5. *Bemerkung über die axialsymmetrischen Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen;*
von H. Weyl.

Im Zusammenhang seiner schönen Untersuchungen über die Statik Einsteinscher Gravitationsfelder[1]) hat Hr. Levi-Civita auch die in meiner Arbeit „Zur Gravitationstheorie“[2]) angegebenen axialsymmetrischen Lösungen einer Betrachtung unterzogen[3]) und kommt zu der Feststellung, daß meine Resultate zwar zutreffend, aber unvollständig sind. Mit Rücksicht auf diese Kritik möchte ich meinen damaligen Ausführungen die folgenden Bemerkungen hinzufügen (ich benutze alle Bezeichnungen jener Arbeit).

Die gerügte Unvollständigkeit soll darauf beruhen, daß das Wirkungsprinzip nur teilweise ausgenutzt wird. Ich gehe nämlich von einer bestimmten (drei unbekannte Funktionen f, l, h enthaltenden) Normalform des Linienelementes aus und nehme mit den Fundamentalgrößen g_{ik} nur solche Variationen vor, bei welchen diese Normalform erhalten bleibt. Während aber Hr. Levi-Civita Lösungen der *homogenen* Gravitationsgleichungen sucht, die dort gelten, *wo der Energie-Impulstensor verschwindet*, gehe ich darauf aus, *das Feld gegebener, rotationssymmetrisch verteilter Massen und Ladungen* zu ermitteln. Das Linienelement hat jedenfalls die charakteristische Gestalt

$$ds^2 = f dt^2 - (l d\vartheta^2 + d\bar{\sigma}^2), \quad (\vartheta = x_3, \; t = x_4),$$

wo f, l, $d\bar{\sigma}^2$ nur von den Variablen $x_1\, x_2$ abhängen. Statt der kovarianten Komponenten T_{ik} des Energietensors benutze ich die Komponenten der gemischten Tensordichte $\mathfrak{T}_i^k = \sqrt{g} \cdot T_i^k$. Die Massenverteilung wird durch $\mathfrak{T}_4^4$ angegeben. Verschwinden

1) ds^2 einsteiniani in campi newtoniani, Rend. Acc. dei Lincei, 1917/19.

2) H. Weyl, Ann. d. Phys. 54. p. 117. 1917.

3) Siehe die VIII. in jener Folge von Noten 1919.

alle andern Komponenten der Tensordichte $\mathfrak{T}_i^k$, so hat man es mit inkohärentem „Staub" zu tun, und es ist klar, daß sich dieser Staub unter der Einwirkung des von ihm erzeugten Gravitationsfeldes in Bewegung setzen wird. Statischen Lösungen müssen aber ruhende Körper zugrunde liegen, und ich bedarf also eines Systems von radial-axialen *Spannungen*

$$\begin{matrix} \mathfrak{T}_1^1 & \mathfrak{T}_1^2 \\ \mathfrak{T}_2^1 & \mathfrak{T}_2^2, \end{matrix} \tag{1}$$

um die Körper in ihren einzelnen Teilen und gegeneinander ins Gleichgewicht zu setzen. (Es ist daran zu erinnern, daß das Problem des Gravitationsfeldes nach Einstein erst bestimmt ist, wenn nicht nur die Massenverteilung der felderzeugenden Körper gegeben ist, sondern auch deren dynamische Konstitution.) Ich nehme also an, daß Spannungen (1) wirken, welche den Gravitationskräften das Gleichgewicht halten. In dieser Form besitzt aber die Aufgabe noch *einen* Grad der Unbestimmtheit; ich brauche demnach eine invariante Relation, an welche die Spannungskomponenten gebunden sind. Die bei weitem einachste Annahme, welche gemacht werden kann und welche meiner Berechnung zugrunde liegt, ist die, daß

$$\mathfrak{T}_1^1 + \mathfrak{T}_2^2 = 0 \tag{2}$$

wird. Unter diesen Umständen liefern nämlich die Spannungen bei meiner Art des Variierens zu $\delta\mathfrak{M}$ keinen Beitrag, und man erhält gerade diejenigen Beziehungen *vollständig*, welche aus den Gravitationsgleichungen

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = - T_{ik} \tag{3}$$

entstehen, wenn man die unbekannten Spannungen eliminiert. Das von mir gewonnene Ergebnis lautet also im Falle der *ungeladenen Massen* (§ 5), streng formuliert, folgendermaßen.

Es existiert ein „kanonisches" Koordinatensystem $x_1 = z$, $x_2 = r$ von der Art, daß

$$l = \frac{r^2}{f}, \quad d\bar{\sigma}^2 = h(dz^2 + dr^2)$$

ist. *Wenn die Massenverteilung im Bildraum der kanonischen Koordinaten gegeben*, d. h. wenn

$$\mathfrak{T}_4^4 = r\varrho^*$$

eine bekannte Funktion von r und z ist, *so gibt es ein und nur ein der Bedingung* (2) *genügendes System von Spannungen* (1), *welches den Gravitationskräften der Massen das Gleichgewicht hält. Auch ist das Gravitationsfeld eindeutig bestimmt*, und zwar auf Grund der Gleichungen (p. 138, 139):

$$(4)\quad \Delta\psi = \frac{1}{2}\varrho^*, \quad \Delta^2\gamma = -[\psi\psi], \quad (\psi = \lg\sqrt{f}, \ \gamma = \lg\sqrt{hf}).$$

Die Werte der Spannungskomponenten, die ich a. a. O. nicht bestimmt habe, kann ich jetzt ohne weiteres aus den Formeln von Hrn. Levi-Civita entnehmen, der die linken Seiten (α_{ik} in seiner Bezeichnungsweise) der Gleichungen (3) explizite berechnete. *Es wird im kanonischen Koordinatensystem*

$$\mathfrak{T}_1{}^1 = -\mathfrak{T}_2{}^2 = \gamma_2 - r(\psi_2{}^2 - \psi_1{}^2),$$
$$-\mathfrak{T}_1{}^2 = -\mathfrak{T}_2{}^1 = \gamma_1 - 2r\psi_1\psi_2,$$

wobei die Indizes 1 und 2 an den Funktionszeichen γ und ψ die Ableitungen nach $x_1 = z$, bzw. $x_2 = r$ bedeuten.

Levi-Civita vermißt bei mir die Gleichungen

$$\gamma_2 - r(\psi_2{}^2 - \psi_1{}^2) = 0, \quad \gamma_1 - 2r\psi_1\psi_2 = 0,$$

welche in der Tat dort gelten, wo der Energie-Impulstensor verschwindet; aber für meine Problemstellung verschwinden deren linke Seiten im allgemeinen nicht, sondern liefern gerade diejenigen eindeutig bestimmten Spannungen, welche imstande sind, die Massen ins Gleichgewicht zu setzen. Die beiden Erhaltungssätze für den Impuls

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial\mathfrak{T}_1{}^1}{\partial x_1} + \frac{\partial\mathfrak{T}_1{}^2}{\partial x_2}\right) - r\varrho^*\psi_1 = 0, \\ &\left(\frac{\partial\mathfrak{T}_2{}^1}{\partial x_1} + \frac{\partial\mathfrak{T}_2{}^2}{\partial x_2}\right) - r\varrho^*\psi_2 = 0 \end{aligned}\right.$$

führen zu den Feldgleichungen (4) zurück. Die linken Seiten von (5) sind nämlich bzw.

$$= 2r\psi_1\left(\Delta\psi - \frac{1}{2}\partial^*\right) \quad \text{und}$$
$$= 2r\psi_2\left(\Delta\psi - \frac{1}{2}\varrho^*\right) - (\Delta^2\gamma + [\psi\psi]).$$

Ähnliche Resultate ergeben sich in dem von mir weiterhin behandelten Fall der *geladenen Massen* (§ 6). Eine kurze Rechnung liefert für diejenigen Spannungen, welche den elektrostatischen und den Gravitationskräften das Gleichgewicht halten müssen:

$$\mathfrak{T}_1^{\ 1} = -\mathfrak{T}_2^{\ 2} = \gamma_2 + r(\varphi_2^{\ 2} - \varphi_1^{\ 2}), \quad -\mathfrak{T}_1^{\ 2} = -\mathfrak{T}_2^{\ 1} = \gamma_1 + 2r\varphi_1\varphi_2.$$

Es ist bemerkenswert, daß die Spannungen $\mathfrak{T}$ nur die ersten Ableitungen der Potentiale ψ (bzw. φ) und γ enthalten; außerdem: ist die Massendichte von erster, so sind sie von zweiter Ordnung unendlich klein. Von diesen Spannungen (die freilich vorhanden sein müssen, aber nur die Rolle eines „Stativs" spielen, dazu dienend, die Körper festzuhalten) durfte man also wohl behaupten, daß sie vernachlässigt werden können. Mit einer dahin lautenden Bemerkung glaubte ich mich a. a. O. der genaueren Diskussion dieser Verhältnisse entziehen zu sollen. Auf die Kritik des Hrn. Levi-Civita hin schien es mir aber jetzt angebracht, den damals nur angedeuteten Sachverhalt explizite klarzulegen.

(Eingegangen 14. März 1919.)