Geometrische Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes der algebraischen Spiralen.

Von Wilhelm Rulf in Wien.

Die Polarsubnormalen der algebraischen Spiralen, deren Abhängigkeit von den Constanten und Polarcoordinaten man bekanntlich mittelst ähnlicher Dreiecke — also auf elementar-geometrischem Wege — ermitteln kann, kann man als Radiivectores einer neuen Spirale ansehen, welche im folgenden die Polarsubnormalen-Spirale oder kurz Subnormalen-Spirale der gegebenen Spirale genannt werden soll.

Es sei Fig. 1. O der Pol, P ein Punkt der algebraischen Spirale, T die Tangente in demselben, N die Normale und demnach, wenn RQ senkrecht auf OP steht, OQ die Polarsubnormale und OR die Polarsubtangente.

Um den Krümmungsmittelpunkt M zu finden, müsste man bekanntlich die unendlich nahe Normale N' mit N zum Schnitt bringen. Der unendlich nahe Punkt P' der Spirale, dessen Normale N' ist, liegt aber auch in der Tangente T und der zugehörige Punkt Q' , der Endpunkt der Polarsubnormale, in der Tangente t der Subnormalenspirale. Da aber auch $P'OQ'$ ein rechter Winkel ist, so ist nach einem bekannten Satze der projectiven Geometrie N' die Tangente eines Kegelschnittes, der T , t und N berührt, und demnach der Krümmungsmittelpunkt als Schnittpunkt der zwei unendlich nahen Kegelschnitttangente NN' der Berührungspunkt von N . Daher ist er der vierte harmonische Punkt zu D in Bezug auf Q und P , wenn D der Schnittpunkt der Berührungsschne BC der beiden Tangente T und t mit N ist. Diese Berührungsschne steht aber bekanntlich auf OA senkrecht, wenn mit A der Schnittpunkt der beiden Tangente T und t bezeichnet wird.

Fig. 1.

Hiemit ist der Krümmungsmittelpunkt geometrisch gefunden, wenn noch gezeigt wird, dass die Tangente t der Subnormalen-spirale geometrisch, ohne Benützung der Differentialrechnung gefunden werden kann.

Soll der Krümmungsradius PM , der in der Folge immer mit x bezeichnet wird, berechnet werden, so benütze man die harmonischen Punkte MQD und P , vermöge welcher ohne Rücksicht auf die Vorzeichen der Strecken die Gleichung besteht:

$$\frac{x}{x-PQ} = \frac{PD}{PQ-PD} \dots\dots 1),$$

worin PQ die Normale und außer x nur PD unbekannt ist.

Da aber wegen paarweise normaler Seiten $\triangle ODP$ ähnlich $\triangle OAR$ ist, so besteht die Proportion:

$$PD : AR = r : OR$$

und

$$PD = \frac{r \cdot AR}{OR} \dots\dots 2)$$

worin OR die Polar-Subtangente ist und AR aus den Beziehungen der Tangente t berechnet werden muss.

Das hier im allgemeinen Gezeigte soll nun insbesondere an folgenden algebraischen Spiralen durchgeführt werden: 1. An der Neoide, Polargleichung $r = a\varphi + b$; 2. an der reciproken oder hyperbolischen Spirale, $r = \frac{a}{\varphi}$; 3. an der parabolischen (Fermat'sche) Spirale $r^2 = a^2\varphi$ und 4. an der reciproken parabolischen Spirale (Lituus) $r^2 = \frac{a}{\varphi}$.

1. Krümmungsmittelpunkt der Neoide.

Bei dieser ist bekanntlich die Subnormalen-Spirale ein Kreis, daher t senkrecht auf OQ .

Da $QA \parallel OP$, so findet die Proportion statt

$$AR : PR = QR : OR.$$

Darin ist $PR = \frac{r(a^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}{a}$, $QR = \frac{a^2 + r^2}{a}$, $OR = \frac{r^2}{a}$, daher

$$AR = \frac{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{ar}$$

und mittelst 2)

$$PD = \frac{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2}$$

und 1)

$$x = \frac{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2 + r^2},$$

die bekannte Formel für den Krümmungshalbmesser der Neoide.

2. Der Krümmungsmittelpunkt der hyperbolischen Spirale.

Die Polarsubnormale derselben ist, wie sich leicht mittelst ähnlicher Dreiecke zeigen lässt, $\frac{r^2}{a} = \frac{a}{\varphi^2}$. Bezeichnet man dieselbe mit ρ , so lautet die Gleichung der Subnormalen-Spirale:

$$\rho = \frac{a}{\varphi^2}.$$

Zur Ermittlung ihrer Tangente t wird ihre Polarsubtangente mittelst Fig. 2 berechnet.

Es sei Fig 2 O der Pol, P irgend ein Punkt dieser Spirale. Für den unendlich nahen Punkt P' derselben ist der Leitstrahl $OP' = \rho_1$ kleiner als $OP = \rho$, weil vermöge der Gleichung der Leitstrahl mit wachsendem Winkel φ abnimmt. Die Verbindungslinie PP' ist die verlangte Tangente t , und wenn OA senkrecht steht auf OP , so ist OA die Polarsubtangente.

Fig. 2.

Beschreibt man mit ρ_1 den Kreisbogen $P'B$, so kann man diesen als gerade und parallel zu OA betrachten, weshalb die Proportion stattfindet:

$$OA : P'B = OP : BP,$$

worin $P'B = \rho_1 (\varphi_1 - \varphi)$, $OP = \rho$ und $BP = \rho - \rho_1$.

Ersetzt man überall die Leitstrahlen durch die Winkel, so erhält man nach gehöriger Reduction

$$OB = \frac{a}{2\varphi}.$$

$\frac{a}{\varphi}$ ist aber der Leitstrahl der hyperbolischen Spirale, daher geht die Tangente ihrer Subnormalen-Spirale durch den Mittelpunkt des Leitstrahles. Die Tangente t wird daher in Fig. 1 dadurch gefunden, dass man OP in E halbiert, und E mit Q verbindet.

Um aus dieser Figur AR (siehe Gleichung 2) zu berechnen, fälle man von A auf QR die Senkrechte AF , bezeichne dieselbe

mit y , FQ mit z und OR mit m . Dann ist $OQ = \frac{r^2}{m}$, $QR = \frac{m^2 + r^2}{m}$ und weil $AF \parallel OP$

$$y : z = \frac{r}{2} : \frac{r^2}{m}$$

$$y : \left(\frac{m^2 + r^2}{m} - z \right) = r : m.$$

Aus diesen Proportionen folgt:

$$y = \frac{r(m^2 + r^2)}{m^2 + 2r^2}$$

$$z = \frac{2r^2(m^2 + r^2)}{m(m^2 + 2r^2)}$$

und endlich

$$AR = \sqrt{y^2 + z^2} = \frac{(m^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{m^2 + 2r^2}.$$

Anmerkung. In Fig. 1 ist $AP = PR - AR = \frac{r^2(m^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}{m^2 + 2r^2}$, daher $AR : AP = (m^2 + r^2) : r^2 = PR^2 : OP^2$, d. h.: Verbindet man die Mitte der Hypotenusenhöhe mit einer spitzen Ecke des rechtwinkligen Dreieckes, so entstehen auf der gegenüberliegenden Kathete zwei Abschnitte, die sich wie das Quadrat über der Kathete zum Quadrat über der Hypotenuse verhalten.

Setzt man den gefundenen Wert für AR in die Gleichung (1), so erhält man, da $PQ = \frac{r}{a}(a^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}$ und $m = a$ ist:

$$x = r \left(\frac{a^2 + r^2}{a^2} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

3. Der Krümmungsmittelpunkt der parabolischen Spirale.

Die Polarsubnormale derselben ist $\frac{a^2}{2r} = \frac{a}{2V\varphi}$, daher die Gleichung ihrer Subnormalen-Spirale:

$$\rho = \frac{a}{2V\varphi}.$$

Da mit wachsendem φ der Leitstrahl ρ abnimmt, so kann zur Berechnung der Polarsubtangente dieser Curve auch Fig. 2 benützt werden. Aus dieser folgt in ähnlicher Weise wie früher:

$$OB = \frac{a(V\varphi_1 + V\varphi)}{2} = aV\varphi.$$

Aus der Gleichung der parabolischen Spirale folgt aber $V\varphi = \frac{r}{a}$, daher $OB = r$, d. h.: Die Subtangente der Subnormalen-

und wenn man Zähler und Nenner durch $\varphi_1 - \varphi$ dividiert:

$$OB = \frac{a}{2 \left(V_{\varphi_1} + \frac{\varphi(V_{\varphi_1} - V_{\varphi})}{\varphi_1 - \varphi} \right)} = \frac{a}{2 \left(V_{\varphi_1} + \frac{\varphi}{V_{\varphi_1} + V_{\varphi}} \right)}$$

und, wenn man $\varphi_1 = \varphi$ setzt

$$OB = \frac{a}{3 V_{\varphi}}.$$

Da aber der Leitstrahl der reciproken, parabolischen Spirale gleich ist $\frac{a}{V_{\varphi}}$, so ist auch

$$OB = \frac{r}{3}.$$

Die Polarsubtangente der Subnormalenspirale der reciproken parabolischen Spirale ist demnach $\frac{1}{3}$ vom Leitstrahl der letzteren, und, wie man sich leicht überzeugt, auf demselben selbst gelegen. Man kann daher zur Berechnung des Krümmungshalbmessers Fig. 1 benützen, wenn man sich vorstellt, dass OE ein Drittel von OP ist.

Für die vorliegende Spirale ist

$$OR = \frac{2a^2}{r}, PQ = \frac{r(4a^4 + r^4)^{\frac{1}{2}}}{2a^2},$$

und, wie sich leicht berechnen lässt

$$AR = \frac{(4a^4 + r^4)^{\frac{3}{2}}}{r(4a^4 + 3r^4)},$$

demnach mittelst (2)

$$PD = \frac{r(4a^4 + r^4)^{\frac{3}{2}}}{2a^2(4a^4 + 3r^4)}$$

und mittelst (1)

$$x = \frac{r(4a^4 + r^4)^{\frac{3}{2}}}{2a^2(4a^4 - r^4)}$$

und, wenn man die Normale PQ mit N bezeichnet:

$$x = \frac{4a^4 N^3}{r^2(4a^4 - r^4)}.$$