SUL MOTO BRACHISTOCRONO;

Nota di G. Pennacchietti, in Catania.

Adunanza del 14 dicembre 1890.

Se le componenti, secondo tre assi ortogonali, della forza che sollecita un punto materiale, sono le derivate parziali di una funzione delle sole coordinate, la riduzione dell'equazioni del moto alla forma canonica presuppone come si sa, quale condizione data del moto stesso, che questo sia libero, o avvenga sopra una superficie o curva data, fissa o variabile col tempo di forma o anche solo di posizione. Facendo la stessa ipotesi dell'esistenza di una funzione potenziale, ma supponendo, quale condizione data, che il moto sia brachistocrono, pervengo in questo lavoro a una forma di equazioni, le quali hanno molta analogia coi sistemi di Hamilton.

§ I

Siano x, y, z le coordinate cartesiane ortogonali d'un punto mobile, di cui potremo supporre la massa eguale all'unità, e il quale sia obbligato a percorrere, senza attrito, una curva fissa, per ora, in generale indeterminata, e sia soggetto all'azione di una forza, la quale ammetta una funzione potenziale, dipendente dalle sole coordinate x, y, z . Il tempo t che impiega il mobile nel passaggio tra due posizioni, a cui corrispondono le ordinate x_0, z_0 , le velocità v_0, v e i valori U_0, U

della funzione potenziale, si deduce dall'integrale delle forze vive

$$v^2 = 2(U + h), \quad (1)$$

ed è dato dall'equazione:

$$t = \int_{\tau_0}^{\tau} V d\tau, \quad (2)$$

dove:

$$V = \sqrt{\frac{1 + x'^2 + y'^2}{2(U + h)}},$$

avendo posto per brevità:

$$2h = v_0^2 - 2U_0,$$

e avendo indicato con accenti le derivate rispetto alla variabile τ .

Affinchè l'integrale, che costituisce il secondo membro della (2), sia un minimo, è necessario, secondo il calcolo delle variazioni, che le funzioni x, y della variabile τ , soddisfino identicamente alle due equazioni differenziali ordinarie di second'ordine:

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial V}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial V}{\partial y'} = 0, \quad (3)$$

che sono l'equazioni differenziali della brachistocrona, corrispondente alla forza data. La determinazione delle costanti si fa secondo l'ordinaria teoria del calcolo delle variazioni, e di essa non ci occuperemo.

Se si prende t come variabile indipendente, le equazioni (3) diventano le due prime delle tre seguenti, la terza delle quali si deduce dalle altre due con una permutazione delle coordinate

$$\left. \begin{aligned} v^2 \frac{d}{dt} \frac{\frac{dx}{dt}}{v^2} + \frac{\partial U}{\partial x} &= 0, \\ v^2 \frac{d}{dt} \frac{\frac{dy}{dt}}{v^2} + \frac{\partial U}{\partial y} &= 0, \\ v^2 \frac{d}{dt} \frac{\frac{d\tau}{dt}}{v^2} + \frac{\partial U}{\partial \tau} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Moltiplicando le equazioni (4) ordinatamente per $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, indi sommando e integrando, si ritorna evidentemente alla equazione (1). Il sistema delle equazioni (1), (3), ovvero (2), (3) è equivalente al sistema delle equazioni (4)

§ II.

Si aggiunga ora la condizione che il mobile debba restare costantemente sopra una superficie fissa data, la cui equazione sia .

$$f(x, y, z) = 0. \quad (1)$$

Indicando con λ una quantità indeterminata, si avranno, invece delle (1, 3), le equazioni differenziali .

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dz} \frac{\partial V}{\partial x'} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dz} \frac{\partial V}{\partial y'} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Dalle equazioni precedenti si dedurrà, oltre la (1), una seconda relazione fra le coordinate

$$f_1(x, y, z) = 0,$$

la quale colla (1) determinerà la brachistocrona relativa alla superficie data.

Assumendo t per variabile indipendente, le (2) diventano le prime due delle seguenti tre equazioni, delle quali la terza si deduce dalle prime due con una permutazione di lettere .

$$\left. \begin{aligned} v^2 \frac{d}{dt} \frac{\frac{dx}{dt}}{v^2} + \frac{\partial U}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} &= 0, \\ v^2 \frac{d}{dt} \frac{\frac{dy}{dt}}{v^2} + \frac{\partial U}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} &= 0, \\ v^2 \frac{d}{dt} \frac{\frac{dz}{dt}}{v^2} + \frac{\partial U}{\partial z} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Da queste è facile dedurre la (I, 1). Il sistema, composto della equazione (I, 1) ovvero (I, 2) e delle equazioni (1), (2) è equivalente al sistema delle equazioni (1), (3).

§ III.

I sistemi (I, 4), (II, 3) equivalgono ai seguenti :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{\partial U}{\partial x} + 2 \frac{dv}{dt} \frac{1}{v} \frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\frac{\partial U}{\partial y} + 2 \frac{dv}{dt} \frac{1}{v} \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= -\frac{\partial U}{\partial z} + 2 \frac{dv}{dt} \frac{1}{v} \frac{dz}{dt}; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{\partial U}{\partial x} + 2 \frac{dv}{dt} \frac{1}{v} \frac{dx}{dt} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\frac{\partial U}{\partial y} + 2 \frac{dv}{dt} \frac{1}{v} \frac{dy}{dt} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= -\frac{\partial U}{\partial z} + 2 \frac{dv}{dt} \frac{1}{v} \frac{dz}{dt} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Trasformeremo ora il sistema (1) dal sistema di coordinate x, y, z a un altro sistema qualunque di coordinate q_1, q_2, q_3 . Contemporaneamente trasformeremo le equazioni (2), alle quali è da aggiungersi la (II, 1), esprimendo x, y, z per mezzo di due variabili indipendenti q_1, q_2 , tali, che i valori di x, y, z , espressi per mezzo di q_1, q_2 , sostituiti in (II, 1) rendano quest'equazione identica, qualunque siano q_1, q_2 .

A tale uopo moltiplichiamo le equazioni (1) ovvero (2) per

$\frac{\partial x}{\partial q_1}, \frac{\partial y}{\partial q_1}, \frac{\partial z}{\partial q_1}$, e quindi sommiamo le tre equazioni, che ne risultano

Si ponga

$$T = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

$$x' = \frac{dx}{dt}, y' = \frac{dy}{dt}, z' = \frac{dz}{dt}, q' = \frac{dq}{dt}$$

Si osservi che si ha :

$$\frac{d^2x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial q_s} + \frac{d^2y}{dt^2} \frac{\partial y}{\partial q_s} + \frac{d^2z}{dt^2} \frac{\partial z}{\partial q_s} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s},$$

$$\frac{\frac{dT}{dt}}{T} = 2 \frac{dv}{v},$$

$$\frac{dx}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_s} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial y}{\partial q_s} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial z}{\partial q_s} = \frac{\partial T}{\partial q'_s}.$$

Si otterrà in ambedue i casi :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = - \frac{\partial U}{\partial q_s} + \frac{\frac{dT}{dt}}{T} \frac{\partial T}{\partial q'_s} \quad (3)$$

L'equazioni del moto brachistocrono hanno dunque la stessa forma (3) tanto nell'ipotesi del § I, quanto nell'ipotesi del § II, con questa differenza che nel primo caso le equazioni saranno (3), cioè l'indice s potrà avere tutte e tre i valore 1, 2, 3, mentre nel secondo caso le equazioni saranno due, potendo l'indice s assumere solamente i due valori 1, 2.

In particolare, nell'ipotesi del § I, le equazioni del moto possono prendere la forma :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x'} - \frac{\partial T}{\partial x} &= - \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\frac{dT}{dt}}{T} \frac{\partial T}{\partial x'}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial y'} - \frac{\partial T}{\partial y} &= - \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\frac{dT}{dt}}{T} \frac{\partial T}{\partial y'}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial z'} - \frac{\partial T}{\partial z} &= - \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\frac{dT}{dt}}{T} \frac{\partial T}{\partial z'}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

§ IV.

Le equazioni del moto brachistocrono, relativo a una superficie fissa data, conservano la forma (III, 3), anche quando, senza che le componenti X, Y, Z della forza siano necessariamente le derivate di una stessa funzione U di tre variabili indipendenti x, y, z , il trinomio $Xdx + Ydy + Zdz$ sia nondimeno il differenziale esatto di una funzione delle due variabili indipendenti q_1, q_2 .

Infatti, chiamiamo U quest'ultima funzione, e supponiamo che sia identicamente :

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\partial U}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} dq_2.$$

Sia :

$$ds^2 = Edq_1^2 + 2Fdq_1dq_2 + Gdq_2^2 \quad (1)$$

l'espressione del quadrato dell'elemento lineare della superficie fissa data, essendo E, F, G funzioni conosciute delle due variabili indipendenti q_1, q_2 . Il tempo che impiega il mobile per passare tra due posizioni di una curva fissa, che si obblighi a percorrere sulla superficie data, e alle quali corrispondono i valori q_1^0, q_1^1 di q_1 , è :

$$t = \int_{q_1^0}^{q_1^1} V dq_1, \quad (2)$$

dove :

$$V = \sqrt{\frac{E + 2Fq_2' + Gq_2'^2}{2(U + h)}},$$

avendo posto momentaneamente per brevità :

$$q_2' = \frac{dq_2}{dq_1}.$$

L'equazione differenziale del second'ordine della brachistocrona, in coordinate curvilinee, sarà :

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} - \frac{d}{dq_1} \frac{\partial V}{\partial q_2'} = 0 \quad (3)$$

Considerando q_1, q_2 funzioni di t e osservando che si ha :

$$T = \frac{1}{2} \left\{ E \left(\frac{dq_1}{dt} \right)^2 + 2F \frac{dq_1}{dt} \frac{dq_2}{dt} + G \left(\frac{dq_2}{dt} \right)^2 \right\},$$

l'equazione (3), dopo facili trasformazioni, diverrà quella delle due equazioni (III, 3), che corrisponde ad $s = 2$. Con una permutazione di lettere si ha anche l'altra, corrispondente ad $s = 1$, e che, unita alla prima, equivale al sistema (2), (3)

§ V.

Alle equazioni (III, 3) si può dare un'altra notevole forma. Anzitutto si osservi che le (III, 3) possono anche scriversi :

$$T \frac{d}{dt} \frac{\frac{\partial T}{\partial q'_i}}{T} = \frac{\partial (T - U)}{\partial q_i}. \quad (1)$$

Quindi si ponga :

$$\frac{\frac{\partial T}{\partial q'_i}}{T} = p_i. \quad (2)$$

Essendo T funzione omogenea di secondo grado rispetto alle q'_i , si ha:

$$2T = \sum \frac{\partial T}{\partial q'_i} q'_i,$$

oppure, sostituendo a $\frac{\partial T}{\partial q'_i}$ il suo valore tratto dalla (1) :

$$2T = \sum p_i T q'_i,$$

ovvero

$$2 = \sum p_i q'_i, \quad (3)$$

od anche

$$T = \sum p_i T q'_i - T.$$

Quest'equazione, differenziata, offre.

$$dT = \sum p_i T dq'_i + \sum p_i q'_i dT + \sum T q'_i dp_i - \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i - \sum \frac{\partial T}{\partial q'_i} dq'_i.$$

Osservando che la prima e l'ultima somma del secondo membro, in virtù di (2), si distruggono, e che la seconda somma, a causa di (3), è uguale a $2dT$, si avrà

$$dT = 2dT + \sum Tq'_i dp_i - \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i,$$

da cui :

$$dT = - \sum Tq'_i dp_i + \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i.$$

Ma considerando T come funzione delle p_i , q_i , e distinguendo momentaneamente con parentesi le derivate parziali di T , prese secondo questo concetto, si ha :

$$dT = \sum \left(\frac{\partial T}{\partial p_i} \right) dp_i + \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i.$$

Confrontando le due espressioni di dT , se ne ricava :

$$Tq'_i = - \left(\frac{\partial T}{\partial p_i} \right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right). \quad (5)$$

Risulta così dalle (1), (4), (5) il seguente sistema di equazioni del moto brachistocrono

$$T \frac{dq_i}{dt} = - \frac{\partial T}{\partial p_i}$$

$$T \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i},$$

nelle quali intendiamo che T non sia espresso per mezzo delle q , q' , ma bensì per mezzo delle q , p , e che le derivate parziali di T siano prese dopo questa trasformazione, considerando queste ultime quantità come indipendenti.

Ponendo :

$$T - U = H,$$

e osservando che si ha :

$$\frac{\partial U}{\partial p_i} = 0,$$

il sistema precedente diviene :

$$T \frac{dq_s}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad T \frac{dp_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_s}. \quad (6)$$

È superfluo aggiungere che nel sistema (6) l'indice s può assumere i tre valori 1, 2, 3, ovvero soltanto i due valori 1, 2, secondochè si tratti dell'ipotesi del § I o del § IV.

Il sistema (6) rientra nel sistema più generale :

$$k \frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_s}, \quad k \frac{dp_s}{dt} = - \frac{\partial K}{\partial q_s}, \quad (7)$$

nel quale l'indice s può prendere i valori 1, 2, . . . n , dove K è una funzione data di $q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n$, e dove k è una funzione di queste stesse quantità, e inoltre può contenere esplicitamente t . Il sistema (7) ammette in comune col sistema di Hamilton :

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \frac{dp_s}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_s}$$

i $2n - 1$ integrali non contenenti esplicitamente t . Trovati questi $2n - 1$ integrali, quell'integrale del sistema (7), che contiene esplicitamente t , si ottiene integrando un'equazione differenziale ordinaria di prim'ordine, e quando k non contenga esplicitamente t , lo stesso integrale si ottiene mediante una quadratura. Il sistema (6) corrisponde al caso di $n = 3$ ovvero $n = 2$, $k = -1$, $K = T - U$.

§ VI.

Facciamo dapprima l'ipotesi del § I, e riferiamo il mobile a un sistema di tre assi ortogonali fissi, sicchè le equazioni del moto brachistocrono siano .

$$\left. \begin{aligned} T \frac{dx}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial p_1}, & T \frac{dp_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x}, \\ T \frac{dy}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial p_2}, & T \frac{dp_2}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y}, \\ T \frac{dz}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial p_3}, & T \frac{dp_3}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial z}, \end{aligned} \right\} (1)$$

essendo .

$$T = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

dove gli accenti indicano derivazioni rispetto al tempo. Porremo :

$$\frac{dT}{dx'} = p_1, \quad \frac{dT}{dy'} = p_2, \quad \frac{dT}{dz'} = p_3, \quad (2)$$

da cui si deduce :

$$x' = \frac{2p_1}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2},$$

$$y' = \frac{2p_2}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2},$$

$$z' = \frac{2p_3}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2},$$

$$T = \frac{2}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}.$$

L'integrale delle forze vive è perciò :

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \frac{2}{U + h}.$$

Si formi quindi l'equazione a derivate parziali di prim'ordine .

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = \frac{2}{U + h}$$

Sia S una soluzione completa di quest'equazione, contenente cioè, oltre la costante additiva, due altre costanti arbitrarie a_1, a_2 . Se b_1, b_2 sono due nuove costanti arbitrarie, gl'integrali, non contenenti esplicitamente t , del sistema (1) saranno :

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = b_2, \quad (3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = p_1, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = p_2, \quad \frac{\partial S}{\partial z} = p_3, \quad (4)$$

Le equazioni (3) sono le due equazioni della brachistocrona. Le equazioni (4), ossia, a causa di (2)

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x'}, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y'}, \quad \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z'}$$

sono tre integrali primi del sistema delle tre equazioni differenziali di second'ordine (III, 1) del moto brachistocrono.

Conoscendosi così del sistema (1) i cinque integrali, che non contengono esplicitamente t , la ricerca dell'integrale rimanente si riduce ad una quadratura, come permette il sistema stesso, o come risulta dalla (I, 2) medesima.

§ VII.

Facciamo ora l'ipotesi del § IV. Si prenda un sistema qualunque di coordinate curvilinee q_1, q_2 sulla superficie data, e il quadrato dell'elemento lineare della superficie sia dato dalla (IV, 1). Le equazioni del moto brachistocrono, relativo alla superficie data, saranno :

$$\left. \begin{aligned} T \frac{dq_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial p_1}, & T \frac{dp_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ T \frac{dq_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial p_2}, & T \frac{dp_2}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q_2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Si avrà :

$$T = \frac{1}{2} (E q_1'^2 + 2 F q_1' q_2' + G q_2'^2),$$

dove gli accenti denotano derivazioni rispetto al tempo. Poniamo :

$$\frac{\partial T}{\partial q_1'} = p_1, \quad \frac{\partial T}{\partial q_2'} = p_2, \quad (2)$$

onde .

$$\begin{aligned} q_1' &= \frac{2(Gp_1 - Fp_2)}{Gp_1^2 - 2Fp_1p_2 + Ep_2^2}, \\ q_2' &= \frac{2(-Fp_1 + Ep_2)}{Gp_1^2 - 2Fp_1p_2 + Ep_2^2}, \\ T &= \frac{2(EG - F^2)}{Gp_1^2 - 2Fp_1p_2 + Ep_2^2} \end{aligned}$$

L'integrale delle forze vive è quindi

$$G\dot{p}_1^2 - 2Fp_1p_2 + Ep_2^2 = \frac{2(EG - F^2)}{U + h}.$$

Si formi ora l'equazione differenziale di prim'ordine

$$G\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2 - 2F\frac{\partial S}{\partial q_1}\frac{\partial S}{\partial q_2} + E\left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2 = \frac{2(EG - F^2)}{U + h}.$$

Sia S una soluzione completa, contenente cioè, oltre la costante additiva, un'altra costante arbitraria a_1 . Se b_1 è un'altra costante arbitraria, gl'integrali, non contenenti esplicitamente t , del sistema (1) saranno:

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = b_1, \quad (3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = p_1, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = p_2. \quad (4)$$

L'equazione (3) è l'equazione della brachistocrona in coordinate curvilinee. Le equazioni (4), cioè, a causa di (2).

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial q'_1}, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial q'_2}$$

sono due integrali primi del sistema delle due equazioni (V, 1) differenziali ordinarie di second'ordine del moto brachistocrono.

$$T \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_1} = \frac{\partial(T - U)}{\partial q_1},$$

$$T \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_2} = \frac{\partial(T - U)}{\partial q_2}$$

Il sistema (1) permetterà di trovare con una quadratura il rimanente integrale; oppure si potrà eseguire la quadratura indicata in (IV, 2)

§ VIII.

Applichiamo il metodo precedente al caso notissimo della brachistocrona relativa alla gravità nel vuoto. Prendendo l'asse delle x diretto nel senso stesso della gravità, sarà :

$$U = g x,$$

e le equazioni (III, 4) del moto brachistocrono diverranno :

$$x'' = -g + \frac{2(x'x'' + y'y'' + z'z'')}{x'^2 + y'^2 + z'^2} \cdot x',$$

$$y'' = \frac{2(x'x'' + y'y'' + z'z'')}{x'^2 + y'^2 + z'^2} \cdot y',$$

$$z'' = \frac{2(x'x'' + y'y'' + z'z'')}{x'^2 + y'^2 + z'^2} \cdot z',$$

dove gli accenti indicano derivazioni rispetto al tempo. Dalle ultime due equazioni, dividendo e integrando quindi l'equazione risultante, si deduce immediatamente un'equazione lineare rispetto alle coordinate y , z , la quale significa che la brachistocrona è in un piano verticale. Prendendo questo per piano coordinato xy , sarà $z = 0$ per tutta la durata del moto. Le equazioni del moto si ridurranno perciò alle due equazioni

$$x'' = -g + \frac{2(x'x'' + y'y'')}{x'^2 + y'^2} \cdot x',$$

$$y'' = \frac{2(x'x'' + y'y'')}{x'^2 + y'^2} \cdot y'.$$

Nel caso particolarissimo che il valore iniziale di y' sia nullo, queste stesse equazioni mostrano che la brachistocrona è una linea retta verticale, e il moto uniformemente vario. Quindi in ciò che segue supporremo che il valore iniziale di y' non sia nullo.

Ora si ha :

$$T = \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2).$$

Se si pone :

$$\frac{\partial T}{\partial x'} = p_1, \quad \frac{\partial T}{\partial y'} = p_2,$$

ne risulta :

$$x' = \frac{2p_1}{p_1^2 + p_2^2}, \quad y' = \frac{2p_2}{p_1^2 + p_2^2}$$

$$T = \frac{2}{p_1^2 + p_2^2}.$$

L'integrale delle forze vive è quindi :

$$\frac{2}{p_1^2 + p_2^2} - gx = b,$$

ossia :

$$(gx + b)(p_1^2 + p_2^2) = 2. \quad (1)$$

Le equazioni del moto brachistocrono, nella forma (V, 6), saranno :

$$\left. \begin{aligned} T \frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial p_1}, & T \frac{dp_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x}, \\ T \frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial p_2}, & T \frac{dp_2}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

dove :

$$H = T - U$$

ossia :

$$H = \frac{2}{p_1^2 + p_2^2} - gx.$$

Sostituiamo nell'equazione (1) a p_1 , p_2 le derivate parziali $\frac{\partial S}{\partial x}$, $\frac{\partial S}{\partial y}$, e formiamo così l'equazione differenziale parziale.

$$(gx + b) \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 \right\} = 2. \quad (3)$$

Cerchiamo di quest'equazione una soluzione completa, **contenente**, oltre la costante additiva, anche un'altra costante arbitraria c . Si soddisfa alla (3) ponendo :

$$\frac{\partial S}{\partial y} = c, \quad \frac{\partial S}{\partial x} = u,$$

essendo

$$u = \frac{1}{c g x_1} \sqrt{1 - \left(\frac{R - x_1}{R}\right)^2},$$

$$R = \frac{1}{c^2 g}, \quad x_1 = x + \frac{h}{g}.$$

Onde :

$$S = cy + \frac{2u}{g(u^2 + c^2)} - \frac{2}{cg} \arctan \frac{u}{c}. \quad (4)$$

Perciò si hanno i seguenti tre integrali indipendenti dal tempo :

$$\frac{\partial S}{\partial c} = c', \quad (5)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = p_1, \quad (6)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = p_2, \quad (7)$$

essendo c' una nuova costante arbitraria

Eseguendo le derivazioni, gl'integrali (6), (7) divengono

$$p_1 = u, \quad p_2 = c; \quad (8)$$

onde si trae dalli prima delle equazioni (2) :

$$\frac{dx}{dt} = (gx + h)u,$$

e denotando con c'' una nuova costante arbitraria, si ha .

$$x_1 = R \left[1 + \operatorname{sen} \sqrt{\frac{g}{R}} (t + c'') \right]$$

Avendosi :

$$\cos \sqrt{\frac{g}{R}}(t + c'') = c g x_1 u = \sqrt{1 - \left(\frac{R - x_1}{R}\right)^2},$$

il radicale $\sqrt{1 - \left(\frac{R - x_1}{R}\right)^2}$ dev'essere preso positivamente o negativamente, secondochè :

$$\cos \sqrt{\frac{g}{R}}(t + c'') \geq 0.$$

Se si pone inoltre :

$$y + \pi R - c' = y_1,$$

la (5), sviluppata, diventa :

$$y_1 - R \operatorname{arc. cos.} \frac{R - x_1}{R} + R \sqrt{1 - \left(\frac{R - x_1}{R}\right)^2} = 0,$$

che è la nota equazione della cicloide.

Catania, 8 dicembre 1890.

G. PENNACCHIETTI.