**7. Über die Bewegung einer Kugel in einem von zwei parallelen Wänden begrenzten zähen Medium;
von Arne Westgren.**

Eine Bedingung der Gültigkeit des Stokesschen Widerstandsgesetzes oder der von C. W. Oseen¹⁾ hergeleiteten genaueren Form desselben ist, wie bekannt, daß die Flüssigkeit, in der sich die Kugel bewegt, unendlich ausgedehnt sein muß. Im entgegengesetzten Falle, d. h. wenn die Flüssigkeit von festen Wänden umgeben ist, wird der Reibungswiderstand selbstverständlich größer.

Für den einfachen Fall, daß das flüssige Medium an eine unendliche ebene Wand grenzt, indem es in anderen Richtungen als unendlich ausgedehnt angesehen werden kann, hat H. A. Lorentz²⁾ die Abhängigkeit des Reibungswiderstandes eines sich bewegenden sphärischen Körpers vom Abstand a zur Wand und vom Radius R des Körpers theoretisch berechnet. Bewegt sich die Kugel senkrecht gegen die Wand oder parallel zu derselben, so findet er, daß der Widerstand vom Werte F_∞ im unbegrenzten Raume auf

$$F_\infty \left(1 + \frac{9}{8} \frac{R}{a}\right) \quad \text{bzw.} \quad F_\infty \left(1 + \frac{9}{16} \frac{R}{a}\right)$$

steigt. Für die Parallelbewegung hat J. Stock³⁾ auf der von Lorentz gegebenen Grundlage die Rechnungen weitergeführt und gibt einen Ausdruck an, der genauer sein soll.

Die Lösung des letzterwähnten Problems hat neuerdings eine erweiterte praktische Bedeutung erhalten, da in der letzten Zeit Messungen über die Brownsche Bewegung in vollständig oder zum Teil mechanisch begrenzten Kolloidvolumina ausgeführt worden sind, bei deren Verwertung es wichtig ist, den Reibungswiderstand der Teilchen genau be-

1) Ark. för mat. usw. Stockholm 6. Nr. 29. 1910; 9. Nr. 16. 1913.

2) Abhandlungen über theoretische Physik. p. 23. Leipzig 1907.

3) Krakauer Anz. (A) p. 18. 1911.

rechnen zu können.¹⁾ Seit einiger Zeit selbst mit derartigen Untersuchungen beschäftigt, war es mir auch von Wichtigkeit, den Einfluß einer Wand auf die Bewegung einer parallel zu derselben fortschreitenden Kugel kennen zu lernen. Ich habe daher experimentell zu bestimmen versucht, wie sich der Reibungswiderstand in diesem Falle mit dem Abstand zur Wand verändert. Der Schwierigkeit wegen, diesen Abstand während der Bewegung genau zu messen, ist mir diese Aufgabe nur sehr unvollständig gelungen. Ein anderes, mit dem erwähnten ziemlich gleichartiges Problem habe ich indessen mit größerem Erfolge behandeln können, und da die gewonnenen Resultate als Kontrolle bei der theoretischen Erörterung dieses Gebietes der Hydrodynamik von gewissem Wert sein dürfte, möchte ich im folgenden darüber Bericht erstatten.

Das Problem betrifft die Frage, wie sich der Reibungswiderstand eines sich in der Mitte zwischen zwei parallelen ebenen Wänden, in einem zähen Medium bewegendem sphärischen Körpers mit dem Abstand zwischen den Wänden verändert.

Experimentelles.

Als Untersuchungsobjekte wurden in Wasser suspendierte Gummigutt- und Mastixkügelchen gewählt, da die Dichte dieser Stoffe sich von derjenigen des Wassers nicht stark unterscheidet, wodurch die Fallgeschwindigkeit der Kugeln gering wird. Um größere Kugeln herzustellen, wurde ein von Perrin angegebenes Verfahren benutzt. Unter ziemlich konzentrierte alkoholische Lösungen der Harze wurde unter Anwendung eines in eine feine Spitze ausgezogenen Glasrohres Wasser vorsichtig geschichtet. Bei der langsamen Diffusion der beiden Flüssigkeiten wurde das Harz allmählich ausgefällt, wobei sich ziemlich große Kugeln bildeten. Von diesen waren die Gummigutteilchen vollkommen sphärisch und glatt; einige der Mastixkörnchen schienen jedoch bei mikroskopischer Beobachtung eine ziemlich rohe Oberfläche zu haben. Durch Schlämmung wurde der Alkohol und die kleineren Teilchen

1) Vgl. I. Nordlund, *Zeitschr. f. physik. Chem.* 87. p. 40. 1914; R. Costantin, *Ann. de phys.* (9) 8. p. 101. 1915.

weggebracht, so daß die Kugeln in den zu untersuchenden Suspensionen einen Durchmesser von 8—30 μ hatten.

Sehr verdünnte Proben dieser Suspensionen wurden in Küvetten eingeschlossen, die folgendermaßen verfertigt wurden. Etwa 4 cm lange und 0,5 cm breite Streifen aus Objektträgerglas wurden an den Enden mit Pizein an Objektträgern festgekittet. Die Dicke der Pizeindrähte wurde so gewählt, daß die Kammer an dem einen Ende ca. 0,2 mm und an dem anderen 0,02 mm betrug. Nachdem der Raum zwischen den Glasplatten mit Suspension gefüllt war, wurden die Öffnungen längs der Langseiten mit Wachs zugeschlossen. Fig. 1

Fig. 1.

veranschaulicht die Form der Flüssigkeitsmenge. Der Deutlichkeit wegen ist die Neigung der Glasflächen zueinander in erheblich vergrößertem Maßstabe gezeichnet.

Um die Fallgeschwindigkeit der Harzkugeln in verschiedenen Teilen dieses Raumes zu messen, wurden die Präparate am Objektisch eines horizontal umgelegten Mikroskopes befestigt und mit Hilfe des Objectives Zeiss C und eines mit Okularskala versehenen Okulars beobachtet. Der Objektisch konnte in vertikaler Richtung verschoben werden, wobei die Verschiebungen an einer mit einem Nonius versehenen Skala abgelesen werden konnten. Die Temperatur wurde an einem in der Nähe des Präparates angebrachten Thermometer abgelesen.

Die Suspensionen wurden derart verdünnt, daß in jedem Präparat nur eine sehr geringe Anzahl Kugeln vorhanden war, wodurch eine Verwechslung derselben während des Versuches ausgeschlossen war. Wenn sie vor dem Versuch an die eine Pizeinkante zusammengebracht wurden, lagen sie meistens in erheblichem Abstände voneinander.

Mit den Kugeln wurden Fallversuche folgendermaßen ausgeführt. Durch Vorversuche wurden der Objektisch und die Okularskala so eingestellt, daß die Verschiebungsrichtung des ersten und die Längsrichtung der letzteren mit der Fallrichtung der Teilchen genau zusammenfielen. Dann wurde bei vertikaler Aufstellung des Mikroskopes der Objektisch so verschoben, daß eine geeignete Kugel zwischen der oberen Pizeinkante und dem Nullstrich der Okularskala zu liegen kam. Der Abstand dieses Teilstriches von der Kante wurde genau gemessen. Das Mikroskop wurde umgelegt, und das Kügelchen fing an zu fallen. Mit einer Stoppuhr wurde die Zeit gemessen, die es brauchte, um den Abstand zwischen zwei Teilstrichen der Okularskala zu passieren. Diese Striche befanden sich 20 Skalenteile vom Mittelstrich der Skala. Die Fallstrecke — 40 Skalenteile — entsprach in sämtlichen Versuchen 0,2386 mm. Nach dieser ersten Messung wurde der Objektisch 0,3 oder 0,5 mm — je nach der Geschwindigkeit der Kugel — nach aufwärts verschoben. Das Teilchen passierte wieder das Gesichtsfeld, wobei die Fallgeschwindigkeit wieder gemessen wurde. Dieses Verfahren wurde in einem fort wiederholt.

Das Mikroskop war dabei ganz wenig nach vorne geneigt, so daß die Kugel sich allmählich von der Glaswand entfernte, die bei vertikaler Aufstellung des Mikroskops den Boden bildete. Der Einfluß dieser Wand auf den Reibungswiderstand wurde anfänglich stets geringer und die Geschwindigkeit der Kugel deshalb größer. Als die Kugel die Ebene in der Mitte zwischen den Glasflächen passiert hatte, wurde ihre Bewegung aber infolge des Einflusses der anderen Wand allmählich langsamer. Nachdem diese Wand erreicht war, wurde das Mikroskop unbedeutend nach hinten geneigt. Die Bewegung wurde wieder beschleunigt, erreichte ein Maximum der Geschwindigkeit und wurde dann wieder verzögert, indem sich die Kugel der ersten Wand wieder näherte. Dieses Ver-

fahren wurde so lange fortgesetzt, bis die Kugel an der unteren Pizeinkante angelangt war. Dann wurde das Präparat umgedreht und, während die Kugel dasselbe in umgekehrter Richtung durchwanderte, dieselben Messungen wie vorher aufs neue vorgenommen. Die Bahn der Kugel ist in Fig. 1 veranschaulicht (gestrichelt, Neigung ca. 10mal vergrößert).

In dieser Weise wurden Messungsreihen für Kugeln verschiedener Größe ausgeführt. Als typisches Beispiel wird eine Reihe für Gummigutteilchen vom Halbmesser $9,0 \mu$ mitgeteilt (Tab. 1). Die Neigungen des Mikroskops nach dem

Tabelle 1.

Zeit in Sek.	Nei- gung	Zeit in Sek.	Nei- gung	Zeit in Sek.	Nei- gung	Zeit in Sek.	Nei- gung
20,2	—	9,8	+	14,2	+	16,8	—
10,8	—	9,8	+	12,0	+	16,4	+
10,2	—	10,0	+	11,4	+	14,8	+
9,4	—	10,4	+	11,0	+	14,0	+
9,4	—	17,4	+	11,0	+	13,8	+
9,4	—	25,0	+	11,0	+	15,2	+
9,4	—	16,8	—	12,0	+	17,6	+
9,4	—	12,0	—	14,8	+	26,6	+
9,8	—	10,6	—	20,0	+	21,4	—
10,2	—	10,2	—	20,4	—	20,4	—
16,4	—	10,2	—	17,6	—	18,8	—
22,8	—	10,2	—	14,6	—	18,8	—
16,8	+	10,2	—	13,0	—	19,0	—
11,4	+	10,6	—	12,6	—	22,2	—
10,6	+	12,0	—	12,4	—	27,8	—
10,2	+	16,4	—	12,4	—		
10,0	+	23,8	—	12,6	—		
10,0	+	18,6	+	14,0	—		

Beobachter zu und von ihm weg sind mit — und + bezeichnet, Fig. 2 veranschaulicht, wie sich die Fallgeschwindigkeit der Kugel verändert, während sie die Küvette in der beschriebenen Weise durchläuft.

Damit auf jeden Kurvenzweig genügend viele experimentell gefundene Punkte fallen sollten, um die Minima genau zu definieren, wurde die Neigung des Mikroskops, wenn die Kugel sich nach dem engeren Gebiete der Küvette bewegte, bei jeder Umstellung ein wenig vermindert.

Überhaupt waren die Winkel zwischen der Fallrichtung der Kugel und den Glaswänden sehr gering. Die größte

Neigung betrug 2° , und wenn die Kugel sich im engsten Gebiete befand, war ihre Bahn nur etwa $0,5^\circ$ gegen die Wände geneigt. Man dürfte daher einen sehr geringen Fehler machen, wenn man die Küvette als planparallel betrachtet und die Fallrichtung als mit den Wänden parallel ansieht. Eine Stütze für die Berechtigung dieser Auffassung ergab sich durch gleichartige Versuche mit planparallelen Küvetten verschiedener Dicke. War nämlich dabei die Neigung des Mikroskops 2° oder geringer, so wurde doch immer dasselbe Maximum der Fallgeschwindigkeit gefunden. Gemäß dieser Überlegung entsprechen die Minima der Kurven vom Typus Fig. 2 den

Fig. 2.

Zeiten, die für die untersuchten Kugeln erforderlich sind, um unter gleichen Bedingungen in der Mitte und parallel mit den Wänden einer planparallelen Küvette 0,2936 mm zu fallen, wenn deren Dicke gleich dem Abstände der Wände in denjenigen Punkten der keilförmigen Küvette ist, wo die Minima gefunden wurden.

Um diese Abstände zu bestimmen, wurde die Dicke der mikroskopischen Kammer in einer Reihe von Punkten längs der ganzen Fallstrecke der Kugel gemessen. Durch Interpolation zwischen den gefundenen Werten konnten die gesuchten Distanzen ermittelt werden. Diese Messungen wurden in der üblichen Weise, d. h. durch scharfe Einstellung des Mikroskops erst auf die eine und dann auf die andere Wand der Kammer und durch Ablesung der Verschiebung an der Mikro-

eterschraube ausgeführt. Durch Multiplikation mit dem Lichtbrechungsindex des Wassers ergab sich daraus die Kammerdicke.

Aus den Minimiwerten der Zeit und den ihnen entsprechenden Werten der Kammerdicke sollten sich also nach der obigen Überlegung ergeben, wie sich die Geschwindigkeit verschiedener Kugeln in sehr ausgedehnten planparallelen Küvetten mit dem Abstände zwischen den Wänden verändert, wenn die Kugeln in der Mitte und parallel zu den Wänden fallen. Wie man aus den Tab. 2—10, die die Resultate enthalten, oder noch besser aus den Diagrammen in den Figg. 3 und 4, ersehen kann, stimmen die Beobachtungsergebnisse gut miteinander überein, wenn sich die Kugel *gegen* das engere Gebiet der Kammer zu bewegte oder *von* demselben entfernte. Das letztere ist auch ein Beweis dafür, daß man auf die Trägheit der Kugel keine Rücksicht zu nehmen braucht.

Der Durchmesser der Teilchen wurde mit Hilfe einer Okularskala gemessen. Um Wärmeströmungen im Innern des Präparates zu vermeiden, wurde die Küvette, wie oben erwähnt, aus dem dicken Objektträgerglas hergestellt. Deswegen konnten zur Teilchenausmessung gewöhnliche Objektive mit kleinem Frontabstand leider nicht benutzt werden, wodurch mit Trockensystemen nur schwache Vergrößerung erreicht wurde. Guten Dienst leistete jedoch Objektiv Zeiss I)* mit Wasserimmersion, das für das Siedentopf-Zsigmondy'sche Spaltultramikroskop besonders konstruiert worden ist und das ziemlich starke Vergrößerung mit einem großen Frontabstand vereint. Indessen sind die Werte für den Teilchenradius leider nicht so genau, wie es zu wünschen gewesen wäre. Die Unsicherheit der kleinsten Werte kann auf etwa 5 Proz. geschätzt werden; für die größeren ist sie aber geringer.

Versuchsreihen.

In den folgenden Tabellen bezeichnet a den Teilchenradius in μ ausgedrückt, t die Temperatur, z die Minimzeiten in Sekunden gemessen und $2l$ die ihnen entsprechende Dicke der Kammer in μ ausgedrückt.

Tabelle 2.

Mastix
 $a = 6,4$
 $t = 18,6^\circ$

z	$2l$	$\frac{10^5}{4l^2}$
44,6	119	7,05
45,0	101	9,8
46,3	89	12,6
47,2	74	18,3
48,8	63	25,2
53,6	48	43,4
56,4	42	56,7
60,6	38	69,3

Tabelle 3.

Mastix
 $a = 7,5$
 $t = 18,8^\circ$

z	$2l$	$\frac{10^5}{4l^2}$
30,0	184	2,95
31,0	148	4,57
32,0	116	7,44
33,2	86	13,5
37,4	58	29,7
45,7	38	69,2

Fig. 3.

Tabelle 4.

Mastix
 $a = 8,7$
 $t = 18,8^\circ$

z	$2l$	$\frac{10^5}{4l^2}$
22,9	185	2,92
23,0	176	3,23
23,2	151	4,39
23,6	148	4,57
24,2	126	6,30
24,4	113	7,83
25,0	103	9,45
25,8	90	12,4
27,6	74	18,3
28,0	72	19,3
34,8	45	49,4
36,0	42	56,7

Tabelle 5.

Mastix
 $a = 13,4$
 $t = 19,4^\circ$

z	$2l$	$\frac{10^5}{4l^2}$
11,2	194	2,66
11,2	187	2,86
11,4	160	3,91
11,6	155	4,16
12,2	126	6,30
12,2	125	6,42
13,4	89	12,6
13,4	87	13,5
15,6	69	21,0
19,0	54	34,3

Tabelle 6.

Gummigutt

$a = 4,2$

$t = 16,8^\circ$

z	$2l$	$\frac{10^5}{4l^2}$
35,0	163	3,76
34,9	162	3,81
35,6	139	5,18
35,4	130	5,92
36,0	120	6,95
36,2	104	9,25
36,6	101	9,80
36,4	92	11,8
36,9	78	16,4
37,0	76	17,3
37,2	62	26,0
38,6	45	49,4
39,6	41	59,5
43,4	32	97,7
44,6	30	111,1
48,4	26	147,9
50,0	25	160,0
56,8	20	250,0

Tabelle 7.

Gummigutt

$a = 5,0$

$t = 17,2^\circ$

z	$2l$	$\frac{10^5}{4l^2}$
25,2	166	3,63
25,6	131	5,83
26,0	110	8,26
26,2	88	11,4
26,8	70	20,4
28,8	52	37,0
30,6	40	62,5
34,4	29	119,0
37,0	26	147,9
45,2	20	250,0
47,2	19	277,0

Tabelle 8.

Gummigutt

$a = 6,2$

$t = 16,4^\circ$

z	$2l$	$\frac{10^5}{4l^2}$
18,8	195	2,63
18,8	185	2,92
19,0	152	4,33
19,0	144	4,82
19,2	118	7,18
19,6	109	8,42
20,6	74	23,0
20,4	73	23,6
22,0	58	29,7
22,0	49	41,6
24,6	43	54,1
25,8	34	86,5
29,8	29	118,9
33,2	24	173,6
40,0	19	277,0
43,4	18	308,6

Tabelle 9.

Gummigutt

$a = 6,7$

$t = 16,7^\circ$

z	$2l$	$\frac{10^5}{4l^2}$
14,0	197	2,58
14,0	180	3,09
14,4	155	4,16
14,4	138	5,25
14,8	119	7,06
15,0	105	9,08
15,8	80	15,6
16,0	75	17,8
16,8	59	28,7
17,4	50	40,0
19,2	43	54,1
21,0	35	81,6
27,0	26	148,0
36,2	19	277,0
36,4	19	277,0

Tabelle 10.

Gummigutt

 $a = 9,0$ $t = 18,5^\circ$

z	$2l$	$\frac{10^5}{4l^2}$	z	$2l$	$\frac{10^5}{4l^2}$
9,2	175	3,27	11,0	69	21,0
9,4	165	3,67	12,4	51	38,5
9,6	148	4,57	13,0	48	43,4
9,8	129	6,01	13,8	41	59,5
10,2	111	8,12	19,0	31	104,1
10,2	99	10,2	18,8	30	111,1
11,0	73	18,8

Fig. 4.

Eine empirische Formel.

Der regelmäßige Verlauf der Kurven in den Figg. 3 und 4 ladet zu dem Versuche ein, eine empirische Formel für die Änderung des Reibungswiderstandes aufzustellen. Beim ersten Blick auf die z - $2l$ -Diagramme sieht man, daß eine ausgeprägte Affinität zwischen den verschiedenen Kurven in einem und demselben Systeme herrscht. Verschiebt man nämlich die Kurven, so daß alle ihre Punkte sich parallel zur z -Achse bewegen, kann man sie zu völliger Deckung bringen; z kann also durch die Summe einer Funktion von a und einer anderen von ihr unabhängigen von l ausgedrückt werden, d. h.

$$(1) \quad z = f(a) + f_1(l).$$

Wird der Reibungswiderstand bei der Geschwindigkeit 1 mit F , die Dichte der Kugel mit Δ , die Fallstrecke mit b und die Beschleunigung der Schwere mit g bezeichnet, so können wir offenbar schreiben

$$(2) \quad z = \frac{Fb}{4/3 \pi a^3 (\Delta - 1) g}.$$

Dabei ist die Dichte des Wassers gleich 1 gesetzt.

Nehmen wir an, daß der Reibungswiderstand durch folgende Formel ausgedrückt werden kann

$$(3) \quad F = F_{\infty} [1 + \varphi(a, l)],$$

wo F_{∞} den Reibungswiderstand bei der Geschwindigkeit 1 in unendlich ausgedehntem Medium und $\varphi(a, l)$ eine Funktion von a und l bedeuten. Aus (1), (2) und (3) erhalten wir

$$f(a) + f_1(l) = \frac{b F_{\infty} [1 + \varphi(a, l)]}{4/3 \pi a^3 (\Delta - 1) g},$$

woraus unter Berücksichtigung des Stokesschen Gesetzes, $F_{\infty} = 6 \pi \eta a$, wo η die Viskosität der Flüssigkeit bedeutet,

$$(4) \quad f(a) + f_1(l) = \frac{9 \eta b}{2 a^3 (\Delta - 1) g} + \frac{9 \eta b \cdot \varphi(a, l)}{2 a^3 (\Delta - 1) g}.$$

Die Kurve einer Kugel vom Radius a nähert sich mit steigendem l asymptotisch der Geraden $z = f(a)$. Es ist daher

$$(5) \quad f(a) = \frac{9 \eta b}{2 a^3 (\Delta - 1) g}$$

und

$$(6) \quad f_1(l) = \frac{9 \eta b \cdot \varphi(a, l)}{2 a^3 (\Delta - 1) g}.$$

Nun ist aber $f_1(l)$ unabhängig von a ; dasselbe muß also auch von

$$\frac{l}{a^3} \varphi(a, l)$$

gelten. Berücksichtigt man außerdem, daß $\varphi(a, l)$ eine dimensionslose Größe sein muß, so liegt es sehr nahe, zu prüfen, ob nicht auf der Gleichung

$$\varphi(a, l) = k \frac{a^3}{l^3},$$

wo k eine Konstante ist, eine brauchbare Widerstandsformel begründet werden kann.

Es soll also untersucht werden, ob die Formel

$$(7) \quad F = F_{\infty} \left(l + k \frac{a^2}{l^2} \right)$$

gültig ist. Aus (1), (4) und (7) ergibt sich

$$z = \frac{9 \eta b}{2 a^2 (\Delta - 1) g} + \frac{9 \eta b k}{2 l^2 (\Delta - 1) g},$$

oder, wenn die Abkürzungen

$$(8a) \quad A = \frac{9 \eta b}{2 a^2 (\Delta - 1) g}$$

und

$$(8b) \quad B = \frac{9 \eta b k}{2 (\Delta - 1) g}$$

eingeführt werden,

$$(9) \quad z = A + \frac{B}{l^2}.$$

z würde also eine lineare Funktion von $1/l^2$ sein. Um dies zu prüfen, ist in den Tab. 2—10 außer z und $2l$ auch $10^5/4l^2$ eingeführt worden. Wenn zusammengehörige Werte

Fig. 5.

von z und $10^5/4l^2$ in Diagramme eingetragen werden, sollten die dadurch bestimmten Punkte auf Geraden liegen. Gemäß (8b) müssen diese Geraden auch für einen und denselben Stoff annähernd parallel sein, da von den im rechten Glied dieser Gleichung eingehenden Größen für die verschiedenen

Versuchsreihen η sehr wenig schwankt und die anderen konstant sind. Wie die Figg. 5 und 6 zeigen, erfüllen die Versuchsergebnisse diese Bedingungen ganz vorzüglich und stehen also mit der supponierten Widerstandsformel im besten Einklang.

Fig. 6.

Eine rationelle Ermittlung der Konstanten A und B für die verschiedenen Versuchsreihen sollte natürlich eigentlich gemäß der Methode der kleinsten Quadrate ausgeführt werden. In Anbetracht des Umstandes aber, daß die wesentlichsten Fehler in den Reihen wahrscheinlich auf die nicht ganz vermeidlichen Wärmeströmungen in der Flüssigkeit beruhen, und daher als gewissermaßen regelmäßig angesehen werden müssen, dürfte es fraglich sein, ob die Anwendung dieser Methode berechtigt ist. Ich habe mich daher damit begnügt, Geraden durch die Punktscharen der verschiedenen Reihen in den Figg. 4 und 5 zu ziehen, aus deren Winkelkoeffizienten B und aus deren Abschnitten an der z -Achse A erhalten werden kann. Die Resultate sind in den Tabbl. 11 und 12 erhalten.

Tabelle 11.

Mastix.

a	η	A	B	Δ	k
6,4	0,01039	42,7	6200	1,064	3,59
7,5	0,01034	30,0	6000	1,067	3,56
8,7	0,01019	22,4	6200	1,065	3,65
13,4	0,01034	10,5	6000	1,058	3,16

Tabelle 12.

Gummigutt.

a	η	A	B	Δ	k
4,2	0,01088	35,3	2170	1,186	3,31
5,0	0,01077	25,2	2070	1,183	3,19
6,2	0,01099	18,9	2120	1,169	3,21
6,7	0,01080	14,1	2150	1,183	3,28
9,0	0,01042	9,2	2190	1,150	3,49

Die Größe A einer Reihe ist ja die für eine Kugel erforderliche Zeit, um die Strecke b im unbegrenzten Medium zu durchwandern. Daraus kann gemäß dem Stokesschen Gesetze (8b) die Dichte Δ der Kugelsubstanz berechnet werden. Die so erhaltenen Δ -Werte sind auch in den Tabellen eingeführt. Mit Ausnahme des Wertes der letzten Gummiguttreihe, wo wahrscheinlich ein Versehen bei der Messung des Teilchenradius begangen worden ist, stimmen sie untereinander gut überein.

Δ wurde auch direkt experimentell bestimmt. Der Mastixsuspension wurde Harnstoff und der Gummiguttsuspension Bromkalium so lange zugefügt, bis die Teilchen auch beim kräftigsten Zentrifugieren weder sanken noch stiegen.¹⁾ Die Dichte der Lösungen wurde dann pyknometrisch gemessen. Für Mastix ergab sich das spezifische Gewicht 1,081 und für Gummigutt 1,174. Betreffs Gummigutt ist also die Übereinstimmung mit dem aus der Fallgeschwindigkeit berechneten

1) Vgl. J. Perrin, *Les atomes*. Paris 1913. p. 137. Durch diese Dichtenmessung wurde auch die Homogenität der Teilchen bewiesen. Wäre nämlich ihre Dichte etwas verschieden, so würden einige Teilchen steigen, andere fallen, wenn die Dichte des Dispersionsmittels gleich der mittleren Dichte der Teilchen war.

Wert ganz gut; für Mastix ist aber der Unterschied zwischen den Ergebnissen größer, als aus den Versuchsfehlern erklärt werden kann. Vielleicht ist die etwas schroffe Oberfläche der Mastixkörnchen (vgl. p. 309) dafür verantwortlich.

Bei der Ermittlung von k ist auf diesen Umstand Rücksicht genommen worden. Aus den B -Werten der Gummiguttreihen ist nämlich k mit Hilfe der Gleichung (8b) unter Zugrundelegung des direkt bestimmten Δ berechnet worden, während die k -Werte der Mastixreihen aus A , B und a gemäß dem durch Kombination von (8a) und (8b) erhaltenen Ausdrucke

$$k = \frac{B}{A a^3}$$

ausgerechnet worden sind. Wie aus den Tab. 11 und 12 hervorgeht, stimmen die k -Werte gut überein. Der Mittelwert beträgt 3,88.

Das Endresultat der Untersuchung ist also, daß der Reibungswiderstand F der untersuchten Mastix- und Gummigutkugeln beim Fall im Wasser in der Mitte zwischen zwei parallelen ebenen Wänden vom Abstände $2l$ zwischen den Wänden und vom Teilchenradius a folgendermaßen abhängig ist

$$F = F_{\infty} \left(1 + k \frac{a^3}{l^3} \right),$$

in welchem Ausdruck F_{∞} den Widerstand im unbegrenzten Medium bedeutet. Für die Konstante k ist der Wert 3,4 gefunden worden, dessen Unsicherheit auf etwa 10 Proz. geschätzt werden kann.

Uppsala, im Dezember 1916.

(Eingegangen 28. Dezember 1916.)