Ueber die überall oscillirenden differenzirbaren Functionen.

Von

A. SCHOENFLIES in Königsberg.

Auf die merkwürdige Thatsache, dass es überall oscillirende stetige Functionen giebt, die in jedem Punkte eine bestimmte Ableitung besitzen, hat bekanntlich zuerst Herr Köpcke durch Construction eines speciellen Beispiels dieser Art hingewiesen. *) Mir persönlich ist kürzlich die Existenz solcher Functionen auch von Herrn Brodén bestätigt worden, der auf einem andern Wege zu ihnen gelangt sein dürfte, und seine Resultate voraussichtlich demnächst veröffentlichen wird. **) Als ich bei Gelegenheit meines demnächst erscheinenden Berichts über Mengenlehre selbst an das Studium dieser Functionsgattung heranging, bin ich zu Formeln gelangt, die die ganze Classe dieser Functionen kennzeichnen, so dass ich es für nützlich halte, sie hier mitzuthemen. Wie die Herren Brodén und Steinitz, die kürzlich über die überall oscillirenden Functionen gearbeitet haben, ***) gehe ich davon aus, die Function dadurch zu bestimmen, dass ich ihre Werthe an einer überall dichten Menge gleichmässig stetig vorschreibe. Man kann so die Structur der Function in der mannigfachsten Weise so beeinflussen, dass sie überall differenzirbar ist.

Es sei $s = a \cdots b$ das Intervall, in dem die Function $f(x)$ definirt ist, so wähle ich als diejenige überall dichte Menge, an der ich die Werthe der Function vorschreibe, die Menge der Maxima und Minima selbst. Dabei bemerke ich noch, dass es sich nur um lauter eigentliche Maxima und Minima handeln soll. Um alle Functionen dieser Art zu erhalten, kann man folgendermassen verfahren.

*) Diese Annalen, Bd. 29, S. 123, Bd. 34, S. 161 und Bd. 35, S. 104. Die Construction, die zum Ziele führt, findet sich nur in Bd. 35. Eine dahingehende Vermuthung hatte bereits Herr U. Dini ausgesprochen.

**) (Nachträgliche Bemerkung.) Dies ist inzwischen geschehen; Stokholm Vet. Ak. Öfv. 1900, S. 423 u. 743. Auch der im folgenden erwähnte „Bericht“ ist inzwischen erschienen.

***) Journ. f. Math. Bd. 118, S. 1 und diese Annalen, Bd. 52.

Das Intervall $s = a \cdots b$ theile man in irgend drei Theile s_0, s_1, s_2 , jedes dieser Intervalle s_i in die drei Theile s_{i0}, s_{i1}, s_{i2} u. s. w.*) Es entstehen so die Theilintervalle

$$s_i, s_{ik}, s_{ikl}, \cdots s_N, s_{Ni}, \cdots$$

wo N eine Gruppe von ν Indices andeuten soll, und alle diese Indices die Werthe 0, 1, 2 haben können. Sei ferner $t = f(b) - f(a)$ der Functionszuwachs, der dem Intervall s entspricht, und es mögen den Intervallen s_0, s_1, s_2 die Functionszuwächse t_0, t_1, t_2 entsprechen, ebenso allgemein dem Intervall s_N der Functionszuwachs t_N .

Falls nun wieder s_N in s_{N0}, s_{N1}, s_{N2} zerfällt, so setze man allgemein

$$(1) \quad s_{N0} = \frac{s_N}{2} (1 - \varepsilon_{N0}), \quad s_{N2} = \frac{s_N}{2} (1 - \varepsilon_{N2}), \quad s_{N1} = \frac{s_N}{2} (\varepsilon_{N0} + \varepsilon_{N2}),$$

$$(2) \quad t_{N0} = \frac{t_N}{2} (1 + \varphi_{N0}), \quad t_{N2} = \frac{t_N}{2} (1 + \varphi_{N2}), \quad t_{N1} = -\frac{t_N}{2} (\varphi_{N0} + \varphi_{N2}),$$

und zwar darf unbeschadet der Allgemeinheit angenommen werden, dass t_{N0} und t_{N2} das gleiche Zeichen haben wie t_N , dagegen t_{N1} und t_N entgegengesetztes Zeichen, so dass $\varphi_{N0} + \varphi_{N2} > 0$ ist. Es entspricht dann, wenn $t_N > 0$ ist, der erste Theilpunkt von s_N einem Maximum, der zweite einem Minimum, umgekehrt der erste einem Minimum und der zweite einem Maximum, wenn $t_N < 0$ ist. Damit man auf diese Weise zu einer stetigen überall oscillirenden Function gelangt, ist nur noch die Bedingung zu erfüllen, dass für unbegrenzt wachsendes ν mit $\lim s_N = 0$ zugleich $\lim t_N = 0$ wird. Nebenbei ist klar, dass alle $s_N > 0$ sein müssen, so dass $\varepsilon_{N0} + \varepsilon_{N2} > 0$ ist.

Um die Werthe der Ableitungen zu discutiren, setze man zunächst

$$(3) \quad \frac{1 + \varphi_{N0}}{1 - \varepsilon_{N0}} = \alpha_{N0}, \quad \frac{1 + \varphi_{N2}}{1 - \varepsilon_{N2}} = \alpha_{N2}, \quad -\frac{\varphi_{N0} + \varphi_{N2}}{\varepsilon_{N0} + \varepsilon_{N2}} = \alpha_{N1},$$

so hat man, wie leicht ersichtlich, allgemein

$$(4) \quad \frac{t_N}{s_N} = \alpha_i \alpha_{ik} \alpha_{ikl} \cdots \alpha_N \frac{t}{s} = A_N \frac{t}{s},$$

wo die Indices $i, k, l, \cdots$ mit denjenigen, die in N eingehen, identisch sind. Setzt man ferner

$$(5) \quad \frac{t_{N0} + t_{N1}}{s_{N0} + s_{N1}} = \frac{1 - \varphi_{N2}}{1 + \varepsilon_{N2}} \frac{t_N}{s_N} = \beta_{N2} \frac{t_N}{s_N} = \beta_{N2} A_N \frac{t}{s},$$

$$(6) \quad \frac{t_{N1} + t_{N2}}{s_{N1} + s_{N2}} = \frac{1 - \varphi_{N0}}{1 + \varepsilon_{N0}} \frac{t_N}{s_N} = \beta_{N0} \frac{t_N}{s_N} = \beta_{N0} A_N \frac{t}{s},$$

*) Bei Brodén nimmt die Zahl der Theile mit wachsendem ν unbegrenzt zu (a. a. O. S. 441), ebenso bei Köpcke. Es ist aber klar, dass auch die fortgesetzte Dreitheilung zu jeder Function dieser Art führt.

so hat man damit diejenigen Quotienten, die die Werthe der Ableitungen beeinflussen, und die bei geeigneter Wahl der ε_N und φ_N der Function $f(x)$ alle möglichen Eigenschaften beizubringen gestatten.

Soll nun die Function in jedem Punkt eine eigentliche Ableitung besitzen, so muss diese Ableitung zunächst in allen Theilpunkten den Werth Null haben, da diese Punkte eigentliche Maxima oder Minima sind. Es ist daher erforderlich und ausreichend, dass in jedem linken Endpunkt ξ_i eines jeden Intervalls $s_N = \xi_i \cdots \xi_r$ die vordere und in jedem rechten Endpunkt ξ_r die hintere Ableitung den Werth Null hat. Für die andern Punkte dagegen ist nur zu verlangen, dass die Ableitung in ihnen bestimmt und endlich ist.

Nun sei x ein beliebiger Punkt von s , so giebt es für ihn stets eine Folge von Theilintervallen

$$(7) \quad s_i, s_{ik}, s_{ikl}, \cdots s_N, \cdots$$

mit bestimmten Indices $i, k, l, \cdots$ deren Endpunkte gegen x als ihren gemeinsamen Grenzpunkt convergiren und zwar ist x ein Endpunkt eines Intervalles s_N , falls die Indices zuletzt sämmtlich gleich 0 oder sämmtlich gleich 2 sind. Soll in x eine bestimmte Ableitung existiren, so muss jedenfalls die Reihe der Quotienten

$$(8) \quad \frac{t_i}{s_i}, \frac{t_{ik}}{s_{ik}}, \frac{t_{ikl}}{s_{ikl}}, \cdots \frac{t_N}{s_N} \cdots$$

gegen einen festen Grenzwert convergiren, und zwar für jede Indicesfolge. Das gleiche gilt daher gemäss (4) für jedes Product

$$A_N = \alpha_i \alpha_{ik} \alpha_{ikl} \cdots \alpha_N.$$

Hieraus ergibt sich bereits eine Reihe wichtiger Folgerungen.

Da nämlich jedes $\alpha_{N1} < 0$ ist, so müssen alle diejenigen Producte, deren Indicesfolge den Index 1 unendlich oft enthält, gegen Null convergiren, und hierzu ist jedenfalls hinreichend, und wahrscheinlich auch nothwendig, dass jedes aus unendlich vielen Grössen α_{N1} bestehende Product selbst Null ist. Wir wählen $|\lim \alpha_{N1}| < 1$, und haben dieser Bedingung damit genügt. Die bezüglichen Punkte x kann man füglich als diejenigen betrachten, denen die Wendepunkte der Function entsprechen.

Zur Ableitung weiterer Bedingungen, die sich an die Reihe (8) knüpfen, können wir uns nunmehr auf solche Indicesfolgen beschränken, die vom ν -ten Index an nur noch die Ziffern 0 oder 2 enthalten. Falls zunächst vom ν -ten Index an entweder nur 0 oder nur 2 vorkommt, so convergirt die Reihe (8) gegen die Ableitung in einem Punkte ξ_i resp. ξ_r , und da diese Null sein müssen, so müssen auch die Producte

$$(9) \quad A_N^0 = \alpha_N \alpha_{N0} \alpha_{N00} \cdots \quad \text{und} \quad A_N^2 = \alpha_N \alpha_{N2} \alpha_{N22} \cdots$$

den Werth Null haben, und zwar für jede Indicesgruppe N . Es müssen daher in jedem dieser Producte unendlich viele Factoren $\alpha < 1$ auftreten, die ihre Convergenz gegen Null bewirken. Sei nun für irgend ein N insbesondere α_{N2} einer dieser Factoren, so setze man für dieses N

$$(10) \quad \frac{1 + \varphi_{N0}}{1 - \varepsilon_{N0}} = 1 + a_N, \quad \frac{1 + \varphi_{N2}}{1 - \varepsilon_{N2}} = 1 - b_N, \quad \frac{\varphi_{N0} + \varphi_{N2}}{\varepsilon_{N0} + \varepsilon_{N2}} = 1 - c_N$$

wo nothwendig $b_N > 0$ und $c_N > 0$, überdies $\lim c_N < 1$ ist. Aus diesen Gleichungen folgt

$$\varepsilon_{N0}(2 + a_N - c_N) + \varepsilon_{N2}(2 - b_N - c_N) = a_N - b_N,$$

und diese Relation ist so zu befriedigen, dass $\varepsilon_{N0} + \varepsilon_{N2} > 0$, $\varphi_{N0} + \varphi_{N2} > 0$ ist, und im übrigen die den Producten eigenthümlichen Convergenzeigenschaften erfüllt werden. Setzen wir noch

$$(11) \quad 1 - c_N = \gamma_N, \quad a_N - b_N = \varepsilon_{N2} + \varepsilon'_{N2},$$

so verwandelt sich die obige Relation in

$$\varepsilon_{N2}(b_N - \gamma_N) + \varepsilon'_{N2} - \varepsilon_{N0}(1 + a_N + \gamma_N) = 0,$$

während sich aus $\varepsilon_{N0} + \varepsilon_{N2} > 0$ und $\varphi_{N0} + \varphi_{N2} > 0$ die Bedingung

$$\varepsilon_{N2}b_N + \varepsilon'_{N2} - \varepsilon_{N0}(1 + a_N) > 0$$

ergiebt. Diesen Relationen, zu denen noch die Bedingung $\lim \gamma_N < 1$ hinzukommt, kann auf mannigfache Weise genügt werden. Man kann insbesondere, was die einfachsten Verhältnisse liefert,

$$(12) \quad \varepsilon_{N0} > 0, \quad \varepsilon_{N2} > 0, \quad \varphi_{N2} < 0, \quad \varphi_{N0} > 0, \quad a_N > 0$$

annehmen. Wird dann noch

$$(13) \quad \frac{\varepsilon'_{N2}}{b_N \varepsilon_{N2}} = G_N \quad \text{und} \quad \frac{\varepsilon_{N0}}{b_N \varepsilon_{N2}} = K_N$$

gesetzt, wo $K_N > 0$ ist, und G_N nebst K_N der Relation $G_N - K_N + 1 > 0$ genügen, so liefert jedes Grössensystem dieser Art geeignete Werthe der ε , a , b resp. der ε und φ . Man erhält

$$\varphi_{N0} + \varphi_{N2} = (G_N - K_N(1 + a_N) + 1) b_N \varepsilon_{N2}$$

und

$$\frac{\varphi_{N0} + \varphi_{N2}}{\varepsilon_{N0} + \varepsilon_{N2}} = (G_N - K_N(1 + a_N) + 1) \frac{b_N}{1 + K_N b_N},$$

und ist in der Wahl von $\varepsilon_{N2} > 0$ nur insoweit beschränkt, dass jedes A_N convergirt, was auf vielerlei Art geschehen kann. Analoge Relationen sind zu befriedigen, wenn man bewirken will, dass $\alpha_{N0} < 1$ und $\alpha_{N2} > 1$ ist. Diesen Relationen kann auf mannigfache Weise genügt werden.

Um die Begriffe zu fixiren, gebe ich zunächst ein einfaches Beispiel, das dem Fall entspricht, dass stets $a_N > b_N$ und $\varepsilon'_{N2} = 0$ ist. Nimmt

man nun insbesondere die Factoren $1 - b_N$ als gewisse Factoren des Productes $\prod \left(1 - \frac{1}{m}\right)$ an, so kann man setzen

$$b_N = \frac{1}{m}, \quad a_N = \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2}, \quad \varepsilon_{N0} = \frac{1}{m^4}, \quad \varepsilon_{N2} = \frac{1}{m^2},$$

wo die Zahl m für jedes Intervall s_N sogleich bestimmt werden wird, und erhält

$$\varphi_{N0} + \varphi_{N2} = \frac{1}{m^3} - \frac{1}{m^4} - \frac{1}{m^5} - \frac{1}{m^6},$$

$$\frac{\varphi_{N0} + \varphi_{N2}}{\varepsilon_{N0} + \varepsilon_{N2}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^3}}{1 + \frac{1}{m^2}}.$$

Man hat nun noch zu zeigen, dass sich die den einzelnen Intervallen s_N entsprechenden Zahlen m so wählen lassen, dass wirklich

$$(14) \quad \lim A_N^0 = 0 \quad \text{und} \quad \lim A_N^2 = 0$$

ist, und doch jedes A_N gegen einen endlichen Grenzwert convergirt. Dies kann folgendermassen geschehen.

Man denke sich die bei fortgesetzter Theilung entstehenden Intervalle, resp. deren Indices in folgender Tabelle angeordnet

0				2			
00		02		20		22	
000	002	020	022	200	202	220	222
...	0200	0202	...	2000	2002	...	...

und setze zunächst die ihnen entsprechenden Werthe m , resp. die Brüche $1/m$ durch folgende Tabelle fest

$-\frac{1}{2}$				$+\frac{1}{2}$			
$-\frac{1}{3}$		$+\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{4}$		$+\frac{1}{4}$	
$-\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{5}$	$+\frac{1}{5}$	$+\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$
...	$-\frac{1}{12}$	$+\frac{1}{12}$	...	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{6}$	...	...

so dass allgemein das negative Zeichen einem b_N , das positive einem a_N entspricht, und sich jede Zeile nach folgendem Bildungsgesetz bestimmt. Aus jedem Intervall s_N entstehen zwei neue Intervalle s_{N0} und s_{N2} , deren eines ein positives, deren anderes ein negatives Zeichen bedingt. Falls nun zu s_N der Bruch $-1/m$ gehört, so ordne man den beiden daraus entstehenden Intervallen die Brüche $-1/m + 1$ und $1/m + 1$ zu, und zwar tritt das negative Zeichen immer bei dem Intervall s_{Ni} auf, dessen letzte Ziffer i

mit der letzten Ziffer der Gruppe N übereinstimmt, z. B. beim Uebergang von 200 zu 2000 und 2002 bei dem Intervall, das zum Index 2000 gehört. Falls dagegen zu s_N der Bruch $+1/m$ gehört, so erhalten die daraus neu entstehenden Intervalle die Brüche $-1/2m$ und $+1/2m$, und auch hier soll das negative Zeichen immer bei dem Intervall stehen, in dessen Index die letzte Ziffer der letzten Ziffer von N gleich ist. Dadurch wird erreicht, dass jede Diagonalreihe nach höchstens zwei positiven Brüchen einen negativen erhält und dass, sobald ein negativer Bruch in ihr auftritt, lauter negative Brüche erscheinen, und dies so, dass Gl. (14) erfüllt ist. Die positiven Brüche dagegen sind so gewählt, dass durch den von einer zur andern Zeile hinzutretenden Factor $1/2$ die Convergenz aller A_N erreicht wird. Statt dieses Factors kann natürlich jeder andere constante oder variable Factor benutzt werden, der die Convergenz der Producte A_N bewirkt. Auch ist klar dass die obige Werthvertheilung für jedes andere gegen Null convergirende Product vorgenommen werden kann, und dass sich auch dann die Grössen ε_{N0} , ε_{N2} , ε'_{N2} den bezüglichen Bedingungen gemäss wählen lassen.

Durch das vorstehende ist der Beweis geführt, dass für jedes N und jedes Product $\Pi(1-b_q)$, das den Werth Null hat, immer die Gl. (14) so befriedigt werden kann, dass $\lim A_N$ stets endlich ist, und jedes aus unendlich vielen Factoren $1+a_N$ bestehende Product unbedingt convergirt. Freilich ist damit der Beweis der Differenzirbarkeit von $f(x)$ noch nicht vollständig erbracht, doch kann dies jetzt durch Einführung einer neuen Bedingung geleistet werden.

Sei x der durch die Folge (7) dargestellte Punkt, und $s_l = x \cdots x_l$ ein von ihm nach links laufendes Theilintervall, ebenso $x \cdots x_r = s_r$ ein solches, das nach rechts geht, alsdann ist noch zu zeigen, dass auch immer

$$\lim \frac{t_l}{s_l} = \lim \frac{t_r}{s_r} = \lim \frac{t_N}{s_N}$$

ist, wo der letzte Grenzwert der Folge (8) entspricht. Hierzu bedarf es zunächst einer Hilfsbetrachtung. Wir wollen allgemein die Aufgabe lösen, die Entfernung eines innerhalb $s_N = \xi_l \cdots \xi_r$ gelegenen Punktes x' von den Endpunkten von s_N auszudrücken, vorausgesetzt, dass x' durch die Folge

$$s_{Ni}, s_{Nik}, s_{Nikl}, \dots$$

bestimmt ist. Wir setzen noch $\xi_l \cdots x' = s'_l$ und $x' \cdots \xi_r = s'_r$; alsdann gilt folgendes: Liegt x' in s_{N1} , so beginnt der für s'_l sich ergebende Summenausdruck mit dem Summand s_{N0} , ebenso derjenige für s'_r mit s_{N2} . Liegt x' in s_{N0} , so treten nur in dem Ausdruck für s'_r Glieder s_{Ni} auf, und zwar $s_{N1} + s_{N2}$, und liegt x' in s_{N2} , so treten nur in s'_l Glieder s_{Ni}

auf, und zwar $s_{N1} + s_{N2}$. Es trägt also nicht jedes Glied der obigen Folge Summanden zu s'_i resp. s'_r bei; es seien insbesondere

$$s_{N'}, s_{N''}, s_{N'''}, \dots$$

diejenigen Glieder für die dies mit Bezug auf s'_i der Fall ist, wo $N', N'', N''', \dots$ Indicesgruppen von $\nu', \nu'', \nu''', \dots$ Indices darstellen. Es stammt dann von einem solchen Glied $s_{N'}$ entweder der Summand $s_{N',0}$ oder $s_{N',0} + s_{N',1}$. Bezeichnen wir noch diese eventuellen Summanden gemeinsam durch $\sigma_{N',0}$, so folgt

$$(15) \quad s'_i = \sigma_{N',0} + \sigma_{N'',0} + \sigma_{N''',0} + \dots$$

und analog, können wir setzen

$$(16) \quad s'_r = \sigma_{M',2} + \sigma_{M'',2} + \sigma_{M''',2} + \dots$$

wo diese Grössen die entsprechende Bedeutung haben.

Nun sei x wieder der Punkt, in dem die Ableitung zu prüfen ist, und es sei zunächst x ein Endpunkt eines Intervalles s_N , insbesondere der linke Endpunkt ξ_i , und x' wieder irgend ein Punkt von s_N . Wie oben, werde dann $\xi_i \dots x'$ durch s_r bezeichnet, so dass s_r mit der soeben eingeführten Grösse s'_i identisch ist. Alsdann folgt

$$(17) \quad \frac{t_r}{s_r} = \frac{\tau_{N',0} + \tau_{N'',0} + \dots}{\sigma_{N',0} + \sigma_{N'',0} + \dots}$$

und zwar ist gemäss den Gleichungen (4) und (5)

$$\frac{\tau_{N',0}}{\sigma_{N',0}} = A_{N'} \cdot \alpha_{N0} \frac{t}{s},$$

oder

$$\frac{\tau_{N',0}}{\sigma_{N',0}} = A_{N'} \cdot \beta_{N',2} \frac{t}{s}.$$

Falls wir nun noch ausdrücklich festsetzen, dass die Producte A_N *gleichmässig* gegen ihren Grenzwert convergiren, und dass ebenso die Intervalle $s_{N',0}$ resp. $\sigma_{N',0}$ *gleichmässig* gegen Null convergiren, was für die oben abgeleiteten resp. angenommenen Bedingungen immer von selbst als erfüllt betrachtet wurde und auch für das Beispiel zutrifft, so folgt unmittelbar, dass

$$\lim \frac{t_r}{s_r} = \lim \frac{\tau_{N',0}}{\sigma_{N',0}} = \lim A_N^0 = 0$$

ist, und ebenso für $t_i : s_i$.

Nicht so selbstverständlich liegen die Dinge, falls die Folge (7) keinen Intervallendpunkt bestimmt. Bezeichnen wir den durch (7) bestimmten Punkt wieder durch x' und seine Abstände von ξ_i und ξ_r , wie oben, durch s'_i und s'_r , so muss jedenfalls auch

$$\lim \frac{t'_l}{s'_l} = \lim \frac{t'_r}{s'_r} = \lim \frac{t_N}{s_N}$$

sein. Man hat nun wieder für s'_l und s'_r die Formeln (15) und (16), wo sich aber jetzt die Indicesgruppen N' , N'' , N''' , ... auf die Indicesfolge der Reihe (7) beziehen. Wenn nun zunächst diese Folge unendlich oft den Index 1 enthält, so ist $\lim A_N = 0$, so dass demgemäss bei der vorausgesetzten gleichmässigen Convergenz auch

$$\lim \frac{t'_l}{s'_l} = \lim \frac{t'_r}{s'_r} = 0$$

ist. Dies gilt überhaupt immer, wenn für die Folge (7) $\lim A_N = 0$ ist.

Wenn jedoch $\lim A_N \geq 0$ ist, so hat man folgendermassen zu schliessen: Alsdann enthält die Folge (7) von einer bestimmten Stelle an nur noch den Index 0 oder 2, und es wird jetzt immer $\sigma_{N',0} = s_{N',0} + s_{N',1}$, also

$$(18) \quad \frac{t'_l}{s'_l} = \frac{t_{N',0} + t_{N',1} + t_{N'',0} + t_{N'',1} + \dots}{s_{N',0} + s_{N',1} + s_{N'',0} + s_{N'',1} + \dots}.$$

In diesem Fall ist aber x' der festzuhaltende Endpunkt, und es kommt daher, wenn x' dem Intervall s_{N2} angehört, auch der Quotient

$$(19) \quad \frac{t''_l}{s''_l} = \frac{t_{N,1} + t_{N',0} + t_{N',1} + \dots}{s_{N,1} + s_{N',0} + s_{N',1} + \dots}$$

resp. sein Grenzwert in Frage. Da nun stets

$$\frac{t_{N1}}{s_{N1}} = \alpha_{N1} < 0, \quad \frac{t_{N0} + t_{N1}}{s_{N0} + s_{N1}} > 0$$

ist, so wird dieser Quotient nur dann gegen $\lim A_N$ convergiren, falls immer das erste Glied von Zähler und Nenner gegen das zweite Glied nicht in Betracht kommt, welches auch die Werthe der in N , resp. N' auftretenden Indicesanzahlen ν und ν' sein mögen. Dieser Bedingung ist daher noch Ausdruck zu geben.

Entspricht dem Punkte x' die Indicesfolge $i, k, l, \dots$ resp. die Intervallfolge

$$s_i, s_{ik}, s_{ikl}, \dots s_N, \dots s_{N'}, \dots s_{N''}, \dots$$

so dass vom ν -ten Index an die 1 nicht mehr auftritt, so bezeichnen gemäss der Definition von $\nu, \nu', \nu'', \dots$ die Zahlen $\nu+1, \nu'+1, \nu''+1, \dots$ diejenigen Stellen, an denen der Index 2 steht, während sonst alle Indices vom ν -ten an Null sind. Falls also z. B. die Indices 0 und 2 dauernd abwechseln, so ist $\nu' = \nu + 2$, $\nu'' = \nu' + 2, \dots$ und die obengenannte Bedingung ist bereits dann erfüllt, wenn $\lim (s_{N1} : s_{N0}) = 0$ ist. Falls aber $\nu' - \nu$ sehr gross ist, oder gar mit ν über alle Grenzen wächst, was ja möglich sein kann, so liegen die Dinge weniger einfach. Unsere Indicesfolge enthält

dann $\nu' - \nu - 1$ consecutive Nullen. Die nächste Nullenfolge reiche vom ν_1 -ten bis zum ν_1' -ten Index, so dass also in der Indicesfolge je

$$\nu' - \nu - 1, \nu_1' - \nu_1 - 1, \nu_2' - \nu_2 - 1, \dots$$

consecutive Nullen erscheinen. Diese Möglichkeit ist noch in Betracht zu ziehen. Setzt man nun noch

$$(20) \quad A_{N'} = A_N \cdot \alpha_{N2} \cdot \alpha_{N20} \cdot \alpha_{N200} \cdots \alpha_{N'} = A_N \cdot A_{N'},$$

so muss

$$(21) \quad \lim_{s_{N',0}} \frac{s_{N1}}{s_{N',0}} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t_{N',0}} \frac{t_{N1}}{t_{N',0}} = \lim_{\alpha_{N',0} A_{N'} s_{N',0}} \frac{\alpha_{N1} s_{N1}}{\alpha_{N',0} A_{N'} s_{N',0}} = 0$$

sein, wobei die Indices ν_i und ν_i' der Bedingung genügen müssen, dass $\lim A_N \geq 0$ ist, also jedenfalls

$$A_{N'} \cdot A_{N_1'} \cdot A_{N_2'} \cdots$$

gegen einen von Null verschiedenen Grenzwert convergirt.

Nun folgt aus der oben (S. 557) angegebenen Constructionsvorschrift, dass die Factoren von $A_{N'}$ immer consecutive Factoren des Products $\Pi(1 - b_q)$ sind, insbesondere solche aus consecutiven Gliedern gebildete Theilproducte, dass deren Gesamtproduct endlich und von Null verschieden ist.*) Man fasse nun die zugehörigen Zahlenquotienten

$$\frac{\nu'}{\nu}, \frac{\nu_1}{\nu_1}, \frac{\nu_2'}{\nu_2}, \dots$$

ins Auge. Für sie kann es eine untere Grenze k so geben, dass für hinreichend grosses ν und ν' schliesslich nothwendig $\nu' < k\nu$ bleiben muss, damit $\lim A_N \leq 0$ ist. Ist alsdann λ die nächstgrössere ganze Zahl, so dass $k\nu \leq \lambda$ ist, so hat man die Bedingung zu erfüllen, dass gleichmässig

$$\lim_{s_{L0}} \frac{s_{N1}}{s_{L0}} = 0$$

ist, wo L die bezüglichliche Gruppe von λ Indices bedeutet. Die zweite der obigen Bedingungen ist damit, wie leicht zu sehen, von selbst erfüllt. Analoge Verhältnisse greifen Platz, wenn die Indicesfolge $i, k, l, \dots$ den Index 2 in langen Folgen enthält, resp. beiderlei derartige Folgen.

Dass diese Bedingung durch Wahl von ε_{N0} und ε_{N2} erfüllbar ist, zeigt das oben angeführte Beispiel, in dem

$$\prod (1 - b_m) = \prod \left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

*) Genauer ist noch von den ersten Factoren dieser Producte abzusehen, was jedoch ohne Belang ist. Solche Theilproducte hat Herr Pringsheim allgemein betrachtet; diese Ann. 22, S. 453.

ist. Falls hier in der zu x' gehörigen Indicesfolge (7) unendlich viele Folgen von Nullen oder Zweien auftreten, so werden durch *jede* derartige Folge gemäss dem obigen Bildungsgesetz lauter consecutive Factoren dieses Products bedingt. Wenn also z. B. eine Folge von $\nu' - \nu - 1$ Nullen vorhanden ist, so möge dem Intervall s_{N0} der Factor $1 - \frac{1}{m}$ entsprechen, wo m die oben (S. 557) bestimmte Zahl ist; für das Intervall $s_{N'0}$ dagegen sei er $1 - \frac{1}{m'}$, und es ist daher

$$A'_{N'} = \left(1 - \frac{1}{m+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{m'}\right) = \frac{m}{m'}.$$

Nun ist klar, dass ein von Null verschiedener Grenzwert des zu der betrachteten Indicesfolge zugehörigen Productes A_N nur dann existirt, wenn das Product

$$\frac{m'}{m} \cdot \frac{m'_1}{m_1} \cdot \frac{m'_2}{m_2} \cdots$$

endlich ist, so dass jedenfalls zuletzt immer

$$\frac{m'}{m} < 1 + e$$

bleibt, bei beliebigem $e > 0$. Andererseits zeigt die obige Constructionsvorschrift, dass

$$m' > \nu', \quad \nu + \frac{1}{2} < m < 2^{\nu+1}$$

ist*), woraus noch

$$\nu' < (1 + e)2^{\nu+1}$$

folgt, und es genügt daher $\lambda = (1 + e)2^{\nu+1}$ zu nehmen. Nun ist

$$\lim_{s_{L0}} \frac{s_{N1}}{s_{L0}} = \lim (\varepsilon_{N0} + \varepsilon_{N2}) 2^{\lambda-\nu},$$

wie aus der Gl. (1) folgt und hieraus folgt weiter als hinreichende Bedingung

$$\lim (\varepsilon_{N0} + \varepsilon_{N2}) \cdot 2^{(1+e)2^{\nu+1}} = 0,$$

und dies lässt sich z. B. erfüllen, wenn wir jetzt die obenstehenden Werthe (S. 557) wie folgt abändern:

$$b_N = \frac{1}{m}, \quad a_N = \frac{1}{m} + \frac{1}{2^{3m}}, \quad \varepsilon_{N0} = \frac{1}{2^{4m}}, \quad \varepsilon_{N2} = \frac{1}{2^{3m}},$$

wo m dieselbe Bedeutung hat, wie oben.

Genau genommen hat man nun noch nachzuweisen, dass die vordere und hintere Ableitung in x' auch dann noch gegen den zu x' gehörigen

*) Statt 2 könnte jede Grösse $1 + f$ eintreten, wo $f > 0$ ist. Doch ist dies für das folgende ohne Belang.

Grenzwert von A_N convergirt, falls man die Endpunkte der Intervalle s_i' und s_r' beliebig wählt; doch hat dies keinerlei Schwierigkeit und ergibt sich leicht aus den oben gegebenen Ausführungen. Es folgt überdies auch aus einem allgemeinen von Herrn Brodén gegebenen Theorem*).

Damit ist gezeigt, dass man sich eine Function der genannten Art auf die mannigfachste Weise herstellen kann. Das nämliche wird sich für jedes unendliche Product erreichen lassen, das den Werth Null hat.

Königsberg, im Mai 1900.

*) Journ. f. Math. 118, S. 5.