Über die Schwingungen eingespannter Platten.

Von

R. Courant in Göttingen.

Im 7. Bande dieser Zeitschrift habe ich als Anwendung allgemeiner Sätze über die Differentialgleichungen der mathematischen Physik das *asymptotische Verteilungsgesetz für die Eigenwerte* von Differentialgleichungen zweiter Ordnung hergeleitet¹⁾; die Herleitung beruhte wesentlich darauf, daß man das Eigenwertproblem der gewöhnlichen Schwingungsgleichung bei Rechtecken bzw. Rechtecken explizit beherrscht und daß man jeden Bereich aus solchen Bausteinen zusammensetzen kann. Eine unmittelbare Übertragung auf Differentialgleichungen vierter Ordnung scheitert daran, daß man hier die Eigenfunktionen der einfachsten Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \lambda u \equiv \Delta \Delta u + \lambda u = 0$$

für ein Rechteck usw. bei den in Betracht zu ziehenden Randbedingungen keineswegs explizit kennt. Ich möchte nun in der vorliegenden Arbeit zeigen, wie man trotzdem bei Differentialgleichungen vierter Ordnung zu dem Gesetz der asymptotischen Eigenwertverteilung gelangen kann, und zwar will ich als einfachsten und typischen Fall das Eigenwertproblem behandeln, welches zu dem physikalischen Problem der *Schwingungen eingespannter Platten* gehört.

Es sei G ein Gebiet der xy -Ebene vom Flächeninhalt F , begrenzt von einer endlichen Anzahl von Kurvenstücken mit stetiger Tangente. Gesucht sind diejenigen Konstanten λ , für welche die Differentialgleichung

¹⁾ Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Math. Zeitschr. 7 (1920), S. 1–57

(1) eine in G reguläre, nicht identisch verschwindende Lösung besitzt, welche auf dem Rande R den Bedingungen

$$(2) \quad u = 0,$$

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$$

genügt, unter $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ die normale Ableitung von u verstanden.

Die Eigenwerte λ sind im wesentlichen die Biquadrate der Schwingungszahlen bei dem physikalischen Problem; nach wachsender Größe geordnet mögen sie mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ bezeichnet werden, während die zugehörigen Eigenfunktionen $u_1, u_2, u_3, \dots$ heißen. Dann kann man analog wie in der oben zitierten Abhandlung λ_n und u_n folgendermaßen definieren: Es seien $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ stetige Funktionen in G , es sei ferner φ eine mit stetigen Ableitungen bis zur zweiten und stückweise stetigen Ableitungen bis zur vierten Ordnung in G versehene Funktion, welche den Bedingungen

$$(4) \quad \iint_{(G)} \varphi^2 dx dy = 1,$$

$$(5) \quad \iint_{(G)} \varphi v_i dx dy = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

sowie den Randbedingungen

$$(2a) \quad \varphi = 0,$$

$$(3a) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$$

genügt; es sei schließlich $h\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ das Minimum bzw. die untere Grenze des Integrals

$$H[\varphi] = \iint_{(G)} (\Delta \varphi)^2 dx dy,$$

wenn φ den angegebenen Konkurrenzbedingungen unterworfen ist. Dann ist λ_n der größte Wert, welchen $h\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ bei Variation der Funktionen $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ annehmen kann. Der Maximum-Minimumwert λ_n wird erreicht für $v_1 = u_1, \dots, v_{n-1} = u_{n-1}; \varphi_n = u_n$.

Aus dieser Eigenschaft folgt fast unmittelbar, ebenso wie früher²⁾, der folgende

Satz. *Verstehen wir unter $G_1, G_2, G_3, \dots$ eine Reihe von Teilgebieten des Gebietes G , von denen kein Paar innere Punkte gemein hat, bezeichnen wir ferner mit $A(\lambda)$ die Anzahl der unterhalb einer Schranke λ gelegenen Eigenwerte der Differentialgleichung (1) bei den Randbedingungen (2), (3)*

²⁾ Loc. cit. S. 22.

für das Gebiet G und mit $A_1(\lambda), A_2(\lambda), \dots$ die entsprechenden Anzahlen für die Teilgebiete $G_1, G_2, \dots$ bei denselben Randbedingungen, dann gilt

$$(6) \quad A(\lambda) \geq A_1(\lambda) + A_2(\lambda) + \dots$$

Explizit bekannt sind uns die Eigenwerte und Eigenfunktionen unseres Problems für den Kreis. Ist K ein Kreis vom Radius 1 mit den zugehörigen Polarkoordinaten r, ϑ , so werden bekanntlich die Eigenfunktionen durch Ausdrücke der Form

$$[J_n(k_{n,m}r) + tJ_n(ik_{n,m}r)]e^{in\vartheta} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

gegeben, wobei die Größen t und $k_{n,m}$ aus den Randbedingungen

$$\begin{aligned} J_n(k) + tJ_n(ik) &= 0 \\ J'_n(k) + itJ'_n(ik) &= 0 \end{aligned}$$

zu bestimmen sind und J_n die n -te Besselsche Funktion bedeutet. Für die $k_{n,m}$ gilt somit die transzendente Gleichung

$$(7) \quad \Phi(k) \equiv \frac{J'_n(k)}{J_n(k)} - i \frac{J'_n(ik)}{J_n(ik)} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

und $k^4 = \lambda$ ist der zugehörige doppelt zu rechnende Eigenwert.

Wir wollen zunächst die Anzahl $N(\mu)$ der unterhalb einer Schranke μ gelegenen positiven Wurzeln $k_{n,m}$ dieser Gleichung nach unten abschätzen. Lassen wir in der Funktion Φ die positive Größe k beständig wachsen, so wird der erste Summand von positiven zu negativen unendlich großen Werten übergehen, wenn k das Intervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von $J_n(k)$ durchläuft, der zweite Summand bleibt dabei reell und beschränkt, da $J_n(ik)$ für positive Werte von k nicht verschwinden kann, wie unmittelbar aus der Reihenentwicklung

$$J_n(ik) = \frac{i^n k^n}{2^n n!} \left\{ 1 + \frac{k^2}{2 \cdot (2n+2)} + \frac{k^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n+2)(2n+4)} + \dots \right\}$$

folgt. Ist also $N_n(\mu)$ die Anzahl der unterhalb μ gelegenen positiven Wurzeln von (7) bei festem n und ist $M_n(\mu)$ die entsprechende Anzahl der positiven Nullstellen von $J_n(k)$, so gilt jedenfalls, da für $n > 0$ auch $k = 0$ eine Unendlichkeitsstelle des ersten Summanden von (7) ist,

$$N_n(\mu) \geq M_n(\mu), \quad N_0(\mu) \geq M_0(\mu) - 1$$

und somit, wenn über alle n summiert wird,

$$(8) \quad N(\mu) \geq M(\mu) - 1,$$

wobei unter $M(\mu)$ die gesamte Anzahl aller unterhalb μ gelegenen

positiven Nullstellen von Besselschen Funktionen mit ganzzahligem positiven Index verstanden wird.

Die Anzahl $M(\mu)$ ist für große μ asymptotisch bekannt, sei es aus den üblichen asymptotischen Entwicklungen, sei es als die halbe³⁾ Anzahl der unterhalb μ^2 gelegenen Eigenwerte einer kreisförmigen eingespannten Membran vom Radius 1, und zwar gilt⁴⁾

$$(9) \quad M(\mu) \cong \frac{1}{8} \mu^2.$$

Hat der Kreis den Radius a , so wird entsprechend

$$(10) \quad M_a(\mu) \cong \frac{1}{8} a^2 \mu^2 \cong a^2 M(\mu).$$

Hierbei ist das Zeichen $\cong$ in der gebräuchlichen Weise für asymptotische Gleichheit bei großem μ benutzt.

Nunmehr können wir dem obigen Satze zufolge für die Zahl $A(\lambda)$ leicht eine asymptotische untere Schranke bestimmen; wir wählen zu diesem Zwecke als Gebiete $G_1, G_2, G_3, \dots$ eine endliche Anzahl von Kreisen mit den Radien $a_1, a_2, a_3, \dots$ und bestimmen, was stets möglich ist, diese Kreise so, daß ihr Gesamtflächeninhalt $f = \pi(a_1^2 + a_2^2 + \dots)$ sich vom Inhalt F des Gebietes G um weniger als eine beliebig kleine vorgegebene positive Zahl ε unterscheidet; sodann wird, wenn wir die Formel (10) auf jeden dieser Kreise anwenden und $\lambda = \mu^2$ setzen, in leicht verständlicher Bezeichnung

$$(11) \quad A_i(\lambda) = 2N_{a_i}(\sqrt{\lambda}) \geq 2M_{a_i}(\sqrt{\lambda}) \cong \frac{1}{4} a_i^2 \sqrt{\lambda},$$

mithin

$$A(\lambda) \geq \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi} f \geq \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi} (F - \varepsilon)$$

und, da hierbei ε beliebig klein genommen werden kann,

$$(12) \quad A(\lambda) \geq \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi} F.$$

Um eine obere asymptotische Schranke für $A(\lambda)$ zu erhalten, schlagen wir einen ganz anderen Weg ein. Wenn wir in dem Variationsproblem durch welches λ_n definiert ist, die Randbedingung (3a) als Forderung für die zur Konkurrenz zugelassenen Funktionen φ fortlassen, so wird jeden-

³⁾ Jeder dieser Eigenwerte, abgesehen vom ersten, ist zweifach.

⁴⁾ Loc. cit. S. 43.

falls der einzelne Wert $h\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ nicht vergrößert, dasselbe gilt also für das bei Variation der $v_1, \dots, v_{n-1}$ entspringende Maximum σ_n dieser Werte, es ist also

$$(13) \quad \sigma_n \leq \lambda_n.$$

Nun ist infolge der Greenschen Formel, der Schwarzschen Ungleichung und der Beziehung (4), falls wir zur Abkürzung

$$(14) \quad D[\varphi] = \iint_{(G)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

setzen,

$$(D[\varphi])^2 = \left\{ \iint_{(G)} \varphi \Delta \varphi dx dy \right\}^2 \leq \iint_{(G)} \varphi^2 dx dy \cdot \iint_{(G)} (\Delta \varphi)^2 dx dy,$$

d. h.

$$(15) \quad (D[\varphi])^2 \leq H[\varphi].$$

Es ist somit, wenn wir mit $d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ analog wie oben die untere Grenze des Integrales $D[\varphi]$ bezeichnen, wobei für φ alle eben gekennzeichneten Funktionen zugelassen werden,

$$(16) \quad (d\{v_1, \dots, v_{n-1}\})^2 \leq h\{v_1, \dots, v_{n-1}\}.$$

Folglich gilt diese Beziehung auch für die Maxima dieser unteren Grenzen. Nun ist das Maximum von d gleich dem n -ten Eigenwert ϱ_n der eingespannten Membran, d. h. gleich dem n -ten Eigenwert der Differentialgleichung

$$\Delta u + \varrho u = 0$$

für G bei der Randbedingung $u = 0$. Also wird $\lambda_n \geq \sigma_n \geq \varrho_n^2$. Daher ist $A(\lambda)$ nicht größer als die Anzahl der Werte ϱ_n^2 , welche unterhalb λ liegen. Nun ist, unter $B(\varrho)$ die Anzahl der Werte ϱ_n unterhalb ϱ verstanden, gemäß der oben zitierten Arbeit

$$(17) \quad B(\varrho) \simeq \frac{F}{4\pi} \varrho$$

und daher wird

$$(18) \quad A(\lambda) \lesssim \frac{F}{4\pi} \sqrt{\lambda}.$$

Nunmehr folgt aus dieser Beziehung in Verbindung mit (12) die asymptotische Gleichung

$$(19) \quad \boxed{A(\lambda) \simeq \frac{F}{4\pi} \sqrt{\lambda}}$$

oder

$$(20) \quad \boxed{\lambda_n \simeq \left(\frac{n \cdot 4\pi}{F} \right)^2}.$$

Wir können dieses Schlußresultat auch folgendermaßen formulieren:

Der n -te Eigenwert der eingespannten Platte ist mit wachsendem n asymptotisch gleich dem Quadrate des n -ten Eigenwertes der eingespannten Membran.

Für das entsprechende Problem bei drei oder mehr Dimensionen gilt das analoge Resultat und die analoge Beweismethode.

Insbesondere besagt unser Resultat, daß auch beim Problem der schwingenden Platte die asymptotische Eigenwertverteilung ebenso wie bei der Membran nur vom Inhalt, nicht aber von der Gestalt des Grundgebietes G abhängt.

(Eingegangen am 22. September 1921.)