Note über die Gleichung der auf einer Ebene abbildbaren Flächen.

Von A. BRILL in DARMSTADT.

Herr Clebsch, welcher zuerst*) die auf einer Ebene eindeutig abbildbaren Flächen näher betrachtet und die Eigenschaften der Abbildung für das Studium der Flächen selbst fruchtbar gemacht hat, geht in seiner Darstellung von der Gleichung, bezw. gewissen geometrischen Eigenschaften der Fläche aus, und leitet hieraus die Form der Abbildungsfunktionen ab. Wenn es sich nun umgekehrt darum handelt, von bekannten Abbildungsfunktionen auf die Gleichung der Fläche in Cartesischen Coordinaten überzugehen, so bedarf man eines symmetrischen Verfahrens für die Elimination der Variablen ξ_1, ξ_2, ξ_3 (homogen) der Abbildungsfunktionen φ aus den Gleichungen:

$$(1) \quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4,$$

wo:

$$\varphi_i = a_i \xi_1^m + b_i \xi_1^{m-1} \xi_2 + c_i \xi_1^{m-1} \xi_3 + d_i \xi_1^{m-2} \xi_2^2 + \dots$$

ist. Ein solches Verfahren wollen wir im Folgenden kurz angeben. Man eliminiere aus den Gleichungen:

$$\varphi_1 = 0 \quad \varphi_2 = 0 \quad \varphi_3 = 0$$

die Variablen nach der bekannten Sylvester'schen Methode**).

Die Resultante R ist in Bezug auf die Coefficienten jeder der drei Gleichungen vom Grade m^2 . Dieselbe stellt sich in Form einer Determinante dar, deren einzelne Elemente — bis auf diejenigen von $3 \cdot \frac{m(m-1)}{2}$ Reihen — aus dreigliedrigen Determinanten, wie $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3$, $\Sigma \pm a_1 b_2 d_3$, $\Sigma \pm b_1 c_2 d_3$, etc. bestehen, welche je aus 3 Vertikalreihen des unvollständigen Systems:

$$(2) \quad \left\| \begin{array}{cccc} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \dots \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \dots \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \dots \end{array} \right\|$$

*) Diese Annalen, Bd. I., S. 253.

**) Siehe z. B. Salmon, Algebra der lin. Transf., deutsch v. Fiedler. § 52. Mathematische Annalen. V.

der Coefficienten von φ_1 , φ_2 und φ_3 sich zusammensetzen. Auch jene $3 \frac{m(m-1)}{2}$ Reihen lassen sich so zu je dreien anordnen, dass sich die Elemente zu dreigliedrigen Determinanten der oben angegebenen Form gruppieren.

Die Resultante R der 3 Formen $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$ lässt sich somit immer als ganze homogene Function m^{ten} Grades der dreigliedrigen Determinanten des Systems (2) der Coefficienten darstellen.

Dass dies möglich sein musste, war a priori aus der Eigenschaft der Resultante, eine Combinante der 3 Formen*) zu sein, einzusehn.

Ich behaupte nun, dass man die Gleichung der durch die Functionen (1) auf die Ebene abgebildeten Fläche, in den homogenen Coordinaten $x_1 \dots x_4$ geschrieben, erhält, wenn man in der Gleichung:

$$R = 0$$

jede einzelne dreigliedrige Determinante des Systems (2), aus welchen sich R zusammensetzt, dadurch in eine viergliedrige verwandelt, dass man die drei Verticalreihen durch Zufügung je des entsprechenden Coefficienten von φ_4 vervollständigt, und als vierte Verticalreihe die Elemente: x_1, x_2, x_3, x_4 zufügt, so dass z. B.:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{in:} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & x_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & x_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & x_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & x_4 \end{vmatrix}$$

verwandelt wird. Man erkennt hieraus unmittelbar, dass der Grad der Fläche im Allgemeinen (vgl. diese Ann. IV, S. 510) $\equiv m^2$ ist.

Bezüglich des Beweises möge die Bemerkung genügen, dass, wenn man statt der 4 Gleichungen:

$$\varrho \cdot x_i = \varphi_i,$$

wo ϱ ein Proportionalitätsfactor ist, 3 lineare Combinationen derselben nimmt, deren jede die Eigenschaft hat, dass für sie die linke Seite verschwindet, und für diese die Resultante bildet, dieselbe leicht auf die oben angegebene Form gebracht werden kann.

Als Beispiel möge die vielbehandelte Steiner'sche Fläche dienen. Für diese sind nach Herrn Weierstrass die φ allgemeine quadratische Formen:

$$\varphi_i = a_i \xi_1^2 + b_i \xi_2^2 + c_i \xi_3^2 + 2f_i \xi_2 \xi_3 + 2g_i \xi_3 \xi_1 + 2h_i \xi_1 \xi_2 \\ i = 1, \dots 4.$$

Man bildet nach Herrn Hesse die Resultante der 3 Functionen $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$, indem man zu denselben noch die 3 ersten partiellen Differential-

*) Salmon, a. a. O. § 157. Den allgemeinen Beweis dieses Satzes hat Herr Gordan gegeben, diese Ann. Bd. V, S. 116.

quotienten der Jacobi'schen Determinante zufügt, und die Determinante der Coefficienten bildet. Diese lässt sich durch Combination der Reihen noch etwas vereinfachen. Ersetzt man dann die dreigliedrigen Determinanten durch die entsprechenden viergliedrigen, so erhält man als *Gleichung der Steiner'schen Fläche* in den homogenen Coordinaten $x_1 \dots x_4$:

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & -4(aghx) & 2(abfx) & 0 & \frac{1}{2}(abcx) & (cahx) & (abgx)+2(ahfx) \\ 0 & 0 & -4(bhfx) & 2(bcgx) & (bchx)+2(bfgx) & \frac{1}{2}(bcax) & (abfx) \\ 0 & 2(cahx) & 0 & -4(cfgx) & (bcgx) & (caf x)+2(cghx) & \frac{1}{2}(cabx) \\ x_1 & a_1 & b_1 & c_1 & f_1 & g_1 & h_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 & c_2 & f_2 & g_2 & h_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 & c_3 & f_3 & g_3 & h_3 \\ x_4 & a_4 & b_4 & c_4 & f_4 & g_4 & h_4 \end{vmatrix}$$

Die rechte Seite wird für $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$, d. h. wenn die 4 Kegelschnitte $\varphi_i = 0$ einen Punkt gemeinsam haben, identisch Null. Ersetzt man dann die Determinante durch die eine nicht identisch verschwindende Unterdeterminante, welche in den x vom 3^{ten} Grad ist, so repräsentirt dieselbe, gleich Null gesetzt, die Gleichung der windschiefen Fläche 3^{ter} Ordnung, auf welche sich für diesen Fall die Steiner'sche Fläche reducirt.

Darmstadt, im Oct. 1871.