UN NOUVEAU CAS DE CONVERGENCE DES SÉRIES DE FOURIER.

Par M. Ch.-J. de la Vallée Poussin (Louvain).

Adunanza del 12 febbrajo 1911.

1. Soit $f(x)$ une fonction sommable (au sens de M. LEBESGUE) dans l'intervalle $(0, 2\pi)$; x un point de cet intervalle. La somme S_n des $n + 1$ premiers termes de la série de FOURIER de $f(x)$ a pour expression connue

$$S_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{x}{2}}^{\pi - \frac{x}{2}} f(x + 2u) \frac{\sin(2n + 1)u}{\sin u} du.$$

Soit ε un nombre positif donné d'une petitesse arbitraire. Quand n croît indéfiniment, la valeur asymptotique de S_n est, d'après un théorème connu de M. LEBESGUE ¹⁾, la même que celle de

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x + 2u) \frac{\sin(2n + 1)u}{\sin u} du,$$

ou encore que celle de

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x + 2u) \frac{\sin(2n + 1)u}{u} du;$$

car la différence de ces deux intégrales est de la forme $\int \varphi(u) \sin(2n + 1)u du$, où φ est sommable et cette intégrale tend vers zéro pour $n = \infty$, en vertu du théorème déjà invoqué de M. LEBESGUE. En définitive, la valeur asymptotique de S_n est la même que celle de la dernière intégrale, qui s'écrit encore

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\varepsilon} [f(x + 2u) + f(x - 2u)] \frac{\sin(2n + 1)u}{u} du.$$

Pour prouver la convergence et trouver la somme de la série de FOURIER, il suffit donc de prouver l'existence et de trouver la limite pour $k = \infty$ de l'expression

$$V = \frac{1}{\pi} \int_0^{\varepsilon} [f(x + 2u) + f(x - 2u)] \frac{\sin ku}{u} du.$$

¹⁾ *Leçons sur les séries trigonométriques* (Paris, Gauthier-Villars, 1906).

2. Posons

$$F(u) = \frac{1}{2u} \int_0^u [f(x+2u) + f(x-2u)] du.$$

Il vient, par une intégration par parties, effectuée sur $f(x+2u) + f(x-2u)$,

$$\frac{\pi}{2} V = F(\varepsilon) \sin k\varepsilon - \int_0^\varepsilon F(u) k \cos ku du + \int_0^\varepsilon F(u) \frac{\sin ku}{u} du.$$

Voici maintenant l'hypothèse qui va nous conduire à une nouvelle règle de convergence, ce sera que $F(u)$ est à variation bornée dans l'intervalle $(0, \varepsilon)$.

On a, dans ce cas, par un théorème classique,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\varepsilon F(u) \frac{\sin ku}{u} du = \frac{\pi}{2} F(+0).$$

Il suffit donc pour établir que V , donc que la série de FOURIER, converge vers $F(+0)$ au point x , de prouver que l'ensemble des deux termes précédents :

$$F(\varepsilon) \sin k\varepsilon - \int_0^\varepsilon F(u) k \cos ku du,$$

est aussi petit que l'on veut avec ε .

Or cette expression est la différence des deux quantités :

$$[F(\varepsilon) - F(+0)] \sin k\varepsilon, \quad \int_0^\varepsilon [F(u) - F(+0)] k \cos ku du.$$

Il suffit donc de prouver que chacune d'elles est aussi petite que l'on veut avec ε .

C'est évident pour la première qui est aussi petite que l'on veut avec $F(\varepsilon) - F(+0)$. Reste à considérer la seconde.

Soit $T(u)$ la variation totale de $F(u)$ dans l'intervalle $(0, u)$. Cette fonction étant positive et non décroissante, on a, par le second théorème de la moyenne, ε' étant $< \varepsilon$,

$$\int_0^\varepsilon T(u) k \cos ku du = T(\varepsilon) \int_{\varepsilon'}^\varepsilon k \cos ku du.$$

On a, pour les mêmes raisons, ε'' étant aussi $< \varepsilon$,

$$\int_0^\varepsilon [T(u) - F(u) + F(+0)] k \cos ku du = [T(\varepsilon) - F(\varepsilon) + F(+0)] \int_{\varepsilon''}^\varepsilon k \cos ku du.$$

La quantité qui nous occupe est la différence des deux intégrales que nous venons de transformer. Elle est donc bien aussi petite que l'on veut avec ε , car ces deux intégrales sont aussi petites que l'on veut avec $T(\varepsilon)$ et $F(\varepsilon) - F(+0)$, puisque $\int k \cos ku du$ est de valeur absolue moindre que 2.

On peut donc formuler le théorème suivant :

3. THÉORÈME. — Si la fonction $f(x)$ est sommable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ et que

la fonction ²⁾

$$F(u) = \frac{1}{2u} \int_0^u [f(x+u) + f(x-u)] du$$

soit à variation bornée quand u tend vers zéro, la série de FOURIER de $f(x)$ converge vers $F(+0)$ au point x compris dans l'intervalle $(0, 2\pi)$.

4. Le criterium précédent renferme comme cas particulier celui de $f(x)$ à variation bornée, car, si une fonction est croissante, sa valeur moyenne l'est aussi.

Nous allons montrer que, $f(x)$ étant supposée continue dans le voisinage du point x , ce criterium renferme aussi comme cas particulier celui qui est relatif à l'existence de l'intégrale

$$\int_0^u |\varphi(u)| \frac{du}{u},$$

où l'on a posé, en abrégé,

$$\varphi(u) = f(x+u) + f(x-u) - 2f(x).$$

Il faut, en effet, montrer pour cela que l'existence de cette intégrale entraîne celle de

$$\int_0^u |F'(u)| du.$$

Or $F'(u)$ a pour valeur (dans le voisinage de $u=0$)

$$\frac{f(x+u) + f(x-u)}{2u} - \frac{1}{2u^2} \int_0^u [f(x+u) + f(x-u)] du,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{\varphi(u)}{2u} - \frac{1}{2u^2} \int_0^u \varphi(u) du.$$

Par conséquent, on a

$$\int_0^u |F'| du < \int_0^u \left| \frac{\varphi(u)}{2u} \right| du + \int_0^u \frac{du}{2u^2} \int_0^u |\varphi(u)| du.$$

Par le changement de la variable d'intégration u en ut , l'inversion des intégrations, puis un nouveau changement de u en $u:t$, cette dernière intégrale double devient successivement ³⁾:

$$\int_0^u \frac{du}{2u} \int_0^1 |\varphi(ut)| dt = \int_0^1 \frac{dt}{2} \int_0^u |\varphi(ut)| \frac{du}{u} = \int_0^1 \frac{dt}{2} \int_0^{ut} |\varphi(u)| \frac{du}{u}.$$

Elle est donc moindre que

$$\frac{1}{2} \int_0^u |\varphi(u)| \frac{du}{u}.$$

Il vient donc, en définitive,

$$\int_0^u |F'| du < \int_0^u \left| \frac{\varphi(u)}{u} \right| du,$$

ce qui prouve la proposition.

²⁾ On écrirait $F\left(\frac{u}{2}\right)$ dans la notation précédente.

³⁾ Ces transformations ne soulèvent d'ailleurs aucune objection.

Dans le raisonnement précédent, nous avons supposé, pour plus de facilité, que la fonction $f(x)$ était continue dans le voisinage du point x . Il y a lieu d'observer que la continuité au seul point x suffit. En effet, l'expression trouvée pour F' reste valable sauf dans un ensemble de points de mesure nulle, il reste donc légitime de l'introduire dans les intégrales, et les conclusions subsistent.

Louvain, le 8 février 1911.

CH.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN.