bassa temperatura dell'acqua era portata allo stato di saturazione.

Una cagione analoga deve produrre le nebbie e le nubi, che si veggono spesso prodursi in contatto delle cime dei monti.

C. M.

TAVOLE PER DEDURRE CON SEMPLICI INTERPOLAZIONI I RAGGI DI CURVATURA DI UN OBBIETTIVO APLANATICO COMPOSTO DI TRE LENTI A CONTATTO, LA PRIMA E LA TERZA DI ESSE, ESSENDO FATTE DI UNA MEDESIMA QUALITÀ DI CRISTALLO, DATI CHE SIANO I POTERI REFRANGENTI E DISPERSIVI DELLE SOSTANZE IMPIEGATE. DOTT. A. FORTI.

1°.

Equazioni impiegate per la costruzione delle Tavole.

Essendomi proposto di trovare colle formule date nel Capitolo III. Parte IV. della *Nuova teoria degli strumenti ottici* del chiarissimo sig. Prof. Mossotti i raggi di curvatura delle tre lenti componenti un obbiettivo *aplanatico*, ho pensato d'introdurre in calcolo la condizione che la prima e la terza lente di esso fossero formati di una medesima qualità di cristallo. In questo caso avvertii che le dette formule presentavano dei valori indeterminati, ritenendo per incognita principale, con cui le altre sono espresse, la distanza focale della seconda lente; per cui fui naturalmente condotto a sostituire a questa incognita la distanza focale della terza lente e trovai con mia soddisfazione che in questo caso l'equazione finale, da cui dipende la soluzione del problema, in luogo di essere del *quinto* grado, come lo è generalmente, si abbassa al *secondo* grado.

Fatto consapevole di ciò l'illustre Professore anzidetto, egli aggiunse alla sua Memoria una Nota, nella quale modificò le formule generali inservienti al caso in cui le tre lenti sieno di sostanze differenti in modo da far vedere con la semplice ispezione di esse, che quando le lenti estreme sono di una medesima qualità di cristallo, l'equazione finale diviene del secondo grado.

Ciò nonostante penso che non sarà discaro al lettore di vedere una esposizione del processo col quale io giunsi da prima a questo semplice risultato impiegando un calcolo diretto e adattato al caso preso in considerazione; esposizione che diviene tanto più necessaria in quanto che le formule dedotte con questo processo sono quelle su cui ho fondata la costruzione delle Tavole, che formano il soggetto di questo breve lavoro.

Intanto farò notare che la restrizione che ho introdotto delle due lenti estreme della stessa natura, può essere francamente adottata dagli artisti; poichè nel tempo ch'essa non pregiudica all'acromatismo, è alla pratica comodissima.

2°.

Calcolo delle equazioni che somministrano i raggi di curvatura delle lenti.

Per la intelligenza delle formule, ripeterò qui sommariamente il loro significato e quello delle quantità contenute in esse, riferendomi però alla pregevole Memoria succitata intorno gli strumenti ottici del sullodato sig. Professore e alla determinazione che io feci dell'obbiettivo aplanatico a tre lenti a contatto, la quale è in essa inserita.

Le due lenti estreme si sono ora supposte formate di uno stesso crown e l'intermedia di flint. Le quantità ρ_1 ; $\rho_2 = \rho_3$; $\rho_4 = \rho_5$; ρ_6 sono i raggi di curvatura delle superfici delle tre lenti a contatto a partire da quella che corrisponde all'oggetto; a_1 è l'indice di refrazione dei crown estremi; a_3 quello del flint; b_1 esprime il potere dispersivo del crown; b_3 del flint. Finalmente $m_1 = a_1 - 1$; $m_3 = a_3 - 1$; F rappresenta la distanza

focale dell'obbiettivo che nel calcolo numerico è stata posta $= 1$ ed f_3 è la distanza focale, assunta per incognita, della terza lente.

Nel caso che trattiamo, l'equazione (1) è la relazione tra i raggi di curvatura delle superfici delle lenti che compongono l'obbiettivo e la distanza focale dell'obbiettivo stesso; l'equazione (2) spetta all'aberrazione *cromatica*; la (1') è, analogamente alla (1), la relazione tra i due raggi di curvatura della terza lente e la sua distanza focale; finalmente le equazioni (3), (4) spettano all'aberrazione di *sfericità*.

Ecco il calcolo:

$$(1) \quad m_1 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3} - \frac{1}{\rho_4} \right) + m_3 \left(\frac{1}{\rho_4} - \frac{1}{\rho_5} \right) = -\frac{1}{F}$$

$$(2) \quad b_1 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3} - \frac{1}{\rho_4} \right) + b_3 \left(\frac{1}{\rho_4} - \frac{1}{\rho_5} \right) = 0$$

$$(1') \quad m_1 \left(\frac{1}{\rho_3} - \frac{1}{\rho_4} \right) = -\frac{1}{f_3}.$$

Da queste ponendo

$$r = \frac{b_3}{m_3 b_1 - m_1 b_3} \qquad s = \frac{b_1}{m_3 b_1 - m_1 b_3}$$

ricaviamo

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_5} + (r - s) \frac{1}{F} \\ \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho_4} - \frac{1}{m_1} \frac{1}{f_3} - s \frac{1}{F} \\ \frac{1}{\rho_3} = \frac{1}{\rho_4} - \frac{1}{m_1} \frac{1}{f_3} \end{array} \right.$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{m_1}{a_1} r \\ - \frac{m_2}{a_3} s \\ - 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} + m_1 \frac{1}{a_1} r^2 + m_2 \frac{1}{a_3} s^2 \\ \left(\frac{F}{\rho_0} \right) - m_1 \frac{1}{a_1} r s - m_2 \frac{1}{a_3} r s \\ - 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} + \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3} \right) \frac{m_3}{m_1} s \\ - \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3} \right) s \end{array} \right\} \left(\frac{F}{f_s} \right) = 0$$

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{2}{a_1} m_1 - 3 \right) m_1 r \\ - \left(\frac{2}{a_3} m_2 - 3 \right) m_2 s \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{F}{\rho_0} \right)^2 \\ - \frac{4}{a_3} m_2 s (m_1 r - m_2 s) \\ - 3 m_1 r^2 - 3 m_2 s^2 \\ + 6 m_1 r s \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} + \frac{4}{a_1} m_1 r (m_1 r - m_2 s) \\ - \frac{4}{a_3} m_2 s (m_1 r - m_2 s) \\ - 6 (m_3 - m_1) \frac{1}{m_1} s \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} + \frac{2}{a_1} (m_1 r - m_2 s)^2 + \frac{4}{a_1} (m_3 - m_1) r s \\ - \frac{2}{a_3} s (m_1 r - m_2 s)^2 + \frac{4}{a_3} (m_3 - m_1) r s \\ - m_1 r^2 + m_2 s^2 \\ + 3 m_1 r^2 s - 3 m_2 r s^2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} + \frac{2}{a_3} (m_3 - m_1)^2 \frac{1}{m_1^2} s \\ + 3 (m_3 - m_1) \frac{1}{m_1^2} s \end{array} \right\} \left(\frac{F}{f_s} \right)^2 = 0$$

Ponendo il rapporto dei poteri dispersivi del crown e del flint

$= \frac{b_1}{b_3} = \psi$ ed osservando che $m_1 r - m_3 s = -1$, le equazioni (3)

(4) si semplificano e si ha:

$$r = \frac{1}{m_3 \psi - m_1} \quad ; \quad s = \frac{\psi}{m_3 \psi - m_1}$$

$$(3') \quad \beta'_0 \left(\frac{F}{\rho_6} \right) + \gamma'_0 + \gamma'_1 \left(\frac{F}{f_3} \right) = 0$$

$$(4') \quad \alpha_0 \left(\frac{F}{\rho_6} \right)^2 + \left\{ \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{F}{f_3} \right) \right\} \left(\frac{F}{\rho_6} \right) + \gamma_0 + \gamma_1 \left(\frac{F}{f_3} \right) + \gamma_2 \left(\frac{F}{f_3} \right)^2 = 0$$

dove si è pòsto per brevità :

$$\beta'_0 = \frac{m_1}{a_1} r - \frac{m_3}{a_3} s - 1$$

$$\gamma'_0 = \frac{m_1}{a_1} r^2 - \frac{m_1}{a_1} r s + \frac{1}{a_3} s - 1$$

$$\gamma'_1 = \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3} \right) s - \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3} \right) s$$

$$\alpha_0 = \frac{2}{a_1} m_1^2 r - \frac{2}{a_3} m_3^2 s + 3$$

$$\beta_0 = \frac{4}{a_1} m_1^2 r (r-s) + \frac{4}{a_3} m_3 s - 3 m_1 r (r-s) - 3 s + 2$$

$$\beta_1 = \frac{4}{a_1} (m_3 - m_1) s + \frac{4}{a_3} \frac{m_3}{m_1} (m_3 - m_1) s - 6 \frac{1}{m_1} (m_3 - m_1) s$$

$$\gamma_0 = \frac{2}{a_1} (r-s)^2 m_1^2 r - \frac{2}{a_3} s - m_1 r^2 + m_3 s^2 + 3 m_1 r s (r-s) + 1$$

$$\gamma_1 = \frac{2}{a_1} m_1 (r-s)^2 - \frac{4}{a_3} \frac{1}{m_1} (m_3 - m_1) s - \frac{2}{a_1} \frac{1}{m_1} + 3 \frac{1}{m_1} (m_3 - m_1) s^2$$

$$\gamma_2 = -\frac{2}{a_3} \frac{1}{m_1^2} (m_3 - m_1)^2 s + 3 \frac{1}{m_1^2} (m_3 - m_1) s$$

E ponendo $B' = \beta'_0$; $C' = \gamma'_0 + \gamma'_1 \left(\frac{F}{f_3} \right)$

$$A = \alpha_0$$
 ; $B = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{F}{f_3} \right)$; $C = \gamma_0 + \gamma_1 \left(\frac{F}{f_3} \right) + \gamma_2 \left(\frac{F}{f_3} \right)^2$

le equazioni (3'), (4') divengono

$$(3'') \quad B' \left(\frac{F}{\rho_6} \right) + C' = 0 \quad ; \quad (4'') \quad A \left(\frac{F}{\rho_6} \right)^2 + B \left(\frac{F}{\rho_6} \right) + C = 0$$

da cui eliminando $\left(\frac{F}{\rho_6} \right)$ si ha

$$A C'^2 - B B' C' + B'^2 C = 0$$

equazione del secondo grado in $\frac{F}{f_3}$.

Infatti sostituendo, si ha

$$(a) \quad D_2 \left(\frac{F}{f_3} \right)^2 + D_1 \left(\frac{F}{f_3} \right) + D_0 = 0$$

dove si è posto

$$D_2 = \alpha_0 \gamma'_1{}^2 - \beta'_0 \beta_1 \gamma'_1 + \beta'_0{}^2 \gamma_2$$

$$D_1 = 2\alpha_0 \gamma'_0 \gamma'_1 - \beta'_0 \beta_1 \gamma'_1 + \beta'_0{}^2 \gamma_1$$

$$D_0 = \alpha_0 \gamma'_0{}^2 - \beta_0 \beta'_0 \gamma'_0 + \beta'_0{}^2 \gamma_0.$$

Ottenuto da (a) il valore di $\frac{F}{f_3}$, risalendo alle equazioni (3'') ed (A), si ricaveranno tutti i raggi di curvatura dell'obbiettivo.

Osserveremo intanto che l'equazione (a) essendo del secondo grado, può non ammettere radici *reali*; per cui si vede che nel mentre è sempre possibile un obbiettivo triplo aplana-

tico allorchè i due crown estremi sono di natura differente (l'equazione risolutiva essendo in tal caso del 5°. grado) può non essere possibile facendo uso di due sole specie particolari di cristallo.

3°.

Costruzione delle Tavole per mezzo delle esposte equazioni.

L'idea d'impiegare uno stesso crown per formare le lenti estreme dell'obbiettivo, avendomi condotto a delle formule semplici dipendenti dalla risoluzione di un'equazione di secondo grado, e questa rendendo facile il calcolo delle Tavole atte a somministrare le curvature delle tre lenti componenti l'obbiettivo stesso nei varii casi di refrangibilità e di dispersione dei cristalli adoperati, mi ha animato ad intraprendere la loro costruzione.

Le Tavole che qui esibisco sono a *tripla entrata*. Ho fatto variare il rapporto $\psi = \frac{b_1}{b_3}$ dei poteri dispersivi del crown e flint considerando i tre casi di

$$\psi_1 = 0,50 \quad ; \quad \psi_2 = 0,55 \quad ; \quad \psi_3 = 0,60 .$$

Per ciascuno di questi tre poteri ho posto il caso di tre flint e di tre crown. Gl'indici dei tre flint sono espressi da:

$$a_{3(1)} = 1,62 \quad ; \quad a_{3(2)} = 1,63 \quad ; \quad a_{3(3)} = 1,64$$

e quelli dei crown da:

$$a'_1 = 1,52 \quad ; \quad a''_1 = 1,53 \quad ; \quad a'''_1 = 1,54 ;$$

sicchè ciascun ψ fornendo 9 risultati, i tre ψ ne daranno 27.

Le Tavole si compongono di due sistemi di raggi per effetto dell'equazione (a) che è del secondo grado in $\frac{F}{f_3}$. Le Tavole I. II. III. del 1°. sistema corrispondono al segno superiore di questa radice, e le analoghe del 2°. sistema al segno inferiore.

Il segno + nel valore dei p indica *concavità* verso l'oggetto e il segno —, *convessità*.

TAVOLA I. — 1° SISTEMA.

$\psi_i = 0,50$			
CROWN-GLASS	FLINT-GLASS		
	$a_{3(1)} = 1,62$	$a_{3(2)} = 1,63$	$a_{3(3)} = 1,64$
$a'_i = 1,52$	$\rho_1 = -0,60384$ $\rho_2 = 0,38970$ $\rho_3 = 5,40194$ $\rho_6 = 1,37955$	$\rho_1 = -0,60126$ $\rho_2 = 0,39588$ $\rho_3 = 11,49953$ $\rho_6 = 1,28890$	$\rho_1 = -0,59801$ $\rho_2 = 0,40039$ $\rho_3 = -396,24363$ $\rho_6 = 1,20804$
$a''_i = 1,53$	$\rho_1 = -0,61194$ $\rho_2 = 0,38816$ $\rho_3 = 3,29466$ $\rho_6 = 1,56592$	$\rho_1 = -0,61017$ $\rho_2 = 0,39668$ $\rho_3 = 5,11953$ $\rho_6 = 1,45647$	$\rho_1 = -0,60766$ $\rho_2 = 0,40341$ $\rho_3 = 10,21456$ $\rho_6 = 1,36006$
$a'''_i = 1,54$	$\rho_1 = -0,61903$ $\rho_2 = 0,38328$ $\rho_3 = 2,29821$ $\rho_6 = 1,79060$	$\rho_1 = -0,61787$ $\rho_2 = 0,39466$ $\rho_3 = 3,20908$ $\rho_6 = 1,65630$	$\rho_1 = -0,61616$ $\rho_2 = 0,40377$ $\rho_3 = 4,90411$ $\rho_6 = 1,53900$

TAVOLA II. — 1°. SISTEMA

$\psi_s = 0,55$			
CROWN-GLASS	FLINT-GLASS		
	$a_{3(1)} = 1,62$	$a_{3(2)} = 1,63$	$a_{3(3)} = 1,64$
$a'_1 = 1,52$	$\rho_1 = -0,59132$ $\rho_2 = 0,37447$ $\rho_3 = -2,48599$ $\rho_6 = 1,21537$	$\rho_1 = -0,58467$ $\rho_2 = 0,37863$ $\rho_3 = -1,89069$ $\rho_6 = 1,13209$	$\rho_1 = -0,57746$ $\rho_2 = 0,38044$ $\rho_3 = -1,54971$ $\rho_6 = 1,05616$
$a''_1 = 1,53$	$\rho_1 = -0,60320$ $\rho_2 = 0,37618$ $\rho_3 = -3,97172$ $\rho_6 = 1,38290$	$\rho_1 = -0,59822$ $\rho_2 = 0,38187$ $\rho_3 = -2,64210$ $\rho_6 = 1,28097$	$\rho_1 = -0,59219$ $\rho_2 = 0,38600$ $\rho_3 = -2,00318$ $\rho_6 = 1,19124$
$a'''_1 = 1,54$	$\rho_1 = -0,61332$ $\rho_2 = 0,37476$ $\rho_3 = -10,47905$ $\rho_6 = 1,58519$	$\rho_1 = -0,61011$ $\rho_2 = 0,38188$ $\rho_3 = -4,46992$ $\rho_6 = 1,45657$	$\rho_1 = -0,60494$ $\rho_2 = 0,38922$ $\rho_3 = -2,80705$ $\rho_6 = 1,35027$

TAVOLA III. — 1°. SISTEMA

$\psi_s = 0,60$			
CROWN-GLASS	FLINT-GLASS		
	$a_{\mathfrak{S}(1)} = 1,62$	$a_{\mathfrak{S}(2)} = 1,63$	$a_{\mathfrak{S}(3)} = 1,64$
$a'_1 = 1,52$	$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = -0,55944 \\ \rho_2 = 0,36031 \\ \rho_3 = -0,78210 \\ \rho_6 = 1,09265 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = -0,54373 \\ \rho_2 = 0,36549 \\ \rho_3 = -0,67151 \\ \rho_6 = 1,02284 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = -0,52396 \\ \rho_2 = 0,37322 \\ \rho_3 = -0,57728 \\ \rho_6 = 0,96828 \end{array} \right.$
$a''_1 = 1,53$	$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = -0,58054 \\ \rho_2 = 0,36156 \\ \rho_3 = -0,96937 \\ \rho_6 = 1,23603 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = -0,56777 \\ \rho_2 = 0,36771 \\ \rho_3 = -0,81446 \\ \rho_6 = 1,14889 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = -0,55298 \\ \rho_2 = 0,37279 \\ \rho_3 = -0,70078 \\ \rho_6 = 1,07309 \end{array} \right.$
$a'''_1 = 1,54$	$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = -0,59752 \\ \rho_2 = 0,36168 \\ \rho_3 = -1,23994 \\ \rho_6 = 1,41367 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = -0,58833 \\ \rho_2 = 0,36810 \\ \rho_3 = -1,01309 \\ \rho_6 = 1,29993 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = -0,57651 \\ \rho_2 = 0,37390 \\ \rho_3 = -0,85345 \\ \rho_6 = 1,20548 \end{array} \right.$

TAVOLA I. — 2°. SISTEMA

$\psi_1 = 0,50$			
CROWN-GLASS	FLINT-GLASS		
	$a_{\mathfrak{S}(1)} = 1,62$	$a_{\mathfrak{S}(2)} = 1,63$	$a_{\mathfrak{S}(3)} = 1,64$
$a'_1 = 1,52$	$\rho_1 = 0,42913$ $\rho_2 = 0,52036$ $\rho_3 = 0,23241$ $\rho_6 = 19,73558$	$\rho_1 = 0,41992$ $\rho_2 = 0,54774$ $\rho_3 = 0,23448$ $\rho_6 = 17,34004$	$\rho_1 = 0,41086$ $\rho_2 = 0,57500$ $\rho_3 = 0,23590$ $\rho_6 = 15,13770$
$a''_1 = 1,53$	$\rho_1 = 0,44541$ $\rho_2 = 0,49002$ $\rho_3 = 0,23183$ $\rho_6 = 36,23180$	$\rho_1 = 0,43610$ $\rho_2 = 0,51687$ $\rho_3 = 0,23473$ $\rho_6 = 30,80704$	$\rho_1 = 0,42689$ $\rho_2 = 0,54344$ $\rho_3 = 0,23691$ $\rho_6 = 26,04174$
$a'''_1 = 1,54$	$\rho_1 = 0,46164$ $\rho_2 = 0,46017$ $\rho_3 = 0,23004$ $\rho_6 = 129,86732$	$\rho_1 = 0,45211$ $\rho_2 = 0,48729$ $\rho_3 = 0,23395$ $\rho_6 = 96,33874$	$\rho_1 = 0,44281$ $\rho_2 = 0,51356$ $\rho_3 = 0,23697$ $\rho_6 = 69,10827$

TAVOLA II. — 2°. SISTEMA

$\psi_1 = 0,55$			
CROWN-GLASS	FLINT-GLASS		
	$a_{3(1)} = 1,62$	$a_{3(2)} = 1,63$	$a_{3(5)} = 1,64$
$a'_1 = 1,52$	$\rho_1 = 0,41171$ $\rho_2 = 0,74903$ $\rho_3 = 0,22687$ $\rho_6 = 11,77036$	$\rho_1 = 0,40150$ $\rho_2 = 0,82459$ $\rho_3 = 0,22817$ $\rho_6 = 9,70130$	$\rho_1 = 0,39150$ $\rho_2 = 0,91008$ $\rho_3 = 0,22870$ $\rho_6 = 8,04507$
$a''_1 = 1,53$	$\rho_1 = 0,42839$ $\rho_2 = 0,67086$ $\rho_3 = 0,22724$ $\rho_6 = 21,45013$	$\rho_1 = 0,41866$ $\rho_2 = 0,73399$ $\rho_3 = 0,22938$ $\rho_6 = 15,70110$	$\rho_1 = 0,40853$ $\rho_2 = 0,80338$ $\rho_3 = 0,23070$ $\rho_6 = 12,45633$
$a'''_1 = 1,54$	$\rho_1 = 0,44662$ $\rho_2 = 0,60847$ $\rho_3 = 0,22690$ $\rho_6 = 44,84354$	$\rho_1 = 0,43571$ $\rho_2 = 0,65934$ $\rho_3 = 0,22941$ $\rho_6 = 32,79745$	$\rho_1 = 0,42555$ $\rho_2 = 0,72041$ $\rho_3 = 0,23183$ $\rho_6 = 22,86230$

TAVOLA III. — 2°. SISTEMA

$\psi_s = 0,60$			
CROWN-GLASS	FLINT-GLASS		
	$a_{\mathfrak{S}(1)} = 1,62$	$a_{\mathfrak{S}(2)} = 1,63$	$a_{\mathfrak{S}(3)} = 1,64$
$a'_1 = 1,52$	$\rho_1 = 0,39642$ $\rho_2 = 2,16641$ $\rho_3 = 0,22146$ $\rho_6 = 5,54945$	$\rho_1 = 0,38674$ $\rho_2 = 3,93713$ $\rho_3 = 0,22325$ $\rho_6 = 4,32624$	$\rho_1 = 0,37850$ $\rho_2 = 47,47234$ $\rho_3 = 0,22591$ $\rho_6 = 3,34110$
$a''_1 = 1,53$	$\rho_1 = 0,41377$ $\rho_2 = 1,41238$ $\rho_3 = 0,22195$ $\rho_6 = 8,71305$	$\rho_1 = 0,40328$ $\rho_2 = 1,93517$ $\rho_3 = 0,22401$ $\rho_6 = 6,57643$	$\rho_1 = 0,39351$ $\rho_2 = 3,12363$ $\rho_3 = 0,22575$ $\rho_6 = 5,03628$
$a'''_1 = 1,54$	$\rho_1 = 0,43170$ $\rho_2 = 1,07060$ $\rho_3 = 0,22195$ $\rho_6 = 15,49173$	$\rho_1 = 0,42047$ $\rho_2 = 1,32373$ $\rho_3 = 0,22426$ $\rho_6 = 11,02046$	$\rho_1 = 0,40986$ $\rho_2 = 1,73928$ $\rho_3 = 0,22619$ $\rho_6 = 8,04822$

Dalla ispezione di queste Tavole si ricava:

1°. Che nel mentre i valori del primo sistema di raggi possono servire per lenti di fuoco non tanto lungo, quelli invece del secondo sistema non sono idonei che per lenti di lungo fuoco a motivo specialmente della forte curvatura della superficie *quinta* rispetto a quella delle altre.

2°. Che in ambo i sistemi l'obbiettivo è sempre convesso-convesso. La sesta superficie è sempre molto meno incurvata della prima, e nel secondo sistema essa è così poco incurvata da potersi considerare *piana*. In generale si osserva che a parità d'indice dei due cristalli le curvature dei crown alle estremità dell'obbiettivo crescono con ψ .

3°. La lente intermedia di flint è sempre divergente, e questa divergenza cresce al crescere di ψ . È convesso-concava nel secondo sistema ed è divergente essendo sempre $\rho_3 < \rho_2$. Nel primo sistema è invece concavo-convessa per $\psi_1 = 0,50$; è divergente per essere $\rho_1 < \rho_3$ ed al crescere di ψ essa diventa bi-concava.

4°. Che supponendo costante il potere dispersivo, e l'indice del crown, l'effetto di una maggiore refrangibilità del flint è quello di aumentare le curvature estreme dell'obbiettivo e di diminuire le medie. Ciò è visibile nelle curvature del secondo sistema, ma in quelle del primo, v'è invece un aumento di curvatura nella seconda superficie della lente di flint quando essa ha presa la forma bi-concava. All'incontro mantenendo costante il flint e prendendo dei crown di più forti refrangibilità scemano le curvature estreme dell'obbiettivo e la lente intermedia di flint diviene meno divergente al crescere dell'indice del crown.

5°. A rendere in pratica il più che è possibile dolce la curvatura di tutte le quattro superfici dell'obbiettivo triplo, è d'uopo ricorrere a due cristalli dotati di *massimo* indice e di un rapporto *minimo* di potere dispersivo.

La maggior parte di queste conclusioni era facile a prevedersi per le dottrine conosciute di ottica, e le nostre Tavole ne offrono una conferma.

Noterò in ultimo che nel calcolo di tutti i valori qui assegnati agl'indici e ai rapporti dei poteri dispersivi essendosi sempre ottenuto D_1^2 considerabilmente maggiore di $4D_2D_0$, si

conclude che anche variando questi dati un poco al di fuori dei limiti delle nostre Tavole, risulteranno radici reali, e quindi si potranno determinare i raggi di curvatura per mezzo di semplici *interpolazioni*, come ho da ultimo esposto in un esempio, assumendo dati intermedi a quelli calcolati nelle Tavole stesse.

4°.

Tavole delle differenze prime e seconde dei detti raggi di curvatura per effetto della variazione degl'indici dei due cristalli e del rapporto del loro potere dispersivo.

Ho costruito le Tavole delle differenze *prime* e *seconde* dei raggi di curvatura delle quattro superfici contenute nell'obbiettivo per effetto della variazione dell'indice del crown e del flint e del rapporto del loro potere dispersivo, onde calcolare per mezzo di semplici interpolazioni i raggi corrispondenti per due dati cristalli.

Ciascun raggio ρ essendo funzione delle tre variabili indipendenti a_1, a_3, ψ la differenza totale $\Delta_1 \rho$ si otterrà dalla somma delle differenze di ρ per rapporto alla variazione di ciascuna di queste variabili, mantenendo costanti le altre due. Le differenze si sono ottenute sottraendo sempre un ρ da quello cui corrisponde un indice o una dispersione immediatamente *maggiore* e i segni si sono considerati come algebrici. Le Tavole A, B, C, D, E, F, G, H, I appartengono al primo sistema di raggi, e A', B', C', D', E', F', G', H', I' al secondo sistema. Facendo il rapporto $\psi = \psi_1$, le Tavole A, e B ci danno le differenze dei ρ , la prima per effetto delle variazioni di a_1 (indice del crown) rispetto a ciascun valore di a_3 (indice del flint); la seconda per effetto delle variazioni di a_3 rispetto a ciascun valore di a_1 . Dicasi lo stesso delle Tavole C, D ed E, F rispetto a $\psi = \psi_2$; $\psi = \psi_3$. Le Tavole G, H, I, ci danno le differenze dei ρ nei tre successivi casi di a_3 per effetto delle variazioni di ψ e corrispondenti a ciascun valore di a_1 . Analogamente si sono costruite le altre nove appartenenti al secondo sistema. Le colonne $\delta_1 \rho$ ci danno le differenze *prime* e quelle di $\delta_2 \rho$ le differenze *seconde*.

La formula di cui ci siamo serviti, arrestandoci alle differenze seconde, è come sappiamo dal *Calcolo delle differenze*:

$$(\alpha) \quad x = x_0 + (\delta_1 x_0 - \frac{1}{2} \delta_1^2 x_0) \delta a + \frac{1}{2} \delta_1^2 x_0 \delta a^2$$

dove x_0 è il valore iniziale di x e δa l' accrescimento della variabile indipendente. I valori di x ossia nel nostro caso di ρ che così otterremo, non saranno invero che approssimati, ma nella costruzione pratica delle lenti, quest' approssimazione è più che sufficiente. Si noterà però che le differenze seconde si mantengono grandi pei valori di ρ , nel caso particolare di $\psi_1 = 0,50$ Tavola I. del primo sistema; e pei valori di ρ , Tavole I. II. III del secondo sistema; ma in questi due casi le superfici sono sensibilmente *piane* e le correzioni si rendono inutili; oltre a ciò si vede che costruendo Tavole più estese le differenze terze risulterebbero generalmente assai piccole.

Nei casi in cui le differenze seconde fossero molto piccole, potremmo arrestarci alle differenze prime, ossia fare in (α) , $\delta_1^2 x_0 = 0$ il che torna a calcolare la formula

$$x = x_0 + \delta_1 x_0 \delta a .$$

TAVOLA A

$\psi_1 = 0,50$		
$a_{3(1)} = 1,62$		
$\delta a'_1 = 0,01$	$\delta a''_1 = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = - 0,00810$	$\delta_1 \rho_1 = - 0,00709$	$\delta_2 \rho_1 = + 0,00101$
$\delta_1 \rho_2 = - 0,00154$	$\delta_1 \rho_2 = - 0,00488$	$\delta_2 \rho_2 = - 0,00334$
$\delta_1 \rho_3 = - 2,10728$	$\delta_1 \rho_3 = - 0,99645$	$\delta_2 \rho_3 = + 1,11083$
$\delta_1 \rho_6 = + 0,18637$	$\delta_1 \rho_6 = + 0,22468$	$\delta_2 \rho_6 = + 0,03831$
$a_{3(2)} = 1,63$		
$\delta a'_1 = 0,01$	$\delta a''_1 = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = - 0,00891$	$\delta_1 \rho_1 = - 0,00770$	$\delta_2 \rho_1 = + 0,00121$
$\delta_1 \rho_2 = + 0,00080$	$\delta_1 \rho_2 = - 0,00202$	$\delta_2 \rho_2 = - 0,00282$
$\delta_1 \rho_3 = - 6,38000$	$\delta_1 \rho_3 = - 1,91045$	$\delta_2 \rho_3 = + 4,46955$
$\delta_1 \rho_6 = + 0,16757$	$\delta_1 \rho_6 = + 0,19983$	$\delta_2 \rho_6 = + 0,03226$
$a_{3(3)} = 1,64$		
$\delta a'_1 = 0,01$	$\delta a''_1 = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = - 0,00965$	$\delta_1 \rho_1 = - 0,00850$	$\delta_2 \rho_1 = + 0,00115$
$\delta_1 \rho_2 = + 0,00302$	$\delta_1 \rho_2 = + 0,00036$	$\delta_2 \rho_2 = - 0,00266$
$\delta_1 \rho_3 = + 406,45819$	$\delta_1 \rho_3 = - 5,31045$	$\delta_2 \rho_3 = - 411,76864$
$\delta_1 \rho_6 = + 0,15202$	$\delta_1 \rho_6 = + 0,17894$	$\delta_2 \rho_6 = + 0,02692$

TAVOLA B

$\psi_1 = 0,50$		
$\alpha'_1 = 1,52$		
$\delta a_{\mathfrak{Z}(1)} = 0,01$	$\delta a_{\mathfrak{Z}(2)} = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = + 0,00258$	$\delta_1 \rho_1 = + 0,00325$	$\delta_2 \rho_1 = + 0,00067$
$\delta_1 \rho_2 = + 0,00618$	$\delta_1 \rho_2 = + 0,00451$	$\delta_2 \rho_2 = - 0,00167$
$\delta_1 \rho_3 = + 6,09759$	$\delta_1 \rho_3 = - 407,74316$	$\delta_2 \rho_3 = - 413,84075$
$\delta_1 \rho_6 = - 0,09065$	$\delta_1 \rho_6 = - 0,08086$	$\delta_2 \rho_6 = + 0,00979$
$\alpha''_1 = 1,53$		
$\delta a_{\mathfrak{Z}(1)} = 0,01$	$\delta a_{\mathfrak{Z}(2)} = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = + 0,00177$	$\delta_1 \rho_1 = + 0,00251$	$\delta_2 \rho_1 = + 0,00074$
$\delta_1 \rho_2 = + 0,00852$	$\delta_1 \rho_2 = + 0,00673$	$\delta_2 \rho_2 = - 0,00179$
$\delta_1 \rho_3 = + 1,82487$	$\delta_1 \rho_3 = + 5,09503$	$\delta_2 \rho_3 = + 3,27016$
$\delta_1 \rho_6 = - 0,10945$	$\delta_1 \rho_6 = - 0,09641$	$\delta_2 \rho_6 = + 0,01304$
$\alpha'''_1 = 1,54$		
$\delta a_{\mathfrak{Z}(1)} = 0,01$	$\delta a_{\mathfrak{Z}(2)} = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = + 0,00116$	$\delta_1 \rho_1 = + 0,00171$	$\delta_2 \rho_1 = + 0,00055$
$\delta_1 \rho_2 = + 0,01138$	$\delta_1 \rho_2 = + 0,00911$	$\delta_2 \rho_2 = - 0,00227$
$\delta_1 \rho_3 = + 0,91087$	$\delta_1 \rho_3 = + 1,69503$	$\delta_2 \rho_3 = + 0,78416$
$\delta_1 \rho_6 = - 0,13430$	$\delta_1 \rho_6 = - 0,11730$	$\delta_2 \rho_6 = + 0,01700$

TAVOLA C

$\psi_2 = 0,55$		
$a_{3(1)} = 1,62$		
$\delta a'_1 = 0,01$	$\delta a''_1 = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = - 0,01188$	$\delta_1 \rho_1 = - 0,01012$	$\delta_2 \rho_1 = + 0,00176$
$\delta_1 \rho_2 = + 0,00171$	$\delta_1 \rho_2 = + 0,00142$	$\delta_2 \rho_2 = - 0,00313$
$\delta_1 \rho_3 = - 1,48573$	$\delta_1 \rho_3 = - 6,50733$	$\delta_2 \rho_3 = - 5,02160$
$\delta_1 \rho_6 = + 0,16753$	$\delta_1 \rho_6 = + 0,20229$	$\delta_2 \rho_6 = + 0,03476$
$a_{3(2)} = 1,63$		
$\delta a'_1 = 0,01$	$\delta a''_1 = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = - 0,01355$	$\delta_1 \rho_1 = - 0,01189$	$\delta_2 \rho_1 = + 0,00166$
$\delta_1 \rho_2 = + 0,00324$	$\delta_1 \rho_2 = + 0,00001$	$\delta_2 \rho_2 = - 0,00323$
$\delta_1 \rho_3 = - 0,75141$	$\delta_1 \rho_3 = - 1,82782$	$\delta_2 \rho_3 = - 1,07641$
$\delta_1 \rho_6 = + 0,14888$	$\delta_1 \rho_6 = + 0,17560$	$\delta_2 \rho_6 = + 0,02672$
$a_{3(3)} = 1,64$		
$\delta a'_1 = 0,01$	$\delta a''_1 = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = - 0,01473$	$\delta_1 \rho_1 = - 0,01275$	$\delta_2 \rho_1 = + 0,00198$
$\delta_1 \rho_2 = + 0,00556$	$\delta_1 \rho_2 = + 0,00322$	$\delta_2 \rho_2 = - 0,00234$
$\delta_1 \rho_3 = - 0,45347$	$\delta_1 \rho_3 = - 0,80387$	$\delta_2 \rho_3 = - 0,35040$
$\delta_1 \rho_6 = + 0,13508$	$\delta_1 \rho_6 = + 0,15903$	$\delta_2 \rho_6 = + 0,02395$

TAVOLA D

$\psi_1 = 0,55$		
$a'_1 = 1,52$		
$\delta a_{\mathfrak{S}(1)} = 0,01$	$\delta a_{\mathfrak{S}(2)} = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = + 0,00665$	$\delta_1 \rho_1 = + 0,00721$	$\delta_2 \rho_1 = + 0,00456$
$\delta_1 \rho_2 = + 0,00416$	$\delta_1 \rho_2 = + 0,00181$	$\delta_2 \rho_2 = - 0,00235$
$\delta_1 \rho_3 = + 0,59530$	$\delta_1 \rho_3 = + 0,24098$	$\delta_2 \rho_3 = - 0,35432$
$\delta_1 \rho_6 = - 0,08328$	$\delta_1 \rho_6 = - 0,07593$	$\delta_2 \rho_6 = + 0,00735$
$a''_1 = 1,53$		
$\delta a_{\mathfrak{S}(1)} = 0,01$	$\delta a_{\mathfrak{S}(2)} = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = + 0,00498$	$\delta_1 \rho_1 = + 0,00603$	$\delta_2 \rho_1 = + 0,00103$
$\delta_1 \rho_2 = + 0,00569$	$\delta_1 \rho_2 = + 0,00413$	$\delta_2 \rho_2 = - 0,00156$
$\delta_1 \rho_3 = + 1,32962$	$\delta_1 \rho_3 = + 0,63892$	$\delta_2 \rho_3 = - 0,69070$
$\delta_1 \rho_6 = - 0,40193$	$\delta_1 \rho_6 = - 0,08973$	$\delta_2 \rho_6 = + 0,01220$
$a'''_1 = 1,54$		
$\delta a_{\mathfrak{S}(1)} = 0,01$	$\delta a_{\mathfrak{S}(2)} = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = + 0,00321$	$\delta_1 \rho_1 = + 0,00517$	$\delta_2 \rho_1 = + 0,00196$
$\delta_1 \rho_2 = + 0,00712$	$\delta_1 \rho_2 = + 0,00734$	$\delta_2 \rho_2 = + 0,00022$
$\delta_1 \rho_3 = + 6,05913$	$\delta_1 \rho_3 = + 1,66287$	$\delta_2 \rho_3 = - 4,34626$
$\delta_1 \rho_6 = - 0,42862$	$\delta_1 \rho_6 = + 0,40630$	$\delta_2 \rho_6 = + 0,02232$

TAVOLA E

$\psi_3 = 0,60$		
$\alpha_{8(1)} = 1,62$		
$\delta a'_1 = 0,01$	$\delta a''_1 = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = - 0,02110$	$\delta_1 \rho_1 = - 0,01698$	$\delta_2 \rho_1 = + 0,00412$
$\delta_1 \rho_2 = + 0,00125$	$\delta_1 \rho_2 = + 0,00012$	$\delta_2 \rho_2 = - 0,00113$
$\delta_1 \rho_3 = - 0,18727$	$\delta_1 \rho_3 = - 0,27057$	$\delta_2 \rho_3 = - 0,08330$
$\delta_1 \rho_6 = + 0,14338$	$\delta_1 \rho_6 = + 0,17764$	$\delta_2 \rho_6 = + 0,03426$
$\alpha_{8(2)} = 1,63$		
$\delta a'_1 = 0,01$	$\delta a''_1 = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = - 0,02404$	$\delta_1 \rho_1 = - 0,02056$	$\delta_2 \rho_1 = - 0,00348$
$\delta_1 \rho_2 = + 0,00222$	$\delta_1 \rho_2 = + 0,00039$	$\delta_2 \rho_2 = - 0,00183$
$\delta_1 \rho_3 = - 0,14295$	$\delta_1 \rho_3 = - 0,19863$	$\delta_2 \rho_3 = - 0,05568$
$\delta_1 \rho_6 = + 0,12605$	$\delta_1 \rho_6 = + 0,15104$	$\delta_2 \rho_6 = + 0,02499$
$\alpha_{8(3)} = 1,64$		
$\delta a'_1 = 0,01$	$\delta a''_1 = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = - 0,02902$	$\delta_1 \rho_1 = - 0,02353$	$\delta_2 \rho_1 = + 0,00549$
$\delta_1 \rho_2 = - 0,00043$	$\delta_1 \rho_2 = + 0,00111$	$\delta_2 \rho_2 = + 0,00154$
$\delta_1 \rho_3 = - 0,12350$	$\delta_1 \rho_3 = - 0,15267$	$\delta_2 \rho_3 = - 0,02917$
$\delta_1 \rho_6 = + 0,10481$	$\delta_1 \rho_6 = + 0,13239$	$\delta_2 \rho_6 = + 0,02758$

TAVOLA F

$\psi_s = 0,60$		
$a'_1 = 1,52$		
$\delta a_{\mathfrak{S}(1)} = 0,01$	$\delta a_{\mathfrak{S}(2)} = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = + 0,01571$	$\delta_1 \rho_4 = + 0,01977$	$\delta_2 \rho_1 = + 0,00406$
$\delta_1 \rho_2 = + 0,00518$	$\delta_1 \rho_2 = + 0,00773$	$\delta_2 \rho_2 = + 0,00255$
$\delta_1 \rho_3 = + 0,11059$	$\delta_1 \rho_5 = + 0,09423$	$\delta_2 \rho_3 = - 0,01636$
$\delta_1 \rho_6 = - 0,06981$	$\delta_1 \rho_6 = - 0,05456$	$\delta_2 \rho_6 = + 0,01525$
$a''_1 = 1,53$		
$\delta a_{\mathfrak{S}(1)} = 0,01$	$\delta a_{\mathfrak{S}(2)} = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = + 0,01277$	$\delta_1 \rho_4 = + 0,01479$	$\delta_2 \rho_1 = + 0,00202$
$\delta_1 \rho_2 = + 0,00615$	$\delta_1 \rho_2 = + 0,00508$	$\delta_2 \rho_2 = - 0,00107$
$\delta_1 \rho_3 = + 0,15491$	$\delta_1 \rho_5 = + 0,11368$	$\delta_2 \rho_3 = - 0,04123$
$\delta_1 \rho_6 = - 0,08714$	$\delta_1 \rho_6 = - 0,07580$	$\delta_2 \rho_6 = + 0,01134$
$a'''_1 = 1,54$		
$\delta a_{\mathfrak{S}(1)} = 0,01$	$\delta a_{\mathfrak{S}(2)} = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = + 0,00919$	$\delta_1 \rho_4 = + 0,01182$	$\delta_2 \rho_1 = + 0,00263$
$\delta_1 \rho_2 = + 0,00642$	$\delta_1 \rho_2 = + 0,00580$	$\delta_2 \rho_2 = - 0,00062$
$\delta_1 \rho_3 = + 0,22685$	$\delta_1 \rho_5 = + 0,15964$	$\delta_2 \rho_3 = - 0,06721$
$\delta_1 \rho_6 = - 0,11374$	$\delta_1 \rho_6 = - 0,09445$	$\delta_2 \rho_6 = + 0,01929$

TAVOLA G

$a_{3(i)} = 1,62$		
$a'_1 = 1,52$		
$\delta\psi_1 = 0,05$	$\delta\psi_2 = 0,05$	$\delta_2\rho$
$\delta_1\rho_1 = + 0,01252$	$\delta_1\rho_1 = + 0,03188$	$\delta_2\rho_1 = + 0,01936$
$\delta_1\rho_2 = - 0,01523$	$\delta_1\rho_2 = - 0,01416$	$\delta_2\rho_2 = + 0,00107$
$\delta_1\rho_3 = - 7,88793$	$\delta_1\rho_3 = + 1,70389$	$\delta_2\rho_3 = + 9,59182$
$\delta_1\rho_6 = - 0,16418$	$\delta_1\rho_6 = - 0,12272$	$\delta_2\rho_6 = + 0,04146$
$a''_1 = 1,53$		
$\delta\psi_1 = 0,05$	$\delta\psi_2 = 0,05$	$\delta_2\rho$
$\delta_1\rho_1 = + 0,00874$	$\delta_1\rho_1 = + 0,02266$	$\delta_2\rho_1 = + 0,01392$
$\delta_1\rho_2 = - 0,01198$	$\delta_1\rho_2 = - 0,01462$	$\delta_2\rho_2 = - 0,00264$
$\delta_1\rho_3 = - 7,26638$	$\delta_1\rho_3 = + 3,00235$	$\delta_2\rho_3 = + 10,26873$
$\delta_1\rho_6 = - 0,18302$	$\delta_1\rho_6 = - 0,14687$	$\delta_2\rho_6 = + 0,03615$
$a'''_1 = 1,54$		
$\delta\psi_1 = 0,05$	$\delta\psi_2 = 0,05$	$\delta_2\rho$
$\delta_1\rho_1 = + 0,00571$	$\delta_1\rho_1 = + 0,01580$	$\delta_2\rho_1 = + 0,01009$
$\delta_1\rho_2 = - 0,00852$	$\delta_1\rho_2 = - 0,01308$	$\delta_2\rho_2 = - 0,00456$
$\delta_1\rho_3 = - 12,77726$	$\delta_1\rho_3 = + 9,23911$	$\delta_2\rho_3 = + 22,01637$
$\delta_1\rho_6 = - 0,20541$	$\delta_1\rho_6 = - 0,17152$	$\delta_2\rho_6 = + 0,03389$

TAVOLA II

$a_{3(3)} = 1,63$		
$\alpha'_1 = 1,52$		
$\delta\psi_1 = 0,05$	$\delta\psi_2 = 0,05$	$\delta_2\rho$
$\delta_1\rho_1 = + 0,01659$	$\delta_1\rho_1 = + 0,04094$	$\delta_2\rho_1 = + 0,02435$
$\delta_1\rho_2 = - 0,01725$	$\delta_1\rho_2 = - 0,01314$	$\delta_2\rho_2 = + 0,00411$
$\delta_1\rho_3 = - 13,39022$	$\delta_1\rho_3 = + 4,21918$	$\delta_2\rho_3 = + 14,60940$
$\delta_1\rho_6 = - 0,15681$	$\delta_1\rho_6 = - 0,10925$	$\delta_2\rho_6 = + 0,04756$
$\alpha''_1 = 1,53$		
$\delta\psi_1 = 0,05$	$\delta\psi_2 = 0,05$	$\delta_2\rho$
$\delta_1\rho_1 = + 0,01195$	$\delta_1\rho_1 = + 0,03045$	$\delta_2\rho_1 = + 0,01850$
$\delta_1\rho_2 = - 0,01481$	$\delta_1\rho_2 = - 0,01416$	$\delta_2\rho_2 = + 0,00065$
$\delta_1\rho_3 = - 7,76163$	$\delta_1\rho_3 = + 1,82764$	$\delta_2\rho_3 = + 9,58927$
$\delta_1\rho_6 = - 0,17550$	$\delta_1\rho_6 = - 0,13208$	$\delta_2\rho_6 = + 0,04342$
$\alpha'''_1 = 1,54$		
$\delta\psi_1 = 0,05$	$\delta\psi_2 = 0,05$	$\delta_2\rho$
$\delta_1\rho_1 = + 0,00776$	$\delta_1\rho_1 = + 0,02178$	$\delta_2\rho_1 = + 0,01402$
$\delta_1\rho_2 = - 0,01278$	$\delta_1\rho_2 = - 0,01378$	$\delta_2\rho_2 = - 0,00100$
$\delta_1\rho_3 = - 7,67900$	$\delta_1\rho_3 = + 3,45683$	$\delta_2\rho_3 = + 11,13533$
$\delta_1\rho_6 = - 0,19973$	$\delta_1\rho_6 = - 0,15664$	$\delta_2\rho_6 = + 0,04309$

TAVOLA I

$a_{3(5)} = 1,64$		
$a'_1 = 1,52$		
$\delta\psi_1 = 0,05$	$\delta\psi_2 = 0,05$	$\delta_2\rho$
$\delta_1\rho_1 = + 0,02055$	$\delta_1\rho_1 = + 0,05350$	$\delta_2\rho_1 = + 0,03295$
$\delta_1\rho_2 = - 0,01995$	$\delta_1\rho_2 = - 0,00722$	$\delta_2\rho_2 = + 0,01273$
$\delta_1\rho_3 = +394,69392$	$\delta_1\rho_3 = + 0,97243$	$\delta_2\rho_3 = -393,72149$
$\delta_1\rho_6 = - 0,15188$	$\delta_1\rho_6 = - 0,08788$	$\delta_2\rho_6 = + 0,06400$
$a''_1 = 1,53$		
$\delta\psi_1 = 0,05$	$\delta\psi_2 = 0,05$	$\delta_2\rho$
$\delta_1\rho_1 = + 0,01547$	$\delta_1\rho_1 = + 0,03921$	$\delta_2\rho_1 = + 0,02374$
$\delta_1\rho_2 = - 0,01741$	$\delta_1\rho_2 = - 0,01321$	$\delta_2\rho_2 = + 0,00420$
$\delta_1\rho_3 = -12,21774$	$\delta_1\rho_3 = + 1,30240$	$\delta_2\rho_3 = +13,52014$
$\delta_1\rho_6 = - 0,16882$	$\delta_1\rho_6 = - 0,11815$	$\delta_2\rho_6 = + 0,05067$
$a'''_1 = 1,54$		
$\delta\psi_1 = 0,05$	$\delta\psi_2 = 0,05$	$\delta_2\rho$
$\delta_1\rho_1 = + 0,01122$	$\delta_1\rho_1 = + 0,02843$	$\delta_2\rho_1 = + 0,01721$
$\delta_1\rho_2 = - 0,01455$	$\delta_1\rho_2 = - 0,01532$	$\delta_2\rho_2 = - 0,00077$
$\delta_1\rho_3 = - 7,71116$	$\delta_1\rho_3 = + 1,93360$	$\delta_2\rho_3 = + 9,66476$
$\delta_1\rho_6 = - 0,18873$	$\delta_1\rho_6 = - 0,14479$	$\delta_2\rho_6 = + 0,04394$

TAVOLA A'

$\psi_1 = 0,50$		
$a_{\mathfrak{S}(1)} = 1,62$		
$\delta a'_1 = 0,01$	$\delta a''_1 = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = - 0,01628$	$\delta_1 \rho_1 = - 0,01623$	$\delta_2 \rho_1 = + 0,00005$
$\delta_1 \rho_2 = + 0,03034$	$\delta_1 \rho_2 = + 0,02985$	$\delta_2 \rho_2 = - 0,00049$
$\delta_1 \rho_3 = + 0,00058$	$\delta_1 \rho_3 = + 0,00179$	$\delta_2 \rho_3 = + 0,00121$
$\delta_1 \rho_6 = + 16,49622$	$\delta_1 \rho_6 = + 93,63552$	$\delta_2 \rho_6 = + 77,13930$
$a_{\mathfrak{S}(2)} = 1,63$		
$\delta a'_1 = 0,01$	$\delta a''_1 = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = - 0,01618$	$\delta_1 \rho_1 = - 0,01601$	$\delta_2 \rho_1 = + 0,00017$
$\delta_1 \rho_2 = + 0,03087$	$\delta_1 \rho_2 = + 0,02958$	$\delta_2 \rho_2 = - 0,00129$
$\delta_1 \rho_3 = - 0,00025$	$\delta_1 \rho_3 = + 0,00078$	$\delta_2 \rho_3 = + 0,00103$
$\delta_1 \rho_6 = + 13,46700$	$\delta_1 \rho_6 = + 65,53170$	$\delta_2 \rho_6 = + 52,06470$
$a_{\mathfrak{S}(3)} = 1,64$		
$\delta a'_1 = 0,01$	$\delta a''_1 = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = - 0,01603$	$\delta_1 \rho_1 = - 0,01592$	$\delta_2 \rho_1 = + 0,00011$
$\delta_1 \rho_2 = + 0,03156$	$\delta_1 \rho_2 = + 0,02988$	$\delta_2 \rho_2 = - 0,00168$
$\delta_1 \rho_3 = - 0,00101$	$\delta_1 \rho_3 = - 0,00006$	$\delta_2 \rho_3 = + 0,00095$
$\delta_1 \rho_6 = + 10,90404$	$\delta_1 \rho_6 = + 43,06653$	$\delta_2 \rho_6 = + 32,16249$

TAVOLA B'

$\psi_1 = 0,50$		
$a'_1 = 1,52$		
$\delta a_{\mathfrak{S}(1)} = 0,01$	$\delta a_{\mathfrak{S}(2)} = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = + 0,00921$	$\delta_1 \rho_1 = + 0,00906$	$\delta_2 \rho_1 = - 0,00015$
$\delta_1 \rho_2 = - 0,02738$	$\delta_1 \rho_2 = - 0,02726$	$\delta_2 \rho_2 = + 0,00012$
$\delta_1 \rho_3 = - 0,00207$	$\delta_1 \rho_3 = - 0,00142$	$\delta_2 \rho_3 = + 0,00065$
$\delta_1 \rho_6 = - 2,39554$	$\delta_1 \rho_6 = - 2,20234$	$\delta_2 \rho_6 = + 0,19320$
$a''_1 = 1,53$		
$\delta a_{\mathfrak{S}(1)} = 0,01$	$\delta a_{\mathfrak{S}(2)} = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = + 0,00931$	$\delta_1 \rho_1 = + 0,00921$	$\delta_2 \rho_1 = - 0,00010$
$\delta_1 \rho_2 = - 0,02685$	$\delta_1 \rho_2 = - 0,02657$	$\delta_2 \rho_2 = + 0,00028$
$\delta_1 \rho_3 = - 0,00290$	$\delta_1 \rho_3 = - 0,00218$	$\delta_2 \rho_3 = + 0,00072$
$\delta_1 \rho_6 = - 5,42476$	$\delta_1 \rho_6 = - 4,76530$	$\delta_2 \rho_6 = + 0,65946$
$a'''_1 = 1,54$		
$\delta a_{\mathfrak{S}(1)} = 0,01$	$\delta a_{\mathfrak{S}(2)} = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = + 0,00953$	$\delta_1 \rho_1 = + 0,00930$	$\delta_2 \rho_1 = - 0,00023$
$\delta_1 \rho_2 = - 0,02712$	$\delta_1 \rho_2 = - 0,02627$	$\delta_2 \rho_2 = + 0,00085$
$\delta_1 \rho_3 = - 0,00391$	$\delta_1 \rho_3 = - 0,00302$	$\delta_2 \rho_3 = + 0,00089$
$\delta_1 \rho_6 = - 33,52858$	$\delta_1 \rho_6 = - 27,23047$	$\delta_2 \rho_6 = + 6,29811$

TAVOLA C'

$\psi_2 = 0,55$		
$\sigma_{5(1)} = 1,62$		
$\delta a'_1 = 0,01$	$\delta a''_1 = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = - 0,01668$	$\delta_1 \rho_1 = - 0,01823$	$\delta_2 \rho_1 = - 0,00155$
$\delta_1 \rho_2 = + 0,07817$	$\delta_1 \rho_2 = + 0,06239$	$\delta_2 \rho_2 = - 0,01578$
$\delta_1 \rho_3 = - 0,00037$	$\delta_1 \rho_3 = + 0,00034$	$\delta_2 \rho_3 = + 0,00071$
$\delta_1 \rho_6 = + 9,67977$	$\delta_1 \rho_6 = + 23,39341$	$\delta_2 \rho_6 = + 13,71364$
$\sigma_{5(2)} = 1,63$		
$\delta a'_1 = 0,01$	$\delta a''_1 = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = - 0,01716$	$\delta_1 \rho_1 = - 0,01705$	$\delta_2 \rho_1 = + 0,00011$
$\delta_1 \rho_2 = + 0,09060$	$\delta_1 \rho_2 = + 0,07465$	$\delta_2 \rho_2 = - 0,01595$
$\delta_1 \rho_3 = - 0,00121$	$\delta_1 \rho_3 = - 0,00003$	$\delta_2 \rho_3 = + 0,00118$
$\delta_1 \rho_6 = + 5,99980$	$\delta_1 \rho_6 = + 17,09635$	$\delta_2 \rho_6 = + 11,09655$
$\sigma_{5(3)} = 1,64$		
$\delta a'_1 = 0,01$	$\delta a''_1 = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = - 0,01703$	$\delta_1 \rho_1 = - 0,01702$	$\delta_2 \rho_1 = + 0,00001$
$\delta_1 \rho_2 = + 0,10670$	$\delta_1 \rho_2 = + 0,08297$	$\delta_2 \rho_2 = - 0,02373$
$\delta_1 \rho_3 = - 0,00200$	$\delta_1 \rho_3 = - 0,00113$	$\delta_2 \rho_3 = + 0,00087$
$\delta_1 \rho_6 = + 4,41126$	$\delta_1 \rho_6 = + 10,40597$	$\delta_2 \rho_6 = + 5,99471$

TAVOLA D'

$\psi_2 = 0,55$		
$a'_1 = 1,52$		
$\delta a_{\mathfrak{S}(1)} = 0,01$	$\delta a'_{\mathfrak{S}(2)} = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = + 0,01021$	$\delta_1 \rho_1 = + 0,01000$	$\delta_2 \rho_1 = - 0,00021$
$\delta_1 \rho_2 = - 0,07556$	$\delta_1 \rho_2 = - 0,08549$	$\delta_2 \rho_2 = - 0,00993$
$\delta_1 \rho_3 = - 0,00130$	$\delta_1 \rho_3 = - 0,00953$	$\delta_2 \rho_3 = + 0,00077$
$\delta_1 \rho_6 = - 2,06906$	$\delta_1 \rho_6 = - 1,65623$	$\delta_2 \rho_6 = + 0,41283$
$a''_1 = 1,53$		
$\delta a_{\mathfrak{S}(1)} = 0,01$	$\delta a'_{\mathfrak{S}(2)} = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = + 0,00973$	$\delta_1 \rho_1 = + 0,01013$	$\delta_2 \rho_1 = + 0,00040$
$\delta_1 \rho_2 = - 0,06313$	$\delta_1 \rho_2 = - 0,06939$	$\delta_2 \rho_2 = - 0,00626$
$\delta_1 \rho_3 = - 0,00214$	$\delta_1 \rho_3 = - 0,00132$	$\delta_2 \rho_3 = + 0,00082$
$\delta_1 \rho_6 = - 5,74903$	$\delta_1 \rho_6 = - 3,24477$	$\delta_2 \rho_6 = + 2,50426$
$a'''_1 = 1,54$		
$\delta a_{\mathfrak{S}(1)} = 0,01$	$\delta a'_{\mathfrak{S}(2)} = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = + 0,01091$	$\delta_1 \rho_1 = + 0,01016$	$\delta_2 \rho_1 = - 0,00075$
$\delta_1 \rho_2 = - 0,05087$	$\delta_1 \rho_2 = - 0,06107$	$\delta_2 \rho_2 = - 0,01020$
$\delta_1 \rho_3 = - 0,00231$	$\delta_1 \rho_3 = - 0,00242$	$\delta_2 \rho_3 = + 0,00009$
$\delta_1 \rho_6 = - 12,04609$	$\delta_1 \rho_6 = - 9,93515$	$\delta_2 \rho_6 = + 2,11094$

TAVOLA E'

$\psi_s = 0,60$		
$\alpha_{\Sigma(1)} = 1,62$		
$\delta a'_1 = 0,01$	$\delta a''_1 = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = - 0,01735$	$\delta_1 \rho_1 = - 0,01793$	$\delta_2 \rho_1 = - 0,00058$
$\delta_1 \rho_2 = + 0,75403$	$\delta_1 \rho_2 = + 0,34178$	$\delta_2 \rho_2 = - 0,41225$
$\delta_1 \rho_3 = - 0,00049$	$\delta_1 \rho_3 = + 0,00000$	$\delta_2 \rho_3 = + 0,00049$
$\delta_1 \rho_6 = + 3,16360$	$\delta_1 \rho_6 = + 6,77868$	$\delta_2 \rho_6 = + 3,61508$
$\alpha_{\Sigma(2)} = 1,63$		
$\delta a'_1 = 0,01$	$\delta a''_1 = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = - 0,01654$	$\delta_1 \rho_1 = - 0,01719$	$\delta_2 \rho_1 = - 0,00065$
$\delta_1 \rho_2 = + 2,00196$	$\delta_1 \rho_2 = + 0,61144$	$\delta_2 \rho_2 = - 1,39052$
$\delta_1 \rho_3 = - 0,00076$	$\delta_1 \rho_3 = - 0,00025$	$\delta_2 \rho_3 = + 0,00051$
$\delta_1 \rho_6 = + 2,25019$	$\delta_1 \rho_6 = + 4,44403$	$\delta_2 \rho_6 = + 2,19384$
$\alpha_{\Sigma(3)} = 1,64$		
$\delta a'_1 = 0,01$	$\delta a''_1 = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = - 0,01501$	$\delta_1 \rho_1 = - 0,01635$	$\delta_2 \rho_1 = - 0,00134$
$\delta_1 \rho_2 = + 44,34871$	$\delta_1 \rho_2 = + 1,38435$	$\delta_2 \rho_2 = - 42,96436$
$\delta_1 \rho_3 = + 0,00016$	$\delta_1 \rho_3 = - 0,00044$	$\delta_2 \rho_3 = - 0,00060$
$\delta_1 \rho_6 = + 1,69518$	$\delta_1 \rho_6 = + 3,01194$	$\delta_2 \rho_6 = + 1,31676$

TAVOLA F'

$\psi_3 = 0,60$		
$a'_1 = 1,52$		
$\delta a_{\mathfrak{S}(1)} = 0,01$	$\delta a_{\mathfrak{S}(2)} = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = + 0,00968$	$\delta_1 \rho_1 = + 0,00824$	$\delta_2 \rho_1 = - 0,00144$
$\delta_1 \rho_2 = - 1,77072$	$\delta_1 \rho_2 = - 43,53521$	$\delta_2 \rho_2 = - 41,76449$
$\delta_1 \rho_3 = - 0,00179$	$\delta_1 \rho_3 = - 0,00266$	$\delta_2 \rho_3 = - 0,00087$
$\delta_1 \rho_6 = - 1,22321$	$\delta_1 \rho_6 = - 0,98514$	$\delta_2 \rho_6 = + 0,23807$
$a''_1 = 1,53$		
$\delta a_{\mathfrak{S}(1)} = 0,01$	$\delta a_{\mathfrak{S}(2)} = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = + 0,01049$	$\delta_1 \rho_1 = + 0,00977$	$\delta_2 \rho_1 = - 0,00072$
$\delta_1 \rho_2 = - 0,2279$	$\delta_1 \rho_2 = - 1,18846$	$\delta_2 \rho_2 = - 0,66567$
$\delta_1 \rho_3 = - 0,00206$	$\delta_1 \rho_3 = - 0,00174$	$\delta_2 \rho_3 = + 0,00032$
$\delta_1 \rho_6 = - 2,13662$	$\delta_1 \rho_6 = - 1,54015$	$\delta_2 \rho_6 = + 0,59647$
$a'''_1 = 1,54$		
$\delta a_{\mathfrak{S}(1)} = 0,01$	$\delta a_{\mathfrak{S}(2)} = 0,01$	$\delta_2 \rho$
$\delta_1 \rho_1 = + 0,01123$	$\delta_1 \rho_1 = + 0,01061$	$\delta_2 \rho_1 = - 0,00062$
$\delta_1 \rho_2 = - 0,23313$	$\delta_1 \rho_2 = - 0,41555$	$\delta_2 \rho_2 = - 0,16242$
$\delta_1 \rho_3 = - 0,00231$	$\delta_1 \rho_3 = - 0,00193$	$\delta_2 \rho_3 = + 0,00038$
$\delta_1 \rho_6 = - 4,47127$	$\delta_1 \rho_6 = - 2,97224$	$\delta_2 \rho_6 = + 1,49903$

TAVOLA G'

$a_{3(1)} = 1,62$		
$a'_1 = 1,52$		
$\delta\psi_1 = 0,05$	$\delta\psi_2 = 0,05$	$\delta_2\rho$
$\delta_1\rho_1 = + 0,01742$	$\delta_1\rho_1 = + 0,01529$	$\delta_2\rho_1 = - 0,00213$
$\delta_1\rho_2 = - 0,22867$	$\delta_1\rho_2 = - 1,41738$	$\delta_2\rho_2 = - 1,18871$
$\delta_1\rho_3 = + 0,00554$	$\delta_1\rho_3 = + 0,00541$	$\delta_2\rho_3 = - 0,00013$
$\delta_1\rho_6 = - 7,96522$	$\delta_1\rho_6 = - 6,22091$	$\delta_2\rho_6 = + 1,74431$
$a''_1 = 1,53$		
$\delta\psi_1 = 0,05$	$\delta\psi_2 = 0,05$	$\delta_2\rho$
$\delta_1\rho_1 = + 0,01702$	$\delta_1\rho_1 = + 0,01462$	$\delta_2\rho_1 = - 0,00240$
$\delta_1\rho_2 = - 0,18084$	$\delta_1\rho_2 = - 0,74152$	$\delta_2\rho_2 = - 0,56068$
$\delta_1\rho_3 = + 0,00459$	$\delta_1\rho_3 = + 0,00529$	$\delta_2\rho_3 = + 0,00970$
$\delta_1\rho_6 = - 14,78167$	$\delta_1\rho_6 = - 12,73708$	$\delta_2\rho_6 = + 2,04459$
$a'''_1 = 1,54$		
$\delta\psi_1 = 0,05$	$\delta\psi_2 = 0,05$	$\delta_2\rho$
$\delta_1\rho_1 = + 0,01502$	$\delta_1\rho_1 = + 0,01492$	$\delta_2\rho_1 = - 0,00010$
$\delta_1\rho_2 = - 0,14830$	$\delta_1\rho_2 = - 0,46213$	$\delta_2\rho_2 = - 0,31383$
$\delta_1\rho_3 = + 0,00314$	$\delta_1\rho_3 = + 0,00495$	$\delta_2\rho_3 = + 0,00181$
$\delta_1\rho_6 = - 85,02378$	$\delta_1\rho_6 = - 29,35181$	$\delta_2\rho_6 = + 55,67197$

TAVOLA H'

$a_{3(2)} = 1,63$		
$a'_1 = 1,52$		
$\delta\psi_1 = 0,05$	$\delta\psi_2 = 0,05$	$\delta_2\rho$
$\delta_1\rho_1 = + 0,01842$	$\delta_1\rho_1 = + 0,01476$	$\delta_2\rho_1 = - 0,00366$
$\delta_1\rho_2 = - 0,27685$	$\delta_1\rho_2 = - 3,11254$	$\delta_2\rho_2 = - 2,83569$
$\delta_1\rho_3 = + 0,00631$	$\delta_1\rho_3 = + 0,00192$	$\delta_2\rho_3 = - 0,00139$
$\delta_1\rho_6 = - 7,63874$	$\delta_1\rho_6 = - 5,37506$	$\delta_2\rho_6 = + 2,26368$
$a''_1 = 1,53$		
$\delta\psi_1 = 0,05$	$\delta\psi_2 = 0,05$	$\delta_2\rho$
$\delta_1\rho_1 = + 0,01744$	$\delta_1\rho_1 = + 0,01538$	$\delta_2\rho_1 = - 0,00206$
$\delta_1\rho_2 = - 0,21712$	$\delta_1\rho_2 = - 1,20118$	$\delta_2\rho_2 = - 0,98406$
$\delta_1\rho_3 = + 0,00535$	$\delta_1\rho_3 = + 0,00537$	$\delta_2\rho_3 = + 0,00002$
$\delta_1\rho_6 = - 15,10594$	$\delta_1\rho_6 = - 9,12467$	$\delta_2\rho_6 = + 5,98127$
$a'''_1 = 1,54$		
$\delta\psi_1 = 0,05$	$\delta\psi_2 = 0,05$	$\delta_2\rho$
$\delta_1\rho_1 = + 0,01640$	$\delta_1\rho_1 = + 0,01524$	$\delta_2\rho_1 = - 0,00116$
$\delta_1\rho_2 = - 0,17205$	$\delta_1\rho_2 = - 0,66439$	$\delta_2\rho_2 = - 0,49234$
$\delta_1\rho_3 = + 0,00454$	$\delta_1\rho_3 = + 0,00515$	$\delta_2\rho_3 = + 0,00061$
$\delta_1\rho_6 = - 63,54129$	$\delta_1\rho_6 = - 21,77699$	$\delta_2\rho_6 = + 41,76430$

TAVOLA I'

$a_{5(2)} = 1,64$		
$a'_1 = 1,52$		
$\delta\psi_1 = 0,05$	$\delta\psi_2 = 0,05$	$\delta_2\rho$
$\delta_1\rho_1 = + 0,01936$	$\delta_1\rho_1 = + 0,01300$	$\delta_2\rho_1 = - 0,00636$
$\delta_1\rho_2 = - 0,33308$	$\delta_1\rho_2 = - 46,56226$	$\delta_2\rho_2 = - 46,22718$
$\delta_1\rho_3 = + 0,00720$	$\delta_1\rho_3 = + 0,00279$	$\delta_2\rho_3 = - 0,00441$
$\delta_1\rho_6 = - 7,09263$	$\delta_1\rho_6 = - 4,70397$	$\delta_2\rho_6 = + 2,38866$
$a''_1 = 1,53$		
$\delta\psi_1 = 0,05$	$\delta\psi_2 = 0,05$	$\delta_2\rho$
$\delta_1\rho_1 = + 0,01836$	$\delta_1\rho_1 = + 0,01502$	$\delta_2\rho_1 = - 0,00334$
$\delta_1\rho_2 = - 0,25994$	$\delta_1\rho_2 = - 2,32025$	$\delta_2\rho_2 = - 2,06031$
$\delta_1\rho_3 = + 0,00621$	$\delta_1\rho_3 = + 0,00495$	$\delta_2\rho_3 = - 0,00126$
$\delta_1\rho_6 = - 13,58541$	$\delta_1\rho_6 = - 7,42005$	$\delta_2\rho_6 = + 6,16536$
$a'''_1 = 1,54$		
$\delta\psi_1 = 0,05$	$\delta\psi_2 = 0,05$	$\delta_2\rho$
$\delta_1\rho_1 = + 0,01726$	$\delta_1\rho_1 = + 0,01569$	$\delta_2\rho_1 = - 0,00157$
$\delta_1\rho_2 = - 0,20685$	$\delta_1\rho_2 = - 1,01887$	$\delta_2\rho_2 = - 0,81202$
$\delta_1\rho_3 = + 0,00514$	$\delta_1\rho_3 = + 0,00564$	$\delta_2\rho_3 = + 0,00050$
$\delta_1\rho_6 = - 46,24597$	$\delta_1\rho_6 = - 14,81408$	$\delta_2\rho_6 = + 31,43189$

Esempio dell' uso di dette Tavole.

Sia proposto di costruire un obbiettivo triplo aplanatico colle seguenti sostanze :

$$\begin{array}{l} \text{Crown-glass Indice} = a_1 = 1,523 \\ \text{Flint-glass Indice} = a_3 = 1,624 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Crown-glass} \\ \text{Flint-glass} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Rapporto dei poteri di-} \\ \text{spersiivi } \psi = 0,506. \end{array}$$

Considerando per esempio le Tavole del 1° sistema, si vede che ψ è compresa tra ψ_1 , e ψ_2 ; a_1 tra a'_1 ed a''_1 ; a_3 tra $a_{3(1)}$ ed $a_{3(2)}$; sicchè per interpolare i quattro raggi dovremo ricorrere alla prima colonna della Tavola A, e prima colonna della Tavola B corrispondenti a $\psi_1 = 0,50$, e finalmente alla prima colonna della Tavola G corrispondente ad $a_{3(1)} = 1,62$ e $a'_1 = 1,52$.

Avremo per tal modo

$$\begin{aligned} \delta a_1 &= 1,523 - 1,52 = 0,003 \\ \delta a_3 &= 1,624 - 1,62 = 0,004 \\ \delta \psi &= 0,506 - 0,50 = 0,006. \end{aligned}$$

Onde indicando con una lettera in basso il nome della variabile, rispetto alla quale si è calcolata la variazione dei ρ , avremo :

Variazione dei ρ rispetto all'indice del crown.

$$\begin{aligned} (\delta_{\rho_1})_{a_1} &= (-0,00810 - \frac{1}{2} \cdot 0,00101) (0,003) + \frac{1}{2} \cdot 0,00101 (0,003)^2 \\ (\delta_{\rho_2})_{a_1} &= (-0,00154 + \frac{1}{2} \cdot 0,00334) (0,003) - \frac{1}{2} \cdot 0,00334 (0,003)^2 \\ (\delta_{\rho_3})_{a_1} &= (-2,10728 - \frac{1}{2} \cdot 1,11083) (0,003) + \frac{1}{2} \cdot 1,11083 (0,003)^2 \\ (\delta_{\rho_6})_{a_1} &= (0,18637 - \frac{1}{2} \cdot 0,03831) (0,003) + \frac{1}{2} \cdot 0,03831 (0,003)^2 \end{aligned}$$

Variazione dei ρ rispetto all'indice del flint.

$$\begin{aligned} (\delta_{\rho_1})_{a_3} &= (0,00258 - \frac{1}{2} \cdot 0,00067) (0,004) + \frac{1}{2} \cdot 0,00067 (0,004)^2 \\ (\delta_{\rho_2})_{a_3} &= (0,00618 + \frac{1}{2} \cdot 0,00167) (0,004) - \frac{1}{2} \cdot 0,00167 (0,004)^2 \\ (\delta_{\rho_3})_{a_3} &= (6,09759 + \frac{1}{2} \cdot 413,84075) (0,004) - \frac{1}{2} \cdot 413,84075 (0,004)^2 \\ (\delta_{\rho_6})_{a_3} &= (-0,09065 - \frac{1}{2} \cdot 0,00979) (0,004) + \frac{1}{2} \cdot 0,00979 (0,004)^2 \end{aligned}$$

Variazione dei ρ rispetto al rapporto ψ delle dispersioni.

$$\begin{aligned}(\delta_{\rho_1})\psi &= (0,01252 - \frac{1}{2}0,01936) (0,006) + \frac{1}{2}0,01936(0,006)^2 \\(\delta_{\rho_2})\psi &= (-0,01523 - \frac{1}{2}0,00107) (0,006) + \frac{1}{2}0,00107(0,006)^2 \\(\delta_{\rho_3})\psi &= (-7,88793 - \frac{1}{2}9,59182) (0,006) + \frac{1}{2}9,59182(0,006)^2 \\(\delta_{\rho_4})\psi &= (-0,16418 - \frac{1}{2}0,04146) (0,006) + \frac{1}{2}0,04146(0,006)^2\end{aligned}$$

Onde avremo:

$$\begin{aligned}\rho_1 &= -0,60384 + (\delta_{\rho_1})a_1 + (\delta_{\rho_1})a_3 + (\delta_{\rho_1})\psi = -0,60384 \\ \rho_2 &= 0,38970 + (\delta_{\rho_2})a_1 + (\delta_{\rho_2})a_3 + (\delta_{\rho_2})\psi = 0,38963 \\ \rho_3 &= 5,40194 + (\delta_{\rho_3})a_1 + (\delta_{\rho_3})a_3 + (\delta_{\rho_3})\psi = 6,16679 \\ \rho_4 &= 1,37955 + (\delta_{\rho_4})a_1 + (\delta_{\rho_4})a_3 + (\delta_{\rho_4})\psi = 1,37945.\end{aligned}$$

La superficie quinta si è mantenuta sensibilmente piana, come era avanti le correzioni. Le variazioni degli altri raggi sono trascurabili, massime nella pratica in cui si suole arrestare ai centesimi della distanza focale.

Che se i dati dei due cristalli si trovassero compresi fra limiti successivi qualunque delle Tavole I. II. III. del 1°. o del 2°. sistema, bisognerebbe avvertire di prendere sempre per valori iniziali di ρ quelli, cui corrispondono indici e dispersioni minimi; e per le differenze δa_1 , δa_3 , $\delta \psi$ quelle che passano tra questi e i dati attuali, giacchè è in tal modo che per mezzo della formula (x) si sono costruite le Tavole delle differenze. Così per esempio se i dati fossero:

$$a_1 = 1,533 \quad ; \quad a_3 = 1,634 \quad ; \quad \psi = 0,506 ,$$

si vedrebbe che ψ è compresa tra ψ_1 e ψ_2 ; a_1 tra a''_1 ed a'''_1 , ed a_3 tra $a_{3(2)}$ ed $a_{3(3)}$. Quindi si avrebbe:

$$\begin{aligned}\delta a_1 &= 1,533 - 1,52 = 0,013 \\ \delta a_3 &= 1,634 - 1,62 = 0,014 \\ \delta \psi &= 0,506 - 0,50 = 0,006\end{aligned}$$

ed i valori iniziali dei ρ a cui le correzioni dovranno farsi, saranno come precedentemente quelli a cui corrispondono indici e dispersioni minimi cioè: $a'_1 = 1,52$; $a_{3(1)} = 1,62$; $\psi_1 = 0,50$.

Costruzione degli oculari applanatici negativi.

Le Tavole I, II, III del 1°. e del 2°. sistema ci danno le curvature di oculari applanatici *positivi* o *astronomici*, essendosi fatta la distanza focale $F = 1$.

Per avere le corrispondenti di oculari *negativi* o *galileani*, bisogna invece porre F negativo. Ma provo facilmente che ripetere per essi il calcolo, è inutile.

Infatti riprendiamo l'equazione (a), da cui avremo:

$$\frac{F}{f_3} = \frac{-D_1 \pm \sqrt{D_1^2 - 4 D_1 D_0}}{2 D_2} = M.$$

Quindi la (3'') ci darà:

$$\frac{F}{\rho_0} = -\frac{C'}{B'} = -\frac{1}{\beta'_0} \left(\gamma'_0 + \gamma'_1 \frac{F}{f_3} \right) = -\frac{1}{\beta'_0} (\gamma'_0 + \gamma'_1 M) = N;$$

in cui M ed N sono funzioni degl'indici di refrazione e dei poteri dispersivi dei due cristalli. Sicchè le (A), moltiplicate ciascuna per F , diverranno:

$$\frac{F}{\rho_0} = N$$

$$\frac{F}{\rho_3} = \frac{F}{\rho_0} - \frac{1}{m_1} M$$

$$\frac{F}{\rho_2} = \frac{F}{\rho_0} - \frac{1}{m_1} M - s$$

$$\frac{F}{\rho_1} = \frac{F}{\rho_0} + (r - s).$$

Ponendo qui $F = 1$, si ha:

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho_0} = N \\ \frac{1}{\rho_s} = N - \frac{1}{m_1} M \\ \frac{1}{\rho_2} = N - \frac{1}{m_1} M - s \\ \frac{1}{\rho_1} = N + (r - s) . \end{array} \right.$$

Ponendo invece $F = -1$ si ha:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho_0} &= N \\ -\frac{1}{\rho_s} &= -\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{m_1} M \\ -\frac{1}{\rho_2} &= -\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{m_1} M - s \\ -\frac{1}{\rho_1} &= -\frac{1}{\rho_0} + (r - s) ; \end{aligned}$$

ossia:

$$(9_1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho_0} = -N \\ \frac{1}{\rho_s} = -N + \frac{1}{m_1} M \\ \frac{1}{\rho_2} = -N + \frac{1}{m_1} M + s \\ \frac{1}{\rho_1} = -N - (r - s) . \end{array} \right.$$

Confrontando i valori (θ) e (θ_1) , si vede ch'essi sono eguali e di segno contrario; il che ci dice che *cambiando di segno tutti i raggi di curvatura di un oculare aplanatico astronomico, si passa da esso ad un oculare aplanatico galileano.*

Questa proprietà che ci permette di ricavare dalle Tavole anzidette le curvature di ambedue le specie di oculari con semplici inversioni di segni, è utile alla pratica; poichè le *patine* che servono alla costruzione degli oculari di una specie, ci possono fornire le corrispondenti per quelli dell'altra.

Del resto per dimostrare questa proprietà non era necessario di effettuare la risoluzione delle equazioni, poichè essa risulta immediatamente dalla ispezione delle medesime. Infatti le equazioni proposte sono tali che cangiando in *tutte* il segno ad F ed a ciascuno dei ρ , esse rimangono le stesse; dunque *i segni dei ρ dipendono da quello di F e reciprocamente.*

Eguale avverrebbe qualunque fosse il numero delle lenti sovrapposte che compongono l'oculare; se non che quattro è il *massimo* numero di esse che possono porsi a contatto onde raggiungere il maggiore grado di acromatismo. Facendo uso anche in questo caso di due sole specie di cristallo, ho trovato che la equazione risolutiva, dal *sesto* grado si riduce al *quarto*. Darò in seguito i raggi di curvatura che se ne ritraggono, tanto più che una lente così fatta deve prestarsi assai bene anche per la fotografia.

Pisa 15 Ottobre 1859.

(*) La superficie che corrisponde a questo raggio, essendo sensibilmente *piana*, si può fare astrazione dal suo segno.