3. *Über die Abhängigkeit der Refraktion der Gase vom Drucke unterhalb einer Atmosphäre. I;* *von V. Posejpal.*

(Der böhmischen Kaiser Franz-Josef-Akademie in Prag für die Rozprawy vorgelegt am 22. Juni 1917.)

§ 1. [Die experimentelle Untersuchung der Funktion $n - 1 = f(p)$, wobei n der Brechungsindex eines Gases für eine bestimmte Lichtart, also $n - 1$ die sogenannte Refraktion, p den Gasdruck bedeuten, wurde, wie es der Bedeutung der genannten Funktion entspricht, das Ziel zahlreicher Arbeiten. Diese Bedeutung ist einerseits eine praktische, wenn es sich um die Reduktion der bei ungleichen Drucken ausgeführten Messungen der Refraktion handelt, andererseits und in erhöhtem Grade eine theoretische, nämlich für die Prüfung der Refraktionskonstanten. Zu diesem letztgenannten Zwecke ist noch der Verlauf der Abweichungen des Gases vom Boyle-Mariotteschen Gesetze, also die Funktion $\varrho = \varphi(p)$, wobei ϱ die Gasdichte ist, zu kennen. Auch diese zweite Funktion ist in zahlreichen Arbeiten untersucht worden. Indessen gelang eine befriedigende Erforschung beider Funktionen zuerst für das Gebiet höherer Drucke. Von Arbeiten, die sich im Druckgebiete unterhalb einer Atmosphäre bewegen, waren es erst diejenigen von neuester Zeit, die mit gutem Erfolge endeten. Eigentlich gilt das nur bezüglich der Funktion ϱ , welche von D. Berthelot und Lord Rayleigh festgestellt wurde. Die Funktion $n - 1$ ist dagegen für Drucke unterhalb einer Atmosphäre bis jetzt noch nicht befriedigend bekannt. Ihre Erforschung ist, und zwar auch erst in neuerer Zeit, nur durch eine einzige Arbeit, nämlich diejenige von W. Kaiser¹⁾, unternommen worden. Diese Arbeit, auf welche ich hiermit in bezug auf eine ausführliche Zusammenstellung und Diskussion der bisherigen Literatur

1) W. Kaiser, Ann. d. Phys. 18. p. 210. 1904; Inaug.-Diss. der Königl. Univ. zu Münster i. W., Brilon 1903.

dieses Gegenstandes verweise, wurde auf das Anregen und mit Beihilfe von Prof. Heydweiler ausgeführt, aber ihre Resultate sind, wie es der Autor selbst angibt, nicht sicher genug. So konnte also noch im Jahre 1914 St. Loria in seinem bekannten Buche über die Lichtbrechung in Gasen mit Recht sagen, daß in bezug auf geringe Drucke die Frage nach der Abhängigkeit des Brechungsexponenten von der Dichte noch als unbeantwortet zu bezeichnen ist.

Ich entschloß mich, an der schwierigen experimentellen Lösung dieser Frage teilzunehmen, in der Hoffnung, daß es mir meine neue, bisher noch nicht benutzte Meßmethode mit dem Jaminschen Instrumente, die ich im Jahre 1915 in den Verhandlungen (Rozpravy) der böhmischen Akademie in Prag zuerst und bald darauf im Auszuge auch in diesen Annalen beschrieben hatte¹⁾, erlauben wird, auf diesem Felde weiter vorzudringen, als es meinem Vorgänger gelungen ist. Im allgemeinen ist die Interferenzmethode, und speziell in Verbindung mit dem Jaminschen Instrumente, zweifellos die einzige, die hier befriedigende Resultate versprechen kann und Kayser ebenso wie die meisten übrigen Forscher auf diesem Gebiete benutzten auch wirklich das Jaminsche Instrument.

§ 2. Es bedeute L die Länge des Lichtweges von Wellenlänge λ (im Vakuum) in einer evakuierten Röhre des Jaminschen Instrumentes, und es bedeute weiter s die Anzahl von Interferenzfransen, um welche sich das Interferenzphänomen verschiebt, wenn wir dieselbe Röhre mit einem Gase vom Druck p und Brechungsexponenten n erfüllen. Es gilt dann in bekannter Weise die Gleichung

$$(1) \quad n - 1 = \frac{\lambda}{L} s.$$

Mißt man s , λ , L , so bekommt man dadurch den richtigen Wert vom Brechungsexponenten n beim Drucke p (und natürlich bei der gegebenen Temperatur, die man als unveränderlich betrachtet). Arbeiten wir bei verschiedenen Werten von p , so finden wir das Gesetz der Abhängigkeit $n - 1$ von p . Dieser Vorgang würde aber mit dem großen Nachteile verbunden sein, daß man bald sehr kleine, bald

1) Verhandlungen (Rozpravy) der II. Klasse der böhm. Akad. in Prag, Jahrg. XXIV, Nr. 17. 1915; Ann. d. Pdys. 49. p. 419—452. 1916.

ziemlich große Werte von p und s zu messen hätte, was besonders bei p das Erlangen einer hohen Meßgenauigkeit ausschließen würde. Man kann aber diesen Nachteil umgehen. Deriviert man nämlich die Gleichung (1) nach p , so bekommt man die Gleichung

$$(2) \quad \frac{dn}{dp} = \frac{\lambda}{L} \frac{ds}{dp}.$$

Erforscht man nun durch Messungen die Abhängigkeit der Funktion ds/dp vom Drucke, so ist dadurch die oben genannte Aufgabe im Grunde auch gelöst. Aber ds/dp wird sich mit dem Drucke nur allmählich ändern, indem es in erster Annäherung für eine Konstante gehalten werden kann. Es wird infolgedessen hier eine ziemlich schwächere Genauigkeit für die Druckmessungen p erforderlich sein als im Falle der Gleichung (1), wo $n - 1$ dem Drucke p in erster Annäherung gerade proportional ist. Nur für ds und dp wird man womöglich hohe Meßgenauigkeiten anstreben müssen. Hier ist die Sache aber eine ganz andere, indem wir das dp für alle Drucke p annähernd konstant behalten können, wo durch natürlich auch ds in engen Grenzen eingeschlossen bleiben wird. Die obere Grenze der Größe dp ist nun durch die Bedingung, daß das Verhältnis ds/dp mit genügender Annäherung dem Differentialquotienten gleich bleibe, bestimmt. Für die untere Grenze sind die zur Verfügung stehenden Meßmittel maßgebend, indem das Verhältnis ds/dp mit einer Genauigkeit wenigstens von 0,1 Proz. gemessen werden muß. Ich habe für dp 100 mm Quecksilber gewählt, wodurch das ds bei der Länge meiner Interferenzröhren annähernd 82 beträgt. Die Erlangung der oben angegebenen Präzision erfordert also, daß die Angaben von dp bis auf einige hundertstel Millimeter, diejenige von ds bis auf 0,03 einer Fransenbreite gesichert seien. Die schon erwähnte Interferenzbeobachtungsmethode erlaubt es, für das ds eine ziemlich größere als die oben genannte Genauigkeit zu erzielen. Es bleibt also nur noch den Genauigkeitsforderungen für dp zu genügen. Das wurde durch die Konstruktion eines besonderen Manometers, das ich im nächsten Paragraphen kurz beschreiben will, erzielt.¹⁾

1) Eine ausführliche Beschreibung ist in der Originalabhandlung in den Verhandlungen (Rozprawy) der II. Klasse der böhm. Akad. in Prag, Jahrg. XXVI. 1917, zu finden. Vgl. auch Bulletin.

§ 3. Das benutzte Manometer hat Quecksilberfüllung und ist einem Gay-Lussacschen Barometer analog. Die Messungen der Drucke p geschehen in der üblichen Weise durch das Kathetometer. Für die Druckdifferenzen dp wurde aber ein anderes Meßprinzip herangezogen, nach dem man die Verschiebung der beiden Quecksilberoberflächen nicht am Meniskusscheitel, sondern an der scharfen Grenzlinie zwischen Röhrenwand und Flüssigkeit mißt. Die Ablesungen geschehen durch ein horizontales, vertikal verstellbares Mikroskop mit hundertfacher linearer Vergrößerung. Das Mikroskop hat eine hundertteilige Okularskala, deren Skalenteil durch sorgfältige Ausmessung auf $0,01210 \pm 0,0002$ mm bewertet wurde. Die konstante Druckdifferenz dp wurde stets als eine Druckverminderung realisiert, wobei sich die zu beobachtende Grenzlinie in einem jeden von den beiden Manometerschenkeln zwischen je zwei an der äußeren Oberfläche der Röhrenwand angebrachten festen Marken bewegte. Jede Marke besteht aus drei feinen, in gegenseitiger Distanz von 0,4 mm durch einen scharfen Diamanten und unter Wasser mit Hilfe einer Teilmaschine gezogenen horizontalen Linien. Durch die Mittellinien dieser Marken sind an jedem Schenkel eine feste Strecke, deren Länge durch einen Komparator sorgfältigst gemessen wurde, definiert. An dem offenen Schenkel B beträgt diese Strecke bei 0°C $49,984 \pm 0,001$ mm, diejenige des oben geschlossenen und luftleeren Schenkels A $50,009 \pm 0,002$ mm. Das Verbleiben der Quecksilberoberfläche zwischen den genannten festen Marken bei jedem beliebigen Drucke p ist dadurch ermöglicht, daß der freie Schenkel A vermittelt zweier parallelen Glasschliffe in einer vertikalen Ebene beliebig drehbar und verstellbar ist. Ist das beobachtende Mikroskop an einen der Grenzlinie zwischen Glas und Quecksilber ganz nahen Teilstrich einer Marke scharf eingestellt, so bleibt dabei bei der gegebenen ziemlich starken Dicke der Röhrenwand die Grenzlinie selbst ganz unsichtbar und umgekehrt. Um von der einen scharfen Einstellung zu der anderen ohne jede Bewegung des Mikroskops selbst gelangen zu können, ist vor dem Mikroskopobjektiv ein leicht bewegliches Fensterchen angebracht, das aus gutem planparallelen Glase von passender Dicke ausgewählt ist.

Die zu messende Druckdifferenz dp ist durch die Summe

der beiden vertikalen Längen $x = 49,984 + \xi$, $y = 50,009 + \eta$, wobei ξ und η zwei durch das Mikroskop festzustellende kleine Brüche bedeuten, gegeben. Diese mikroskopische Feststellung von ξ und η erfordert im ganzen vier Ablesungen, je zwei an jedem Schenkel. Indem x und y in jedem Schenkel an eine feste, durch die Marken gegebene Strecke gebunden sind, bleibt das Verhältnis $y:x$ für alle Werte dieser Größen praktisch eine Konstante. Durch die Bestimmung dieser Konstante reduziert sich die Anzahl der Mikroskopablesungen bloß auf zwei, nämlich diejenigen am Schenkel B. Diese Bestimmung wurde auch ausgeführt und ergab:

$$y:x = 1,00111 \pm 0,00020.$$

Folglich ist

$$(3) \quad dp = x + y = x \cdot 2,00111,$$

wobei also der Fehler in dp 0,01 mm wesentlich nicht übersteigt.

§ 4. Die Verschiebung ds des Interferenzphänomens wurde durch die in § 1 schon angedeutete Methode gemessen. Sie besteht in der Benutzung eines Spektralphotometers in Verbindung mit dem Jaminschen Interferenzrefraktor, wodurch vor allem der große Vorteil entsteht, daß man bei Verwendung einer weißen Lichtquelle genügend monochromatische Messungen ohne jede Einschränkung ausführen kann. Ein zweiter Vorteil dieser Verbindung ist eine erhöhte Ablesungspräzision, die ein hundertstel einer Fransenbreite überholen kann. Das Photometer wurde auf die Wellenlänge der grünen Quecksilberlinie, $\lambda = 0,54628 \cdot 10^{-3}$ mm eingestellt. Als Lichtquelle diente eine 50kerzige, 12voltige Azotlampe mit einem praktisch linearen Leuchtkörper.

Die Interferenzröhren sind aus Glas, ihre Längen, ebenfalls mit dem Komparator gemessen, sind bei 16° C die folgenden:

$$\text{die Arbeitsröhre } \varrho, \dots L_{\varrho} = 494,650 \pm 0,008 \text{ mm,}$$

$$\text{die Hilfsröhre } r, \dots L_r = 495,189 \pm 0,011 \text{ mm.}$$

Der Gasdruck in der Hilfsröhre r wird stets dem betreffenden Anfangsdruck in ϱ annähernd gleichgehalten.

Was die Temperaturmessungen des untersuchten Gases betrifft, so wurde darauf geachtet, daß die Hundertstel eines

Celsiusgrades gesichert seien. Das benutzte Thermometer war ein altes normales Glasthermometer von Baudin, an dem mit Fernrohrablesung auch die Tausendstel noch geschätzt werden konnten. Das Thermometer befand sich direkt im Innern des gemessenen Gases in einer vertikalen Seitentröhre zu g . Indem sich natürlich das thermometrische Gefäßchen nicht direkt im Gange des Lichtstrahlenbündels in g befinden kann, so wurde noch ein Thermoelement Kupfer-Konstantan, dessen eine Lötstelle mitten im Lichtbündel, die andere fest an dem thermometrischen Zylinderchen lag, verwendet, um dadurch die Angaben des Glasthermometers zu korrigieren. Das Thermoelement wurde durch direkten Vergleich mit dem Normalthermometer Baudin geeicht.

§ 5. Das untersuchte Gas war die Luft. Sie kommt von der Südseite des Physikalischen Instituts und gelangt durch eine über 6 m lange, mitten zwischen dem Boden und der Decke des Laboratoriums liegende Glasluftleitung zuerst in einen großen (ca. 25 Liter) Glasballon, wo sie durch Kalziumchlorid getrocknet wird; von da geht sie in einen analogen Ballon mit Phosphorpentoxyd über; nachher tritt sie schon genügend trocken durch eine mit sterilisierter Watte gefüllte Drexlersche Flasche in eine analoge mit Kaliumhydroxyd gefüllte Flasche, wo sie von Kohlendioxyd befreit wird, um endlich, durch eine neue Schicht Watte passierend, in den eigentlichen Meßraum einzutreten. Die Glaswände dieses Raumes, dem zuerst die beiden Interferenzröhren und das Manometer angehören, werden gegen plötzliche Temperaturschwankungen durch einen starken Wattermantel geschützt. Die Temperaturschwankungen sind in der Tat sehr klein und verlaufen immer sehr langsam. Während einer vollständigen Messung, deren Ausführung durchschnittlich eine volle Stunde erheischt, pflegte die Temperaturänderung im Innern der Röhre g höchstens einige Hundertstel eines Grades auszumachen. Das Meßzimmer ist ein großes unterirdisches Laboratorium mit thermischer Korkisolation der Wände, und jede der verwendeten Lichtquellen wurde, um die Temperaturstabilität des Raumes möglichst wenig zu stören, immer nur während der kurzen Zeit der durch diese Lichtquelle bedienten Ablesung in Tätigkeit gehalten.

Die Messung der korrespondierenden Größen dp und ds

wurde bei jedem mittleren Drucke p immer zehnmal nacheinander ausgeführt. Die daraus resultierenden zehn Werte des Quotienten ds/dp wurden auf die mittlere Temperatur aller Messungen überhaupt, die sehr nahe 16°C betrug, reduziert und zum arithmetischen Mittel zusammengefaßt, das dann als der wahre, dem gegebenen Drucke p angehörige Wert der Funktion ds/dp angenommen wurde. In der Originalabhandlung findet man eine ausführliche Beschreibung des ganzen Meß- und Rechnungsverfahrens sowie eine detaillierte Skizze der Meßeinrichtung. Hier genügt es wohl, nur die Endresultate vollständig mitzuteilen.

Man findet sie in der Tab. 1; p ist der mittlere Druck, bei dem die Druckverminderung dp zehnmal wiederholt ausgeführt wurde. Darunter stehen nun die zehn Einzelwerte ds/dp auf 16° reduziert und ihr arithmetisches Mittel; das letztere mit der Angabe des mittleren in den Einheiten der letzten Dezimale ausgedrück-

ten Fehlers versehen. Betrachten wir näher diese arithmetischen Mittel, so sehen wir sogleich, daß sie unzweifelhaft eine mit p steigende Progression bilden; die Differenz zwischen dem ersten und dem letzten Gliede der Reihe übersteigt weit jeden

Tabelle 1.
(ds/dp) 16° .

$p = 64,6 \text{ mm}$	$p = 162,0 \text{ mm}$	$p = 262,0 \text{ mm}$	$p = 362,5 \text{ mm}$	$p = 462,0 \text{ mm}$	$p = 561,5 \text{ mm}$	$p = 661,0 \text{ mm}$
0,32800	0,32781	0,32816	0,32825	0,32845	0,32738	0,32918
0,32740	0,32767	0,32716	0,32828	0,33077	0,32927	0,32926
0,32739	0,32743	0,32799	0,32794	0,32805	0,32864	0,32923
0,32777	0,32770	0,32762	0,33125	0,32838	0,32906	0,32897
0,32817	0,32772	0,32764	0,32813	0,32841	0,32899	0,32942
0,32754	0,32801	0,32784	0,32828	0,32817	0,32857	0,32904
0,32756	0,32789	0,32838	0,32779	0,32837	0,32899	0,32836
0,32756	0,32767	0,32791	0,32825	0,32841	0,32929	0,32865
0,32735	0,32793	0,32780	0,32823	0,32838	0,32875	0,32943
0,32818	0,32815	0,32822	0,32737	0,32805	0,32863	0,32896
0,32769 ± 10	0,32780 ± 7	0,32787 ± 11	0,32838 ± 33	0,32856 ± 25	0,32898 ± 20	0,32914 ± 12

der angegebenen mittleren Fehler. Es ist also ds/dp keine Konstante, sondern eine steigende Funktion des Druckes.

Wir wollen zur Feststellung dieser Funktion in erster Annäherung eine lineare Abhängigkeit voraussetzen und setzen daher

$$(4) \quad \frac{ds}{dp} = \alpha_1 + \beta_1 p,$$

wobei die Konstanten α_1, β_1 in üblicher Weise durch die Methode der kleinsten Quadrate zu berechnen sind. Bevor wir aber an die diesbezüglichen Rechnungen herantreten, so wollen wir die Drucke p und dp , die für die Schwereintensität in Prag gelten, an die Normalintensität der Schwere reduzieren. Es geschieht dies durch die Multiplikation mit dem Koeffizienten 1,000412.¹⁾ Die Rechnungen durch die Methode der kleinsten Quadrate ergeben dann das Resultat

$$(4') \quad \begin{cases} \alpha_1 = 0,32725 \pm 0,00009, \\ \beta_1 = 0,00000259 \pm 0,00000021. \end{cases}$$

Tabelle 2.

p	$\frac{ds}{dp}$ beob.	$\frac{ds}{dp}$ berechn.	Δ
64,6	0,32755	0,32742	- 0,00013
162,1	0,32766	0,32767	+ 0,00001
262,1	0,32773	0,32793	+ 0,00020
362,6	0,32824	0,32819	- 0,00005
462,2	0,32842	0,32845	+ 0,00003
561,7	0,32874	0,32870	- 0,00004
661,3	0,32900	0,32896	- 0,00004

Die Tab. 2 bringt nun einen Vergleich der gemessenen Werte von ds/dp und derjenigen, die nach den Gleichungen (4) und (4') berechnet wurden. In der ersten Spalte stehen die in Normalmillimetern ausgedrückten Drucke p , in der zweiten die zugehörigen Werte von ds/dp nach der Beobachtung, in der dritten dieselben Werte nach der Berechnung; die vierte Spalte bringt die Differenzen Δ der berechneten und der be-

1) Vgl. Strouhal-Kucera, *Mechanika* (böhmisch), II. Aufl., Prag 1910. p. 542.

obachteten Werte dar.. Man sieht, daß die Beobachtung und Berechnung gut miteinander übereinstimmen; die Differenzen Δ bewegen sich durchwegs in den Grenzen der mittleren Beobachtungsfehler. Die angenommene lineare Abhängigkeit reicht also vollständig aus und drückt die gesuchte Funktion im gegebenen Bereiche genügend gut in den Grenzen der Beobachtungsfehler aus.

§ 6. Wir wollen die Verlässlichkeit unserer Messungen, die durch die Konstanten α_1, β_1 endgültig zusammengefaßt sind, einer Prüfung unterwerfen. Zu diesem Zwecke berechnen wir, sich an dieselben stützend, die Luftrefraktion für die gegebene Wellenlänge der grünen Quecksilberlinie nach dem in diesbezüglichen sehr zahlreichen Arbeiten üblichen Vorgange. Dieser Vorgang fußt bekanntlich auf der Voraussetzung der Unabhängigkeit des Quotienten ds/dp vom Drucke. [Dieser Quotient wird dann für einen dem Drucke von 760 mm nahen mittleren Druck p und eine Temperatur t festgestellt, wobei wohl die Druckdifferenz dp weit größer zu sein pflegt als die von uns benutzte, und sodann die Refraktion $n - 1$ aus der Gleichung (2) einfach berechnet, was also ergibt

$$n - 1 = \frac{\lambda}{L} \frac{ds}{dp} \cdot 760.$$

Die Reduktion von $n - 1$ auf die Temperatur 0° geschieht durch den Faktor $(1 + \alpha t)$, wobei α den thermischen Volumkoeffizienten bei konstantem Drucke bedeutet, so daß man endlich für die normalen Bedingungen des Druckes und der Temperatur bekommt:

$$(5) \quad n - 1 = \frac{\lambda}{L} \frac{ds}{dp} 760 (1 + \alpha t).$$

Setzt man in diese Gleichung unsere Werte ein, nämlich:

$$\frac{ds}{dp} = 0,82922 \pm 0,00025$$

(für $p = 760$ mm nach der Gleichung [4] berechnet),

$$\lambda = 0,54628 \cdot 10^{-3} \text{ mm,}$$

$$L = 494,650 \text{ mm,}$$

$$t = 16^\circ,$$

$$\alpha = 367,28 \cdot 10^{-5} \text{ (nach Chappuis),}$$

so bekommt man

$$10^6 (n - 1) = 292,54 \pm 0,20, \text{ für den Normaldruck 760 mm,}$$

$$10^6 (n - 1) = 292,66 \pm 0,20, \text{ für den Druck 760 mm in Prag.}$$

Die Angaben früherer Arbeiten findet man in der 4. Auflage der bekannten Tafeln von Landolt-Bernstein, mit Ausnahme der Zahl von Loria¹⁾. Ordnet man sie alle, die unserige mitbegriffen, der Größe nach in eine Reihe, so bekommt man die folgende Übersichtstabelle.

Tabelle 8.

Beobachter	$(n - 1) \cdot 10^6$
L. Lorenz 1880.	291,8
Kessler 1909	292,3
Scheel 1907	292,4
Ahrberg 1909	292,5
Chappuis und Rivière 1888	292,6
Posejpal 1917	292,7
Kayser und Runge 1893, St. Loria 1909	292,9
Benoit 1889, Rentschler 1908	293,0
Perreau 1896	293,3
Mascart 1877	293,4
Walker 1903	293,5
C. M. Cuthbertson (3) 1909	293,6
Koch 1909	293,7
Herrmann 1908, Gruschke 1910	294,6
Ketteler 1865	295,4

Wie wir sehen, so befindet sich die unserige Zahl zwar nicht gerade in der Mitte der Reihe, aber doch sehr nahe derselben, so daß also die Verlässlichkeit unserer Messungen eine gute ist. Wir haben in die Vergleichsreihe die der Schwereintensität in Prag, also des 50. Parallelkreises, entsprechende Zahl angenommen, da auch die Mehrzahl der übrigen Zahlen dieser Schwereintensität angenähert entspricht.

§ 7. Wir wollen nun die Abhängigkeit der Refraktion $n - 1$ vom Drucke bestimmen. Es genügt zu diesem Zwecke in die Gleichung (2) für ds/dp den Wert nach der Gleichung (4) einzusetzen und die Gleichung (2) nachher in den Grenzen von $0 - p$ zu integrieren. Wir schreiben das leicht zu be-

1) St. Loria, Ann. d. Pds. 20. p. 619. 1909.

stimmende Integral in der schon von Mascart eingeführten Form, nämlich:

$$(6) \quad n - 1 = K p (1 + \beta p) .$$

Es ist also, wie leicht einzusehen,

$$K = \frac{1}{L} \alpha_1, \quad \beta = \frac{1}{2} \frac{\beta_1}{\alpha_1},$$

was nach dem Einsetzen der schon sämtlich bekannten Werte der in die rechten Seiten dieser Gleichungen eintretenden Größen ergibt:

$$(6') \quad \begin{cases} 10^6 K = 0,36138 \pm 0,00010, \\ 10^8 \beta = 396 \pm 32, \end{cases}$$

wobei wieder wie sonst der Druck in Normalmillimetern Quecksilber ausgedrückt ist.

Die Konstante K hängt von der Wellenlänge ab, und ihr Gültigkeitsbereich ist folglich nur an die Wellenlänge, für welche sie bestimmt wurde, in unserem Falle also an $\lambda = 0,54623 \cdot 10^{-3}$ mm, gebunden.

Die Konstante β ist von der Wellenlänge unabhängig. Es ist dies eine Folge der Tatsache, daß die sogenannten Dispersionskonstanten

$$\frac{n_\lambda - 1}{n_{\lambda'} - 1},$$

wo λ und λ' zwei verschiedene Wellenlängen sind, vom Drucke nicht abhängen, wie es in neuester Zeit für mehrere Gase, unter ihnen auch für Luft, und für große Druckintervalle L. H. Siertsema und M. de Haas bewiesen haben.¹⁾

Die beiden Konstanten K und β sind in demselben Grade gesichert wie die Konstanten α_1 , β_1 , deren Verläßlichkeit im vorigen Paragraphen geprüft wurde. Dieser Sicherheitsgrad ist ganz ausreichend für die Konstante K , der bei weitem nicht jene theoretische Bedeutung zukommt, wie der Konstanten β . Wir wollen also in erster Linie einen Vergleich des von uns gefundenen Wertes von β mit denjenigen der früheren Forscher, solange sie überhaupt vorliegen, vornehmen.

Wie es schon anfangs gesagt wurde, ist in dem von uns behandelten Gebiete der Drucke unterhalb einer Atmosphäre

1) L. H. Siertsema u. M. de Haas, Physik. Zeitschr. 14. p. 568. 1913.

bis jetzt nur eine einzige Arbeit, nämlich diejenige von W. Kayser, durchgeführt worden. Nun gibt Kayser für Luft an:

$|\beta = 0,00000095$ mit einem möglichen Fehler $\pm 0,0000007$. Unser Wert $\beta = 0,00000396$ erscheint also mehr als viermal größer zu sein.

Die Unstimmigkeit beider Werte ist also eine vollständige. Doch muß uns diese Tatsache nicht allzuviel ärgern, da wir wissen, daß Kayser selbst den von ihm gefundenen Wert nicht für verläßlich hält.

Die Arbeiten aller übrigen Forscher beziehen sich auf Druckintervalle, die zwar auch bei Null anfangen, aber weit bis zu mehreren Atmosphären hin reichen. Es gehören hierher:

Mascart (1877) , mit $\beta = 72 \cdot 10^{-8}$,
 J. Chappuis und Rivière (1888) „ $\beta = 65 \cdot 10^{-8}$,
 Perreau (1896) „ $\beta = 90 \cdot 10^{-8}$.

Diese Zahlen, durchaus kleiner als die Kayser'sche, sind auf den ersten Blick mit unserer Zahl in einem noch größeren Widerspruch als die erstgenannte, indem sie 4—6mal kleiner sind als der von uns angegebene Wert. Beobachtet man aber dieselben näher, so bemerkt man sofort, daß sie auch untereinander nicht allzugut übereinstimmen; ihre gegenseitigen Differenzen übertreffen weit die zugelassenen Fehler. Dieser Umstand weist daraufhin, daß β vom Drucke abhängig sein muß und daß also die einfache Funktion (4), die für unsern Druckintervall vollständig ausreichte, für größere Druckintervalle nicht ausreichen wird. Wir sehen in der Tat aus der Tab. 4, bei welcher sich in der ersten Säule das

Tabelle 4.

Druckintervall	Mittel- druck p	β	$p\beta$	t°
0—760 mm	380	0,00000396	0,00150	16°
0—3400 mm	1700	0,00000090	0,00153	16°
300—6000 mm	3150	0,00000072	0,00227	22°
0—15000 mm	7500	0,00000065	0,00488	21°

Druckintervall, in dem β nach Angabe des Autors gültig sein soll, in der zweiten der Mitteldruck p dieses Intervalles befindet, daß die Werte β nach dem steigenden Drucke ge-

ordnet eine fallende Progression bilden. Also β fällt mit steigendem Drucke ab. Welches auch das Gesetz dieses Fallens sein mag, wir können immer in erster Annäherung an eine Proportionalität denken, so daß also das Produkt $p\beta$ für alle Drucke p konstant bleiben müßte. Die vierte Spalte derselben Tabelle zeigt nun, daß die ersten zwei Werte dieses Produktes wirklich mit einer großen Annäherung gleich sind, von da aber weiter, daß das Produkt $p\beta$ steigt. Da die Temperatur, die auf β auch einen Einfluß haben wird, für alle Drucke der Tabelle beinahe dieselbe ist, so muß man den Wertegang des Produktes $p\beta$ als vom Drucke p allein abhängig ansehen.

Wir finden also zuerst das wichtige Ergebnis, daß β eine Funktion des Druckes ist, so daß es mit steigendem Drucke fällt, anfangs steil, und zwar bis zu beinahe vier Atmosphären dem Drucke umgekehrt proportional, dann immer langsamer und langsamer.

Eine zweite, für uns nicht minder wichtige, aus der Tab. 4 sich ergebende Tatsache ist die, daß der von uns gefundene Wert der Größe β sich mit den Werten der übrigen Beobachter in einem sehr guten Einklange befindet.

Berechnet man nun jetzt nach der Gleichung (6) und (6') die Luftrefraktion für normale Druck- und Temperaturbedingungen, so bekommt man

$$\frac{1}{2}10^6(n-1) = 291,67 \pm 0,14.$$

Diese Zahl, die wir ihrer Natur nach als einen korrigierten Wert der Luftrefraktion halten müssen, stimmt von den in der Tab. 3 angeführten Zahlen fast vollständig mit der Lorenz'schen überein. Diese Übereinstimmung ist keine zufällige. L. Lorenz maß die Luftrefraktion für das Natriumlicht und kam zu der Zahl $291,08 \cdot 10^{-6}$. Wie man aus seiner Arbeit¹⁾ erkennt, bemühte er sich, diese Zahl mit großer Sorgfalt zu bestimmen und hat sie wiederholt gemessen aus dem Grunde, weil sie so weit von den damaligen Zahlen, namentlich denjenigen von Mascart und Ketteler, abwich. Indem man seine Arbeitsweise näher beobachtet, so sieht man, daß sie im wesentlichen mit derjenigen, die bei der Gleichung (1) (p. 632) besprochen wurde, identisch war, d. h. Lorenz maß die Verschiebung des Interferenzphänomens, die entsteht,

1) L. Lorenz, Wied. Ann. 11. p. 70. 1880.

wenn das Gas vom Drucke Null zum Drucke 760 mm steigt oder umgekehrt. Es wurde dort darauf hingewiesen, daß dieser Vorgang zu einem richtigen Werte für $n-1$ führen muß, wie auch $n-1$ vom Drucke abhängig sein mag. Die so gefundene Zahl bezieht sich auf den Normaldruck und die D -Linie. Da die Mehrzahl der Beobachter die Dispersion für die grüne Quecksilberlinie durch die Zahl $n - n_D = 7 \cdot 10^{-7}$, die auch dem Mittel aller in den Landolt-Bernsteinschen Tafeln angeführten Zahlen gleich ist, angibt, so folgt also nach Lorenz für die Luftrefraktion der grünen Quecksilberlinie die Zahl $291,78 \cdot 10^{-6}$, die mit unserer Zahl $291,67 \cdot 10^{-6}$ in den Grenzen der Beobachtungsfehler vollständig übereinstimmt.

Nach demselben Prinzip wie Lorenz, aber sonst nach einer ganz anderen Methode, arbeitete im Jahre 1907 Scheel, dessen Zahl sich in der Tab. 3 praktisch an zweiter Stelle zugleich mit der Zahl von Kessler befindet. Man sieht hier eine gewisse Genugtuung für L. Lorenz, dessen Zahl unverdienterweise für die am wenigsten richtige gehalten wurde. Es ist klar, daß man bei Arbeiten, die auf Grund des Quotienten $\Delta s / \Delta p$ operieren, für die Refraktion $n-1$ einen um so größeren Wert finden muß, je größer der mittlere Druck p dieses Quotienten ist, wodurch sich wahrscheinlich die großen Zahlen einiger Beobachter erklären lassen. Es wird von Interesse sein, diese Sache näher festzustellen. Bei einigen Autoren wird dies wohl schwer möglich sein, da sie den Mitteldruck p nicht angeben.

§ 8. Das Hauptinteresse, das zum Studium der funktionellen Abhängigkeit der Refraktion vom Drucke führt, liegt in der Aufgabe, die Unveränderlichkeit der sogenannten Refraktionskonstanten zu prüfen. Die allerwichtigste unter ihnen ist wegen ihrer theoretischen Begründung die Lorenz-Lorentzsche Konstante

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \frac{1}{\rho},$$

nachher die Konstante von Newton-Gladstone $n - 1/\rho$, die sich im Falle der Gase von der ersteren bloß durch einen Zahlenfaktor unterscheidet, indem beide mit großer Annäherung die Gleichung

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \frac{1}{\rho} = \frac{2}{3} \frac{n - 1}{\rho}$$

erfüllen. In unserem Falle genügt es also in erster Annäherung die Newton-Gladstonsche Konstante zu beobachten.

Wir können die Gasdichte ϱ für kleine Drucke befriedigenderweise durch eine analoge Funktion des Druckes, deren wir uns im Falle der Refraktion bedient hatten, ausdrücken. Wir haben somit neben der Gleichung

$$(6) \quad n - 1 = K p (1 + \beta p)$$

eine analoge Gleichung

$$(7) \quad \varrho = K_e p (1 + \beta_e p),$$

was durch die Division der beiden Gleichungen und bei Vernachlässigung aller höheren Potenzen von β_e ergibt

$$(8) \quad \frac{n-1}{\varrho} = C (1 + (\beta - \beta_e)p).$$

Soll also $n-1/\varrho$ eine vom Drucke unabhängige Konstante bleiben, so muß $\beta = \beta_e$ sein.

Man bestimmt β_e aus dem Verlaufe der Abweichungen vom Boyle-Mariotteschen Gesetze. Nach Berthelot drückt man diesen Verlauf für kleine Drucke durch die Gleichung

$$\frac{p_0 v_0}{p v} - 1 = a(p - p_0)$$

aus, wobei es zur Bestimmung von a genügt, zwei in dem betrachteten Druckintervalle womöglich gut gemessene Werte des Produktes $p v$ zu kennen. Berthelot hat sehr genaue Messungen für eine ganze Reihe von Gasen durchgeführt und die Größe a für Drucke unterhalb einer Atmosphäre bestimmt; aber die Luft ist in dieser Reihe nicht enthalten. Diese Messung hat Lord Rayleigh im Jahre 1905 durchgeführt mit einem Resultate von $a = 0,00000061$, welchen Wert wir für verläßlich halten können, wogegen die Angaben aller älteren Beobachtungen unsicher sind. Eine einfache Rechnung zeigt, daß es mit großer Annäherung $\beta_e = a$ ist, so daß wir also zum Vergleich folgende Werte bekommen:

$$\beta = 0,00000396,$$

$$\beta_e = 0,00000061$$

und folglich

$$\beta - \beta_e = 0,00000335.$$

Es ist also weit davon entfernt, daß β und β_e gleich groß seien, und somit ist für Drucke unterhalb einer Atmosphäre $n-1/\varrho$ keine Konstante.

Tabelle 5.

p mm	$\frac{n-1}{\varrho}$	$\frac{3}{2} \frac{n^2-1}{n^2+2} \frac{1}{\varrho}$
0	9974,6	9974,6
100	9977,9	9977,6
200	9981,3	9980,8
300	9984,6	9983,9
400	9988,0	9987,0
500	9991,3	9990,1
600	9994,6	9993,1
700	9998,0	9996,3
760	10000,0	9998,1

Die Tab. 5 erlaubt nun eine bequeme numerische Schätzung, wie weit sich $n - 1/\varrho$ von der Konstante entfernt, wobei es für den Druck einer Atmosphäre gleich 10000 gesetzt wurde. Wir sehen, daß es in dem Druckintervalle 0—760 mm beinahe um $\frac{1}{4}$ Proz. steigt, was also im ganzen wenig ist; sollten aber β und β_e ihre bezüglichen Werte auch für höhere Drucke beibehalten, so würde man alsbald einen ziemlich großen Zuwachs von $n - 1/\varrho$ erhalten. Dem ist aber nicht so; die Gleichungen (6) u. (7) gelten eben nur für kleine Drucke. Will man sie auch für größere Druckintervalle gelten lassen, so ist es erlaubt, aber dann verlieren β und β_e ihren Charakter von Konstanten und werden mit dem Drucke veränderlich. Das haben wir übrigens vom β im vorigen Paragraphen schon bewiesen und gezeigt, wie es mit dem Drucke abfällt. Der Verlauf von β_e mit dem Drucke ist ein analoger, und man kann ihn nach den Arbeiten von Regnault und Amagat beurteilen, wie es die folgende Übersichtstabelle zeigt, die in der ersten Reihe die Werte des Mitteldruckes p , darunter die Werte von β_e und β bringt.

p	570	2880	7500	12500	17500	22500	27500	32500 mm
$\beta_e \cdot 10^8 =$	61	54	52	50	51	51	43	39
$\beta \cdot 10^8 =$	396	90	72	65				

Wir sehen, daß β_e ebenfalls immer im Fallen begriffen ist; anfangs ist der Abfall auch ein wenig steiler, aber bei weitem nicht so steil wie bei β , so daß sich also beide Größen, die bei den Drucken unterhalb einer Atmosphäre so weit voneinander liegen, rasch einander nähern und bei einem Drucke um 7,5 m fast gleiche Werte annehmen. Also $n - 1/\varrho$,

welches in dem Druckintervalle 0—760 mm rasch steigt, wird weiter mit dem Drucke nicht in demselben Maße wachsen, sondern immer langsamer und langsamer, so daß es, bei Drucken über 3 m anfangend, über das ganze Intervall der nicht allzu hohen Drucke ziemlich gut unveränderlich bleiben wird. Das stimmt mit der Erfahrung überein. Die meisten Arbeiten über die Refraktionskonstanten bewegen sich in den Druckintervallen von 4—40 Atm. und weisen ziemlich einstimmig darauf hin, daß

$$\frac{n-1}{\varrho} \text{ ebenso wie } \frac{n^2-1}{n^2+2} \frac{1}{\varrho}$$

praktisch unveränderlich bleiben. Für sehr hohe Drucke bleibt das Feld noch unerforscht.

Man kann für Drucke bis zu 100 m für die Lorenz-Lorentzsche Konstante mit sehr großer Annäherung setzen

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} \frac{1}{\varrho} = \frac{n-1}{\varrho} \frac{2}{2Kp(1+\beta p)+3}$$

Der Korrektionsfaktor wird die Tendenz haben, das Wachsen der Hauptgröße, welche eben die Newton-Gladstonsche Konstante ist, zu beschwichtigen. Für Drucke unterhalb einer Atmosphäre ist dieser Einfluß natürlich im ganzen unbedeutend, wie es die dritte Spalte der Tab. 5 zeigt, in welcher sich, in gleichem Maße ausgedrückt, die Werte von

$$\frac{3}{2} \frac{n^2-1}{n^2+2} \frac{1}{\varrho}$$

befinden. Bei höheren Drucken dagegen wird sich dieser Einfluß schon geltend machen, so daß es auch vorkommen kann, daß $n-1/\varrho$ wohl mit dem Drucke mäßig steigen, die Lorenzsche Konstante aber fallen wird. Das bemerkt man tatsächlich an den Zahlen, die Magri¹⁾ in seiner bis zu Drucken von 200 Atm. reichenden Arbeit erhalten hat. Da für Drucke von 1—7 Atm. die Differenz $\beta - \beta_e$ immer ziemlich groß bleibt, so kann man erwarten, daß in diesem Druckintervalle die Lorenzsche Konstante besser als die Newtonsche gültig sein wird.

Die hohe Wertdifferenz der Konstanten β und β_e für Drucke unterhalb einer Atmosphäre ist höchst bemerkenswert, und ihre Sicherstellung bildet ein wichtiges Resultat der vor-

1) L. Magri, Physik. Zeitschr. 6. p. 629. 1905.

liegenden Arbeit, ebensogut wie die Feststellung der Tatsache, daß β mit dem Drucke rasch fällt, daß also dn/dp keine lineare Funktion des Druckes sein kann.

Zusammenfassung. — 1. Es war die Aufgabe der vorliegenden Arbeit, die Abhängigkeit der Luftrefraktion vom Drucke unterhalb einer Atmosphäre zu studieren. Zum Ausdruck dieser Abhängigkeit wurde die Mascartsche Formel $n - 1 = K p (1 + \beta p)$ benutzt, und es wurde, indem der Druck in Normalmillimetern Quecksilber gemessen wird, für β die Zahl 0,00000396 gefunden. Es wurde im Lichte der grünen Quecksilberlinie gearbeitet, für welches der Wert der Konstanten K zu $0,36138 \cdot 10^{-6}$ und folglich die Refraktion $n - 1$ für die Normalbedingungen zu $291,67 \cdot 10^{-6}$ bestimmt wurden. Dieser Wert der Refraktion stimmt vollständig mit demjenigen von L. Lorenz überein.

2. Es wurde festgestellt, daß β stark vom Drucke abhängig ist. Im Druckintervalle von 0—3400 mm ist es dem Drucke sehr angenähert umgekehrt proportional, von da ab sinkt es mit steigendem Drucke immer langsamer herab.

3. Bei Drucken unterhalb einer Atmosphäre wächst die Refraktion $n - 1$ mit dem Drucke weit schneller als die Gasdichte ρ . Von den beiden Refraktionskonstanten von Lorenz-Lorentz und Newton-Gladstone ist also keine in dem betrachteten Druckintervalle gültig; beide wachsen mit dem Drucke.

Die vorliegende Arbeit, der eine weitere Fortsetzung in zwei Richtungen folgen wird, indem einerseits das Druckintervall erweitert, andererseits auch zu anderen Gasen gegriffen werden soll, ist in den Laboratorien des Physikalischen Institutes der böhmischen Universität in Prag ausgeführt worden, und es ist mir eine angenehme Aufgabe, abermals herzlichen Dank dem Institutsdirektor, Hrn. k. k. Hofrat Prof. Dr. V. Strouhal, ebenso wie auch seinem Stellvertreter, Hrn. Prof. Dr. B. Kucera, für all das wohlwollende Entgegenkommen, mit dem mir die Institutsarbeitsmittel zur Verfügung gestellt wurden, zu zollen.

Prag, Juni 1917.

(Eingegangen 17. Oktober 1917.)