Notiz über die Kugelfunktionen.

Von Niels Nielsen in Kopenhagen.

Für die höheren Differentialquotienten der Funktion

$$(1) \quad y = (1 - x^2)^{-\nu}$$

wo ν eine von Null verschiedene, endliche Konstante bedeutet, ergibt die vollständige Induktion ohne Mühe einen Ausdruck von der Form

$$(2) \quad y^{(n)} = \frac{\Gamma(2\nu + n) \cdot f_n(x)}{\Gamma(2\nu) \cdot (1 - x^2)^{\nu+n}},$$

wo $f_n(x)$ eine in x ganze rationale Funktion von genau n^{tem} Grade bedeutet, und zwar so, daß $x^n \cdot f_n(x)$ eine gerade Funktion sein muß, d. h.

$$(3) \quad f_n(x) = a_0^n x^n + a_1^n x^{n-2} + a_2^n x^{n-4} + \dots$$

Eine weitere Differentiation der Identität (2) ergibt dann zur Bestimmung der Funktion $f_n(x)$ die gemischte Differential- und Differenzengleichung

$$(4) \quad (2\nu + n) f_{n+1}(x) = (2\nu + 2n) x f_n(x) + (1 - x^2) f_n^{(1)}(x),$$

woraus, indem man die Entwicklung (3) einführt, für die Koeffizienten a die partielle Differenzengleichung

$$(5) \quad (2\nu + n) a_p^{n+1} = (2\nu + n + 2p) a_p^n + (n - 2p + 2) a_{p-1}^n.$$

Die allgemeine Auflösung dieser Gleichung ist nicht ganz leicht; für unseren Zweck brauchen wir aber nur den speziellen Fall, wo

$$a_0^0 = 1, a_p^0 = 0, a_{-p}^n = 0,$$

indem p eine positive ganze Zahl bedeutet. Für kleinere Werte von p findet man dadurch den Ausdruck

$$(6) \quad a_p^n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2p-1)}{(2\nu+1)(2\nu+3)\cdots(2\nu+2p-1)} \cdot \binom{n}{2p}$$

und die vollständige Induktion ergibt dann, wegen der leicht zu verifizierenden Identität

$$(2\nu+n)(2p-1) \cdot \binom{n+1}{2p} = (2p-1)(2\nu+n+2p) \cdot \binom{n}{2p} + \\ + (n-2p+2)(2\nu+2p-1) \cdot \binom{n}{2p-2},$$

daß der Ausdruck (6) allgemein gültig ist, und somit ergibt sich für die Funktion $f_n(x)$ die Darstellung

$$(7) \quad f_n(x) = x^n + \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \binom{n}{2s} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2s-1)}{(2\nu+1)(2\nu+3)\cdots(2\nu+2s-1)} \cdot x^{n-2s}$$

oder, was offenbar dasselbe ist

$$(8) \quad f_n(x) = x^n \cdot F\left(\frac{1-n}{2}, -\frac{n}{2}, \nu + \frac{1}{2}, \frac{1}{x^2}\right),$$

wo F die gewöhnliche hypergeometrische Reihe bedeutet.

Nach dieser Erörterung ergibt sich also die Differentialformel

$$(9) \quad D_x^n \left[(1-x^2)^{-\nu} \right] = \frac{\Gamma(2\nu+n) \cdot x^n}{\Gamma(2\nu) \cdot (1-x^2)^{\nu+n}} \cdot F\left(\frac{1-n}{2}, -\frac{n}{2}, \nu + \frac{1}{2}, \frac{1}{x^2}\right),$$

von welcher der Spezialfall $\nu = \frac{1}{2}$ schon von Euler¹⁾ gefunden worden ist.

Aus (9) findet man nun weiter die etwas allgemeinere Formel

$$(10) \quad D_x^n \left[(1-\alpha^2 x^2)^{-\nu} \right] = \frac{\Gamma(2\nu+n) \cdot x^n \alpha^{2n}}{\Gamma(2\nu) \cdot (1-\alpha^2 x^2)^{\nu+n}} \cdot F\left(\frac{1-n}{2}, -\frac{n}{2}, \nu + \frac{1}{2}, \frac{1}{\alpha^2 x^2}\right),$$

von welcher Grunert²⁾ und Luchterhand³⁾ den Spezialfall $\nu = \frac{1}{2}$ entwickelt haben, offenbar ohne die Eulersche Formel zu kennen.

Wir gehen nunmehr von der bekannten Entwicklung

$$(11) \quad (1-2\alpha x + \alpha^2)^{-\nu} = \sum_{s=0}^{s=\infty} P^{\nu,s}(x) \cdot \alpha^s, \quad |\alpha| < |x \pm \sqrt{x^2-1}|$$

¹⁾ Institutiones calculi differentialis, p. 150; 1755.

²⁾ Grunert, Archiv, Bd. 3, p. 236–248; 1843.

³⁾ Grunert, Archiv, Bd. 4, p. 87–99; 1844.

aus, in der die P die verallgemeinerten Kugelfunktionen bezeichnen, d. h.

$$(12) \quad P^{\nu, n}(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s \Gamma(\nu + n - s)}{s! (n - 2s)!} \cdot (2x)^{n-2s}.$$

Da nun die Formel (11) nach einer leichten Änderung auch folgendermaßen dargestellt werden kann

$$(1 - x^2)^{-\nu} \left(1 - \left(\frac{\alpha - x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)^2 \right)^{-\nu} = \sum_{s=0}^{s=\infty} P^{\nu, s}(x) \cdot \alpha^s,$$

so ergibt eine n -malige Differentiation nach α , wenn man dann $\alpha = 0$ setzt, wegen (10), die Reihenentwicklung

$$(13) \quad P^{\nu, n}(x) = \frac{\Gamma(2\nu + n) \cdot (1 - x^2)^n}{\Gamma(2\nu) n! (i x)^n} \cdot F\left(\frac{1-n}{2}, -\frac{n}{2}, \nu + \frac{1}{2}, \frac{x^2 - 1}{x^2}\right).$$

Die Annahme

$$\frac{x^2}{1 - x^2} = -y^2, \quad x^2 = -\frac{y^2}{1 - y^2}$$

ergibt dann, wegen (13) und (8), nachdem man hinwiederum x statt y einführt, die Identität

$$(14) \quad f_n(x) = \frac{\Gamma(2\nu) n! (1 - x^2)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(2\nu + n) i^n} \cdot P^{\nu, n}\left(\frac{i x}{\sqrt{1 - x^2}}\right),$$

so daß unsere Funktion $f_n(x)$, von einem einfachen Faktor abgesehen, nichts anderes ist, als eine verallgemeinerte Kugelfunktion; in dem einfacheren von Euler betrachteten Fall $\nu = \frac{1}{2}$ drücken sich die entsprechenden Funktionen demnach durch Legendresche Kugelfunktionen aus.

Wir erwähnen endlich, daß eine Kombination der beiden Formeln (14) und (2) die merkwürdige Differentialidentität

$$(15) \quad P^{\nu, n}\left(\frac{i x}{\sqrt{1 - x^2}}\right) = \frac{i^n D_x^n [(1 - x^2)^{-\nu}]}{n! (1 - x^2)^{-\frac{n}{2} - \nu}}$$

liefert.

Diese letzte Formel ist vielleicht neu.