5.

Ueber das geradlinige Sechseck auf dem Hyperboloïd.

(Vom Hrn. Dr. *Hesse*, Privatdocenten an der Universität zu Königsberg.)

Wenn drei gerade, im Raum willkürlich liegende Linien a, b, c von drei andern a', b', c' geschnitten werden, so kann man die Linien aa', bb', cc' als die gegenüberliegenden Seiten eines Sechsecks betrachten, dessen aufeinanderfolgende Seiten ac', ba', cb' sind. Die gegenüberliegenden Ecken dieses Sechsecks bezeichnen wir durch AA', BB', CC' , in der Art, daß die Linien $cb', ac', ba', bc', ca', ab'$ respective in $A, B, C; A', B', C'$ zusammenlaufen. Alsdann bemerkt man leicht, daß die drei durch die gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks gelegten Ebenen sich gegenseitig in den drei Diagonalen AA', BB', CC' schneiden. Da aber diese Ebenen in einem Punkte p'' zusammenstoßen, so werden sich die genannten Diagonalen in eben demselben Punkte schneiden.

Auf gleiche Weise schneiden sich die Ebenen der gegenüberliegenden Winkel des Sechsecks in drei geraden Linien, welche in einer und derselben Ebene P'' liegen. Denn verlängert man die gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks aa', bb', cc' , bis sie sich respective in den Punkten A'', B'', C'' schneiden, so werden die Linien $A''B'', B''C'', C''A''$ die Schnittlinien der Ebenen der gegenüberliegenden Winkel CC', AA', BB' sein. Da aber diese Linien das Dreieck $A''B''C''$ bilden, so müssen sie in einer und derselben Ebene liegen.

Durch die 6 Linien a, b, c, a', b', c' läßt sich ein Hyperboloïd legen. In Rücksicht auf dieses Hyperboloïd sind $ABC, A'B'C'$ die Tangirungspunkte der Ebenen, in welchen die durch dieselben Buchstaben bezeichneten Winkel des Sechsecks liegen. Die Ebenen der Winkel A und A' , welche zugleich die Tangenten-Ebenen des Hyperboloïds in den Punkten A und A' sind, schneiden sich in der Linie, welche wir durch $B''C''$ bezeichnet haben. Diese Schnittlinie der Tangenten-Ebenen ist aber die reciproke Polare der Verbindungslinie der Tangirungspunkte AA' . Auf gleiche Weise werden die Linien $C''A''$ und $A''B''$ als die reciproken Polaren von BB' und CC' erkannt. Da aber die Linien AA', BB', CC' sich in einem Punkte

p'' schneiden, so müssen ihre reciproken Polaren in der Polar-Ebene des Punctes p'' liegen. Es ist mithin die Ebene P'' die Polar-Ebene von p'' . Diese Bemerkungen lassen sich, wie folgt, zusammenfassen.

Lehrsatz 1.

Wenn man auf einem Hyperboloid ein geradliniges Sechseck beschreibt, so schneiden sich die drei Diagonalen, welche die gegenüberliegenden Ecken des Sechsecks paarweise verbinden, in einem und demselben Puncte, und die Ebenen der gegenüberliegenden Winkel des Sechsecks schneiden sich in drei Linien, welche in der Polar-Ebene des gemeinsamen Schnittpunctes der Diagonalen liegen.

Die bloße Anschauung der beschriebenen Figur lehrt, daß dieselbe in allen ihren Theilen vervollständigt werden kann: 1) wenn die 3 Linien a, b, c und der Punct p'' gegeben sind, oder 2) wenn die 3 Linien a, b, c und die Ebene P'' gegeben sind. Die Vervollständigung der Figur im ersten Falle kommt mit der Lösung folgender Aufgabe überein.

Aufgabe 1.

Wenn drei Generatricen a, b, c eines Hyperboloids und ein beliebiger Punct p'' gegeben sind, die Polar-Ebene dieses Punctes zu construiren.

Läßt man, um die Polar-Ebene P'' des gegebenen Punctes p'' zu bestimmen, eine Ebene durch p'' und a gehen und verbindet die Schnittpuncte dieser Ebene mit den Linien b und c durch eine Gerade a' , legt hierauf eine zweite Ebene durch p'' und b und verbindet die Schnittpuncte dieser Ebene mit a und c durch eine Gerade b' , legt endlich eine Ebene durch p'' und c und verbindet die Schnittpuncte dieser Ebene mit a und b durch eine Gerade c' , so schneiden sich die Linienpaare aa', bb', cc' in drei Puncten A'', B'', C'' , durch welche die gesuchte Parallel-Ebene hindurchgeht.

Im zweiten Falle hat man die folgende Aufgabe.

Aufgabe 2.

Wenn drei Generatricen a, b, c eines Hyperboloids und eine Ebene P'' gegeben sind, den Pol dieser Ebene zu construiren.

Die 3 Linien a, b, c schneiden die gegebene Ebene P'' in drei Puncten, welche wir durch A'', B'', C'' bezeichnen. Durch diese Puncte ziehe man die drei Linien a', b', c' , von welchen die erste b und c , die zweite c und a , die dritte a und b schneidet. Legt man alsdann 3 Ebenen

durch aa' , bb' , cc' , so schneiden sich dieselben in dem gesuchten Pole p'' der Ebene P'' .*)

Die 6 Linien a , b , c , a' , b' , c' bilden 6 Sechsecke π , π' , π'' , κ , κ' , κ'' , welche wir, indem wir die gegenüberliegenden Ecken eines jeden Sechsecks zusammenstellen, durch folgendes Schema ausdrücken wollen:

$$\begin{array}{ll} \pi'' \dots AA', BB', CC', & \kappa'' \dots AB, A'B', A''B'', \\ \pi \dots A'A'' B'B'' C'C'', & \kappa \dots BC, B'C', B''C'', \\ \pi' \dots A''A B''B C''C, & \kappa' \dots CA, C'A', C''A''. \end{array}$$

Das Sechseck π'' ist dasjenige, welches wir betrachtet haben. Von den übrigen Sechsecken gilt ebenfalls der Lehrsatz 1. Bezeichnen wir demnach die Schnittpunkte der 3 Diagonalen der Sechsecke der Reihe nach durch p'', p, p' ; q'', q, q' , so liegen die drei ersten in einer geraden Linie und die drei letzten in einer zweiten geraden Linie. Denn es liegen die Punkte p'', p, p' , respective auf den Geraden AA' , $A'A''$, $A''A$. Da diese aber ein Dreieck bilden, so wird die Ebene des Dreiecks durch die drei Punkte p'', p, p' gehen. Eben so läßt sich nachweisen, daß die Ebene des Dreiecks $B''BB'$, sowie, daß die Ebene des Dreiecks $C''CC'$ durch die genannten Punkte geht. Wenn aber mehrere Punkte zugleich in drei Ebenen liegen, so müssen sich die Ebenen in einer und derselben Linie schneiden und die Punkte in dieser Schnittlinie liegen.

Auf gleiche Weise liegen die Punkte q'', q, q' in den drei Ebenen ABC , $A'B'C'$, $A''B''C''$, welche sich deshalb in einer und derselben geraden Linie schneiden müssen.

Den Punkt p'' haben wir aber als den Pol der Ebene $A''B''C''$ erkannt. Eben so werden p und p' die Pole der Ebenen ABC und $A'B'C'$ sein. Die gemeinsame Schnittlinie $q''qq'$ dieser Ebenen ist mithin die reciproke Polare der geraden Linie $p''pp'$. Dadurch ist folgender Lehrsatz bewiesen.

Lehrsatz 2.

Die Seiten des auf dem Hyperboloïd beschriebenen Sechsecks bilden noch 5 andere Sechsecke. Jedem der 6 Sechsecke entspricht ein Punkt, in welchem sich die Diagonalen schneiden, welche die gegenüber-

*) Nimmt man die Ebene P'' in der Unendlichkeit liegend an, so wird der Pol p'' zum Mittelpunkt des Hyperboloïds, dessen Construction Hr. Prof. Steiner im 2ten Bande dieses Journals gegeben hat.

liegenden Seiten des Sechsecks verbinden. Diese 6 Punkte liegen auf 2 geraden Linien, von denen die eine die reciproke Polare der andern ist.

Wenn man die drei Generatricen a, b, c sich einer Ebene unendlich nähern läßt, bis sie in dieselbe ihrer ganzen Länge nach hineinfallen, so fallen auch die drei andern Generatricen a', b', c' und das ganze Hyperboloïd, im Grenzfalle, mit der Ebene zusammen. Die sechs genannten Generatricen werden aber Tangenten eines Kegelschnittes, weil die Diagonalen der durch sie gebildeten 6 Sechsecke $\pi'', \pi, \pi', \kappa'', \kappa, \kappa'$ sich respective in den Punkten p'', p, p', q'', q, q' schneiden. Die beiden geraden Linien $(p''pp')$ und $(q''qq')$ werden endlich harmonische Polaren des Kegelschnittes, d. h. solche Linien, welche mit den durch ihren gemeinsamen Schnittpunkt gelegten Tangenten des Kegelschnittes vier harmonische Linien bilden. Demnach können wir zu den Sätzen von *Brianchon* und *Steiner*: „Irgend 6 Tangenten eines Kegelschnittes bestimmen 60 umschriebene Sechsecke; in jedem derselben schneiden sich die drei Diagonalen, welche die gegenüberliegenden Ecken verbinden, in einem Punkte $\mathfrak{P}$; die 60 Punkte $\mathfrak{P}$, welche den 60 Sechsecken entsprechen, liegen, zu dreien, auf 20 geraden Linien vertheilt,“ noch hinzufügen, „daß die 20 geraden Linien 10 Paare harmonischer Polaren des Kegelschnitts bilden.“

Der Lehrsatz 2. kann mit andern Worten wie folgt ausgesprochen werden. „Wenn man auf einem Hyperboloïd ein Sechseck beschreibt, so schneiden sich die Diagonalen, welche die gegenüberliegenden Ecken verbinden, in einem Punkte, die Ebenen der ungeraden Winkel des Sechsecks in einem zweiten, und die Ebenen der geraden Winkel in einem dritten Punkte. Diese drei Punkte liegen in einer geraden Linie. Ferner schneiden sich die Ebenen zweier gegenüberliegenden Winkel des Sechsecks und die Ebene, welche durch die Seiten der übrigen Winkel geht, in einem Punkte, welcher auf der reciproken Polare der genannten geraden Linie liegt.“

Königsberg am 8ten Juni 1842.