Die viergliedrigen Gruppen in beliebig vielen Veränderlichen mit einer dreigliedrigen Involutions-Untergruppe.

Von Heinrich Graziadei in Innsbruck.

Einleitung.

Zur Bestimmung der Typen viergliedriger Gruppen in beliebig vielen Veränderlichen bietet sich ein verhältnismäßig einfacher Weg dar. Die Kenntnis der von Zindler¹⁾ aufgestellten Typen dreigliedriger Gruppen einer beliebigen Zahl von Veränderlichen ermöglicht es nämlich, unter Zugrundelegung der von Lie bestimmten Zusammensetzungen viergliedriger Gruppen das Verfahren anzuwenden, nach welchem Lie die dreigliedrigen Gruppen in zwei, Zindler jene in beliebig vielen Veränderlichen aufgesucht hat. Fügt man nämlich zu jedem Typus der genannten dreigliedrigen Gruppen je eine vierte infinitesimale Transformation hinzu, so lassen sich nach möglichster Vereinfachung ihrer allgemeinen Form deren Koeffizienten aus den für die Gruppe bestehenden Zusammensetzungsbedingungen bestimmen. Die vorliegende Arbeit befaßt sich nur mit der Aufsuchung der infinitesimalen Transformationen derjenigen viergliedrigen Gruppentypen, die eine dreigliedrige Involutionsuntergruppe G haben²⁾. Die Anregung hiezu verdanke ich meinem verehrten Lehrer Prof. Zindler, dem ich auch für seine förderlichen Ratschläge zu Dank verpflichtet bin.

Bezüglich der Anwendung des angedeuteten Verfahrens ist zu bemerken, daß es wegen der Vertauschbarkeit der Transformationen von G völlig willkürlich bleibt, in welcher Reihenfolge man die zur Definition von G gegebenen infinitesimalen Transformationen mit U_1, U_2, U_3 bezeichnet. Eine solche Permutation, etwa $U'_1 = U_2, U'_2 = U_3, U'_3 = U_1$, kann aber die Zusammensetzungsbedingungen möglicherweise ändern, indem auch $(U'_1 U_4) = (U_2 U_4)$ u. s. w. wird. Denkt man sich nun zunächst willkür-

¹⁾ „Monatshefte für Mathematik und Physik“ XI. Jg.

²⁾ Die übrigen Typen hat Pölt. (Jahresbericht der k. k. Staats-Oberrealschule in Innsbruck) bestimmt. 1906/07.

lich neue Veränderliche eingeführt, so wird $U'_1 = U''_1$, $U'_2 = U''_2$, $U'_3 = U''_3$. Gelingt es, diese Neueinführung so zu wählen, daß $U'_1 = U_1$, $U'_2 = U_2$, $U'_3 = U_3$ wird, so ist auch $(U'_1 U_4) = (U_1 U_4)$ u. s. w., d. h. die Zusammensetzungsbedingungen für die viergliedrige Gruppe sind diesfalls nur scheinbar andere. Die Permutation braucht dann nicht berücksichtigt zu werden. Gelingt es indessen nicht, auf diesem Wege die ursprüngliche Bezeichnungsweise wiederherzustellen, so ist es nicht ausgeschlossen, daß man durch eine solche Permutation zufolge der geänderten Bedingungen für die Koeffizienten von U_4 einen neuen Typus erzielen kann. (Vergl. 3. Untergruppe, Typus 22, 30, 37, 47, 48, 49, 53, 54, 55.)

Feststellung der notwendigen Permutationen in den Indizes der Transformationssymbole.

Die Typen der dreigliedrigen Involutionsuntergruppen lauten, wenn $p = \frac{df}{dx}$, $q = \frac{df}{dy}$, $r = \frac{df}{dz}$ und $\varphi(y)$, $\psi(z)$ willkürliche Funktionen ihrer Argumente bedeuten:¹⁾

	U_1	U_2	U_3	
1.	p	q	r	(20)
2.	p	q	$z p + \psi(z) q$	(21)
3.	p	q	$z p$	(21 a)
4.	p	$y p$	$z p$	(22)
5.	p	$y p$	$\varphi(y) p$	(23)
6.	p	q	$z p + w_1 q$	(24)

Die Permutationen von U_1 , U_2 , U_3 bezeichnen wir in allen diesen Fällen so:

a)	U_1	U_2	U_3
b)	U_1	U_3	U_2
c)	U_2	U_1	U_3
d)	U_2	U_3	U_1
e)	U_3	U_1	U_2
f)	U_3	U_2	U_1

1. Nimmt man diese Permutationen in der erstgenannten Untergruppe vor, so sieht man unmittelbar, daß eine passende Vertauschung der Veränderlichen x , y , z wieder auf die Bezeichnungsweise a) führt.

¹⁾ Die in Klammern beigefügten Zahlen entsprechen der fortlaufenden Bezeichnung in Zindlers genannter Abhandlung.

2. Um $a)$ zu erhalten, setze man

$$\begin{aligned}
 \text{in } b) \quad \xi &= x - \frac{z}{\psi(z)} \cdot y, \quad \eta = \frac{y}{\psi(z)}, & \delta &= -\frac{z}{\psi(z)}, \quad \psi_1(z) = \frac{1}{\psi(z)}; \\
 \text{" } c) \quad \xi &= y, & \eta &= x, & \delta &= \psi(z), \quad \psi_1(z) = z; \\
 \text{" } d) \quad \xi &= y - \frac{\psi(z)}{z} \cdot x, \quad \eta = \frac{x}{z}, & \delta &= -\frac{\psi(z)}{z}, \quad \psi_1(z) = \frac{1}{z}; \\
 \text{" } e) \quad \xi &= \frac{y}{\psi(z)}, & \eta &= x - \frac{y}{\psi(z)} \cdot z, \quad \delta = \frac{1}{\psi(z)}, \quad \psi_1(z) = -\frac{z}{\psi(z)}; \\
 \text{" } f) \quad \xi &= \frac{x}{z}, & \eta &= y - \frac{x}{z} \cdot \psi(z), \quad \delta = \frac{1}{z}, \quad \psi_1(z) = -\frac{\psi(z)}{z}.
 \end{aligned}$$

3. Durch die Substitution $\xi = \frac{x}{z}$, $\eta = y$, $\delta = \frac{1}{z}$ wird $d)$ in $c)$, $e)$ in $b)$ und $f)$ in $a)$ übergeführt, während $c)$ weder in $b)$ noch in $a)$ und $b)$ nicht in $a)$ übergeführt werden kann, indem ein solcher Versuch zu Widersprüchen führt. Demzufolge muß man für diese Untergruppe folgende drei Bezeichnungenweisen beachten:

$$\begin{array}{lll}
 a) & U_1 = p & U_2 = q & U_3 = zp \\
 b) & U_1 = p & U_2 = zp & U_3 = q \\
 c) & U_1 = q & U_2 = p & U_3 = zp
 \end{array}$$

4. Man setze

$$\begin{aligned}
 \text{in } b) \quad \xi &= x & \eta &= z & \delta &= y; \\
 \text{" } c) \quad \xi &= \frac{x}{y} & \eta &= \frac{1}{y} & \delta &= \frac{z}{y}; \\
 \text{" } d) \quad \xi &= \frac{x}{y} & \eta &= \frac{z}{y} & \delta &= \frac{1}{y}; \\
 \text{" } e) \quad \xi &= \frac{x}{z} & \eta &= \frac{1}{z} & \delta &= \frac{y}{z}; \\
 \text{" } f) \quad \xi &= \frac{x}{z} & \eta &= \frac{y}{z} & \delta &= \frac{1}{z} \quad \text{und er-}
 \end{aligned}$$

reicht in allen Fällen $a)$.

5. Zu diesem nämlichen Zwecke setze man

$$\begin{aligned}
 \text{in } b) \quad \xi &= x & \eta &= \varphi(y) & \delta &= z & \varphi_1(y) &= y; \\
 \text{" } c) \quad \xi &= \frac{x}{y} & \eta &= \frac{1}{y} & \delta &= z & \varphi_1(y) &= \frac{\varphi(y)}{y}; \\
 \text{" } d) \quad \xi &= \frac{x}{y} & \eta &= \frac{\varphi(y)}{y} & \delta &= z & \varphi_1(y) &= \frac{1}{y};
 \end{aligned}$$

$$\text{in e) } \quad \xi = \frac{x}{\varphi(y)} \quad \eta = \frac{1}{\varphi(y)} \quad \delta = z \quad \varphi_1(y) = \frac{y}{\varphi(y)};$$

$$\text{" f) } \quad \xi = \frac{x}{\varphi(y)} \quad \eta = \frac{y}{\varphi(y)} \quad \delta = z \quad \varphi_1(y) = \frac{1}{\varphi(y)}.$$

6. Die Substitutionen, welche auf a) zurückführen, lauten

$$\text{in b) } \xi = x - \frac{zy}{w_1} \quad \eta = \frac{y}{w_1} \quad \delta = -\frac{z}{w_1} \quad w_1 = \frac{1}{w_1};$$

$$\text{" c) } \xi = y \quad \eta = x \quad \delta = w_1 \quad w_1 = z;$$

$$\text{" d) } \xi = y - \frac{w_1 x}{z} \quad \eta = \frac{x}{z} \quad \delta = -\frac{w_1}{z} \quad w_1 = \frac{1}{z};$$

$$\text{" e) } \xi = \frac{y}{w_1} \quad \eta = x - \frac{zy}{w_1} \quad \delta = \frac{1}{w_1} \quad w_1 = -\frac{z}{w_1};$$

$$\text{" f) } \xi = \frac{x}{z} \quad \eta = y - \frac{x \cdot w_1}{z} \quad \delta = \frac{1}{z} \quad w_1 = -\frac{w_1}{z}.$$

Hieraus ergibt sich, daß es lediglich bei der Untergruppe 3 nötig ist, drei Permutationen in Betracht zu ziehen. Mit Rücksicht hierauf können nun auf dem angegebenen Wege sämtliche Typen gewonnen werden.

Die Bestimmung der allgemeinen Form von U_4 .

1. Untergruppe: $U_1 = p$, $U_2 = q$, $U_3 = r$.

Die allgemeinste Form von U_4 lautet:

$$U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r + \xi_4 s + \sum_{i=2}^n \eta_i t_i.$$

Hiebei werden die Veränderlichen mit $x, y, w_1 \dots w_n$ bezeichnet. Die ξ und η stellen Funktionen der genannten Veränderlichen dar, Konstanten und Null nicht ausgenommen. So wie p, q, r, s die partiellen Ableitungen einer beliebigen Funktion der $n+3$ Veränderlichen, genommen nach x, y, z, w_1 darstellen, bedeutet η_i die partielle Ableitung derselben nach w_i .

Die viergliedrige Gruppe kann nun höchstens vierfache Ausbreitung haben. Dann existieren $n-1$ von x, y und z freie Invarianten, welche als neue Veränderliche für $w_2 \dots w_n$ eingeführt werden können, da sie voneinander unabhängig sind.

Hiedurch läßt sich U_4 vereinfachen auf $U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r + \xi_4 s$, in welcher Form es für die Zusammensetzungen heranzuziehen ist. Der Fall der dreifachen Ausbreitung ist hiedurch nicht ausgeschlossen, da $\xi_4 = 0$ sein kann.

2. Untergruppe: $U_1 = p$, $U_2 = q$, $U_3 = zp + \Psi(z)q$.

Die viergliedrige Gruppe kann höchstens dreifache Ausbreitung haben. Dann besitzt sie n voneinander unabhängige Invarianten, die frei von x und y sind. Infolgedessen besteht eine nicht identisch verschwindende Funktionaldeterminante n^{ter} Ordnung, zu deren Bildung entweder die Ableitungen nach z beigezogen werden müssen oder nicht. Im letzteren Falle kann man die Invarianten $J_1, J_2 \dots J_n$ als neue Veränderliche $w_1, w_2 \dots w_n$ einführen und U_4 nimmt dann die Form A) $U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r$ an.

Im ersten Falle sind die $J_1, J_2 \dots J_n$, als Funktionen der $w_1, w_2 \dots w_n$ allein betrachtet, voneinander abhängig, also besteht eine Relation $F(z, J_1, J_2 \dots J_n) = 0$, in der z auch außerhalb der Symbole $J_1, J_2 \dots J_n$ auftreten muß. Dann ist z selbst eine Invariante. Außerdem gibt es dann noch $n - 1$ voneinander unabhängige Invarianten, die man als neue Veränderliche $w_2 = J_{i_1}, w_3 = J_{i_2} \dots w_n = J_{i_{n-1}}$ einführen kann, wodurch man erreicht B) $U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 s$.

3. Untergruppe: $U_1 = p$, $U_2 = q$, $U_3 = zp$.¹⁾

Auf Grund der soeben gemachten Überlegung hat man auch hier U_4 in den beiden genannten Formen A) und B) vorauszusetzen.

4. Untergruppe: $U_1 = p$, $U_2 = yp$, $U_3 = zp$.

Die viergliedrige Gruppe kann höchstens zweifache Ausbreitung haben. Dann besitzt sie $n + 1$ Invarianten, die frei von x und bezüglich $n + 1$ aus den $n + 2$ Veränderlichen $y, z, w_1, w_2 \dots w_n$ voneinander unabhängig sind. Die vollständige Funktionalmatrix der J_k lautet nun:

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{\partial J_1}{\partial y}, & \frac{\partial J_2}{\partial y} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial J_{n+1}}{\partial y} \\ \frac{\partial J_1}{\partial z}, & \frac{\partial J_2}{\partial z} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial J_{n+1}}{\partial z} \\ \frac{\partial J_1}{\partial w_1}, & \frac{\partial J_2}{\partial w_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial J_{n+1}}{\partial w_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial J_1}{\partial w_n}, & \frac{\partial J_2}{\partial w_n} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial J_{n+1}}{\partial w_n} \end{array}$$

Mit Rücksicht darauf, daß y und z explizit in der dreigliedrigen Untergruppe auftreten, sind nun drei Determinanten $(n + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung von Bedeutung für die Neueinführung von Ver-

¹⁾ Bei dieser Überlegung ist es gleichgültig, welche Bezeichnungen man für G wählt.

änderlichen, nämlich, um eine kurze Bezeichnung zu gebrauchen, $\Delta(y, w_1 \dots w_n)$, $\Delta(z, w_1 \dots w_n)$ und $\Delta(yz, w_{\lambda_1} \dots w_{\lambda_{n-1}})$. Hierbei erhält man das Schema der erstgenannten Funktionaldeterminante durch Streichung der zweiten Zeile in der oben angeführten Matrix, der zweiten durch Streichung der ersten Zeile und der dritten durch Weglassung einer der folgenden Zeilen. Es kann nun

a) die verkürzte Funktionalmatrix, gebildet aus den $n-2$ letzten Zeilen, welche also nur die Ableitungen nach den w_i enthält, vom Range n sein. Um dann eine nicht identisch verschwindende Funktionaldeterminante vom Range $n+1$ zu erhalten, hat man die Ableitungen nach y oder nach z heranzuziehen. Es werde nun vorausgesetzt $\Delta(y, w_1 \dots w_n) \neq 0$, $\Delta(z, w_1 \dots w_n) \neq 0$.¹⁾ In diesem Falle kann man zur Neueinführung von Veränderlichen $w_i = J_{\lambda_i}$ setzen, wo λ_i n passende Werte aus der Reihe $1, 2 \dots n+1$ durchläuft.

Diesfalls nimmt U_4 die Form A) $U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r$ an.

b) Die obgenannte Funktionalmatrix ist vom Range $(n-1)$. In diesem Falle ist man gezwungen, zur Bildung einer nicht identisch verschwindenden Funktionaldeterminante $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung die Ableitungen nach y und nach z heranzuziehen. Man erhält formell eine solche, indem man aus der vollständigen Matrix eine Zeile der Ableitungen nach den w_i wegläßt. Es sei also

$$\Delta(y, z, w_{\lambda_1} \dots w_{\lambda_{n-1}}) \neq 0.$$

Hingegen sei $\Delta(y, w_1 \dots w_n)$ und $\Delta(z, w_1 \dots w_n) = 0$.²⁾ Aus dem Verschwinden der letzten zwei Determinanten folgt nun wie bei der zweiten Untergruppe das Bestehen einer Relation zwischen y und den J_r , $\mathfrak{F}_1(y, J_1 \dots J_{n+1}) = 0$ und ebenso eine Beziehung $\mathfrak{F}_2(z, J_1 \dots J_{n+1}) = 0$. Es sind somit y und z selbst invariant. Außerdem gibt es dann noch $n-1$ voneinander unabhängige Invarianten, die man als neue Veränderliche einführen kann, $w_2 = J_{\lambda_1}, w_3 = J_{\lambda_2}, \dots, w_n = J_{\lambda_{n-1}}$, so daß U_4 die Form B) $U_4 = \xi_1 p + \xi_4 s$ annimmt.

Würde man unter a) das Verschwinden einer der beiden Determinanten $\Delta(y, w_1 \dots w_n)$ oder $\Delta(z, w_1 \dots w_n)$ angenommen haben, so wäre bezüglich nur z oder y invariant und U_4 nähme, indem die n übrigen Invarianten als neue w_i eingeführt werden, die Formen $U_4 = \xi_1 p = \xi_2 q$ oder $U_4 = \xi_1 p + \xi_3 r$ an, die aber schon in der allgemeineren A) enthalten sind.

¹⁾ Das Verschwinden von $\Delta(z, w_1 \dots w_n)$ würde, wie aus dem Folgenden ersichtlich wird, besagen, daß y invariant ist. Dann stünden zur Neueinführung von Veränderlichen immer noch n andere Invarianten zur Verfügung.

²⁾ Nach einem Satze von Ahrens (Z. S. für Mathem. u. Phys., 40. Bd., S. 177 ff.) würde diese letztere Voraussetzung das Verschwinden sämtlicher Funktionaldeterminanten $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung nach sich ziehen, wenn nicht sämtliche $\Delta(w_1, w_2 \dots w_n)$ von n^{ter} Ordnung verschwinden, was jedoch erlaubterweise vorausgesetzt wurde.

5. Untergruppe: $U_1 = p$, $U_2 = yp$, $U_3 = \varphi(y)p$.

Da die viergliedrige Gruppe höchstens zweifache Ausbreitung haben kann, so gibt es $n+1$ von x freie und bezüglich $n+1$ der Veränderlichen $y, z, w_1 \dots w_n$ unabhängige Invarianten. Die bei der vorigen Untergruppe gemachte Überlegung wiederholt sich in einfacherer Art und ergibt, daß y entweder selbst eine Invariante darstellt oder nicht. Im ersten Falle erreicht man für U_4

$$A) U_4 = \xi_1 p + \xi_3 r, \quad \text{im zweiten}$$

$$B) U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q.$$

6. Untergruppe: $U_1 = p$, $U_2 = q$, $U_3 = zp + w_1 q$.

Die viergliedrige Gruppe kann dreifache Ausbreitung haben. Dann bestehen n Invarianten $J_r(zw_1 \dots w_n)$, welche hinsichtlich n Veränderlicher voneinander unabhängig sind. Die Überlegungen, welche durch Neueinführung von Veränderlichen die allgemeinste Form von U_4 zu vereinfachen gestatten, sind vollkommen analog den bei der vierten Untergruppe gemachten. z und w_1 treten hiebei an die Stelle von y und z , $w_2, w_3 \dots w_n$ an die Stelle von $w_1, w_2 \dots w_n$. Auf dem genannten Wege kommt man zum Resultate, daß U_4 in zwei Formen für die Zusammensetzungen herangezogen werden muß, nämlich A) $U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r + \xi_4 s$ und

$$B) U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 t.$$

Die Bestimmung der Typen aus den Zusammensetzungsbedingungen.

Die hier zu Grunde gelegten Zusammensetzungen sind dem III. Bande der „Transformationsgruppen“ von Lie (§ 137) entnommen. Die in Klammern beigefügten Zahlen entsprechen der dortigen Bezeichnung.

Nachdem Koch¹⁾ auf anderem Wege die viergliedrigen Typen des Raumes bestimmt hat, möge jeweils auf die Übereinstimmung der Resultate hingewiesen werden. Dabei wird die am Schlusse der genannten Arbeit beigefügte tabellarische Zusammenstellung im Auge behalten. Indem in der vorliegenden Arbeit nur solche durch Spezialisierung der Konstanten von U_4 auseinander hervorgehende Typen als verschieden betrachtet werden, welche eine andere Ausbreitungszahl haben, so kommt es vor, daß bei der verschiedenen Zählungsweise Kochs ein Typus hier zuweilen mehrere dort angegebene vertritt.

¹⁾ „Bestimmung der viergliedrigen Gruppen des Raumes“. Inauguraldissertation Leipzig (Berlin 1898).

I. Zusammensetzung.

$$-(U_i U_k) = 0 \left\{ \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\} = 1, 2, 3. \quad (U_1 U_4) = U_1, \quad (U_2 U_4) = a U_2, \\ (U_3 U_4) = c U_3. \quad (67)$$

$$1. \quad U_1 p, \quad U_2 = q, \quad U_3 = r;$$

$$U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 \cdot r + \xi_4 s.$$

Zur Abkürzung von Funktionsbezeichnungen möge hier ein für allemal folgende Festsetzung getroffen werden: Y_i ($i = 1, 2, 3 \dots$) sollen willkürliche Funktionen der Argumente $y, z, w_1 \dots w_n$ bedeuten; beginnt die Argumentenreihe einer sonst willkürlichen Funktion mit z , so möge dies durch das Funktionssymbol Z_i zum Ausdruck gebracht werden. Ähnlich bedeuten $W_{1i}, W_{2i} \dots$ ($i = 1, 2, 3 \dots$) willkürliche Funktionen der Veränderlichen $w_1 \dots w_n$ bzw. $w_2 \dots w_n$ u. s. w.

Dies vorausgesetzt, ergibt die Ausführung der drei letzten Klammeroperationen:

$$\xi_1 = x + W_{11}, \quad \xi_2 = ay + W_{12}, \quad \xi_3 = cz + W_{13}, \quad \xi_4 = W_{14}.$$

Setzen wir voraus a) $W_{14} \neq 0$.

Durch die Substitution $\mathfrak{x} = x + W'_{11}, \quad \mathfrak{y} = y + W'_{12},$

$$\mathfrak{z} = z + W'_{13}, \quad w_1 = W'_{14}, \quad \text{wo die } W'_{1i}$$

wie W_{1i} Funktionen der $w_1 \dots w_n$ bedeuten, welche jedoch den Bedingungengleichungen

$$W_{11} - W'_{11} + \frac{\partial W'_{11}}{\partial w_1} = 0, \quad W_{12} - a W'_{12} + \frac{\partial W'_{12}}{\partial w_1} = 0,$$

$$W_{13} - c W'_{13} + \frac{\partial W'_{13}}{\partial w_1} = 0, \quad W_{14} \cdot \frac{\partial W'_{14}}{\partial w_1} = 1$$

zu entsprechen haben, erhält man $U_4 = xp + ayq + c zr + s$ und somit den Typus

$$(1) \quad [p, q, r, xp + ayq + c zr + s].$$

Ist b) $W_{14} = 0$, dann substituiere man $\mathfrak{x} = x + W_{11},$
 $\mathfrak{y} = y + \frac{1}{a} \cdot W_{12}, \quad \mathfrak{z} = z + \frac{1}{c} \cdot W_{13}$ und erhält den Typus

$$(2) \quad [p, q, r, xp + ayq + c zr].$$

In Kochs Abhandlung finden wir ihn unter I. 1, wenn man dort $\frac{\beta}{\alpha} = a$, $\frac{\gamma}{\alpha} = c$ und $U'_4 = \alpha U_4$ setzt; dem Falle $a = c = 1$ entspricht dort VII. 1; dem Falle $a = 1$ trägt IX. 1 Rechnung, wenn man dort $\frac{\gamma}{\alpha} = c$ und $U'_4 = \alpha U_4$ setzt.

$$2. U_1 = p, U_2 = q, U_3 = zp + \psi(z) \cdot q;$$

$$A) U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r.$$

Aus den Klammerrelationen folgt:

$\xi_1 = x + Z_1$, $\xi_2 = ay + Z_2$, $\xi_3 = (1-c)z$, während für $\psi(z)$ die Differentialgleichung $\frac{a-c}{1-c} \cdot \psi(z) = z \cdot \frac{d\psi(z)}{dz}$ besteht, welcher entsprochen werden kann durch

$$\psi(z) = k \cdot z^{\frac{a-c}{1-c}} \text{ oder durch } \psi(z) = z^{\frac{a-c}{1-c}} + k.$$

Bestimmen wir die Funktionen Z'_1 und Z'_2 aus den Gleichungen $Z_1 - Z'_1 + (1-c)z \frac{\partial Z'_1}{\partial z} = 0$ und $Z_2 - Z'_2 + \frac{1-c}{a} z \frac{\partial Z'_2}{\partial z} = 0$ und setzen $\mathfrak{x} = x + Z'_1$, $\mathfrak{y} = y + \frac{Z'_2}{a}$, so nimmt U_4 die Gestalt

$$U_4 = xp + ayq + (1-c)zr \text{ an.}$$

Der Typus lautet, wenn wir für ψ die erstgenannte Form annehmen: $p, q, zp + k \cdot z^{\frac{a-c}{1-c}} \cdot q, xp + ayq + (1-c)zr$. — Da schon in der Untergruppe der Fall $\psi(z) = 0$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, $\psi(z) = \text{const.}$ ausgeschlossen erscheint, so muß in U_3 $a \neq c$ sein; desgleichen ist $c = 1$ unzulässig.

Verwendet man für $\psi(z)$ die zweite Form, so ergibt sich, indem man $U'_3 = U_3 - k U_2$ setzt, der Typus

$$(3) \quad \left[p, q, zp + z^{\frac{a-c}{1-c}} \cdot q, xp + ayq + (1-c)zr \right],$$

der mit dem erstgenannten vollkommen gleichwertig ist. Um das zu ersehen, setze man in jenem $\mathfrak{x} = kx$, $U'_1 = \frac{1}{k} U_1$ und $U'_3 = \frac{1}{k} \cdot U_3$.

Vgl. Koch I. 2, wenn man dort $\frac{\gamma}{\alpha} = c$ und $\frac{\beta}{\alpha} = a$ setzt;

IX. 2, wenn wir den Typus 3 in der erstgenannten Form voraussetzen und den Spezialfall $a = 1$ eintreten lassen.

Setzt man bei Koch $U'_4 = \frac{1}{\alpha} U_4$ und $\frac{\gamma}{\alpha} = c$, so ersieht man die völlige Übereinstimmung.

$$B) \quad U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_4 s.$$

Die Zusammensetzungsbedingungen ergeben:

$$\xi_1 = x + Z_1, \quad \xi_2 = y + Z_2, \quad \xi_4 = Z_3 \quad \text{und für die Konstanten} \\ a = c = 1.$$

Ist

$$a) \quad Z_3 \neq 0,$$

dann setze man $m_1 = Z'_3$, welches der Bedingung $Z_3 \frac{\partial Z'_3}{\partial z} = 1$ zu genügen hat, ferner $x = x + Z'_1$, $y = y + Z'_2$, wobei sich Z'_1 und Z'_2 analog wie früher so bestimmen lassen, daß man den Typus erhält

$$(4) \quad [p, q, zp + \psi(z)q, xp + yq + s].$$

$$b) \quad Z_3 = 0;$$

dann führt die Substitution $x = x + Z_1$, $y = y + Z_2$ zum Typus

$$(5) \quad [p, q, zp + \psi(z)q, xp + yq].$$

Vgl. Koch VII. 2.

$$3. \quad a) \quad U_1 = p, \quad U_2 = q, \quad U_3 = zp;$$

$$A) \quad U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r.$$

$$\xi_1 = x + Z_1, \quad \xi_2 = ay + Z_2, \quad \xi_3 = (1 - c)z.$$

Wenn $c \neq 1$, dann setze man wie früher $x = x + Z'_1$, $y = y + \frac{Z'_2}{a}$ und erreicht durch passende Wahl von Z'_1 und Z'_2

$$(6) \quad [p, q, zp, xp + ayq + (1 - c)zr].$$

Vgl. Koch I. 3 und

IX. 3 für den Spezialfall $a = 1$.

Ist $c = 1$, dann lautet die Substitution $x = x + Z_1$, $y = y + \frac{Z_2}{a}$ zur Erreichung von

$$(7) \quad [p, q, zp, xp + ayq].$$

Vgl. Koch IX. 4 und VII. 3 für den Spezialfall $a = 1$.

$$B) U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_4 s.$$

Hier wiederholt sich genau das an der entsprechenden Stelle bei der zweiten Untergruppe Gesagte. Es ist nämlich

$$\xi_1 = x + Z_1, \xi_2 = ay + Z_2, \xi_4 = Z_3, c = 1.$$

Die dort angeführten Substitutionen führen bei Berücksichtigung des hier in ξ_2 auftretenden Koeffizienten a zum Typus

$$(8) \quad [p, q, zp, xp + ayq + s].$$

Sollte $Z_3 = 0$ sein, so gelangt man wieder zum Typus (7).

Nunmehr hätte man noch die Zusammensetzungsbedingungen für die Fälle auszuwerten, welche sich aus den notwendig erkannten Permutationen der U_1, U_2, U_3 ergeben. Indessen kommt man hiebei wieder auf bereits gewonnene Typen.

$$4. \quad U_1 = p, U_2 = yp, U_3 = zp;$$

$$A) \quad U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r.$$

Aus den Klammerrelationen ergibt sich für $\xi_1 = x + Y_1$, $\xi_2 = (1 - a)y$, $\xi_3 = (1 - c)z$.

Man setze nun $\xi = x + Y'_1$, wobei Y'_1 die Gleichung

$$Y - Y'_1 + (1 - a)y \frac{\partial Y'_1}{\partial y} + (1 - c)z \frac{\partial Y'_1}{\partial z} = 0$$

zu erfüllen hat, und erhält den Typus

$$(9) \quad [p, yp, zp, xp + (1 - a)yq + (1 - c)zr].$$

Im Falle $a = 1$ und $c = 1$ ist, ändert sich die Ausbreitungszahl der Gruppe, und es ergibt sich der Typus

$$(10) \quad [p, yp, zp, xp].$$

Vergl. Koch I. 4, wenn $\frac{a}{c} \neq 1$,

IX. 5, wenn a oder $c = 1$,

VII. 4, wenn $a = c = 1$.

$$B) \quad U_4 = \xi_1 p + \xi_4 s.$$

Man erhält $\xi_1 = x + Y_1$, $\xi_4 = Y_2$.

Ist a) $Y_2 \neq 0$, dann setze man $w_1 = Y_2'$, wobei $Y_2 \cdot \frac{\partial Y_2'}{\partial w_1} = 1$ ist, und erhält durch passende Substitution für x den Typus

$$(11) \quad [p, yp, zp, xp + s].$$

Ist b) $Y_2 = 0$, so folgt der Typus (10).

$$5. \quad U_1 = p, U_2 = yp, U_3 = \varphi(y)p;$$

$$A) \quad U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q.$$

Es ist $\xi_1 = x + Y_1$, $\xi_2 = (1 - a)y$ und der Funktion $\varphi(y)$ wird die Bedingung auferlegt $\frac{1 - a}{1 - c} \frac{d\varphi(y)}{\varphi(y)} = \frac{dy}{y}$, aus welcher sich durch Integration ergibt $\varphi(y) = C \cdot y^{\frac{1-c}{1-a}}$, $C \neq 0$. Ohne der Allgemeinheit Eintrag zu tun, kann man $C = 1$ setzen und erhält den Typus

$$(12) \quad \left[p, yp, y^{\frac{1-c}{1-a}} \cdot p, xp + (1 - a) y q \right].$$

Hiebei ist $a \neq 1$ und $c \neq 1$ vorausgesetzt.

Vergl. Koch I. 5.

Da die obige Differentialgleichung für $\varphi(y)$ auch in der Form $(1 - c)\varphi(y) - (1 - a)y \frac{d\varphi(y)}{dy} = 0$ geschrieben werden kann, so wird im Falle $a = c = 1$ dem $\varphi(y)$ keine beschränkende Bedingung auferlegt, und man erreicht durch passende Substitution den Typus

$$(13) \quad [p, yp, \varphi(y)p, xp].$$

Vergl. Koch VII. 6.

$$B) \quad U_4 = \xi_1 p + \xi_3 r.$$

Diesfalls verlangen die Klammerrelationen

$$\xi_1 = x + Y_1, \xi_3 = Y_3, [a = c = 1].$$

$$a) \quad Y_3 \neq 0.$$

In der bekannten Weise folgt der Typus

$$(14) \quad [p, yp, \varphi(y)p, xp + r].$$

Vergl. Koch VII. 5, wenn man y und z vertauscht.¹⁾

Ist b) $Y_3 = 0$, dann erhält man den Typus (13).

$$6. \quad U_1 = p, \quad U_2 = q, \quad U_3 = zp + w_1 q;$$

$$A) \quad U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r + \xi_4 s.$$

Zufolge der Klammerrelationen ist

$$\xi_1 = x + Z_1, \quad \xi_2 = ay + Z_2, \quad \xi_3 = (1 - c)z, \quad \xi_4 = (a - c)w_1.$$

Man setze nun $\xi = x + Z_1'$, $\eta = y + \frac{Z_2'}{a}$, wobei sich Z_1' und Z_2' bestimmen aus $Z_1 - Z_1' + (1 - c)z \frac{\partial Z_1'}{\partial z} + (a - c)w_1 \frac{\partial Z_1'}{\partial w_1} = 0$ und $a(Z_2 - Z_2') + (1 - c)z \frac{\partial Z_2'}{\partial z} + (a - c)w_1 \frac{\partial Z_2'}{\partial w_1} = 0$ und erhält

$$(15) \quad \left[p, q, zp + w_1 q, xp + ayq + (1 - c)zr + (a - c)w_1 s \right]$$

mit den beiden Spezialfällen $a = c$, $c \neq 1$ und $a \neq c$, $c = 1$.

Im Falle $a = c = 1$ ergibt sich

$$(16) \quad \left[p, q, zp + w_1 q, xp + yq \right].$$

$$B) \quad U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 t.$$

Es ist $\xi_1 = x + Z_1$, $\xi_2 = y + Z_2$, $\xi_3 = Z_5$, ($a = c = 1$).

Ist a) $Z_5 \neq 0$, so erreicht man durch $w_2 = Z_5'$, wobei $Z_5' \cdot \frac{\partial Z_5'}{\partial w_2} = 1$ ist, und passende Neueinführung für x und y $U_4 = xp + yq + t$, worin $t = \frac{\partial f}{\partial w_2}$ ist, und somit den Typus

$$(17) \quad \left[p, q, zp + w_1 q, xp + yq + t \right].$$

Ist b) $Z_5 = 0$ vorausgesetzt, so erreicht man den Typus (16) wieder.

II. Zusammensetzung.

$$U_i U_k = 0, \quad \left. \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\} = 1, 2, 3. \quad (U_1 U_4) = c U_1, \quad (U_2 U_4) = (1 + c) U_2,$$

$$(U_3 U_4) = U_1 + c U_3. \quad (68).$$

$$1. \quad U_1 = p, \quad U_2 = q, \quad U_3 = r;$$

$$U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r + \xi_4 s.$$

¹⁾ Dortselbst hat sich ein Druckfehler eingeschlichen, indem U_2 nach den Ausführungen im Texte S. 34 oben nicht zq sondern zp heißen muß.

Die Zusammensetzungsbedingungen ergeben $\xi_1 = cx + z + W_{11}$,
 $\xi_2 = (1 + c)y + W_{12}$, $\xi_3 = cz + W_{13}$, $\xi_4 = W_{14}$.

Auf analoge Weise wie bei der ersten Zusammensetzung erreicht man, wenn $W_{14} \neq 0$ ist,

$$(18) \quad [p, q, r, (cx + z)p + (1 + c) yq + czr + s].$$

und wenn $W_{14} = 0$ ist,

$$(19) \quad [p, q, r, (cx + z)p + (1 + c) yq + czr].$$

Vergl. Koch II. 1, wenn man in (19) $x = y$, $y = x$, $\alpha = 1 + c$ und $\beta = c$ setzt.

$$2. \quad U_1 = p, \quad U_2 = q, \quad U_3 = zp + \psi(z)q;$$

$$A) \quad U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r.$$

Es ist $\xi_1 = cx + Z_1$, $\xi_2 = (1 + c)y + Z_2$, $\xi_3 = -1$, während $\psi(z)$ der Differentialgleichung $\psi(z) + \frac{d\psi(z)}{dz} = 0$ genügen muß, und somit lautet $\psi(z) = k \cdot e^{-z}$, $k \neq 0$.

Auf dem bereits geläufigen Wege der Neueinführung von Veränderlichen erreicht man

$$(20) \quad [p, q, zp + k \cdot e^{-z}q, c xp + (1 + c) yq - r].$$

Vergl. Koch II. 2. Setzt man dort $x = y$, $y = x$, $z = -z$, $U'_3 = (\alpha - \beta) U_3$, $U'_4 = \frac{1}{\alpha - \beta} U_4$, so ersieht man die völlige Übereinstimmung, wenn man für $\alpha - \beta = k$, $\frac{\beta}{\alpha - \beta} = c$, $\frac{\alpha}{\alpha - \beta} = c + 1$ einführt.

Unter der Voraussetzung von

$$B) \quad U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_4 s$$

ergibt sich ein doppelter Widerspruch.

$$3. \quad a) \quad U_1 = p, \quad U_2 = q, \quad U_3 = zp;$$

$$A) \quad U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r.$$

Es ergeben die Klammeroperationen

$$\xi_1 = cx + Z_1, \quad \xi_2 = (1 + c)y + Z_2, \quad \xi_3 = -1;$$

somit ergibt sich der Typus

$$(21) \quad [p, q, zp, c xp + (1+c) y q - r].$$

Vergl. Koch II. 3.

$$B) U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_4 s$$

ergibt zufolge der letzten Klammeroperation einen Widerspruch.

$$b) U_1 = p, U_2 = zp, U_3 = q;$$

$$A) U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r.$$

Die Zusammensetzung erfordert

$$\xi_1 = cx + y + Z_1, \xi_2 = cy + Z_2, \xi_3 = -z.$$

Durch passende Substitutionen erhält man

$$(22) \quad [p, zp, q, (cx + y)p + cyq - zr].$$

Vergl. Koch II. 4. Man setze dort $\mathfrak{x} = \frac{x}{z}$, $\mathfrak{y} = y$, $\mathfrak{z} = \frac{1}{z}$, worauf die Konstanten leicht in Übereinstimmung zu bringen sind.

B) $U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_4 s$ würde den Widerspruch $c = 1 + c$ ergeben.

$$c) U_1 = q, U_2 = p, U_3 = zp;$$

A) $U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r$ ergibt einen Widerspruch.

B) $U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_4 s$ hat einen doppelten Widerspruch zur Folge.

$$4. U_1 = p, U_2 = yp, U_3 = zp;$$

$$A) U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r.$$

$\xi_1 = cx + Y_1$, $\xi_2 = -y$ und $\xi_3 = -1$. Man erreicht, wie leicht ersichtlich,

$$(23) \quad [p, yp, zp, c xp - yq - r].$$

Vergl. Koch II. 5. Man setze dort $\mathfrak{x} = \frac{x}{z}$, $\mathfrak{y} = \frac{1}{z}$, $\mathfrak{z} = \frac{y}{z}$.

B) $B_4 = \xi_1 p + \xi_4 s$ führt zu Widersprüchen.

$$5. U_1 = p, U_2 = yp, U_3 = \varphi(y)p;$$

$$A) U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q.$$

Es ergibt sich $\xi_1 = cx + Y_1$, $\xi_2 = -y$ und $\varphi(y) = ly + lk$, zufolge $y \cdot \frac{d\varphi(y)}{dy} = 1$, wobei lk für uns ohne Belang ist. Hienach erhält man

$$(24) \quad [p, yp, ly \cdot p, cxp - yq].$$

Vergl. Koch II. 6. Man setze dort $\xi = \frac{x}{e^y}$, $\eta = \frac{1}{e^y}$.

B) $U_4 = \xi_1 p + \xi_3 r$ ergibt zwei Widersprüche.

$$6. \quad U_1 = p, \quad U_2 = q, \quad U_3 = zp + w_1 q;$$

$$A) \quad U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r + \xi_4 s.$$

$$\xi_1 = cx + Z_1, \quad \xi_2 = (1 + c)y + Z_2, \quad \xi_3 = -1, \quad \xi_4 = w_1.$$

Durch leicht zu findende Substitutionen erreicht man

$$(25) \quad [p, q, zp + w_1 q, cxp + (1 + c)yq - r + w_1 s].$$

B) $U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 t$ ergibt einen doppelten Widerspruch.

III. Zusammensetzung.

$$(U_i U_k) = 0, \quad \left. \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\} = 1, 2, 3. \quad (U_1 U_1) = U_2, \quad (U_2 U_4) = 0, \quad (U_3 U_4) = U_1. \quad (69).$$

$$1. \quad U_1 = p, \quad U_2 = q, \quad U_3 = r;$$

$$U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r + \xi_4 s.$$

$$\xi_1 = z + W_{11}, \quad \xi_2 = x + W_{12}, \quad \xi_3 = W_{13}, \quad \xi_4 = W_{14}.$$

$$a) \quad W_{14} \neq 0.$$

Setzt man $w_1 = W'_{14}$, welches der Bedingung $W_{14} \frac{\partial W'_{14}}{\partial w_1} = 1$ zu genügen hat, hierauf $\xi = x + W'_{12}$, $\eta = y + W'_{13}$, $\delta = z + W'_{11}$, wobei sich W'_{11} , W'_{12} und W'_{13} aus den Gleichungen ergeben

$$W_{11} - W'_{11} + \frac{\partial W'_{12}}{\partial w_1} = 0, \quad W_{12} - W'_{12} + \frac{\partial W'_{13}}{\partial w_1} = 0 \quad \text{und}$$

$$W_{13} + \frac{\partial W'_{11}}{\partial w_1} = 0,$$

die miteinander verträglich sind, so erhält man

$$(26) \quad [p, q, r, zp + xq + s].$$

b) $W_{14} = 0$, $W_{13} \neq 0$ ohne konstant zu sein; dann setze man $w_1 = W_{13}$, $\xi = x + W_{12}$, $\zeta = z + W_{11}$ und man gelangt zum Typus

$$(27) \quad [p, q, r, zp + xq + w_1 r].$$

c) $W_{14} = 0$ und $W_{13} = 0$ oder konstant.

Man erhält den Typus

$$(28) \quad [p, q, r, zp + xq].$$

Vergl. Koch VIII. 1., wo man x und y zu vertauschen hat.

$$2. \quad U_1 = p, \quad U_2 = q, \quad U_3 = zp + \psi(z)q;$$

$$A) \quad U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r.$$

Es folgt: $\xi_1 = Z_1$, $\xi_2 = x + Z_2$, $\xi_3 = -1$. Die bisher willkürliche Funktion $\psi(z)$ hat der Differentialgleichung zu genügen $z + \frac{d\psi(z)}{dz} = 0$, welche ergibt $\psi(z) = -\frac{z^2}{2} + k$, wobei k bekanntlich ohne Belang ist. Passende Substitutionen für x und y führen zum Typus

$$(29) \quad [p, q, zp - \frac{z^2}{2}q, xq - r].$$

Vergl. Koch VIII. 2., wenn dort x und y vertauscht werden.

Unter der Voraussetzung B) $U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_4 s$ ergibt sich ein Widerspruch.

$$3. a) \quad U_1 = p, \quad U_2 = q, \quad U_3 = zp;$$

$$A) \quad U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r \text{ und}$$

$$B) \quad U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_4 s \text{ haben Widersprüche zur Folge.}$$

$$b) \quad U_1 = p, \quad U_2 = zp, \quad U_3 = q;$$

$$A) \quad U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r.$$

Es ergibt sich $\xi_1 = xz + y + Z_1$, $\xi_2 = Z_2$, $\xi_3 = z^2$.

Ist $Z_2 \neq 0$, dann setze man $\xi = x + Z'_1$, $\eta = y + Z'_2$, wobei Z'_1 und Z'_2 sich bestimmen aus

$$Z_1 - Z'_1 \cdot z - Z'_2 + z^2 \cdot \frac{\partial Z'_1}{\partial z} = 0 \text{ und}$$

$$Z_2 + z^2 \cdot \frac{\partial Z'_2}{\partial z} = 0,$$

dann wird $U_4 = (xz + y)p + z^2 \cdot r$. Eine Vereinfachung erzielt man durch die weitere Substitution $\mathfrak{x} = \frac{x}{z}$, $\mathfrak{y} = y$, $\mathfrak{z} = \frac{1}{z}$, wodurch man erhält

$$(30) \quad \left[zp, p, q, yzp - r \right].$$

Vergl. Koch VIII. 3.

Sollte $Z_2 = 0$ oder konstant sein, so kann man formell dieselben Substitutionen gelten lassen und erhält denselben Typus.

Wenn B) $U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r$ gesetzt wird, gelangt man zu einem Widerspruch.

Unter Zugrundelegung der Permutation c) erhält man sowohl im Falle A) als B) Widersprüche.

$$4. \quad U_1 = p, \quad U_2 = yp, \quad U_3 = zp;$$

$$A) \quad U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r.$$

Die ξ_i müssen lauten $\xi_1 = xy + Y_1$, $\xi_2 = y^2$, $\xi_3 = yz - 1$.

Wie unmittelbar zu ersehen ist, erreicht man

$$U_4 = xyp + y^2 q + (yz - 1)r,$$

welche Form sich noch weiter vereinfachen läßt durch

$$\mathfrak{x} = \frac{x}{y}, \quad \mathfrak{y} = \frac{1}{y}, \quad \mathfrak{z} = \frac{z}{y},$$

wodurch der Typus hervorgeht

$$(31) \quad \left[yp, p, zp, -(q + yr) \right].$$

Vergl. Koch VIII. 4., wenn dort y und z vertauscht werden.

Wird B) $U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r$ vorausgesetzt, so ergeben sich Widersprüche.

$$5. \quad U_1 = p, \quad U_2 = yp, \quad U_3 = \varphi(y)p;$$

$$A) \quad U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q.$$

Es ist $\xi_1 = xy + Y_1$, $\xi_2 = y^2$, $\varphi(y)$ hat der Gleichung $y \cdot \varphi(y) - y^2 \frac{d\varphi(y)}{dy} = 1$ zu genügen und lautet somit $\varphi(y) = \frac{1}{2y}$.

Man erreicht zunächst $U_4 = xyp + y^2 q$; setzt man $\mathfrak{x} = \frac{x}{y}$, $\mathfrak{y} = \frac{1}{y}$, so erhält man $U_4 = -q$, $\varphi(y) = \frac{y^2}{2}$ und der Typus lautet

$$(32) \quad \left[yp, p, \frac{y^2}{2} \cdot p, -q \right].$$

Vergl. Koch VIII. 5.

Wenn B) $U_4 = \xi_1 p + \xi_3 r$ gesetzt wird, ergibt sich die unerfüllbare Forderung $y^2 = 0$.

$$6. \quad U_1 = p, \quad U_2 = q, \quad U_3 = zp + w_1 q;$$

$$A) \quad U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r + \xi_4 s.$$

$$\xi_1 = Z_1, \quad \xi_2 = x + Z_2, \quad \xi_3 = -1, \quad \xi_4 = z.$$

Setzt man $x = x + Z'_1$, $y = y + Z'_2$ und bestimmt Z'_1 und Z'_2 aus $Z_1 - \frac{\partial Z'_1}{\partial z} + z \cdot \frac{\partial Z'_1}{\partial w_1} = 0$ und $Z_2 - Z'_1 - \frac{\partial Z'_2}{\partial z} + z \frac{\partial Z'_2}{\partial w_1} = 0$, so erhält man

$$(33) \quad \left[p, q, zp + w_1 q, xq - r + zs \right].$$

B) $U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_5 t$ führt zu einem doppelten Widerspruch.

IV. Zusammensetzung.

$$(U_i U_k) = 0, \quad \left. \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\} = 1, 2, 3. \quad (U_1 U_4) = U_1 + U_2, \quad (U_2 U_4) = U_2, \\ (U_3 U_4) = U_1 + U_3. \quad (70.)$$

$$1. \quad U_1 = p, \quad U_2 = q, \quad U_3 = r;$$

$$U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r + \xi_4 s.$$

Es ist

$$\xi_1 = x + z + W_{11}, \quad \xi_2 = x + y + W_{12}, \quad \xi_3 = z + W_{13}, \quad \xi_4 = W_{14}.$$

Ist a) $W_{14} \neq 0$, so erhält man auf die bekannte Art den Typus

$$(34) \quad \left[p, q, r, (x+z)p + (x+y)q + zr + s \right]$$

und wenn b) $W_{14} = 0$ ist, den Typus

$$(35) \quad \left[p, q, r, (x+z)p + (x+y)q + z \cdot r \right].$$

Vergl. Koch V. 1.

$$2. \quad U_1 = p, \quad U_2 = q, \quad U_3 = zp + \psi(z)q;$$

$$A) \quad U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r.$$

Die Klammerrelationen ergeben $\xi_1 = x + Z_1$, $\xi_2 = x + y + Z_2$, $\xi_3 = -1$; $\psi(z)$ bestimmt sich aus $\frac{d\psi(z)}{dz} = -z$ mit Außerachtlassung der Konstanten als $\psi(z) = -\frac{z^2}{2}$. Man erreicht somit leicht

$$(36) \quad \left[p, q, zp - \frac{z^2}{2}q, xp + (x+y)q - r \right].$$

Vergl. Koch V. 2.

B) $U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_4 s$ bedingt einen Widerspruch.

$$3. a) U_1 = p, U_2 = q, U_3 = zp.$$

Sowohl wenn A) $U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r$ als auch

B) $U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_4 s$ vorausgesetzt wird, ergeben sich Widersprüche.

$$b) U_1 = p, U_2 = zp, U_3 = q;$$

$$A) U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r.$$

$$\xi_1 = x(1+z) + y + Z_1, \xi_2 = y + Z_2, \xi_3 = z^2.$$

Man erhält somit $U_4 = \{x(1+z) + y\}p + yq + z^2r$. Zur Vereinfachung führe man ein $\mathfrak{x} = \frac{x}{z}$, $\mathfrak{y} = y$, $\mathfrak{z} = \frac{1}{z}$, und man erhält

$$(37) \quad \left[zp, p, q, (x + yz)p + yq - r \right].$$

Vergl. Koch V. 3.

Im Falle man U_4 in der Form B) voraussetzt, als auch im Falle c): A) und B) wird man auf Widersprüche geführt.

$$4. \quad U_1 = p, U_2 = yp, U_3 = zp;$$

$$A) U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r.$$

Aus der Zusammensetzung erhält man $\xi_1 = x(1+y) + Y_1$, $\xi_2 = y^2$, $\xi_3 = yz - 1$, somit erreicht man

$$U_4 = x(1+y)p + y^2q + (yz - 1)r.$$

Eine Vereinfachung erzielt man durch $\mathfrak{x} = \frac{x}{y}$, $\mathfrak{y} = \frac{z}{y}$, $\mathfrak{z} = \frac{1}{y}$, indem dann der Typus lautet

$$(38) \quad \left[zp, p, yp, xp - zq - r \right].$$

Vergl. Koch V. 4.

B) $U_4 = \xi_1 p + \xi_4 s$ zieht einen zweifachen Widerspruch nach sich.

$$5. \quad U_1 = p, \quad U_2 = y p, \quad U_3 = \varphi(y) p;$$

$$A) \quad U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q.$$

Es wird gefordert $\xi_1 = x(1+y) + Y_1$, $\xi_2 = y^2$; das $\varphi(y)$ unterliegt der Bedingung $y \cdot \varphi(y) - y^2 \frac{d\varphi(y)}{dy} = 1$ und lautet somit $\varphi(y) = \frac{1}{2y}$ bei Weglassung der Konstanten. Es ist somit $U_4 = x(1+y)p + y^2 q$. Die Substitution $\xi = \frac{x}{y}$, $\eta = \frac{1}{y}$ ergibt den Typus

$$(39) \quad \left[y p, p, \frac{y^2}{2} \cdot p, x p - q \right].$$

Vergl. Koch V. 5.

B) $U_4 = \xi_1 p + \xi_3 r$ führt zu einem Widerspruche.

$$6. \quad U_1 = p, \quad U_2 = q, \quad U_3 = z p + w_1 q;$$

$$A) \quad U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r + \xi_4 s.$$

Da $\xi_1 = x + Z_1$, $\xi_2 = x + y + Z_2$, $\xi_3 = -1$, $\xi_4 = z$ ist, so gelangt man in einfacher Weise zum Typus

$$(40) \quad \left[p, q, z p + w_1 q, x p + (x + y) q - r + z s \right].$$

Unter Zugrundelegung von B) $U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_5 t$ erhält man Widersprüche.

V. Zusammensetzung.

$$(U_i U_k) = 0, \quad \left. \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\} = 1, 2, 3. \quad (U_1 U_4) = 0, \quad (U_2 U_4) = 0, \quad (U_3 U_4) = U_2 \quad (71).$$

$$1. \quad U_1 = p, \quad U_2 = q, \quad U_3 = r;$$

$$U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r + \xi_4 s.$$

$$\text{Es ist } \xi_1 = W_{11}, \quad \xi_2 = z + W_{12}, \quad \xi_3 = W_{13}, \quad \xi_4 = W_{14}.$$

$$a) \quad W_{14} \neq 0.$$

Man führe ein $\xi = x + W'_{11}$, $\eta = y + W'_{13}$, $\zeta = z + W'_{12}$, nachdem man zuvor $w_1 = W'_{14}$ gesetzt hat, das sich aus $W'_{14} \cdot \frac{\partial W'_{14}}{\partial w_1} = 1$ bestimmt, während die anderen W'_{1i} sich bestimmen aus

$$W'_{11} + \frac{\partial W'_{11}}{\partial w_1} = 0, \quad W'_{12} - W'_{12} + \frac{\partial W'_{13}}{\partial w_1} = 0 \quad \text{und} \quad W'_{13} + \frac{\partial W'_{12}}{\partial w_1} = 0,$$

und man erhält den Typus

$$(41) \quad [p, q, r, zq + s].$$

Dieser Typus wird auch gewonnen, wenn W'_{11} oder W'_{13} oder beide gleichzeitig Null sind.

$$b) \quad W'_{14} = 0, \quad \left. \frac{W'_{11}}{W'_{13}} \right\} \neq 0, \quad \text{ohne konstant zu sein.}$$

Sind nun W'_{11} und W'_{13} bezüglich zweier in ihnen vorkommenden Veränderlichen unabhängig, die man dann mit w_1 und w_2 bezeichnen kann, dann führt die Neueinführung $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z + W'_{12}$, $w_1 = W'_{11}$, $w_2 = W'_{13}$ zum Typus

$$(42) \quad [p, q, r, w_1 p + zq + w_2 r].$$

Sollten aber W'_{11} und W'_{13} bezüglich je zwei Veränderlichen voneinander abhängig sein, so ergibt sich, wenn $f(w_1)$ eine willkürliche Funktion von w_1 darstellt,

$$(43) \quad [p, q, r, w_1 p + zq + f(w_1) r].$$

Sollte entweder W'_{11} oder W'_{13} Null oder konstant sein, dann ergeben sich, vielleicht ersichtlich, die Typen

$$(44) \quad [p, q, r, zq + w_1 r]$$

oder

$$(45) \quad [p, q, r, w_1 p + zq].$$

Wenn W'_{12} und W'_{13} beide konstant oder Null sind, erhält man den Typus

$$(46) \quad [p, q, r, zq].$$

Vergl. Koch III. 1.

$$2. U_1 = p, U_2 = q, U_3 = zp + \psi(z)q;$$

Fügt man U_4 in der einen oder anderen Form hinzu, so be-
gegnet man in den Zusammensetzungsbedingungen Widersprüchen.

$$3. a) U_1 = p, U_2 = q, U_3 = zp.$$

Setzt man U_4 in irgend einer Form voraus, so wird man in
beiden Fällen auf Widersprüche geführt

$$b) U_1 = p, U_2 = zp, U_3 = q;$$

$$A) U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r.$$

$$\xi_1 = yz + Z_1, \xi_2 = Z_2, \xi_3 = 0.$$

Ist $Z_2 \neq 0$, so erreicht man $U_4 = yz p + w_1 q$ und durch
die Substitution $\xi = \frac{x}{z}$, $\eta = y$, $\zeta = \frac{1}{z}$ den Typus

$$(47) \quad \left[zp, p, q, yp + w_1 q \right].$$

Vergl. Koch III. 2., wenn man U_4 in der erstgenannten Form bei-
behalten würde, wobei $\xi_2 = Z_2$ dem $\eta(z)$ entspricht.

Ist $Z_2 = 0$ oder konstant, so erhält man

$$(48) \quad \left[zp, p, q, yp \right].$$

Vergl. Koch III. 2., wenn $\eta(z) = 0$, was zulässig ist. (Text
Seite 21.)

$$B) U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_4 s.$$

$$\text{Es ist } \xi_1 = yz + Z_1, \xi_2 = Z_2, \xi_4 = Z_4.$$

Ist $Z_4 \neq 0$, so erreicht man in der mehrmals angeführten
Weise $U_4 = yz p + s$. Die Substitution $\xi = \frac{x}{z}$, $\eta = y$, $\zeta = \frac{1}{z}$
führt zum Typus

$$(49) \quad \left[zp, p, q, yp + s \right].$$

Sollte $Z_4 = 0$, so erhält man (48) wieder.

$$c) U_1 = q, U_2 = p, U_3 = zp,$$

$$A) U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r.$$

Es ist $\xi_1 = Z_1$, $\xi_2 = Z_2$, $\xi_3 = -1$. Durch geeignete Sub-
stitution für x und y erreicht man $U_4 = -r$. Der hier sich er-
gebende Typus ist indes ähnlich mit (46).

$$B) U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_4 s$$

würde einen Widerspruch nach sich ziehen.

$$4. U_1 = p, U_2 = yp, U_3 = zp;$$

$$A) U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r.$$

Man erhält $\xi_1 = Y_1$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = -y$ und somit in bekannter Weise den Typus

$$(50) \quad [p, yp, zp, -yr].$$

Vergl. Koch III. 3.

$$\text{Setzt man} \quad B) U_4 = \xi_1 p + \xi_4 s$$

voraus, so wird man auf einen Widerspruch geführt.

$$5. U_1 = p, U_2 = yp, U_3 = \varphi(y)p.$$

Fügt man U_4 in den beiden vorauszusetzenden Formen hinzu, so wird man auf Widersprüche geführt.

$$6. U_1 = p, U_2 = q, U_3 = zp + w_1 q;$$

$$A) U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r + \xi_4 s.$$

Da $\xi_1 = Z_1$, $\xi_2 = Z_2$, $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = -1$ ist, so erreicht man $U_4 = -s$ und somit einen mit dem 44. ähnlichen Typus.

Setzt man

$$B) U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_5 t,$$

so ergibt sich ein Widerspruch.

VI. Zusammensetzung.

$$(U_i U_k) = 0, \left. \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\} = 1, 2, 3. (U_1 U_4) = U_1, (U_2 U_4) = U_2, (U_3 U_4) = U_2 + U_3. \quad (72.)$$

$$1. U_1 = p, U_2 = q, U_3 = r;$$

$$U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r + \xi_4 s.$$

Es ist $\xi_1 = x + W_{11}$, $\xi_2 = y + z + W_{12}$, $\xi_3 = z + W_{13}$, $\xi_4 = W_{14}$.
Wenn $W_{14} \neq 0$ ist, so erreicht man den Typus

$$(51) \quad [p, q, r, xp + (y + z)q + zr + s]$$

und wenn $W_{14} = 0$ ist, den Typus

$$(52) \quad [p, q, r, xp + (y + z)q + zr].$$

Vergl. Koch IV. 1.*)

$$2. U_1 = p, U_2 = q, U_3 = zp + \psi(z)q.$$

Wählt man U_4 in der einen oder anderen erforderlichen Form, so ergeben die Zusammensetzungsbedingungen Widersprüche.

$$3. a) U_1 = p, U_2 = p, U_3 = zp.$$

Fügt man U_4 in der Form A) oder B) hinzu, so ergeben sich Widersprüche.

$$b) U_1 = p, U_2 = zp, U_3 = q;$$

$$A) U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r.$$

$\xi_1 = x + yz + Z_1, \xi_2 = y + Z_2, \xi_3 = 0$. Setzt man $\xi = \frac{x}{z} + Z'_1$
 $\eta = y + Z_2, \zeta = \frac{1}{z}$, so läßt sich Z'_1 so bestimmen, daß man den Typus

$$(53) \quad \left[zp, p, q, (x+y)p + yq \right]$$

erhält. Vergl. Koch IV. 3., wenn man dort $\xi = \frac{x}{z}, \zeta = \frac{1}{z}$ setzt.

$$B) U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_4 s.$$

Da $\xi_1 = x + yz + Z_1, \xi_2 = y + Z_2, \xi_4 = Z_4$ ist, so substituieren man, wenn $Z_4 \neq 0$ ist, $w_1 = Z'_4$, wobei $Z_4 \cdot \frac{dZ'_4}{dw_1} = 1$ sein muß, $\xi = \frac{x}{z} + Z'_1, \eta = y + Z'_2, \zeta = \frac{1}{z}$ und erreicht durch geeignete Wahl von Z'_1 und Z'_2 den Typus

$$(54) \quad \left[zp, p, q, (x+y)p + yq + s \right].$$

Ist $Z_4 = 0$, so erhält man (53).

$$c) U_1 = q, U_2 = p, U_3 = zp;$$

$$A) U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r.$$

*) Während Koch die Zusammensetzungen $(U_1 U_4) = \alpha U_1, (U_2 U_4) = \alpha U_2$ und $(U_3 U_4) = U_2 + \alpha U_3$ verwendet, sind die hier zu Grunde gelegten Zusammensetzungen in der Form verwendet, wie sie Lie in seinem Werke „Kontinuierliche Gruppen“, S. 588, XX, § 3–5 (Leipzig 1893) und im III. Bd. der Transformationsgruppen“ (§ 137) angibt. Dadurch sind in den folgenden Typen Verschiedenheiten hervorgerufen.

Da $\xi_1 = x + Z_1$, $\xi_2 = y + Z_2$ und $\xi_3 = -1$ ist, so ergibt sich der Typus

$$(55) \quad [q, p, zp, xp + yp - r].$$

Vergl. Koch IV. 2., wenn man dort x und y vertauscht.

Setzt man U_4 in der Form B) voraus, dann ergibt sich ein Widerspruch.

$$4. U_1 = p, U_2 = yp, U_3 = zp;$$

$$A) U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r.$$

$\xi_1 = x + Y_1$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = -y$. Man erreicht also den Typus

$$(56) \quad [p, yp, zp, xp - yr]$$

Vergl. Koch IV. 4.

$$B) U_4 = \xi_1 p + \xi_4 s$$

ist unzulässig infolge eines Widerspruches.

$$5. U_1 = p, U_2 = yp, U_3 = \varphi(y)p;$$

sowohl wenn

$$A) U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q$$

als auch wenn

$$B) U_4 = \xi_1 p + \xi_3 r$$

gesetzt wird, folgen Widersprüche.

$$6. U_1 = p, U_2 = q, U_3 = zp + w_1 q.$$

Man kann U_4 widerspruchslos nur in der Form

$$A) U_4 = \xi_1 p + \xi_2 q + \xi_3 r + \xi_4 s$$

voraussetzen und erhält $\xi_1 = x + Z_1$, $\xi_2 = y + Z_2$, $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = -1$.

Man kommt mithin auf den Typus

$$(57) \quad [p, q, zp + w_1 q, xp + yq - s].$$

VII. Zusammensetzung.

$$(U_i U_k) = 0, \left. \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\} = 1, 2, 3, 4. \quad (73.)$$

Diese Typen finden sich schon bei Zindler, Wiener S. Ber. Bd. 110, II; 1901.

Schluß:

Es haben also von den 57 hier gefundenen Typen 6 eine vierfache, 31 eine dreifache, 18 eine zweifache und 2 eine einfache Ausbreitung.

In 2 Typen treten fünf Veränderliche auf, in 21 vier, in 29 drei und in 5 zwei.