetto la variabile $c_{n+1} + c_{n+2} + \dots$; si ha:

$$(16) \quad \lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1} b_{n+1} + a_{n+2} b_{n+2} + \dots}{b_{n+1} c_{n+1} + b_{n+2} c_{n+2} + \dots} = \lim_{n=\infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{c_1 + \dots + c_n},$$

purchè esistano i secondi membri.

La dimostrazione è interamente analoga a quella fatta pel Teorema IV.

CAPITOLO VI.

Applicazione ad un teorema su le funzioni determinanti ¹⁴⁾.

60. Per mostrare la utilità pratica dei teoremi trovati, ne faremo la applicazione alla ricerca della *ascissa di convergenza delle funzioni determinanti*.

Dimostreremo perciò il seguente teorema:

Dato l'integrale

$$F(x) = \int_{y_0}^y \psi(y) y^{-x} dy,$$

si consideri la funzione

$$\Phi(y) = \int_{y_0}^y \psi(y) dy,$$

la quale supponiamo determinata e finita per ogni valore finito della y .

Se questa funzione è determinata e finita anche per $y = \infty$, l'ascissa di convergenza della $F(x)$ è data dal numero (negativo o nullo)

$$\lambda = \max_{y=\infty} \lim \frac{\lg \left| \int_y^\infty \psi(y) dy \right|}{\lg y};$$

se, invece, la $\Phi(y)$, per $y = \infty$, non ha limite determinato, o tende all'infinito, l'ascissa di convergenza è data dal numero

$$\mu = \max_{y=\infty} \lim \frac{\lg \left| \int_{y_0}^y \psi(y) dy \right|}{\lg y}.$$

Questo enunciato ha qualche vantaggio (puramente formale peraltro) sopra quelli

¹³⁾ Cfr. E. CESÀRO, loc. cit. ¹⁾, a).

¹⁴⁾ Sulle *funzioni determinanti*, si legga la Memoria: S. PINCHERLE, *Sur les fonctions déterminantes* [Annales Scientifiques de l'École Normale supérieure (Paris), serie III, tomo XXII (1905), pp. 9-68].

dati precedentemente dal LANDAU ¹⁵⁾ per ascisse positive e dal PINCHERLE ¹⁶⁾ per ascisse negative, poichè qui non si presuppone la conoscenza del segno della ascissa di convergenza.

Dimostrazione. — I. Supponiamo che l'integrale $\int_{y_0}^y \psi(y) dy$ sia divergente per $y = \infty$: l'ascissa di convergenza sarà positiva o nulla.

Dico che, se $F(x)$ converge in un punto di ascissa $\xi \geq 0$, ed ε è un numero positivo qualunque, si ha:

$$\max_{y=\infty} \lim \frac{\lg \left| \int_{y_0}^y \psi(y) dy \right|}{\lg y} < \xi + \varepsilon.$$

Ed infatti, pel Teorema I, dato al n° 46 (Capitolo IV) si ha:

$$\begin{aligned} (\xi + \varepsilon) \lim_{y=\infty} \frac{\int_{y_0}^y \psi(y) dy}{y^{\xi+\varepsilon}} &= \lim_{y=\infty} \frac{\int_{y_0}^y \psi(y) dy}{\int_{y_0}^y y^{-1+\xi+\varepsilon} dy} = \lim_{y=\infty} \frac{1}{y - y_0} \int_{y_0}^y \psi(y) y^{1-\xi-\varepsilon} dy \\ &= \lim_{y=\infty} \left[y^{-\varepsilon} \int_{y_0}^y \psi(y) y^{-\xi} dy - \frac{1-\varepsilon}{y} \int_{y_0}^y \left\{ \int_{y_0}^y \psi(y) y^{-\xi} dy \right\} y^{-\varepsilon} dy \right] \frac{y}{y - y_0} = 0. \end{aligned}$$

Inversamente. Scrivo $\int_{y_0}^y \psi(y) y^{-x} dy$ al modo seguente:

$$y^{-x} \int_{y_0}^y \psi(y) dy + x \int_{y_0}^y \left\{ \int_{y_0}^y \psi(y) dy \right\} y^{-1-x} dy = y^{-x + \frac{\lg \int_{y_0}^y \psi(y) dy}{\lg y}} + x \int_{y_0}^y y^{-1-x + \frac{\lg \int_{y_0}^y \psi(y) dy}{\lg y}} dy;$$

e subito scorgo che, per $y = \infty$, converge per tutti i valori di x , i quali rendono

$$\max_{y=\infty} \lim \left| \frac{\lg \int_{y_0}^y \psi(y) dy}{\lg y} \right| < R(x);$$

$R(x)$ = parte reale della x .

II. Supponiamo che l'integrale $\int_{y_0}^y \psi(y) dy$ sia convergente: l'ascissa di convergenza sarà negativa o nulla.

a) Se $F(x)$ converge in un punto di ascissa negativa $-\xi$, dico che, per ogni ε positivo minore di ξ , si ha:

$$\max_{y=\infty} \lim \frac{\lg \left| \int_y^\infty \psi(y) dy \right|}{\lg y} < -\xi + \varepsilon.$$

¹⁵⁾ Cfr., anche per la bibliografia, la notevole Memoria di E. LANDAU, loc. cit. ⁶⁾, alla pag. 215.

¹⁶⁾ Cfr. S. PINCHERLE, *Alcune osservazioni sulle funzioni determinanti* [Rendiconti delle sessioni della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, nuova serie, vol. XIII (1908-1909), pp. 71-85].

E difatti, pel Teorema I dato al n° 32 (Capitolo III) ho:

$$(\xi - \varepsilon) \lim_{y=\infty} \left| \frac{\int_y^\infty \psi(y) dy}{y^{-\xi+\varepsilon}} \right| = \lim_{y=\infty} \left| \frac{\int_y^\infty \psi(y) dy}{\int_y^\infty y^{-1-\xi+\varepsilon} dy} \right| = \lim_{y=\infty} \frac{1}{y - y_0} \int_{y_0}^y \psi(y) y^{1-\xi-\varepsilon} dy = 0.$$

b) Se l'ascissa di convergenza è zero, dimostrerò che, per ogni ε positivo, si ha:

$$\max_{y=\infty} \lim \frac{\lg \left| \int_y^\infty \psi(y) dy \right|}{\lg y} < \varepsilon.$$

Ed infatti, nella nostra ipotesi, la $F(x)$ converge per ogni valore positivo o nullo di x .

Posto

$$\int_{y_0}^\infty \psi(y) dy = A \quad \text{ho} \quad \int_y^\infty \psi(y) dy = A - \int_{y_0}^y \psi(y) dy,$$

$$\varepsilon \lim_{y=\infty} \frac{\int_y^\infty \psi(y) dy}{y^\varepsilon} = - \lim_{y=\infty} \frac{\int_{y_0}^y \psi(y) dy}{\int_{y_0}^y y^{-1+\varepsilon} dy} = - \lim_{y=\infty} \frac{1}{y - y_0} \int_{y_0}^y \psi(y) y^{1-\varepsilon} dy = 0.$$

Inversamente. Se scrivo l'integrale definito singolare

$$\int_{y_1}^y \psi(y) y^{-x} dy = y^{-x} \int_{y_1}^y \psi(y) dy + x \int_{y_1}^y \left(\int_{y_1}^y \psi(y) dy \right) y^{-1-x} dy,$$

per la convergenza dell'integrale $\int_{y_1}^\infty \psi(y) dy$, posso porre:

$$\int_{y_1}^y \psi(y) dy = \int_{y_1}^\infty \psi(y) dy - \int_y^\infty \psi(y) dy,$$

e ne viene:

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^y \psi(y) y^{-x} dy &= y^{-x} \int_{y_1}^\infty \psi(y) dy + x \int_{y_1}^y \left(\int_{y_1}^\infty \psi(y) dy \right) y^{-1-x} dy \\ &\quad - y^{-x} \int_y^\infty \psi(y) dy - x \int_{y_1}^y \left(\int_y^\infty \psi(y) dy \right) y^{-1-x} dy, \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^y \psi(y) y^{-x} dy &= y^{-x+\frac{\lg \int_{y_1}^\infty \psi(y) dy}{\lg y}} + x \int_{y_1}^y y^{-1-x+\frac{\lg \int_{y_1}^\infty \psi(y) dy}{\lg y}} dy \\ &\quad - y^{-x+\frac{\lg \int_y^\infty \psi(y) dy}{\lg y}} - x \int_{y_1}^y y^{-1-x+\frac{\lg \int_y^\infty \psi(y) dy}{\lg y}} dy. \end{aligned}$$

Da questo risulta appunto che, se

$$\max_{y=\infty} \lim \left| \frac{\lg \int_y^\infty \psi(y) dy}{\lg y} \right| < R(x),$$

$$R(x) = \text{parte reale di } x,$$

c'è convergenza.

Bologna, 5 novembre 1912.

ETTORE BORTOLOTTI.

INDICE DEI CAPITOLI.

	PAGINE
Introduzione	345
CAP. I. — Sul limite del quoziente di quantità complesse in punti di infinito o di infinitesimo	347
CAP. II. — Criteri di convergenza per integrali definiti impropri	354
CAP. III. — Rapidità relativa di tendenza al limite per integrali convergenti	359
CAP. IV. — Crescenza relativa di integrali divergenti	370
CAP. V. — Serie di numeri complessi. Convergenza. Rapidità relativa di convergenza o di divergenza.	376
CAP. VI. — Applicazione ad un teorema su le funzioni determinanti	380