Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck.

Von

M. Dehn in Göttingen.

Inhalt.

Seite

Einleitung 405

Capitel I.

Coordinatensystem und Streckenrechnung.

§ 1. Ideale Elemente (Punkte, Geraden, Ebenen) 406

§ 2. Pol und Polare 408

§ 3. Einführung einer Pseudogeometrie 410

1. Einführung von Pseudoparallelen 410
2. Pseudocongruenz von Strecken 413
3. Pseudocongruenz von Winkeln 418
4. Der erste Pseudocongruenzsatz 419

§ 4. Einführung der Streckenrechnung 422

Capitel II.

Congruenz und Projectivität.

§ 5. Fundamentalsatz 424

§ 6. Beziehung zwischen Congruenz und Pseudocongruenz 426

§ 7. Der zweite Legendre'sche Satz 429

Capitel III.

Beziehungen zwischen den Hypothesen über die Winkelsumme im Dreieck und den Hypothesen über Parallelen.

§ 8. Die Nicht-Legendre'sche Geometrie 431

§ 9. Die Semi-Euklidische Geometrie 436

§ 10. Der erste Legendre'sche Satz in der elliptischen Geometrie 438

Einleitung.

Die Grundlage der folgenden Untersuchungen bildet die Abhandlung von Herrn Professor Hilbert über die Grundlagen der Geometrie.*) In dieser wird ein System von Axiomen aufgestellt, das in fünf Gruppen zerfällt. Die erste Gruppe enthält die Axiome der Verknüpfung — z. B.: Zwei von einander verschiedene Punkte A, B bestimmen stets eine Gerade a. Die zweite Gruppe fasst die Axiome der Anordnung zusammen — z. B.: Wenn A, B, C Punkte einer Geraden sind, und B zwischen A und C liegt, so liegt B auch zwischen C und A. Die dritte Gruppe besteht aus dem bekannten Axiom der Parallelen (dem Euklidischen Axiom); die vierte Gruppe enthält die Axiome der Congruenz und die fünfte endlich das *„Archimedische“ Axiom.* Das letztere lautet:

Es sei A_1 ein beliebiger Punkt auf einer Geraden zwischen den beliebig gegebenen Punkten A und B; man construire dann die Punkte $A_2, A_3, A_4, \ldots$, so dass A_1 zwischen A und A_2, ferner A_2 zwischen A_1 und A_3, ferner A_3 zwischen A_2 und A_4 u. s. w. liegt und überdies die Strecken

$$AA_1,\ A_1A_2,\ A_2A_3,\ A_3A_4, \ldots$$

einander gleich sind; dann giebt es in der Reihe der Punkte $A_2, A_3, A_4, \ldots$ stets einen solchen Punkt A_n, so dass B zwischen A und A_n liegt.

In der Festschrift wird überall der Grundsatz befolgt, „eine jede sich darbietende Frage in der Weise zu erörtern, dass zugleich geprüft wird, ob ihre Beantwortung auf einem vorgeschriebenen Wege mit gewissen eingeschränkten Hilfsmitteln möglich oder nicht möglich ist.“**) In einer Prüfung dieser Natur besteht die vorliegende Arbeit.

Bekanntlich hat Legendre bei seinen Forschungen über den Beweis des Parallelenaxioms zwei wichtige Sätze aufgestellt:

1) *In einem Dreieck kann die Summe der drei Winkel niemals grösser als zwei Rechte sein.*

2) *Wenn in irgend einem Dreieck die Summe der drei Winkel gleich zwei Rechten ist, so ist sie es in jedem Dreieck.*

Beim Beweise dieser Sätze hat Legendre wesentlich das oben angeführte Archimedische Axiom benutzt. Nun gelingt es — Euklid hat dies allerdings nicht gethan —, ohne das Archimedische Axiom eine Geometrie aufzubauen, und es erhebt sich so die wichtige Frage: *Gelten in einer solchen Geometrie nothwendig die Legendre'schen Sätze?* oder in anderen Worten: *Kann man die Legendre'schen Sätze ohne irgend ein Stetigkeitspostulat beweisen, d. h. ohne vom Archimedischen Axiom Gebrauch zu machen?* Es besteht, wie wir im Folgenden zeigen wollen, in dieser Be-

*) Festschrift zur Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals. Leipzig 1899.

**) S. Festschrift, S. 89.

ziehung ein merkwürdiger Unterschied zwischen den beiden Theoremen: Während das *zweite* sich auf Grund der ersten, zweiten und vierten Axiomgruppe (die dritte Gruppe, das Euklidische Axiom, dürfen wir selbstverständlich nicht benutzen) *beweisen lässt*, ist dasselbe für das *erste unmöglich*. Um nun den Beweis für diese Behauptung zu erbringen, müssen wir eine neue Nicht-Euklidische Geometrie aufstellen, welche wir als eine *„Nicht-Legendre'sche" Geometrie* bezeichnen wollen.

Capitel I.

Coordinatensystem und Streckenrechnung.

§ 1.

Ideale Elemente (Punkte, Geraden, Ebenen).

Durch die Axiome der Verknüpfung ist zwar gesagt, dass sich zwei verschiedene Geraden nur in *einem* Punkte schneiden können, aber dass sie sich, wenn sie in einer Ebene liegen, immer schneiden, vermögen wir nicht zu versichern. Im Gegentheil, wir können aus dem Satz vom Aussenwinkel sofort folgern, dass durch jeden Punkt B ausserhalb einer Geraden a mindestens *eine* Gerade b geht, welche a nicht schneidet. Andrerseits können wir aber die Ebene der beiden Geraden auf eine andere so von einem Punkte aus projiciren, dass die Projectionen jener beiden sich in der zweiten Ebene *„wirklich"* schneiden. Demzufolge sagt man: Die beiden Geraden a und b bestimmen einen *„idealen" Punkt* in ihrer Ebene und eine dritte Gerade geht durch diesen Punkt hindurch, wenn sie in der Projection durch den entsprechenden „wirklichen" Punkt hindurchgeht. Ebenso kann man *ideale Gerade* als Schnitt zweier sich „wirklich" nicht schneidenden Ebenen einführen, oder auch als Verknüpfung zweier idealer Punkte, die nicht auf ein und derselben wirklichen Geraden liegen. Endlich kann man auf entsprechende Weise *ideale* Ebenen definiren. Wie bei Pasch, Vorlesungen über Geometrie §§ 5, 6, 7, 8 gezeigt ist, erfüllen die Elemente der so erweiterten Geometrie alle Axiome der Verknüpfung.

Nicht ganz so unmittelbar können wir dasselbe von den Axiomen der Anordnung aussagen. Denn es leuchtet ein, dass der Begriff „zwischen", kurz ausgedrückt, nicht invariant gegenüber dem Projiciren ist. Man kann sich deshalb von einer gewissen Willkür in den Festsetzungen unmöglich frei machen, die dazu da sind, auch den „Zwischen"-Axiomen Geltung zu verschaffen. Am Einfachsten verfährt man folgendermassen*): Wir nehmen auf jeder Geraden einen idealen Punkt als *„Normalpunkt"* an und

*) S. Pasch, l. c. § 9.

sagen: A liegt „zwischen" B und C, wenn das Punktepaar A und der Normalpunkt das Punktepaar B, C trennt. Eine eindeutige Definition des Begriffes „*Trennen*" ist aber auf Grund der vorhergehenden Einführung idealer Elemente leicht zu bewerkstelligen. Denn dieser Begriff ist, wie man sich leicht überzeugt, invariant gegenüber dem Projiciren. Die Normalpunkte in ihrer Gesammtheit nimmt man als die Punkte einer idealen Ebene, *der Normalebene*, an. In jeder anderen Ebene liegen demgemäss sämmtliche Normalpunkte auf einer idealen Geraden, der *Normalgeraden*. In Folge dieser Festsetzungen *gelten die Axiome der Anordnung für sämmtliche ideale und wirkliche Elemente mit Ausnahme der Elemente der Normalebene.*

Dann können wir aber für unsere erweiterte Geometrie den *Satz von Desargues über perspective Dreiecke* beweisen, den wir, weil alle Geraden in unserer Geometrie sich schneiden, folgendermassen formuliren können:

Wenn zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ in einer Ebene so liegen, dass je zwei entsprechende Seiten AB und $A'B'$, AC und $A'C'$, BC und und $B'C'$ sich in drei Punkten E, D, F einer Geraden schneiden, so schneiden sich die Verbindungslinien entsprechender Ecken AA', BB', CC' in einem Punkte und umgekehrt.

Und zwar gilt dieser Satz für alle Elemente jeder Ebene ohne Ausnahme, einschliesslich der „Normalelemente". Denn angenommen, es fielen Punkte wegen der Lage der Ausgangsfigur oder der Lage der beim Beweise benutzten Hülfselemente, oder eine Gerade fiele mit einer Normalgeraden, eine Ebene mit der Normalebene zusammen, so würden wir eine andere passende ideale Ebene als Normalebene annehmen und dann für die specielle Lage der Elemente der Figur den Satz beweisen. Dann ist der Satz aber auch richtig, wenn wir eine ganz beliebige andere Normalebene wählen.

Denn ein reiner Schnittpunktsatz gilt natürlich unabhängig davon, welche specielle Festsetzungen wir für die Anordnung der Punkte im Raume treffen.

Eine andere Einführung idealer Elemente giebt Schur, Ann. 39, auf Grund des Satzes von der Eindeutigkeit der Construction des vierten harmonischen Punktes. Zum Schluss sei bemerkt, dass man das Problem vielleicht am einfachsten mittels einer dritten Methode lösen kann, die sich durchaus an die Untersuchung in der Festschrift § 24 anschliesst. Dort wird mit Hülfe der ebenen Axiome der ersten und zweiten Gruppe und des Desargues'schen Satzes eine Streckenrechnung aufgestellt. Freilich wird dabei aus Gründen der Vereinfachung das Parallelenaxiom benutzt, was wir bei unseren Ueberlegungen natürlich stets vermeiden müssen. Aber dieser Uebelstand ist sicherlich keine Nothwendigkeit. Mit Hülfe der Streckenrechnung wird dann bewiesen, dass die Gleichung der Geraden eine lineare Gleichung in den Coordinaten ist. Dadurch ergiebt sich dann leicht, dass die oben entwickelte Erweiterung der Geometrie möglich ist und dass im Speciellen der Desargues'sche Satz auch für die erweiterte Geometrie gültig ist.

§ 2.

Pol und Polare.

Im Folgenden nehmen wir an, dass die *ebenen Congruenzaxiome* für die „wirklichen" Punkte und Geraden erfüllt sind, und beweisen in dem erweiterten Gebiet von Punkten und Geraden der Ebene drei Hülfssätze.

1) Hülfssatz: *Alle Senkrechten auf einer Geraden m schneiden sich in einem (idealen) Punkte* (s. Fig. 1).

Beweis: Wir errichten auf m in A und B die Lote l_1 und l_2 und ziehen durch einen beliebigen Punkt C auf AB eine Gerade l_3, so dass l_1, l_2 und l_3 durch denselben Punkt gehen. Dann ziehen wir durch einen Punkt D zwei Gerade g und g_1, so dass sie die Geraden l_1, l_2, l_3 in den Punkten E, F, G respective E_1, F_1, G_1 schneiden und dass der Winkel EDE_1 von m halbirt wird. Die Construction soll so ausgeführt sein, dass die Punkte A, B, C, D, E, F, G, E_1, F_1 und G_1 wirkliche Punkte sind. Angenommen F und F_1 lägen respective zwischen E und G, E_1 und G_1, so verbinden wir F mit G_1 und E_1, F_1 mit E und G. Dann müssen sich FE_1 und F_1E, FG_1 und F_1G in wirklichen Punkten, etwa O_1 und O_2, schneiden. Da nun nach Construction l_1, l_2, l_3 durch einen Punkt gehen, so sind die Dreiecke EF_1G und E_1FG_1 perspectiv und D, O_1 und O_2 liegen auf einer Geraden. Nun ergiebt sich aus der Congruenz der Dreiecke DEF_1 und DE_1F, dass die Dreiecke DEO_1 und DE_1O_1 congruent und demnach auch die Winkel EDO_1 und O_1DE_1 congruent sind, dass also die Geraden DO_1O_2 und m zusammenfallen. Daraus ergiebt sich nun durch einfache Congruenzbetrachtungen, dass auch l_3 auf m senkrecht steht. — Wie der Beweis sich modificirt, wenn F nicht zwischen E und G liegt, ist klar.

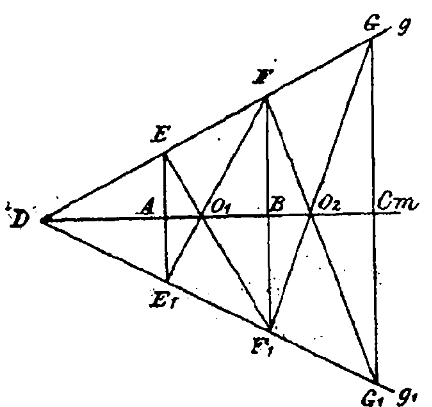

Fig. 1

Wir wollen in Zukunft den Punkt, durch den alle Senkrechten auf m gehen, *den Pol der Geraden m* nennen.

2) Hülfssatz: *Die Pole zu sämmtlichen Geraden durch einen eigentlichen Punkt O liegen auf einer (idealen) Geraden, und jeder Punkt dieser Geraden ist ein Pol zu einer Geraden durch O* (s. Fig. 2).

Beweis: Wir ziehen durch O drei Geraden m_1, m_2 und m_3, fällen von einem wirklichen Punkt C' auf m_1 und m_2 Lote, deren Fusspunkte A' und B' sein mögen. Dann ziehen wir eine solche Gerade senkrecht zu m_3 in D, dass sie $A'O$ und $B'O$ in zwei Punkten A und B schneidet, welche zwischen A' und O resp. zwischen B' und O liegen. Die in A und B auf m_1 und m_2 errichteten Lote müssen sich, wie man sofort einsieht, in einem wirklichen Punkte C schneiden. Wir verlängern dann OB über O hinaus um sich selbst bis B_1, ebenso AO bis A_1, CO bis C_1, endlich DO bis zum Schnitt mit B_1A_1 in D_1. Dann ist, wie man durch wiederholte Anwendung der Congruenzsätze leicht beweist, Winkel C_1B_1O congruent Winkel C_1A_1O, Winkel A_1D_1O congruent einem rechten Winkel. Nun sind aber die Dreiecke $C_1B_1A_1$ und CBA perspectiv. Folglich liegen die Schnittpunkte von C_1A_1 mit CA, von C_1B_1 mit CB, von A_1B_1 mit AB, das heisst die Pole der drei Geraden m_1, m_2 und m_3 auf einer Geraden. Da nun die Pole dreier beliebiger Geraden durch O auf einer Geraden liegen, liegen offenbar die Pole aller Geraden durch O auf einer Geraden, die wir die Polare zu O nennen. — Sei umgekehrt P ein Punkt der Polaren, so ziehen wir durch einen beliebigen wirklichen Punkt P' eine Gerade, die durch P geht und fällen von O aus ein Lot auf die Gerade PP'. Dann ist der Pol dieser letzteren Geraden der Punkt P. Somit ist unser zweiter Hülfssatz vollkommen erwiesen.

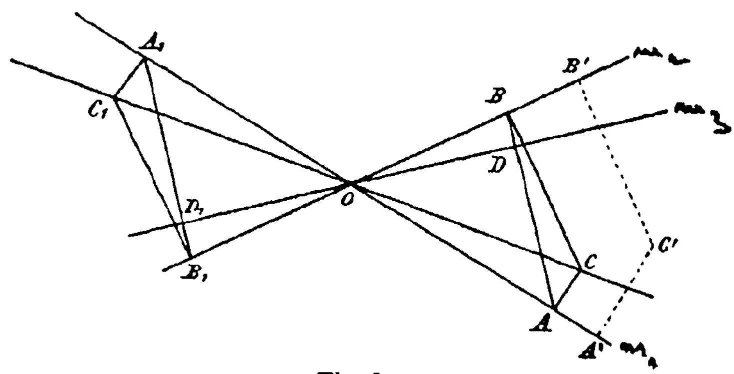

Fig. 2.

3) **Hülfssatz** *über die Mittelsenkrechte.*

Derselbe schliesst sich an die vorhergehenden Sätze seinem Inhalte nach vollkommen an, und wir werden ihn später an einer Stelle gebrauchen. Er lautet:

Errichtet man auf der Mitte M einer Strecke AB das Lot l und zieht durch die Endpunkte A und B zwei Geraden a und b, die sich in einem wirklichen oder idealen Punkte auf l schneiden, so bilden die Geraden a und b mit der Geraden AB gleiche Winkel, und die Lote auf l schneiden congruente Strecken auf a und b ab (s. Fig. 3).

Der Beweis wird am besten indirect geführt:

Nehmen wir an, die von A und B ausgehenden Halbstrahlen a_1 und b_1 der Geraden a und b lägen auf einer Seite der Geraden AB und der

Winkel (kleiner als zwei R) zwischen a_1 und dem Halbstrahl AB sei nicht congruent dem Winkel (kleiner als zwei R) zwischen b_1 und dem Halbstrahl BA; dann ziehen wir durch B eine Gerade b' so, dass ihr von B ausgehender, auf derselben Seite der Geraden AB liegender Halbstrahl b_1' denselben Winkel (kleiner als zwei R) mit dem Halbstrahl BA einschliesst, wie a_1 mit dem Halbstrahl AB. Wir verlängern AB über A und B hinaus um congruente Strecken bis C und D und verbinden die Punkte C und D mit zwei wirklichen Punkten E und F auf l. Die Gerade a möge CE in G, CF in H schneiden, die Gerade b' DE in J, DF in K. Die Punkte $A, B, C, D, E, F, G, H, J, K, M$ sind nach Voraussetzung oder Construction wirkliche Punkte, so dass wir die Congruenzsätze anwenden können. Aus diesen folgt, dass die Geraden JG und HK auf der Geraden l senkrecht stehen.

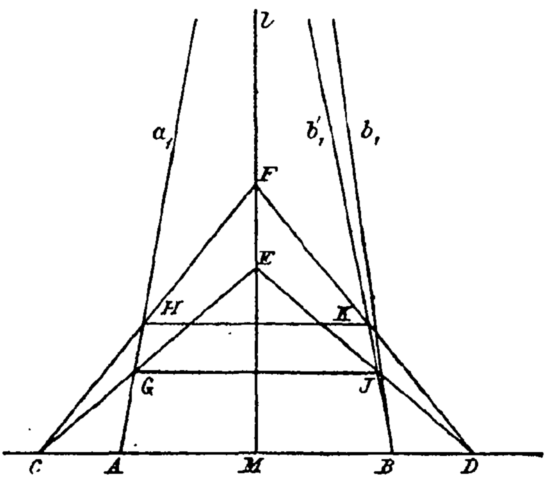

Fig. 3.

Also schneiden sich JG und HK auf der Geraden CD (siehe Hülfssatz 1). Auf der letzteren schneiden sich aber nach Construction auch die beiden anderen entsprechenden Seitenpaare der Dreiecke GEJ und HFK, nämlich GE und HF, JE und KF. Folglich sind diese Dreiecke perspectiv und die Verbindungslinien entsprechender Ecken gehen durch einen Punkt. Es schneiden sich demgemäss die beiden Geraden HG (oder a) und KJ (oder b') auf FE (oder l). Folglich fällt b' mit b zusammen und der erste Theil unserer Behauptung ist erwiesen: $\sphericalangle GAB$ ist congruent $\sphericalangle ABJ$. Dass aber dann die Lote auf l congruente Strecken auf a und b abschneiden, folgt sofort aus den Congruenzsätzen. Somit ist unser Hülfssatz vollkommen bewiesen.

§ 3.

Einführung einer Pseudogeometrie.

1. Einführung von Pseudoparallelen.

Auf Grund der vorhergehenden Sätze wollen wir die Elemente unserer Geometrie in der Ebene in ein System von Punkten und Geraden so einordnen und den Elementen dieses Systems solche Eigenschaften beilegen, dass für sie sämmtliche ebene Axiome der Verknüpfung, Anordnung und Congruenz erfüllt sind, ausserdem aber auch das Euklidische Axiom der Parallelen erfüllt ist. Dieses System von geometrischen Elementen wollen wir *Pseudogeometrie* nennen.

Sei O ein willkürlicher wirklicher Punkt unserer Ebene und t die Polare des Punktes O (siehe § 2).

Definitionen: Wirkliche Punkte im Sinne unserer Pseudogeometrie sind alle wirklichen und idealen Punkte der zu Grunde gelegten Geometrie mit Ausnahme der Punkte auf t.

Wirkliche Geraden im Sinne unserer Pseudogeometrie sind alle wirklichen und idealen Geraden der zu Grunde gelegten Geometrie mit Ausnahme der Geraden t.

Sind A, B, C drei Punkte auf einer Geraden a, so liegt B zwischen A und C im Sinne unserer Pseudogeometrie, wenn B zwischen A und C im Sinne der zu Grunde gelegten Geometrie liegt, wofern wir die Gerade t als Normalgerade gewählt haben (siehe § 1).

Satz: *Die wirklichen Punkte und Geraden unserer Pseudogeometrie erfüllen sämmtliche Axiome der Anordnung und Verknüpfung und das Euklidische Axiom.*

Denn durch einen Punkt A ausserhalb einer Geraden a lässt sich eine und nur eine Gerade a' ziehen, die a in keinem wirklichen Punkte unserer Pseudogeometrie schneidet, nämlich diejenige Gerade a', die sich mit a auf der Geraden t schneidet.

Demgemäss geben wir folgende Definition:

Zwei Geraden a und a', welche sich auf der Geraden t schneiden, nennen wir *pseudoparallel*. In Zeichen: $a \parallel a'$.

Ferner beweisen wir folgenden *allgemeinen Schnittpunktssatz:*

Hat man eine Gerade g und zwei Punkte A_1 und B_1 ausserhalb derselben, so möge die Gerade A_1B_1 die Gerade g in dem Punkte Y schneiden. Wir verbinden A_1 und B_1 mit einem Punkte X_1 auf g, schneiden die Geraden A_1X_1 und B_1X_1 mit einer beliebigen Geraden durch Y in A_2 und B_2, verbinden A_2 und B_2 mit einem beliebigen Punkte X_2 auf g, und schneiden A_2X_2 und B_2X_2 mit einer beliebigen Geraden durch Y in A_3 und B_3 u. s. w., so erhalten wir eine beliebige Anzahl von Punktepaaren:

$$\begin{cases} A_1 A_2 \dots A_n, \\ B_1 B_2 \dots B_n. \end{cases}$$

Dann wird behauptet, dass sich die Geraden A_iA_k und B_iB_k auf g schneiden, wo A_i und B_i, A_k und B_k zwei verschiedene ganz beliebige von jenen Punktepaaren sind (s. Fig. 4).

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die Geraden A_1A_3 und B_1B_3 sich in einem Punkte X_1' auf g schneiden. Die Dreiecke $A_1B_1X_1$ und $A_3B_3X_2$ sind perspectiv, denn entsprechende Seitenpaare der Dreiecke schneiden sich in den Punkten A_2, B_2 und Y auf der Geraden $A_2 B_2$. Folglich gehen die Verbindungslinien entsprechender Ecken $A_1 A_3$, $B_1 B_3$ und $X_1 X_2$ durch einen Punkt X_1' auf g, was wir zeigen wollten.

Dann ergiebt sich der ganze Satz sehr leicht. Indem wir nämlich jetzt unsere Betrachtungen anwenden auf die Reihe von Punktepaaren:

$$A_1 A_3 \dots A_n,$$
$$B_1 B_3 \dots B_n,$$

die wegen des eben Bewiesenen genau dieselben Eigenschaften hat wie die alte Reihe, können wir zeigen, dass $A_1 A_4$ und $B_1 B_4$ sich auf g schneiden, und durch Fortsetzung des Schlussverfahrens zeigen wir, dass

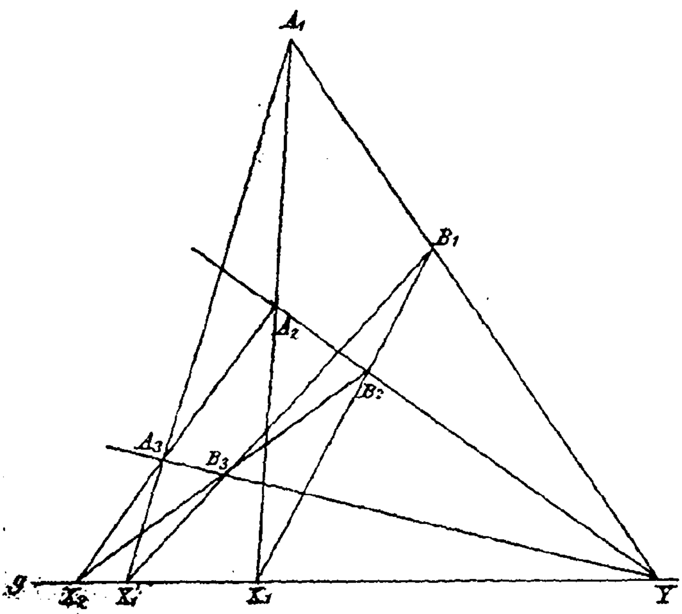

Fig. 4.

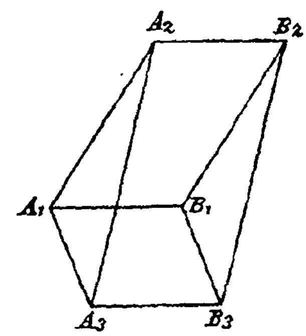

Fig. 5.

die Geraden $A_1 A_k$ und $B_1 B_k$ sich auf g schneiden. Genau in derselben Weise folgern wir für jedes beliebige Paar von Verbindungsgeraden $A_i A_k$ und $B_i B_k$, dass sie sich auf g schneiden.

Nennen wir Pseudoparallelogramm ein solches Viereck, dessen Seiten paarweise pseudoparallel sind, und nehmen wir als Gerade g im vorhergehenden Satze die Polare zu O, t, so können wir folgenden Satz aussprechen (s. Fig. 5):

Construirt man über der Strecke $A_1 B_1$ ein Pseudoparallelogramm $A_1 B_1 A_2 B_2$, über der Strecke $A_2 B_2$ ein neues Pseudoparallelogramm $A_2 B_2 A_3 B_3$ und gelangt durch Fortsetzung dieses Verfahrens zu einer Reihe von Punktepaaren

$$A_1 A_2 \dots A_n,$$
$$B_1 B_2 \dots B_n,$$

so sind die Geraden $A_i A_k$ und $B_i B_k$ pseudoparallel, wo A_i und B_i, A_k und B_k zwei beliebige dieser Punktepaare sind. — Wenn zwei Punktepaare so durch Pseudoparallelogrammconstruction aus einander hervorgehen, wie A_i und B_i aus A_1 und B_1, dann wollen wir sagen, die Strecke $A_i B_i$ geht aus der Strecke $A_1 B_1$ durch *Pseudoparallelverschiebung* hervor. Folgendes ist unmittelbar klar: Wenn $A_i B_i$ aus $A_1 B_1$ durch *Pseudoparallelverschiebung* hervorgeht, dann geht auch $A_1 B_1$ aus $A_i B_i$ durch Pseudoparallelverschiebung hervor. Wir können deshalb auch sagen: Zwei solche Strecken entstehen aus *einander* durch Pseudoparallelverschiebung.

2. Pseudocongruenz von Strecken.

Definition: Zwei Strecken AB und $A'B'$ wollen wir als *pseudocongruent* betrachten (in Zeichen $AB \approxeq A'B'$), wenn entweder diese Strecken durch Pseudoparallelverschiebung aus einander entstehen oder aus ihnen durch Pseudoparallelverschiebung zwei Strecken OE und OF so hervorgehen, dass die Gerade EF durch den Pol der Halbirungslinie des Winkels EOF geht.

Der Punkt O hat die im Anfang dieses Paragraphen definirte Bedeutung.

Satz:*) *Seien A und B zwei Punkte auf einer Geraden a und ferner A' ein Punkt auf derselben oder einer anderen Geraden a', so kann man auf einer gegebenen Seite der Geraden a' von A' stets einen und nur einen Punkt B' finden, sodass AB (oder BA) der Strecke $A'B'$ pseudocongruent ist. Jede Strecke ist sich selbst pseudocongruent.*

Beweis: Da wir leicht die Strecke AB aus sich selbst durch Pseudoparallelverschiebung hervorgehen lassen können, ist jede Strecke AB sich selbst pseudocongruent. Im Uebrigen wollen wir den Satz in zwei Schritten beweisen.

a) Zunächst wollen wir annehmen, dass a und a' entweder identisch oder pseudoparallel sind. Wir wenden auf die Strecke AB irgend eine Pseudoparallelverschiebung an und gelangen so zu einem Punktepaare $A_n B_n$, das nicht auf der Geraden a' liegt, verbinden A_n mit A' und ziehen durch B_n eine Pseudoparallele zu $A_n A'$, die a' in B_1' schneidet. B_1' muss ein wirklicher Punkt im Sinne unserer Pseudogeometrie sein, denn sonst müsste die Gerade $B_1' B_n$ der

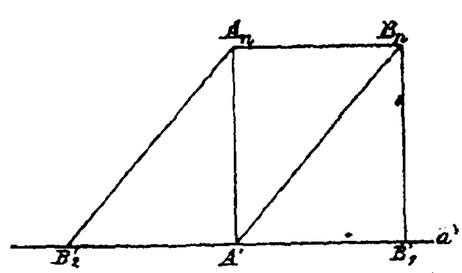

Fig. 6.

Geraden a' pseudoparallel sein, was nicht möglich ist, da $B_1' B_n \parallel A' A_n$ ist

*) Vgl. Festschrift § 6, erstes Congruenzaxiom.

und deshalb auch $A'A_n \parallel a'$ sein müsste, was nicht der Fall ist. Denn $A'A_n$ und a' haben einen im Sinne unserer Pseudogeometrie wirklichen Punkt A' gemeinsam. Verbinden wir weiter A' mit B_n und ziehen durch A_n zu $A'B_n$ eine Pseudoparallele, so schneidet diese a' in einem Punkte B_2', der auch ein wirklicher Punkt unserer Pseudogeometrie ist. Da für solche Punkte aber die Axiome der Reihenfolge sämmtlich erfüllt sind (s. § 3, 1), so ergiebt sich leicht, dass B_1' auf einer anderen Seite der Geraden a' von A' liegt als B_2'. Weil nun auch nach Definition die Strecken $B_1'A'$ und $B_2'A'$ der Strecke AB pseudocongruent sind, so haben wir den ersten Theil unseres Satzes bewiesen. Aber es frägt sich noch, ob wir nicht durch einen anderen Constructionsmodus zu anderen Punkten B_1' und B_2' hätten kommen können, ob also dem zweiten Theil der Behauptung Genüge geleistet wird. Wir wollen deshalb auf die Strecke AB eine beliebige andere Pseudoparallelverschiebung anwenden und annehmen, wir gelangten so zu einer anderen Strecke $A'B_3'$ auf a'. Heisst die Reihe einander entsprechender Punktepaare

$$A\bar{A}_1\bar{A}_2\ldots\bar{A}_n A',$$
$$B\bar{B}_1\bar{B}_2\ldots\bar{B}_n B_3',$$

so betrachten wir die Reihe der entsprechenden Punktepaare

$$A'\,A_n A_{n-1}\ldots A_1 A\bar{A}_1\ldots\bar{A}_n,$$
$$B_1'\,B_n B_{n-1}\ldots B_1 B\bar{B}_1\ldots\bar{B}_n.$$

Es ergiebt sich*), dass $\bar{A}_n A'$ und $\bar{B}_n B_1'$ pseudoparallel sind und also B_3' mit B_1' zusammenfällt, da durch einen Punkt $\bar{B}_n$ nur eine Pseudoparallele zu einer Geraden $\bar{A}_n A'$ geht. — Heisst die Reihe der entsprechenden Punktepaare bei der zweiten Constructionsweise aber

$$A\bar{A}_1\ldots\bar{A}_n B_3',$$
$$B\bar{B}_1\ldots\bar{B}_n A',$$

so betrachten wir die Reihe der entsprechenden Punktepaare

$$B_2' A_n\ldots A_1 A\bar{A}_1\ldots A_n,$$
$$A'\,B_n\ldots B_1 B\bar{B}_1\ldots\bar{B}_n$$

und folgern ebenso wie vorher, dass B_3' mit B_2' zusammenfallen muss. Somit ist unter der anfänglich gemachten Voraussetzung unser Satz vollkommen erwiesen.

b) Jetzt nehmen wir an, dass a und a' nicht identisch oder pseudoparallel sind. Wir ziehen durch O die Pseudoparallelen b und b' zu a und a'.

---

*) S. § 3, 1 den speciellen Fall des allgemeinen Schnittpunktsatzes.

Die Strecke AB übertragen wir durch Pseudoparallelverschiebung auf die Strecke OE_1 auf b. Sei X ein Punkt auf b', so ziehen wir durch E_1 und den Pol der Halbirungslinie des Winkels E_1OX eine Gerade, die OX in einem wirklichen Punkt F unserer Pseudogeometrie schneidet. Denn wäre $E_1F \parallel OF$, dann müsste OF durch den Pol der Halbirungslinie des Winkels E_1OF gehen, also in O auf besagter Halbirungslinie senkrecht stehen und der Winkel E_1OF gleich zwei Rechten sein, was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist. Die Strecke OF übertragen wir durch Pseudoparallelverschiebung, wie vorhin gezeigt ist, auf zwei Strecken $A'B_1'$ und $A'B_2'$ auf a', wobei A' zwischen B_1' und B_2' liegt. Dann sind nach Definition die Strecken $A'B_1'$ und $A'B_2'$ der Strecke AB pseudocongruent, und der erste Theil unserer Behauptung ist auch für diesen Fall erwiesen. Da die Pseudoparallelverschiebung der Strecke OF nach $A'B_1'$ und $A'B_2'$ gemäss Theil a) unseres Beweises vollkommen eindeutig ist, so kann es nur die Modification eines anderen Theiles unserer Abtragungsconstruction bewirken, dass wir zu anderen Punkten B' kommen. Durch die Pseudoparallelverschiebung der Strecke AB auf die Gerade b gelangen wir ausser zu dem Punkt E_1 noch zu dem Punkte E_2, so zwar, dass O zwischen E_1 und E_2 liegt; und jeder der beiden Halbstrahlen OE_1 und OE_2 bildet mit der Geraden b' zwei Winkel, liefert also auch zwei Constructionen eines Punktes F. Wir kommen also im Ganzen zu vier Punkten F. Wir wollen beweisen, dass je zwei zusammenfallen: wir behalten noch zwei Punkte F_1 und F_2 übrig. Schliesslich zeigen wir, dass die Strecken OF_1 und OF_2 durch Pseudoparallelverschiebung auseinander hervorgehen. Daraus folgt endlich gemäss des speciellen Falles unseres allgemeinen Schnittpunktsatzes § 3, 1, dass wir durch Pseudoparallelverschiebung der Strecken OF_1 und OF_2 und deshalb auch bei einer beliebigen Abtragung der Strecke AB auf a' vom Punkte A' aus stets zu denselben Punkten B_1' und B_2' kommen müssen.

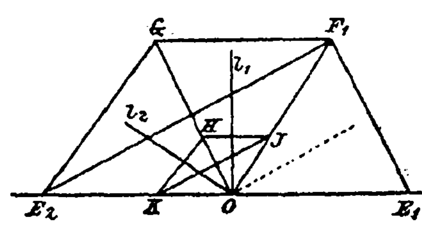

Fig. 7.

Nach Voraussetzung geht (s. Fig. 7) die Strecke E_2O aus der Strecke E_1O durch Pseudoparallelverschiebung hervor. Wenn wir also durch O eine Pseudoparallele zu E_1F_1, durch F_1 eine Pseudoparallele zu OE_1 ziehen und dann den Schnittpunkt G der beiden Pseudoparallelen mit E_2 verbinden, so muss nach dem oftmals erwähnten Schnittpunktsatze GE_2 pseudoparallel F_1O sein.

Wir errichten in O auf OE_1 und OF_1 die Lote l_1 und l_2. Dann fällen wir von einem passend gewählten wirklichen Punkt H von OG Lote auf l_1 und l_2, die OF_1 und OE_2 in den wirklichen Punkten J respective K schneiden. Dann ist leicht zu zeigen, dass OG die Halbirungslinie des Winkels $E_2 O F_1$ ist und dass KJ auf OG senkrecht steht, also durch den Pol dieser Geraden geht. Nun sind aber die Dreiecke GF_1E_2 und HJK perspectiv, denn die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken gehen durch O. Da je zwei Seiten paarweise pseudoparallel sind, sich also auf der Geraden t schneiden, so müssen auch die dritten Seiten E_2F_1 und KJ pseudoparallel sein, und E_2F_1 geht durch den Pol der Halbirungslinie des Winkels E_2OF_1, weil dasselbe für die Gerade KJ der Fall ist. Wir kommen also gemäss unserer Abmachungen über pseudocongruente Streckenabtragung von E_2 zu demselben Punkte F_1 auf dem einen Halbstrahl der Geraden b' wie von E_1. Durch eine beliebige Abtragungsconstruction der Strecke AB auf b' kommen wir also im Ganzen zu zwei Punkten F_1 und F_2, so dass OF_1 und $OF_2 \approx AB$ sind und O zwischen F_1 und F_2 liegt.

Ferner ziehen wir (s. Fig. 8) durch E_1 und O Pseudoparallelen zu F_1O bezw. F_1E_1. Den Schnittpunkt L dieser beiden Hülfsgeraden verbinden wir mit F_2. Wir errichten in O die Lote auf OE_1 und OF_1, l_1 und l_2, und fällen von einem passend gewählten Punkte M der Geraden OL die Lote auf l_1 und l_2, die OF_2 in N, OE_1 in P schneiden, wo M, N, P wirkliche Punkte sind. Dann ergiebt sich ebenso wie früher, dass OL die Halbirungslinie des Winkels E_1OF_2 ist und PN auf OL senkrecht steht, also durch den Pol von OL geht. Die Dreiecke E_1LF_2 und PMN sind perspectiv; da aber zwei Seitenpaare: E_1L und PM, E_1F_2 und PN nach Construction oder Voraussetzung sich auf der Geraden t schneiden, ist dasselbe für das dritte Seitenpaar der Fall.

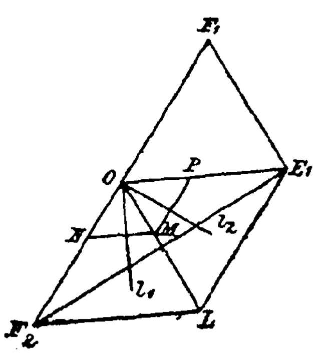

Fig. 8.

Deshalb sind LF_2 und MN pseudoparallel und endlich auch LF_2 und OE_1 pseudoparallel. Die Strecken F_1O und F_2O gehen also durch Pseudoparallelverschiebung aus einander hervor, was wir zeigen wollten.

Satz*). *Wenn eine Strecke AB sowohl der Strecke $A'B'$ als auch der Strecke $A''B''$ pseudocongruent ist, dann ist auch $A'B'$ der Strecke $A''B''$ pseudocongruent.*

In Zeichen: Wenn

$$AB \approx A'B',$$

und

$$AB \approx A''B''$$

ist, dann ist auch

$$A'B' \approx A''B''.$$

*) Vgl. Festschrift § 6, zweites Congruenzaxiom.

Da es klar ist, dass, wenn zwei Strecken $A'B'$ und $A''B''$ aus einer dritten durch Pseudoparallelverschiebung hervorgehen, dann auch $A'B'$ und $A''B''$ aus einander durch Pseudoparallelverschiebung entstehen, so brauchen wir nur noch Folgendes nachzuweisen:

Haben wir drei Gerade durch den Punkt O (s. Fig. 9) und auf denselben respective die Punkte A, B, C und geht die Gerade AB durch den Pol der Halbirungslinie des Winkels AOB, die Gerade AC durch den Pol der Halbirungslinie des Winkels AOC, dann geht auch BC durch den Pol der Halbirungslinie des Winkels BOC.

Tragen wir auf OA, OB und OC wirklich congruente Strecken OA', OB' und OC' ab, dann gehen, wie leicht zu zeigen, die Geraden $A'B'$, $B'C'$ und $C'A'$ respective durch die Pole der Halbirungslinien der Winkel AOB, BOC und AOC. Die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind perspectiv, denn ihre Ecken liegen auf drei Geraden durch O. Folglich schneiden sich die entsprechenden Seitenpaare auf einer Geraden. Da sich nun AB und $A'B'$, AC und $A'C'$ nach Voraussetzung und Construction auf der Polaren zu O schneiden, so müssen sich auch BC und $B'C'$ auf der Polaren schneiden. Nun ist der Schnittpunkt von $B'C'$ mit der Polaren zu O der Pol der Halbirungslinie des Winkels $B'OC'$, folglich geht auch BC, wie behauptet, durch den Pol der besagten Halbirungslinie.

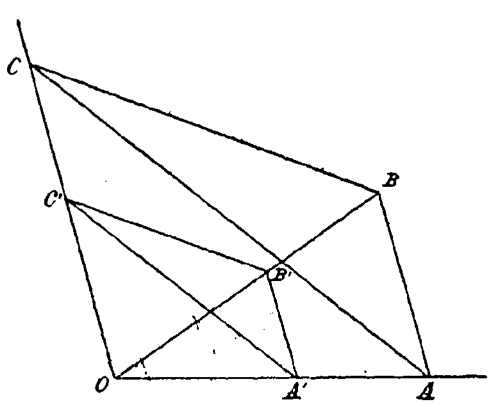

Fig. 9.

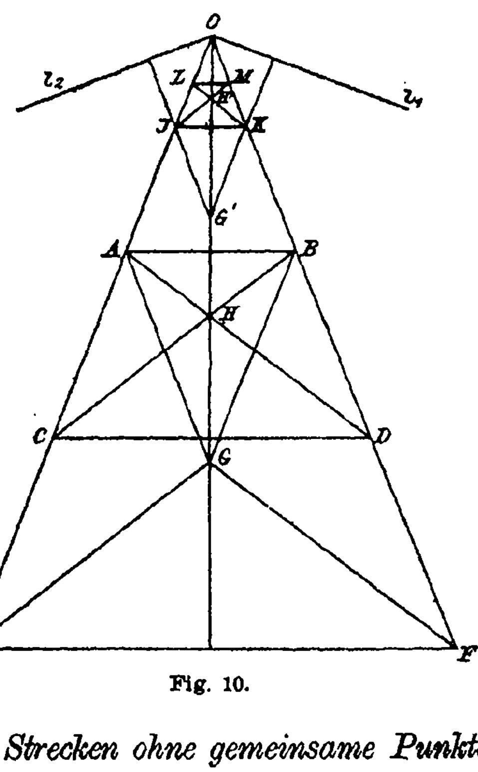

Fig. 10.

Satz*): *Es seien AB und BC zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf der Geraden a und ferner $A'B'$ und $B'C'$ zwei Strecken ohne gemein-*

*) Vgl. Festschrift § 6, drittes Congruenzaxiom.

same Punkte auf derselben oder einer anderen Geraden a'; wenn dann $AB \approxeq A'B'$ und $BC \approxeq B'C'$ ist, so ist auch stets $AC \approxeq A'C'$.

Wieder können wir uns, wie leicht ersichtlich, auf den Beweis des Satzes beschränken, wenn es sich um pseudocongruente Abtragung auf verschiedenen Geraden durch O handelt (s. Fig. 10).

Voraussetzung:

$$OD \approxeq OC,$$
$$DF \approxeq CE.$$

Behauptung:

$$OF \approxeq OE.$$

Wir übertragen durch pseudoparallele Verschiebung DF und CE auf Strecken mit dem einen gemeinsamen Endpunkt O und mit A und B als anderen Endpunkten, wo A und B auf den Halbstrahlen OC und OD liegen. Wir ziehen durch B zu OA und durch A zu OB Pseudoparallelen, die sich in G schneiden, verbinden G mit E und F, A mit D, B mit C. Dann sind nach Voraussetzung und Construction AD und GF, BC und GE, DC und BA pseudoparallel. Die letzteren beiden Geraden gehen durch den Pol der Halbirungslinie des Winkels AOB. Durch eine ähnliche Hülfsconstruction (sie ist in der Figur angedeutet) wie in den vorigen Beweisen, in der als Hülfspunkte nur wirkliche Punkte vorkommen, beweisen*) wir, dass G und H auf der Halbirungslinie des Winkels AOB liegen. Dann sind aber die Dreiecke HAB und GEF perspectiv, und da sich die Seitenpaare FG und AH, EG und BH auf der Geraden t schneiden, so müssen sich auch AB und EF auf t schneiden, sind also pseudoparallel. BA geht durch den Pol der Halbirungslinie des Winkels AOB. Dasselbe gilt also auch für EF. Folglich ist $FO \approxeq EO$, was zu beweisen war.

3. Pseudocongruenz von Winkeln.

Definition: Den Begriff „Winkel" unserer Pseudogeometrie definiren wir genau so wie in der zu Grunde gelegten Geometrie, nur dass natürlich der Scheitel und die Schenkel irgend welche wirkliche Punkte respective Geraden im Sinne unserer Pseudogeometrie sein können.

Durch den Scheitel A eines Winkels BAC (s. Fig. 11) ziehen wir eine beliebige Gerade AD, durch D zwei Halbstrahlen DF und DE pseudoparallel zu AB und AC, so zwar, dass, wenn die Gerade AD die Halbstrahlen AB und AC trennt, dieselbe auch die Halbstrahlen DE

---

*) Man beachte die Perspectivität 1) der Dreiecke ABG und JKG', 2) der Dreiecke mit den Seiten CB, BM, MJ resp. DA, AL, LK und daraus folgend die Perspectivität der Dreiecke CHD und $JH'K$. (Vorausgesetzt ist: $JG' \parallel AG$, $KG' \parallel BG$, $MJ \parallel BC$, $LK \parallel AD$, $LM \parallel AB$.)

und DF trennt und umgekehrt. Ferner ziehen wir durch D eine Gerade DG und fahren in derselben Weise fort und gelangen schliesslich zu einem Winkel YXZ. Dann wollen wir sagen $\sphericalangle YXZ$ geht aus $\sphericalangle BAC$ durch *Pseudoparallelverschiebung* hervor.

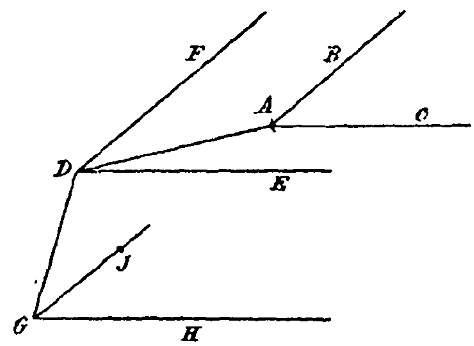

Fig. 11.

Dann ist Folgendes unmittelbar klar: Wenn $\sphericalangle YXZ$ aus $\sphericalangle BAC$ durch Pseudoparallelverschiebung hervorgeht, dann geht auch $\sphericalangle BAC$ aus $\sphericalangle YXZ$ durch Pseudoparallelverschiebung hervor. Wir können deshalb sagen: zwei solche Winkel entstehen aus *einander* durch Pseudoparallelverschiebung.

Definition: *Zwei Winkel ABC und $A'B'C'$ wollen wir als pseudocongruent* betrachten (in Zeichen: $\sphericalangle ABC \approxeq \sphericalangle A'B'C'$), wenn entweder diese Winkel durch Pseudoparallelverschiebung aus einander entstehen oder aus ihnen zwei Winkel EOF und GOH mit dem gemeinsamen Scheitelpunkt O durch Pseudoparallelverschiebung hervorgehen, die congruent sind im Sinne der zu Grunde gelegten Geometrie.

Dann gelten, wie leicht ersichtlich, folgende Sätze*):

Es sei ein Winkel $\sphericalangle BAC$ und eine Gerade a', sowie eine bestimmte Seite von a' gegeben. Es bedeute B' einen Punkt der Geraden a', dann giebt es einen und nur einen Halbstrahl $C'A'$, wo A' ein Punkt von a' ist, so dass der Winkel BAC (oder CAB) pseudocongruent dem Winkel $B'A'C'$ ist und zugleich alle inneren Punkte des Winkels $B'A'C'$ auf der gegebenen Seite von a' liegen. — Jeder Winkel ist sich selbst pseudocongruent.

Wenn ein Winkel BAC sowohl dem Winkel $B'A'C'$ als auch dem Winkel $B''A''C''$ pseudocongruent ist, so ist auch der Winkel $B'A'C'$ dem Winkel $B''A''C''$ pseudocongruent.

4. Der erste Pseudocongruenzsatz.

Definition: *Zwei Dreiecke* heissen *pseudocongruent*, wenn ihre respectiven Seiten und Winkel pseudocongruent sind.

Satz**): *Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel beziehungsweise pseudocongruent, dann sind auch die übrigen Stücke in den beiden Dreiecken beziehungsweise pseudocongruent.*

Den Beweis zerlegen wir in zwei Theile.

---

*) S. Festschrift § 6, viertes und fünftes Congruenzaxiom.

**) S. Festschrift § 6, sechstes Congruenzaxiom und § 7, Satz 10.

a) Es sei uns ein Dreieck ABC (s. Fig. 12) und ein beliebiger Punkt A' gegeben. Wir verbinden A mit A' und ziehen durch A' zu AB und AC Pseudoparallelen, die die Pseudoparallelen zu AA' durch B und C in B' resp. in C' schneiden. Dann sind die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ perspectiv, denn AA', BB', CC' gehen durch einen Punkt. Da aber AB und $A'B'$, AC und $A'C'$ pseudoparallel sind, so sind auch BC und $B'C'$ pseudoparallel. Daraus folgt aber, dass die Seiten und Winkel im Dreieck $A'B'C'$ den Seiten und Winkeln im Dreieck ABC entsprechend pseudocongruent sind. Also: Man kann zu jedem Dreieck ein pseudocongruentes finden, dessen eine Ecke mit einem beliebig vorgegebenen Punkte zusammenfällt.

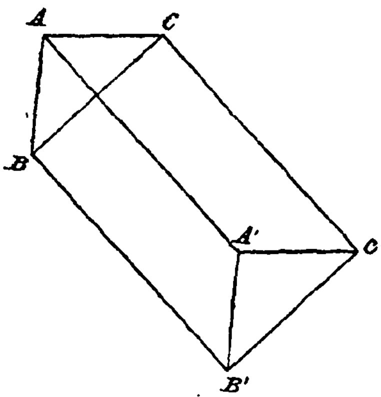

Fig. 12.

b) Angenommen in zwei Dreiecken wären zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel beziehungsweise pseudocongruent, dann ersetzen wir sie nach a) so durch pseudocongruente Dreiecke, dass die Scheitel der pseudocongruenten Winkel in den Punkt O zusammenfallen. Diese beiden Dreiecke (s. Fig. 13) mögen die Ecken O, A_1, B_1 und O, A_2, B_2 haben, dann ist nach Voraussetzung

$$OA_1 \approxeq OA_2, \qquad OB_1 \approxeq OB_2,$$
$$\sphericalangle B_1 OA_1 \approxeq \sphericalangle B_2 OA_2.$$

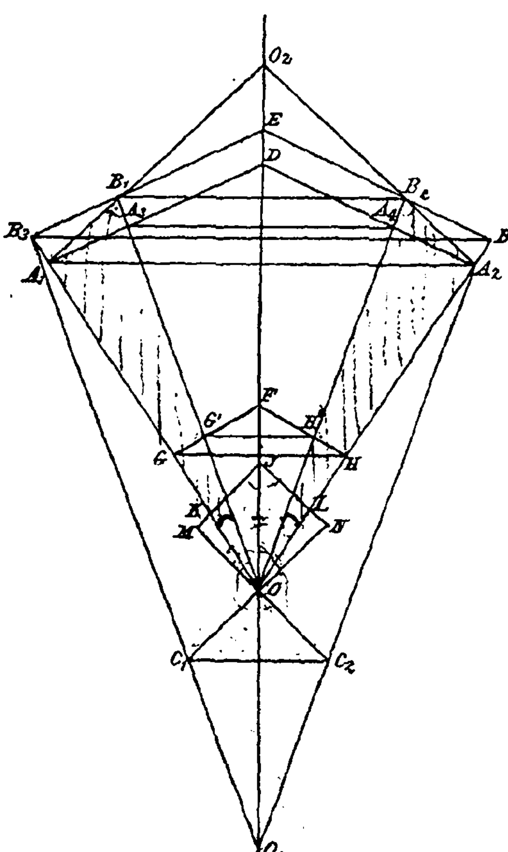

Fig. 13.

Wir nehmen an, dass $B_1 O$ und $B_2 O$ von $A_1 O$ und $A_2 O$ nicht getrennt werden. Haben wir unseren Satz für diesen Fall bewiesen, so ist der andere Fall, wo $B_1 O$ und $B_2 O$ von $A_1 O$ und $A_2 O$ getrennt werden, auch erledigt. Wir können das Dreieck $A_1 OB_1$ in ein anderes $A_1'OB_1'$ pseudocongruent überführen, das so liegt, dass die entsprechenden Seitenpaare sich nicht trennen; dann werden auch $A_2 O$ und $B_2 O$ nicht von $A_1'O$ und $B_1'O$ getrennt, und wir können beweisen, dass $A_1'OB_1'$ und $A_2 OB_2$, folglich auch $A_1 OB_1$ und $A_2 OB_2$ pseudocongruente Dreiecke sind. Denn nach früheren Sätzen gilt der Satz: Sind zwei Dreiecke einem und demselben dritten Dreieck pseudocongruent, dann sind sie auch einander pseudocongruent.

Bei jener Annahme ziehen wir durch A_1 zu $B_1 O$, durch A_2 zu $B_2 O$, durch O zu $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ Pseudoparallelen, die sich respective in C_1 und C_2 schneiden. A_1 verbinden wir mit A_2, B_1 mit B_2 und bringen $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ zum Schnitt in O_2, $C_1 A_1$ und $C_2 A_2$ in O_1. $A_1 A_2$ ist nun pseudoparallel $B_1 B_2$, denn diese beiden Geraden gehen nach Voraussetzung durch den Pol der gemeinsamen Halbirungslinie der Winkel $B_1 O B_2$ und $A_1 O A_2$. Folglich sind die Dreiecke $A_1 O_1 A_2$ und $B_1 O B_2$ perspectiv, denn ihre Seiten schneiden sich auf der Geraden t, und O, O_1 und O_2 liegen auf einer Geraden. Dann sind aber auch die Dreiecke $O_2 A_1 A_2$ und $O C_1 C_2$ perspectiv und $C_1 C_2$, $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ sind pseudoparallel. Wir wollen nun zeigen, dass die Gerade $O O_1 O_2$ durch die Pole der drei zuletzt genannten Geraden geht, d. h. mit der gemeinsamen Halbirungslinie der Winkel $A_1 O A_2$ und $B_1 O B_2$ zusammenfällt; ausserdem aber auch, dass $O O_1 O_2$ den Winkel $C_1 O C_2$ halbirt.

Wir tragen die Strecke $O B_1$ bis B_3 auf der Geraden $O A_1$, die Strecke $O B_2$ bis B_4 auf $O A_2$, die Strecke $O A_1$ auf $O B_1$ bis A_3, die Strecke $O A_2$ auf $O B_2$ bis A_4 pseudocongruent ab. Dann sind $A_3 A_4$, $B_3 B_4$, $B_1 B_2$ und $A_1 A_2$, — $B_1 B_3$ und $A_1 A_3$, — $B_2 B_4$ und $A_2 A_4$ pseudoparallel. Bringen wir $A_1 A_3$ und $A_2 A_4$ zum Schnitt in D, $B_1 B_3$ und $B_2 B_4$ zum Schnitt in E, so sind die Dreiecke $A_3 D A_4$ und $B_1 E B_2$ perspectiv. Folglich liegen E, D und O auf einer Geraden. Andrerseits sind die Dreiecke $A_1 B_1 A_3$ und $A_2 B_2 A_4$ perspectiv, denn ihre entsprechenden Ecken liegen auf pseudoparallelen Geraden. Folglich liegen O, O_2 und D auf einer Geraden, also auch die fünf Punkte O, O_1, O_2, D, E. Haben wir nun ein Dreieck FGH, dessen Ecken G und H auf $A_1 O$ und $A_2 O$ (oder auf $B_1 O$ und $B_2 O$) liegen und dessen Seiten den Geraden $A_1 A_3$, $A_2 A_4$ und $A_1 A_2$ respective pseudoparallel sind, dann liegt die Dreiecksecke F auf der Geraden DEO nach dem Desargues'schen Satz, und unser Zweck ist erreicht, wenn wir zeigen können, dass FO die bewusste Halbirungslinie ist. Es ist nun klar, dass, wenn nicht gerade Ausnahmefälle eintreten, man immer ein Dreieck mit den *wirklichen* Punkten F, G, H als Eckpunkten finden kann, das diesen Bedingungen genügt. Ausnahmelagen der beiden der Untersuchung zu Grunde liegenden Dreiecke können wir so behandeln, dass wir das eine der Dreiecke erst in ein beliebiges anderes pseudocongruent überführen und dieses dann unserer Betrachtung zu Grunde legen. Haben wir aber ein solches Dreieck FGH, so ist es leicht zu zeigen, dafs FO die Halbirungslinie des Winkels GOH ist. (Man beachte (s. Fig. 13), dass $OG \equiv OH \equiv OG' \equiv OH'$ ist, denn nach Construction stehen GH und $G'H'$ senkrecht auf der gemeinsamen Halbirungslinie der Winkel $A_1 O A_2$ und $B_1 O B_2$).

Folglich geht $C_1 C_2$ durch den Pol von $O_1 O O_2$. Ferner wählen wir einen passenden, wirklichen Punkt J auf $O_2 O$ und ziehen durch J Pseudoparallelen zu $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$, die OA_1 und OA_2 in den wirklichen Punkten K resp. L schneiden mögen. Dann folgt aus dem Desargues'schen Satze, dass KL pseudoparallel zu $A_1 A_2$ ist und also senkrecht auf $O O_2$ steht. Weil nun $O O_2$ die Halbirungslinie des Winkels $A_1 O A_2$ ist, so folgt sofort, dass Winkel KJO congruent Winkel LJO ist. Fällen wir von O aus Lote auf JK und JL mit den respectiven Fusspunkten M und N, so stehen OM und ON nach Voraussetzung auf OC_1 resp. OC_2 senkrecht. Nun sind die Dreiecke MJO und NJO congruent; folglich ist nach dem Vorhergehenden der Winkel $C_1 O O_1$ congruent dem Winkel $C_2 O O_1$. Also ist nach unserer Definition der Pseudocongruenz $C_1 O$ pseudocongruent $C_2 O$ und auch $A_1 B_1$ pseudocongruent $A_2 B_2$. Da $\sphericalangle A_1 O C_1 \equiv \sphericalangle A_2 O C_2$ ist, so folgt aus unseren Definitionen über Pseudocongruenz von Winkeln, dass $\sphericalangle OA_1 B_1 \approx \sphericalangle OA_2 B_2$ ist. Ebenso zeigen wir endlich, dass die Winkel $A_1 B_1 O$ und $A_2 B_2 O$ pseudocongruent sind. Damit haben wir den ersten Pseudocongruenzsatz vollkommen erwiesen.

Man wird sich nun leicht überzeugen, dass jedem der Congruenzaxiome (s. Festschrift § 6) einer der im Vorhergehenden bewiesenen Sätze über Pseudocongruenz entspricht; deshalb können wir zusammenfassend folgenden Satz aussprechen:

Die Elemente unserer Pseudogeometrie mit Ausnahme der Elemente der Geraden t erfüllen alle Axiome der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie einschliesslich des Parallelenaxioms, und die Gerade t spielt die Rolle der „idealen" oder „unendlich fernen" Geraden.

§ 4.

Einführung der Streckenrechnung.

Da nun unsere Sätze niemals abhängig sind von den Gebilden, auf die sie mittels unserer geometrischen Sprache bezogen werden, sondern nur von den Axiomen, das heisst von den Eigenschaften, die wir von den Gebilden postuliren, so ist alles, was man in der gewöhnlichen Geometrie bewiesen hat und beweisen kann, auch erfüllt für unsere Pseudogeometrie. Hiervon wollen wir im Folgenden den weitgehendsten Gebrauch machen.

Zum Beispiel können wir sofort den Satz aussprechen:

Die Winkelsumme in irgend einem Dreieck ist pseudocongruent zwei Rechten.

Dann aber wollen wir sogleich die *Streckenrechnung* einführen, wie sie von D. Hilbert in seiner Festschrift Kap. III angegeben ist. Diese ermöglicht die Lehre von den Proportionen zu begründen und eine Art analytischer Geometrie zu construieren, ohne von dem Archimedischen Axiom Gebrauch zu machen, das wir ja bei unseren ganzen Untersuchungen ausschliessen wollten.

Wie leicht sich jetzt vieles gestaltet, werden wir sofort an dem Beweise folgender Sätze erkennen:

1) *Die drei Höhen in einem Dreieck schneiden sich auch in der Nicht-Euklidischen Geometrie in einem Punkte.*

Beweis: Legen wir den Punkt O in eine Dreiecksecke, so sind sämmtliche Lote entweder senkrecht auf Geraden durch O oder sie sind selbst Geraden durch O. Folglich sind sie auch Lote in unserer Pseudogeometrie. Dann müssen sie sich aber in einem Punkte schneiden, was zu beweisen war.

2) *Der Pascal'sche Satz vom Sechseck im Winkelraum.*

Derselbe kann, wie in der Festschrift gezeigt ist, auf Grund der Streckenrechnung nachgewiesen werden. Da er aber ein reiner Schnittpunktsatz ist, so gilt er unmittelbar auch in unserer Geometrie. Damit haben wir einen *Beweis des Pascal'schen Satzes auf Grund der Axiome der Gruppen I, II und der ebenen Axiome der Gruppe IV**) gewonnen.

Mittels des Pascal'schen Satzes können wir aber die *projective Geometrie* begründen, deren Sätze wir fernerhin häufig gebrauchen werden.

Ferner schreiben wir in Zukunft oftmals statt congruent: *gleich* ($=$), statt pseudocongruent: *pseudogleich* ($\approx$) und definiren in bekannter**) Weise, was wir darunter zu verstehen haben, wenn wir von einer Strecke a sagen, sie sei *kleiner als* b ($a < b$), *pseudokleiner als* b ($a \prec b$) *oder grösser als* b ($a > b$), *pseudogrösser als* b ($a \succ b$).

Das Hauptresultat unserer bisherigen Untersuchungen können wir folgendermassen aussprechen:

Alle reinen Schnittpunktsätze, die man auf Grund der Axiomgruppen I, II, III, IV beweisen kann, folgen auch bereits auf Grund der Axiomgruppen I, II, IV, d. h. ohne Parallelenaxiom.

---

*) Der specielle Pascal'sche Satz, bei dem die Pascalgerade die „unendlich ferne" Gerade ist, wird übrigens gerade zum Aufbau der Streckenrechnung in der Festschrift benutzt. Der allgemeine Fall desselben wird jedoch am einfachsten mittels der Streckenrechnung abgeleitet. — Einen Beweis des Pascal'schen Satzes mittels sämmtlicher Axiome der Gruppen I, II, IV giebt Schur, Math. Ann. Bd. 51.

**) s. Festschrift: Cap. III; § 15.

Capitel II.

Congruenz und Projectivität.

§ 5.

Fundamentalsatz.

Definition: Ordnen wir jedem wirklichen Punkte $A, B, C, \ldots$ einer Geraden g einen wirklichen Punkt $A_1, B_1, C_1, \ldots$ derselben Geraden g so zu, dass die Strecke zwischen zwei beliebigen wirklichen Punkten congruent der Strecke zwischen den entsprechenden Punkten ist, so nennen wir die *Punktreihen congruent.*

Es ergiebt sich leicht, dass zwei congruente Punktreihen entweder durch congruente Verschiebung aus einander hervorgehen, oder durch eine Spiegelung an einem beliebigen wirklichen Punkt der Geraden g zusammen mit einer congruenten Verschiebung. (Die Ausdrücke Spiegelung und congruente Verschiebung sind in dem üblichen Sinne zu verstehen.)

Dann sprechen wir folgenden für die Beziehungen zwischen Congruenz und Projectivität fundamentalen Satz aus:

Sind $A, B, C, \ldots$ und $A_1, B_1, C_1, \ldots$ congruente Punktreihen auf g, so gehen sie durch wiederholte Projection aus einander hervor (so sind sie „projectiv").

Die Spiegelung an einem Punkte S (s. Fig. 14) von g kann durch zwei Projectionen vermittelt werden. Wir errichten in S ein Lot XSY (s. Figur) und projiciren die Punktreihe $A, B, \ldots$ vom Pol der Halbirungslinie des Winkels XSW auf die Gerade XSY; die entstehende Punktreihe $\bar{A}, \bar{B}, \ldots$ projiciren wir vom Pol der Halbirungslinie des Winkels XSZ wieder auf g. Die so entstehende Punktreihe $A', B', \ldots$ ist dann das Spiegelbild der Punktreihe $A, B, \ldots$ am Punkt S, was wir zeigen wollten. Deshalb können wir unseren Beweis auf solche Punktreihen beschränken, die durch congruente Verschiebung, etwa um die Strecke v, aus einander hervorgehen.

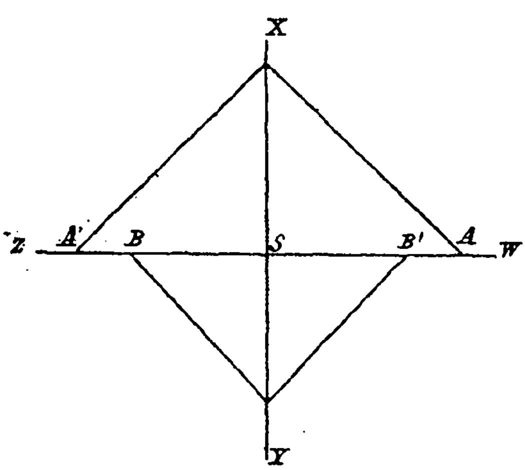

Fig. 14.

Seien (s. Fig. 15, S. 24) A und O wirkliche Punkte auf der Geraden g und AO grösser als die Verschiebungsstrecke v. Dann ziehen wir durch O eine zweite Gerade g_1 und tragen auf dem Halbstrahl von g_1, der mit

OA einen spitzen Winkel bildet, eine OA congruente Strecke bis A_3 ab. Ferner tragen wir die Verschiebungsstrecke v von O bis P ab, wo P zwischen O und A_3 auf OA_3 liegt. Wir verbinden dann den Punkt A mit P, errichten in der Mitte M von PA eine Senkrechte, die OA_3 in dem wirklichen oder idealen Punkt O_1 schneidet und verbinden A mit O_1 durch die Gerade g_2. Wir behaupten jetzt: Projiciren wir die Punktreihe $A, B, C, \ldots$ von g vom Pol der Halbirungslinie des Winkels A_3OA auf g_1 und erhalten so die Punkte $A_3, B_3, C_3, \ldots$, projiciren diese vom Pol von MO_1 auf g_2 und erhalten die Punktreihe $A_2, B_2, C_2, \ldots$, projiciren endlich diese vom Pol der Halbirungslinie eines der Winkel (g_2, g), so erhalten wir eine von den beiden Punktreihen $A_1, B_1, C_1, \ldots$ mit der verlangten Verschiebungsstrecke v, je nach der Seite, nach der verschoben werden soll. Es ist nämlich nach dem früher (§ 2) bewiesenen Hülfssatz über die Mittelsenkrechte AA_1 congruent AA_2 congruent PA_3 congruent (nach Construction) der Strecke v, um die jeder Punkt von g verschoben werden sollte. Andrerseits ist AB congruent A_3B_3 congruent A_2B_2 congruent A_1B_1, und weil dasselbe für die Punkte C, D etc. gilt, sind die Punktreihen $A, B, \ldots$ und $A_1, B_1, \ldots$ congruent. Andrerseits entstehen sie aber aus einander durch mehrfache Projection, womit unser Satz erwiesen ist.

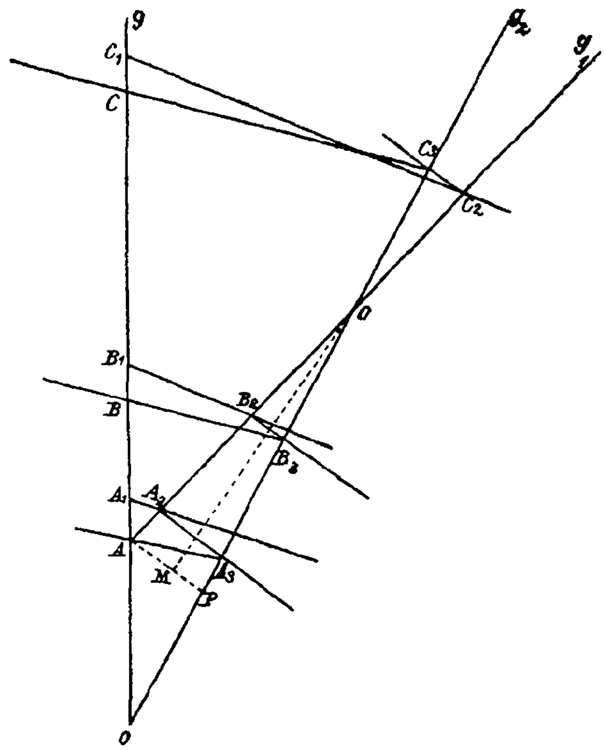

Fig. 15.

Daraus folgt sofort, dass congruente Punktreihen auf zwei beliebigen, verschiedenen Geraden projectiv sind. Denn man kann nach früher Gesagtem jede Gerade auf jede sie schneidende congruent projiciren. Dabei haben wir folgende Definition von congruenten Punktreihen auf verschiedenen Geraden vorausgesetzt:

Die Punktreihen $A_1, B_1, \ldots$ auf der Geraden a_1 und $A_2, B_2, \ldots$ auf der Geraden a_2 sind congruent, wenn:

$$A_1B_1 \equiv A_2B_2, \quad A_1C_1 \equiv A_2C_2, \quad B_1C_1 \equiv B_2C_2, \cdots$$

ist.

§ 6.

Beziehung zwischen Congruenz und Pseudocongruenz.

Da auf Grund der Lehre von den Proportionen leicht der Satz von der Erhaltung des Doppelverhältnisses bei Projection bewiesen werden kann, so folgt aus dem Satz des vorigen Paragraphen, dass zwei congruente Punktquadrupel, je auf einer Geraden gelegen, entsprechend pseudogleiche Doppelverhältnisse bilden. Diese Thatsache wollen wir zum Beweise des folgenden Satzes verwenden:

Seien A und A_1 (s. Fig. 16) *wirkliche Punkte auf der Geraden n durch O und OA (oder a) der Strecke AA_1 (oder a_1) congruent, ferner B*

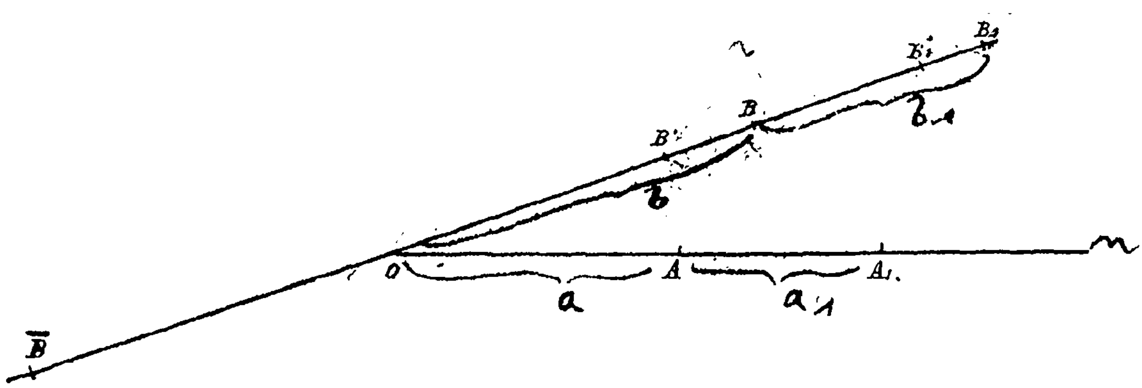

Fig. 16.

und B_1 zwei beliebige andere Punkte auf derselben oder einer anderen Geraden m durch O und OB (oder b) congruent BB_1 (oder b_1), dann behaupten wir:

Ist

$$a \underset{<}{\overset{>}{\approx}} a_1,$$

dann ist bezüglich auch

$$b \underset{<}{\overset{>}{\approx}} b_1.$$

Da wir wissen, dass von O aus abgetragene, congruente Strecken, zugleich pseudocongruent sind, so können wir ersichtlich unsere Betrachtungen auf eine Gerade m durch O beschränken. Wir beweisen zunächst folgenden Hülfssatz:

Sind B, B_1, B', B_1' wirkliche Punkte auf einer Geraden m durch O und ist BB_1 (oder b_1) $\equiv B'B_1'$ (oder b') $\equiv OB$ (oder b), und liegen B und B_1, B' und B_1' je auf derselben Seite von O auf m, dann wird behauptet:

Ist

$$b \underset{<}{\overset{>}{\approx}} b_1,$$

dann ist bezüglich auch:

$$b \gtreqless b'.$$

Aus dem oben erwähnten Grunde können wir annehmen, dass B' auf der Seite BO von m liegt.

Sei ferner $O\overline{B}$ congruent und pseudocongruent OB, dann sind

$$(\overline{B}, O, B, B') \quad \text{und} \quad (O, B, B_1, B_1')$$

congruente Punktquadrupel, deshalb ist:

$$\frac{\overline{B}O \cdot B'B}{\overline{B}B \cdot B'O} \approx \frac{OB \cdot B_1'B_1}{OB_1 \cdot B_1'B}$$

oder:

$$B_1'B \approx 2B'O \frac{OB \cdot BB_1}{B'O \cdot (2OB - OB_1) + OB_1OB}.$$

Aus

$$OB \gtreqless BB_1$$

folgt dann:

$$B_1'B \lesseqgtr 2B'O \frac{OB \cdot BB_1}{OB_1 \cdot OB},$$

$$B_1'B \lesseqgtr B'O.$$

Daraus folgt aber sofort:

$$b \gtreqless b',$$

was bewiesen werden sollte. Indirect folgt dann, dass, wenn

$$b \gtreqless b'$$

ist, auch

$$b \gtreqless b_1$$

ist.

Wählen wir nun, um den Hauptsatz zu beweisen, als Punkt B' den Endpunkt der von O auf OB nach derselben Seite wie b abgetragenen Strecke a. Dann ist BB_1' congruent der Strecke a. Wenn nun:

$$a \gtreqless a_1$$

ist (s. Figur 16), dann muss nach dem eben Bewiesenen auch

$$a \gtreqless a'$$

sein, wenn wir mit a' die Strecke BB_1' bezeichnen. Daraus folgt aber wiederum, dass

$$b \gtreqless b'$$

und deshalb auch

$$b \gtreqless b_1$$

ist, womit unser Satz bewiesen ist.

Wir wollen noch einen zweiten sehr einfachen Beweis für diesen Satz angeben, einen Beweis, der uns zu einigen interessanten und wichtigen Resultaten führt.

Wir fragen uns nämlich nach den *Doppelpunkten gleichlaufender, congruenter Punktreihen* auf derselben Geraden.

Den Coordinatenanfangspunkt O legen wir auf diejenige Gerade m, die wir behandeln wollen. Dann tragen wir von O aus nach beiden Seiten auf m eine Strecke a bis A resp. $\bar{A}$ ab, von A aus eine weitere, a congruente Strecke a_1 bis A_1. Ordnen wir den Punkten $\bar{A}OA$ entsprechend die Punkte OAA_1 zu, so haben wir dadurch zwei congruente gleichlaufende Punktreihen bestimmt. Wir wissen nun, dass das Doppelverhältniss eines Punktquadrupels der einen Reihe pseudogleich dem entsprechenden Doppelverhältniss des entsprechenden Punktquadrupels der anderen Reihe sein muss. Folglich muss die Coordinate x eines eventuellen Doppelpunktes folgende Bedingung erfüllen, welche aber auch die einzige ist:

$$\frac{x-a}{x+a} \approx \frac{a_1 x}{a(x+a+a_1)}$$

oder:

$$x^2 \approx \frac{a^2(a+a_1)}{a-a_1}.$$

Wir wollen auf die Existenzfrage der Doppelpunkte nicht weiter eingehen, beweisen aber folgenden wichtigen Satz:

Die Coordinaten der Doppelpunkte aller Paare von congruenten, gleichlaufenden Punktreihen auf derselben Geraden erfüllen ein und dieselbe Pseudogleichung.

Ist also b irgend eine von O aus bis B abgetragene Strecke, BB_1 oder b_1 congruent OB, dann muss:

$$\frac{a^2(a+a_1)}{a-a_1} \approx \frac{b^2(b+b_1)}{b-b_1}$$

sein, damit unsere Behauptung richtig ist. Wir nehmen der Einfachheit wegen an, B und B_1 lägen auf derselben Seite von O auf m wie A und A_1. Seien $\overline{B}$ und A' Punkte auf der Geraden m derart, dass $O\overline{B}$ con-

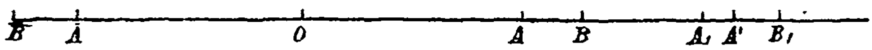

Fig. 17.

gruent und pseudocongruent OB und BA' oder a' congruent OA ist und B zwischen O und A' liegt (s. Fig. 17). Dann sind

$$(\overline{B},\ O,\ A,\ B) \quad \text{und} \quad (O,\ B,\ A',\ B_1),$$

ferner

$$(\overline{A},\ O,\ A,\ B) \quad \text{und} \quad (O,\ A,\ A_1,\ A')$$

congruente Punktquadrupel. Daraus ergeben sich folgende beiden Relationen:

$$\frac{b-a}{2a} \approx \frac{b(b_1 - a')}{a'(b_1 + b)},$$

$$\frac{b-a}{b+a} \approx \frac{a(b + a' - a_1 - a)}{a_1(a' + b)}.$$

Durch Elimination von a' aus diesen Pseudogleichungen ergiebt sich eine Beziehung zwischen a, a_1, b und b_1, welche man nach einer leichten Umrechnung als identisch mit der oben verlangten Relation:

$$\frac{a^2(a + a_1)}{a - a_1} \approx \frac{b^2(b + b_1)}{b - b_1}$$

erkennt, womit unser Satz bewiesen ist. Aus dieser einfachen Beziehung aber folgt sofort der Hauptsatz dieses Paragraphen, von dem wir einen zweiten Beweis geben wollten. Denn es ergiebt sich aus der angeführten Pseudogleichung Folgendes:

Ist $a > a_1$, so ist die linke Seite der Gleichung positiv, also muss auch die rechte Seite positiv und $b > b_1$ sein. Ebenso folgt aus

$$a < a_1:$$

$$b < b_1$$

und endlich aus

$$a \approx a_1:$$

$$b \approx b_1,$$

womit unser Ziel erreicht ist.

§ 7.

Der zweite Legendre'sche Satz.

Der im vorigen Paragraphen bewiesene Satz führt unmittelbar auf folgende fundamentale Thatsachen:

Ist in irgend einem Dreieck die Winkelsumme kleiner als zwei rechte Winkel, so ist in jedem Dreieck die Winkelsumme kleiner als zwei rechte Winkel.

Ist in irgend einem Dreieck die Winkelsumme gleich zwei rechten Winkeln, so ist sie in jedem Dreieck gleich zwei rechten Winkeln.

Ist in irgend einem Dreieck die Winkelsumme grösser als zwei rechte Winkel, so ist sie in jedem Dreieck grösser als zwei rechte Winkel.

Der mittlere dieser drei Sätze ist nichts anders als der bekannte zweite Legendre'sche Satz, der jedoch von Legendre nur mit Hülfe der Stetigkeit (also Benutzung des Archimedischen Axioms) bewiesen worden ist.

Beweis: Wir betrachten ein beliebiges Dreieck und fällen von einer Ecke desselben auf die gegenüberliegende Seite das Lot. Wir sehen sofort, dass die Winkelsumme im Dreieck kleiner, gleich oder grösser als zwei rechte Winkel ist, jenachdem einer dieser Fälle für die beiden rechtwinkligen Teildreiecke gleichzeitig eintritt. Wir können unsere Betrachtungen also auf rechtwinklige Dreiecke beschränken.

Durch congruente Uebertragung können wir es als erreicht annehmen, dass der Scheitel des rechten Winkels im betrachteten Dreieck in den Coordinatenanfangspunkt fällt. Die anderen Ecken mögen A und B sein. Wir wollen zeigen, dass je nachdem die erste, zweite oder dritte „Hypothese" des Satzes im vorigen Paragraphen eintritt, die Winkelsumme in dem Dreieck OAB kleiner, gleich oder grösser als zwei rechte Winkel ist; damit ist dann gleichzeitig gezeigt, dass jedes beliebige andere Dreieck gleichzeitig eine Winkelsumme kleiner, gleich oder grösser als zwei R hat.

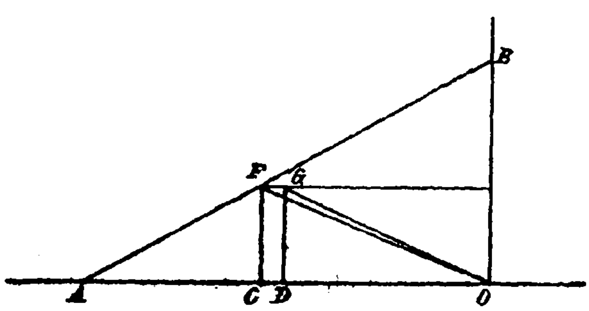

Fig. 18.

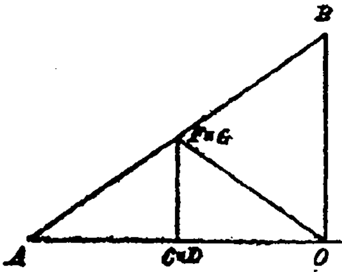

Fig. 19.

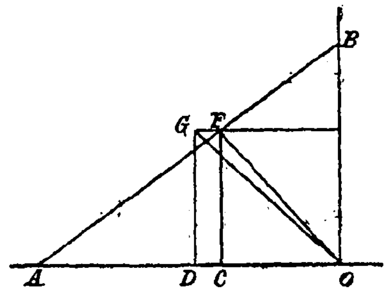

Fig. 20.

Dazu brauchen wir (s. Fig. 18, 19, 20) nur zu beweisen, dass jeder der beiden Winkel OAB und OBA dadurch, dass man ihn in O congruent anträgt, pseudokleiner (bez. pseudogleich, bez. pseudogrösser) geworden (bez. geblieben) ist, je nach der als zutreffend angenommenen Hypothese. Denn die Winkelsumme im Dreieck OAB ist, wie wir wissen, pseudocongruent zwei rechten Winkeln und für Winkel mit dem Scheitel in O ist Congruenz und Pseudocongruenz dasselbe.

Zu diesem Zwecke halbiren wir OA in C und tragen CA von O bis D pseudocongruent ab, dann liegt nach unserer Annahme D zwischen O und C (bez. fällt nach unserer Annahme D mit C zusammen, bez. liegt nach unserer Annahme C zwischen O und D). Ferner errichten wir in C ein Lot und verbinden den Schnittpunkt F des Lotes mit AB mit O, ebenso errichten wir in D ein Lot und schneiden es mit dem Lote von F auf OB in G. Dann ist $DG \approxeq CF$. Das Dreieck ACF ist congruent dem Dreieck OCF, folglich der Winkel OAB congruent dem Winkel DOF; und das Dreieck ACF pseudocongruent dem Dreieck GOD, folglich der Winkel OAF pseudocongruent dem Winkel DOG und $\sphericalangle DOF \left\{\begin{matrix} < \\ \approxeq \\ > \end{matrix}\right\} \sphericalangle DOG$. Folglich ist der Winkel OAB, indem wir ihn congruent in den Winkel AOF überführten $\left\{\begin{matrix}\text{pseudokleiner geworden} \\ \text{pseudogleich geblieben} \\ \text{pseudogrösser geworden}\end{matrix}\right\}$, was zu beweisen war. Dasselbe folgt für den Winkel OBA. Folglich ist, je nachdem wir unsere Hypothese wählen, die Winkelsumme in allen Dreiecken $\lesseqgtr 2R$, was wir im Anfang behauptet hatten.

Capitel III.

Beziehungen zwischen den Hypothesen über die Winkelsumme im Dreieck und den Hypothesen über Parallelen.

§ 8.

Die Nicht-Legendre'sche Geometrie.

Der sogenannte „erste Legendre'sche Satz" sagt, wie im Eingang erwähnt, aus, dass die Winkelsumme in einem Dreieck niemals grösser als zwei Rechte sein kann. Man überzeugt sich leicht, dass mit den bisher angewandten Methoden der Beweis dieses Satzes nicht gelingen kann. Es liegt deshalb nahe zu untersuchen, ob es überhaupt möglich ist, denselben ohne Zuhülfenahme des Archimedischen Axioms zu beweisen. Wäre es unmöglich, so würde das bedeuten, dass die drei verschiedenen *Hypothesen über Existenz und Anzahl der Geraden* durch einen Punkt, welche eine Gerade nicht schneiden, *sich nicht decken* mit *den* drei verschiedenen *Hypothesen über die Grösse der Winkelsumme im Dreieck*. Bekanntlich folgt unter Zuhülfenahme der Stetigkeit, dass die Winkelsumme in einem Dreieck grösser, gleich oder kleiner als zwei R ist, je nachdem es zu einer Geraden durch einen Punkt keine, eine oder unendlich viele Parallelen giebt, d. h. die einen drei verschiedenen Hypothesen decken sich mit den anderen drei verschiedenen Hypothesen in jeder Archimedischen Geometrie. Zunächst wollen wir nachweisen, dass es eine Geometrie giebt, in der durch jeden Punkt zu jeder Geraden unendliche viele Parallelen möglich sind und dennoch die Winkelsumme grösser als $2R$ ist. Damit ist dann die Unbeweisbarkeit des ersten Legendre'schen Satzes bewiesen und gezeigt, dass die *Hypothese des stumpfen Winkels*, wie sie Saccheri nennt, *sich nicht deckt mit der Hypothese der Endlichkeit der Geraden*. Weiterhin wollen wir dann noch einige Sätze beweisen, die den Zusammenhang zwischen den beiden Gruppen von Hypothesen klar machen sollen.

Dem Folgenden wollen wir durchgängig den Bereich complexer Zahlen $\Omega(t)$ zu Grunde legen, der in der Festschrift § 12 eingeführt ist, um eine *„Nicht-Archimedische“ Geometrie* aufzubauen. Wir wollen dies in Kürze hier wiederholen: $\Omega(t)$ ist zunächst der Bereich aller derjenigen algebraischen Functionen von t, die aus t durch die vier Rechnungsoperationen der Addition, Subtraction, Multiplication, Division und durch die fünfte Operation $\sqrt{1+\omega^2}$ hervorgehen, wo ω irgend eine Function ist, die vermöge jener fünf Operationen bereits entstanden ist. Wir sehen dann die Functionen des Bereiches $\Omega(t)$ als eine Art complexer Zahlen an; für diese sind offenbar die gewöhnlichen Rechnungsregeln sämmtlich gültig. Ferner möge, wenn a, b irgend zwei verschiedene Zahlen dieses complexen Zahlensystems sind, die Zahl a grösser oder kleiner ($a>b$, $a<b$) heissen, je nachdem die Differenz $c=a-b$ als Function von t für genügend grosse positive Werte von t stets positiv oder stets negativ ausfällt. Durch diese Festsetzung wird erreicht, dass die gewöhnlichen Gesetze, welche die Bezeichnungen „grösser“ und „kleiner“ betreffen, auch bei diesen complexen Zahlen erfüllt sind.

Aus diesen Zahlen bauen wir eine ebene Geometrie auf: Wir denken uns ein System von zwei Zahlen des Bereiches $\Omega(t)$ als einen Punkt und die Verhältnisse von irgend drei Zahlen $(u:v:w)$ aus Ω, falls u und v nicht beide null sind, als eine Gerade. Ferner möge das Bestehen der Gleichung:

$$ux+vy+w=0$$

ausdrücken, dass der Punkt (x, y) auf der Geraden $u:v:w$ liegt. Treffen wir sodann die entsprechenden Festsetzungen über die Anordnung der

Elemente und über Abtragen von Strecken und Winkeln, wie in der gewöhnlichen analytischen Geometrie, so entsteht eine Geometrie, in der sämmtliche Axiome mit alleiniger Ausnahme des Archimedischen Axioms erfüllt sind.

In dieser „Nicht-Archimedischen" Ebene construiren wir uns zunächst eine gewöhnliche „elliptische" oder „Riemannsche" Geometrie. Dies kann, wie bekannt, folgendermassen geschehen:

Wir legen die Gleichung eines nulltheiligen Kegelschnittes, etwa:

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

zu Grunde. Punkte und Gerade sind Punkte und Gerade der zu Grunde gelegten Geometrie einschliesslich der „unendlich fernen" Geraden und ihrer Punkte. Zwei Figuren in unserer Geometrie sind congruent, wenn sie durch eine reelle lineare Transformation aus einander hervorgehen, die die zu Grunde gelegte quadratische Gleichung in sich überführt. In dieser Geometrie gelten alle Axiome ausser dem Euklidischen und Archimedischen Axiom; wir müssen dann allerdings an den Axiomen der Anordnung entsprechende Modificationen anbringen. Doch mit diesen wollen wir uns nicht aufhalten, da sie für unsere Zwecke gar nicht in Betracht kommen.

In dieser elliptischen Geometrie grenzen wir ein Gebiet ab, in dem wir als Punkte unserer neuen Geometrie nur diejenigen Punkte bezeichnen, deren Coordinaten x, y folgenden Bedingungen genügen:

$$\frac{+n}{t} > \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} > \frac{-n}{t},$$

wo n eine beliebige ganze rationale Zahl ist. Die Geraden unserer Geometrie seien die Geraden der elliptischen Geometrie, soweit die Coordinaten der Punkte auf denselben die oben aufgestellten Bedingungen erfüllen. Die Strecken- und Winkelabtragung definiren wir ebenso wie in der elliptischen Geometrie, so dass, wenn in dieser zwei Strecken oder Winkel congruent sind, sie auch in unserer congruent sind. Nun müssen wir aber noch zeigen, dass wir durch Strecken- und Winkelabtragung nicht aus unserem Gebiete herauskommen können. Das soll folgendermassen geschehen:

Wir tragen eine beliebige Strecke c auf der x-Axe vom Anfangspunkt O bis P ab und von P aus eine c congruente Strecke c_1 bis Q. Wir untersuchen, ob Q noch zu unserem Gebiete gehört. Nach Definition ist, wenn i formell für $\sqrt{-1}$ gesetzt ist:

$$\frac{\{i-(c+c_1)\}(i+c))}{(i-c)\,(i+(c+c_1))} = \frac{i-c}{i+c},$$

denn congruente Strecken auf derselben Geraden bilden mit den „Schnittpunkten" der Geraden mit dem Fundamentalkegelschnitt gleiche Doppelverhältnisse.

Daraus folgt:

$$c + c_1 = \frac{2c}{1 - c^2},$$

und da nun c nach Definition grösser als $\frac{-n}{t}$ und kleiner als $\frac{+n}{t}$ ist, so folgt:

$$\frac{\frac{-2n}{t}}{1 - \left(\frac{n}{t}\right)^2} < c + c_1 < \frac{\frac{+2n}{t}}{1 - \left(\frac{n}{t}\right)^2}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{nt}{t^2 - n^2} < \frac{2n}{t},$$

denn hieraus folgt:

$$2n^2 < t^2,$$

was ja sicher richtig ist.

Folglich ist:

$$\frac{-4n}{t} < c + c_1 < \frac{+4n}{t}.$$

Q liegt also noch innerhalb unseres Gebietes. Dann aber kommen wir auch aus unserem Gebiete nicht heraus, wenn wir irgend eine innerhalb unseres Gebietes auf einer Geraden durch O gelegene Strecke von irgend einem Punkt auf derselben oder einer anderen Geraden durch O abtragen, wie man sich sofort überzeugen wird. Denn die Geraden durch O gehen im Sinne unserer Geometrie congruent in einander über durch Drehung um O, und diese Drehung führt Punkte unseres Gebietes in eben solche über. Eine Drehung wird nämlich vermittelt durch die Transformationsgleichungen:

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, x - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, y,$$

$$y' = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, x + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, y.$$

Vorausgesetzt ist, dass:

$$\frac{-n}{t} < \left\{ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\} < \frac{+n}{t}$$

ist. Dann ist:

$$-\frac{n}{t}-\frac{n}{t}<\left\{\begin{matrix}x'\\ y'\end{matrix}\right\}<\frac{n}{t}+\frac{n}{t}$$

oder

$$-\frac{2n}{t}<\left\{\begin{matrix}x'\\ y'\end{matrix}\right\}+\frac{2n}{t},$$

womit unsere Behauptung erwiesen ist.

Zweitens tragen wir die beliebige Strecke $OP=c$ von einem Punkte der x-Axe mit den Coordinaten $(d, 0)$ auf einer zur x-Axe senkrechten Geraden ab. Wir wollen sehen, ob der andere Endpunkt der Strecke noch innerhalb unseres Gebietes liegt. Dieser Endpunkt habe die Coordinaten d, e. Dann folgt vermöge unserer Definition der Congruenz, dass:

$$\frac{i-c}{i+c}=\frac{i\sqrt{1+d^2}-e}{i\sqrt{1+d^2}+e}$$

und

$$e=c\sqrt{1+d^2}$$

ist. Nun ist:

$$-\frac{n}{t}<\left\{\begin{matrix}d\\ c\end{matrix}\right\}<+\frac{n}{t}$$

und

$$\sqrt{1+\left(\frac{n}{t}\right)^2}<2.$$

Folglich ist:

$$-\frac{2n}{t}<e<+\frac{2n}{t}.$$

Also liegt auch der andere Endpunkt von e in unserem Gebiete. Da $e>c$ ist, wie aus obigen Formeln hervorgeht, so folgt unmittelbar, dass man auch durch die umgekehrte Abtragung nicht aus unserem Gebiete herauskommen kann. — Haben wir jetzt eine beliebige Strecke AB auf der Graden a und wollen diese vom Punkte A' auf der beliebigen Geraden a' unseres Gebietes abtragen, so fällen wir von O auf a und a' Lote, die diese Geraden in C resp. D schneiden. C und D müssen augenscheinlich Punkte unseres Gebietes sein, wenn a und a' Geraden unseres Gebietes sind. Dann ergiebt sich auf Grund der vorher bewiesenen Möglichkeit von zwei bestimmten Arten des congruenten Abtragens, dass wir auch die Strecke AB auf der Geraden a' vom Punkte A' aus nach beiden Seiten hin abtragen können, ohne aus dem eingeschränkten Gebiet der Nicht-Archimedischen Ebene herauszukommen.

Dass wir durch Winkelabtragen nicht aus unserem Gebiete herauskommen, ist klar. Wir sind also berechtigt folgenden Satz auszusprechen.

Die im Vorhergehenden eingeführte Geometrie erfüllt sämmtliche Axiome mit Ausnahme des Euklidischen und Archimedischen Axioms.

Das bei dem Aufbau dieser Geometrie benutzte Nicht-Archimedische Coordinatensystem entspricht durchaus dem in unseren früheren Betrachtungen benutzten Systeme der Pseudogeometrie. Nun haben wir gesehen, dass, wenn wir die Strecke $OP = c$ von P aus congruent abtragen bis Q, $PQ = c_1$ sich durch c folgendermassen ausdrückt:

$$c_1 = c\left(\frac{1+c^2}{1-c^2}\right) > c.$$

Dieselbe Beziehung hätten wir früher folgendermassen ausdrückt:

$$c_1 \approx c\left(\frac{1+c^2}{1-c^2}\right) \succ c.$$

Aber wir haben bewiesen, dass, wenn in einer Geometrie c_1 pseudogrösser ist als c, die Winkelsumme in jedem Dreieck grösser als zwei Rechte ist.

Folglich haben wir eine Geometrie construirt, die allen Axiomen I, II, IV Genüge leistet, in der ferner durch jeden Punkt zu jeder Geraden unendlich viele Parallelen möglich sind, in der aber nichtsdestoweniger die Winkelsumme in jedem Dreieck grösser als zwei rechte Winkel ist.

Das Archimedische Axiom gilt dann natürlich nicht.

Damit ist die Unbeweisbarkeit des I. Legendre'schen Satzes ohne Zuhülfenahme des Archimedischen Axioms nachgewiesen. Die zu diesem Beweise benutzte Hülfsgeometrie können wir deshalb *„Nicht-Legendre'sche“ Geometrie* nennen, was wir schon in der Einleitung erwähnt hatten.

§ 9.

Die Semi-Euklidische Geometrie.

Wir wollen nun noch, wie schon oben gesagt, den Zusammenhang zwischen den Hypothesen über die Winkelsumme im Dreieck und über Anzahl und Existenz von Parallelen etwas eingehender prüfen. Dazu construiren wir uns zunächst in der im vorigen Paragraphen gebrauchten „Nicht-Archimedischen“ Ebene eine zweite Geometrie. Die Punkte derselben seien diejenigen Punkte, deren Coordinaten die Bedingungen erfüllen:

$$-n < \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} < +n,$$

wo n eine beliebige ganze rationale positive Zahl bedeutet. Die Geraden unserer Geometrie seien die Geraden der zu Grunde gelegten Geometrie, soweit die Coordinaten der Punkte auf denselben die oben aufgestellte Bedingung erfüllen. Die Strecken- und Winkelabtragung definiren wir ebenso wie in der zu Grunde gelegten Euklidischen Geometrie, sodass, wenn in dieser zwei Strecken oder Winkel congruent sind, sie auch in unserer congruent sind. Ebenso wie in der vorhin construirten Geometrie ist es wieder unsere Aufgabe nachzuweisen, dass wir durch Strecken- und Winkelabtragung niemals aus unserem Punktgebiet herauskönnen. Zunächst ist klar, dass die Transformation

$$x' = x + a,$$
$$y' = y + b,$$

welche die Parallelverschiebung von Strecken und Winkeln vermittelt, nicht Punkte unseres Gebietes in Punkte, die demselben nicht angehören, überführt. Denn nach Definition ist

$$-n < \begin{Bmatrix} x \\ y \\ a \\ b \end{Bmatrix} < +n.$$

Folglich ist

$$-2n < \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} < +2n,$$

was unserer Behauptung entspricht.

Um sämmtliche Abtragungsoperationen vollführen zu können, haben wir noch eine Drehung um den Coordinatenanfangspunkt O hinzuzunehmen. Diese wird vermittelt durch die Transformationsgleichungen:

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} x - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} y,$$
$$y' = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} x + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} y.$$

Ist nun:

$$-n < \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} < +n,$$

dann ist:

$$-n - n < \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} < n + n,$$
$$-2n < \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} < +2n,$$

womit unsere Behauptung erwiesen ist.

In dieser so construirten Geometrie gelten demgemäss sämmtliche Axiome der Gruppen I, II, IV. Ferner haben aber auch sämmtliche Sätze der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie, soweit sie mit einem „beschränkten“ Raumstück zu thun haben, in derselben Gültigkeit. Die Winkelsumme ist in jedem Dreieck gleich zwei rechten Winkeln, es giebt Rechtecke und ähnliche nicht congruente Dreiecke.

Aber durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden giebt es mehr als *eine* jene nicht schneidende Gerade: Das Parallelenaxiom gilt nicht. Verbinde ich zum Beispiel den Punkt $(t, 0)$ mit dem Punkte $(0, 1)$, so gehört diese Gerade zu unserem Gebiet, denn sie verbindet zwei Punkte desselben: die Punkte $(0, 1)$ und $\left(1, \frac{t-1}{t}\right)$. Diese Gerade schneidet aber die Coordinatenaxe $y = 0$ nicht in einem Punkte unseres Gebietes; ebensowenig aber die Gerade durch $(-t, 0)$ und $(0, 1)$, die von der ersten verschieden ist.

Das Resultat ist also:

Es giebt Nicht-Archimedische Geometrien, in denen das Parallelenaxiom nicht gültig ist und dennoch die Winkelsumme in jedem Dreieck gleich zwei rechten Winkeln ist.

Eine solche Geometrie wollen wir „*Semi-Euklidisch*" nennen.

Es ergiebt sich also, dass keiner der Sätze: die Winkelsumme im Dreieck beträgt zwei Rechte; die Abstandscurve ist eine Gerade etc., mit dem Parallelenaxiom als äquivalent angesehen werden kann, und dass Euklid mit der Aufstellung des Parallelenaxioms gerade das Richtige traf.

§ 10.
Der Legendre'sche Satz in der elliptischen Geometrie.

Zum Schlusse wollen wir noch kurz in diesem Zusammenhange die „*elliptische*" *Geometrie* behandeln. In derselben wird vorausgesetzt, dass sich alle Geraden wirklich schneiden. Damit diese Annahme den Axiomen nicht widerspricht, müssen wir einige leicht einzuführende Aenderungen an den Axiomen der Gruppe II — den Axiomen der Anordnung — machen. Nichts hindert aber auch in einer solchen Geometrie die oftmals gebrauchte Pseudogeometrie einzuführen und auch den allgemeinen Satz des § 6 abzuleiten. Betrachten wir eine Gerade durch den Punkt O und sei J ihr unendlich ferner Punkt. Dann kann ich auf OJ einen Punkt J_1 so finden, dass $OJ_1 \equiv J_1 J$ ist, denn J ist ein wirklicher Punkt in der elliptischen Geometrie. Ferner sei $OJ_2 \equiv J_2 J_1$. Wenn nun OJ_2 nicht pseudokleiner als $J_2 J_1$ wäre, so müsste auch OJ_1 pseudogrösser sein als $J_1 J$ gemäss des Satzes im § 6, was natürlich nicht der Fall ist. Dann ist aber nach demselben Satz eine jede Strecke OA pseudokleiner als die von A nach derselben Seite OA congruent abgetragene Strecke AA_1. Daraus folgt aber nach dem Satze des § 7, dass die Winkelsumme in jedem Dreieck grösser als zwei rechte Winkel ist. Wir haben also das Resultat:

Giebt es in einer Geometrie keine Parallelen und gelten in derselben alle Axiome der Gruppen I, IV und die entsprechend modificirten der Gruppe II, dann ist die Winkelsumme stets grösser als zwei rechte Winkel.

Dieser Satz spricht die höchst überraschende Thatsache aus, dass das Analogon des ersten Legendre'schen Satzes für den Fall der Nichtexistenz von Parallelen (ohne Voraussetzung der Stetigkeit) gilt.

Die verschiedenen, so gewonnenen Einzelresultate ordnen wir am Besten in folgendes Schema ein:

Die Winkelsumme im Dreieck ist:	Durch einen Punkt giebt es zu einer Geraden:		
	keine Parallele	eine Parallele	unendlich viele Parallelen.
$> 2R$	Elliptische Geometrie	(Unmöglich)	Nicht-Legendre'sche Geometrie
$= 2R$	(Unmöglich)	Euklidische Geometrie	Semi-Euklidische Geometrie
$< 2R$	(Unmöglich)	(Unmöglich)	Hyperbolische Geometrie.

Zum Schlusse erfülle ich die angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Hilbert, dem ich die Anregung zu dieser Arbeit verdanke, und der während der Ausführung mich stets mit förderndem Rath unterstützt hat, meinen herzlichsten Dank auszusprechen.