12.

Beweis des im zweiten Bande dieses Journals Seite 190. von Herrn Steiner aufgestellten Lehrsatzes No. 27. und Ableitung anderer ebenso einfacher Relationen.

(Von Herrn Professor C. Gudermann in Cleve.)

No. 1.

Wenn zwei feste Kreise, deren Mittelpunkte m und M und deren Radien r und R sein mögen, von einem dritten, der Lage und Größe nach veränderlichen Kreise, dessen Mittelpunkt μ und dessen Radius ϱ sein mag, (auf der Oberfläche einer Kugel) berührt werden, und man die drei Mittelpunkte durch Bogen von Hauptkreisen verbindet, so ist offenbar

$$m\mu = r \pm \varrho \quad \text{und} \quad M\mu = R \pm \varrho,$$

und das Zeichen $+$ zeigt dann äußerliche, das Zeichen $-$ innerliche Berührung an.

Werden die beiden Kreise um m und M vom Kreise um μ gleichartig berührt, so ist demnach

$$M\mu - m\mu = R - r,$$

und ist die Berührung ungleichartig, so ist $M\mu + m\mu = R + r$; daher ist der Ort des Mittelpunktes μ in beiden Fällen ein sphärischer Kegelschnitt, der die festen Mittelpunkte M und m zu Brennpunkten hat; die Excentricität ist also $= \frac{Mm}{2}$; die eine Axe des

Kegelschnitts ist aber $\frac{R+r}{2}$, und aus diesen beiden Bestimmungen können bekanntlich die zweite Axe und die beiden Parameter hergeleitet werden. Man kann daher einen sphärischen Kegelschnitt erklären als eine Linie auf der Kugel, in der jeder Punkt von zwei festen Kreislinien gleichweit entfernt ist. Das vorhin Gesagte gilt mit geringer Abänderung auch dann noch, wenn einer der beiden festen Kreise sich auf einen Punkt reducirt, und sein Radius also $= 0$ ist.

Wir nehmen jetzt mit Hrn. Steiner an, daß sich die beiden festen Kreise selbst berühren, und zwar um einen bestimmten Fall zum Grunde zu legen, innerlich; der Berührungspunkt heiße A ; er liegt mit m und M

in einem Hauptkreise und es ist nun die Excentricität des Kegelschnitts offenbar

$$\frac{Mm}{2} = \frac{R-r}{2} = e.$$

Der eben erwähnte Hauptkreis werde vom Kreise um m in B und vom Kreise um M in C geschnitten und es ist $BC = 2(R-r)$. Die Ellipse oder die Ortscurve des Mittelpunctes μ geht nun durch den Punct A und durch die Mitte von BC , welche D heißen mag, und ihre große Halbaxe ist

$$a = \frac{AD}{2} = \frac{R+r}{2}.$$

Wird die kleine Halbaxe mit b bezeichnet und der Parameter der großen Axe mit p , so ist bekanntlich $\cos b = \frac{\cos a}{\cos e}$ und also $\cos b = \frac{\cos \frac{R+r}{2}}{\cos \frac{R-r}{2}}$.

Diese Formel läßt sich umformen in:

$$\tan \frac{b}{2} = \sqrt{\left(\tan \frac{R}{2} \cdot \tan \frac{r}{2}\right)}.$$

Für den Parameter p findet man die Formel $\tan p = \frac{2 \sin R \sin r}{\sin(R+r)}$, woraus man zieht

$$\cot p = \frac{\cot r + \cot R}{2}.$$

Wenn man also zu den drei Puncten A , m , M den vierten harmonischen Theilpunct zwischen m und M bestimmt, so ist er der Mittelpunct des Krümmungskreises der Ellipse für den Scheitel A ihrer großen Axe und sein sphärischer Abstand von A ist also $= p$.

No. 2.

Da m und M die Brennpuncte der Ellipse und μ ein Punct derselben ist, so sind $m\mu$ und $M\mu$ die Leitstrahlen, und indem wir $m\mu = V$, $M\mu = W$, ferner den Winkel $\mu m C = v$ und $\mu M C = w$ setzen, haben wir die Formeln:

$$\tan V = \frac{\tan p}{1 - \frac{\sin 2e}{\sin 2a} \cos v} \quad \text{und} \quad \tan W = \frac{\tan p}{1 + \frac{\sin 2e}{\sin 2a} \cos w}$$

(nach §. 73. meines Grundrisses der analyt. Sphärik), welche sich, wenn $\tan p = \frac{\cos e^2 - \cos a^2}{\sin a \cos a}$ substituirt wird, umformen lassen in:

$$\cot V = \cot(a-e) \sin \frac{v^2}{2} + \cot(a+e) \cos \frac{v^2}{2}, \text{ und}$$

$$\cot W = \cot(a-e) \cos \frac{w^2}{2} + \cot(a+e) \sin \frac{w^2}{2}.$$

Im vorliegenden Falle haben wir also;

$$\cot(r+\varphi) = \cot r \sin \frac{v^2}{2} + \cot R \cos \frac{v^2}{2}, \text{ und}$$

$$\cot(R-\varphi) = \cot r \cos \frac{w^2}{2} + \cot R \sin \frac{w^2}{2},$$

da der Kreis um μ den Kreis um m äußerlich, und den Kreis um M innerlich berühren soll. Aus diesen Gleichungen zieht man

$$\text{tang} \frac{v^2}{2} = \frac{\cot(r+\varphi) - \cot R}{\cot r - \cot(r+\varphi)} = \frac{\sin(R-r-\varphi)}{\sin \varphi} \cdot \frac{\sin r}{\sin R}, \text{ und}$$

$$\text{tang} \frac{w^2}{2} = \frac{\cot r - \cot(R-\varphi)}{\cot(R-\varphi) - \cot R} = \frac{\sin(R-r-\varphi)}{\sin \varphi} \cdot \frac{\sin R}{\sin r}.$$

Also ist

$$\text{tang} \frac{v}{2} \cdot \text{tang} \frac{w}{2} = \frac{\sin(R-r-\varphi)}{\sin \varphi}, \text{ und} \quad \frac{\text{tang} \frac{v}{2}}{\text{tang} \frac{w}{2}} = \frac{\sin r}{\sin R}.$$

No. 3.

Die vorhergehenden Entwicklungen haben kaum Bezug auf den Beweis des Lehrsatzes, wozu wir jetzt übergehen; aber sie dienen später bei der Herleitung anderer Gesetze. Füllen wir vom Centrum μ auf den Hauptkreis AC ein Perpendikel oder eine Ordinate $= \beta$, und setzen wir die vom Anfangspunkte A an gerechnete zugehörige Abscisse $= \alpha$, so ist offenbar:

$\cos(r+\varphi) = \cos \beta \cos(r-\alpha)$ und $\cos(R-\varphi) = \cos \beta \cos(R-\alpha)$,
und aus diesen beiden Gleichungen zieht man leicht die Ausdrücke:

$$\sin \varphi = \frac{\cos r \cos(R-\alpha) - \cos R \cos(r-\alpha)}{\sin(R+r)} \cdot \cos \beta,$$

$$\cos \varphi = \frac{\sin r \cos(R-\alpha) + \sin R \cos(r-\alpha)}{\sin(R+r)} \cdot \cos \beta,$$

welche sich durch Entwicklung reduciren auf

$$\sin \varphi = \frac{\sin(R-r)}{\sin(R+r)} \sin \alpha \cos \beta, \text{ und}$$

$$\cos \varphi - \cos \alpha \cos \beta = \frac{2 \sin R \sin r}{\sin(R+r)} \sin \alpha \cos \beta.$$

Nehmen wir jetzt noch einen zweiten Kreis an, welcher die beiden Kreise um m und M berührt, so liegt sein Mittelpunkt μ' ebenfalls

im Umfange der Ellipse $A\mu D$; die Coordinaten des Punctes μ' seien α' und β' und der Radius dieses Kreises sei ϱ' ; dann ist auch

$$\sin \varrho' = \frac{\sin(R-r)}{\sin(R+r)} \sin \alpha' \cos \beta', \text{ und}$$

$$\cos \varrho' - \cos \alpha' \cos \beta' = \frac{2 \sin R \sin r}{\sin(R+r)} \sin \alpha' \cos \beta';$$

und werden diese Gleichungen mit den vorigen zur Elimination von R und r verbunden, so hat man

$$\frac{\sin \varrho}{\sin \alpha \cos \beta} = \frac{\sin \varrho'}{\sin \alpha' \cos \beta'}, \text{ und } \frac{\cos \varrho - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \cos \beta} = \frac{\cos \varrho' - \cos \alpha' \cos \beta'}{\sin \alpha' \cos \beta'}.$$

Wird die zweite Gleichung durch die erste dividirt, so erhält man nach einer leichten Umformung:

$$\sin(\varrho - \varrho') = \sin \varrho \cos \alpha' \cos \beta' - \sin \varrho' \cos \alpha \cos \beta,$$

und wird diese weiter mit der ersten combinirt, so erhält man die beiden Formeln:

$$\sin \alpha \sin(\varrho - \varrho') = \sin \varrho \cos \beta \sin(\alpha - \alpha'),$$

$$\cos \alpha \sin(\varrho - \varrho') = \sin \varrho \cos \beta' \cos(\alpha - \alpha') - \sin \varrho' \cos \beta.$$

Werden sie quadriert und dann addirt, so erhält man:

$$\sin(\varrho - \varrho')^2 = \sin^2 \varrho \cos^2 \beta'^2 - 2 \sin \varrho \sin \varrho' \cos \beta \cos \beta' \cos(\alpha - \alpha') + \sin^2 \varrho' \cos^2 \beta.$$

Sollen nun die beiden Kreise (μ) und (μ') nicht nur die Kreise (m) und (M') berühren, sondern sich außerdem selbst berühren (äusserlich), so muß die Entfernung ihrer Mittelpuncte von einander $\mu\mu' = \varrho + \varrho'$ sein, oder also:

$$\cos(\varrho + \varrho') = \sin \beta \sin \beta' + \cos \beta \cos \beta' \cos(\alpha - \alpha').$$

Wird aber in der vorigen Gleichung der Werth $\cos \beta \cos \beta' \cos(\alpha - \alpha') = \cos(\varrho + \varrho') - \sin \beta \sin \beta'$ substituirt, so erhält man nach einiger Reduction die Gleichung:

$$(\sin \varrho \sin \beta' - \sin \varrho' \sin \beta)^2 = 4 \sin^2 \varrho \sin^2 \beta',$$

und also, wenn die Quadratwurzel ausgezogen wird,

$$\frac{\sin \beta'}{\sin \varrho'} = \frac{\sin \beta}{\sin \varrho} \pm 2,$$

welches die Formel des Hrn. Steiner ist. Über die vorkommende Zweideutigkeit kann leicht entschieden werden. Wenn der Kreis (μ') dem Puncte A näher als der Kreis (μ) ist, so ist die Formel:

$$\frac{\sin \beta'}{\sin \varrho'} = \frac{\sin \beta}{\sin \varrho} + 2.$$

No. 4.

Wir leiten aber noch eine Gleichung her, welche das Gesetz der Succession der Kreise (μ) und (μ') auf eine fast noch einfachere Weise ausdrückt. Ziehen wir den Leitstrahl $m\mu = r + \rho$ und setzen wir wieder den Winkel $\mu m C = v$, so ist offenbar

$$\sin(r + \rho) \sin v = \sin \beta,$$

und wird diese Gleichung mit der Gleichung

$$\cot(r + \rho) = \cot r \sin \frac{v^2}{2} + \cot R \cos \frac{v^2}{2}$$

multiplicirt, so erhalten wir die zweite Formel

$$\cos(r + \rho) \sin v = \left(\cot r \sin \frac{v^2}{2} + \cot R \cos \frac{v^2}{2} \right) \sin \beta,$$

und aus ihnen zieht man nun leicht den folgenden Ausdruck:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \rho} = \frac{2 \sin R}{\sin(R - r)} \tan \frac{v}{2}.$$

Ziehen wir nun auch noch den Leitstrahl $m\mu'$ und setzen wir den Winkel $\mu m C = v'$, so ist ebenso

$$\frac{\sin \beta'}{\sin \rho'} = \frac{2 \sin R}{\sin(R - r)} \tan \frac{v'}{2};$$

und werden diese Ausdrücke in der Gleichung $\frac{\sin \beta'}{\sin \rho'} = \frac{\sin \beta}{\sin \rho} + 2$ substituirt, so verwandelt sie sich in die folgende:

$$\tan \frac{v'}{2} = \tan \frac{v}{2} + \frac{\sin(R - r)}{\sin R}.$$

[Die analoge Formel der Planimetrie ist $\tan \frac{v'}{2} = \tan \frac{v}{2} + \frac{R - r}{R}$ und scheint ebenfalls neu zu sein.] Wir hätten diese Formel auch auf eine ursprüngliche Weise, und aus ihr dann die Formel des Hrn. Steiner herleiten können.

Nehmen wir nun eine Reihe von Kreisen, deren Mittelpunkte $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_x$ sein mögen, an, wovon jeder den auf ihn folgenden und zugleich die beiden Kreise (m) und (M) berührt, so liegen ihre Mittelpunkte der Reihe nach im Umfange der Ellipse, von D nach A hin gerechnet, vertheilt, und der elliptische Bogen $\mu_1 \mu_2 \dots \mu_x$ wird dadurch in x Theile getheilt, dergestalt, daß die Winkel $\mu_1 m C = v$, $\mu_1 \mu_2 m C = v_1$, $\mu_2 \mu_3 m C = v_2$, $\mu_3 \mu_4 m C = v_3$, $\dots$, $\mu_{x-1} \mu_x m C = v_{x-1}$ das durch die folgenden Formeln ausgedrückte Gesetz befolgen:

$$\begin{aligned}\operatorname{tang} \frac{1}{2} v &= \operatorname{tang} \frac{v}{2} + \frac{\sin(R-r)}{\sin R}, \\ \operatorname{tang} \frac{2}{2} v &= \operatorname{tang} \frac{1}{2} v + \frac{\sin(R-r)}{\sin R}, \\ \operatorname{tang} \frac{3}{2} v &= \operatorname{tang} \frac{2}{2} v + \frac{\sin(R-r)}{\sin R}, \\ &\dots \dots \dots \\ \operatorname{tang} \frac{x}{2} v &= \operatorname{tang} \frac{x-1}{2} v + \frac{\sin(R-r)}{\sin R}.\end{aligned}$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhält man also:

$$\operatorname{tang} \frac{x}{2} v = \operatorname{tang} \frac{1}{2} v + x \cdot \frac{\sin(R-r)}{\sin R},$$

Die Größen $\operatorname{tang} \frac{v}{2}$, $\operatorname{tang} \frac{2}{2} v$, $\operatorname{tang} \frac{3}{2} v$, u. s. w. bilden also eine arithmetische Progression, welche ins Unendliche fortgesetzt werden kann; dabei werden aber die Winkel $\overset{1}{v} - \overset{2}{v}$, $\overset{2}{v} - \overset{3}{v}$, $\overset{3}{v} - \overset{4}{v}$, $\overset{4}{v} - \overset{5}{v}$, u. s. w. immer kleiner und kleiner, je weiter man auf dem Umfange der Ellipse fortrückt, und also dem Scheitel A nahe kommt; gleichzeitig werden auch die elliptischen Bogen $\overset{1}{\mu\mu}$, $\overset{2}{\mu\mu}$, $\overset{3}{\mu\mu}$, $\overset{4}{\mu\mu}$, u. s. w. und auch die Radien $\overset{1}{\xi}$, $\overset{2}{\xi}$, $\overset{3}{\xi}$, $\overset{4}{\xi}$, $\overset{5}{\xi}$, $\dots \dots \overset{x}{\xi}$ immer kleiner und kleiner bis ins Unendliche.

Zieht man aus dem anderen Brennpunkte M die Leitstrahlen $M\mu$, $M\overset{1}{\mu}$, $M\overset{2}{\mu}$, $\dots \dots M\overset{x}{\mu}$, und setzt man die Winkel $\mu MC = w$, $\overset{1}{\mu} MC = \overset{1}{w}$, $\overset{2}{\mu} MC = \overset{2}{w}$, $\dots \dots \overset{x}{\mu} MC = \overset{x}{w}$, so hat man nach No. 2.

$\operatorname{tang} \frac{v}{2} = \frac{\sin r}{\sin R} \operatorname{tang} \frac{w}{2}$, $\operatorname{tang} \frac{2}{2} v = \frac{\sin r}{\sin R} \operatorname{tang} \frac{1}{2} w$, $\dots \dots \operatorname{tang} \frac{x}{2} v = \frac{\sin r}{\sin R} \operatorname{tang} \frac{x}{2} w$, und werden diese Werthe substituirt, so erhält man auf der Stelle die Formeln

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} w = \operatorname{tang} \frac{w}{2} + \frac{\sin(R-r)}{\sin r} \quad \text{und} \quad \operatorname{tang} \frac{x}{2} w = \operatorname{tang} \frac{w}{2} + x \cdot \frac{\sin(R-r)}{\sin r}.$$

No. 5.

Wir können jetzt noch weiter gehen und eine Formel herleiten zum Ausdrucke des Gesetzes, nach welchem die Radien $\overset{1}{\xi}$, $\overset{2}{\xi}$, $\overset{3}{\xi}$, $\overset{4}{\xi}$, $\dots \dots \overset{x}{\xi}$

der Kreise um μ , μ^1 , μ^2 , u. s. w. fortgehen. Da nemlich nach No. 2.

$$\operatorname{tang} \frac{v}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sin(R-r-\varrho)}{\sin \varrho}\right)} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sin R}{\sin r}\right)},$$

$$\operatorname{tang} \frac{v^1}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sin(R-r-\varrho^1)}{\sin \varrho^1}\right)} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sin R}{\sin r}\right)}, \text{ und}$$

$$\operatorname{tang} \frac{v^x}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sin(R-r-\varrho^x)}{\sin \varrho^x}\right)} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sin R}{\sin r}\right)}$$

ist, so erhält man durch Substitution dieser Werthe die Gleichung

$$\sqrt{\left(\frac{\sin(R-r-\varrho^1)}{\sin \varrho^1}\right)} = \sqrt{\left(\frac{\sin(R-r-\varrho)}{\sin \varrho}\right)} + \frac{\sin(R-r)}{\sqrt{(\sin R \cdot \sin r)}},$$

und diese Gleichung läßt sich umformen in die folgende

$$\sqrt{[\cot \varrho^1 - \cot(R-r)]} = \sqrt{[\cot \varrho - \cot(R-r)]} + \sqrt{[\cot r - \cot R]};$$

ganz eben so erhält man auch noch die Gleichung

$$\sqrt{[\cot \varrho^x - \cot(R-r)]} = \sqrt{[\cot \varrho - \cot(R-r)]} + x \sqrt{[\cot r - \cot R]}.$$

Diese Formel läßt sich unter folgende Form bringen:

$$\cot \varrho^x = \cot \varrho + 2x \sqrt{[(\cot r - \cot R) \cot \varrho - \cot R \cot r - 1]} + x^2 (\cot r - \cot R).$$

Ein besonderer Fall darf hier nicht übergangen werden. Wenn nemlich der Mittelpunkt μ in AC und also in D angenommen wird, so ist $v = w = 0$ und $\varrho = R - r$; also hat man in diesem Falle

$$\operatorname{tang} \frac{x}{2} v = x \cdot \frac{\sin(R-r)}{\sin R},$$

$$\operatorname{tang} \frac{x}{2} w = x \cdot \frac{\sin(R-r)}{\sin r}, \text{ und}$$

$$\cot \varrho^x = \cot(R-r) + x^2 (\cot r - \cot R).$$

Die Formel $\frac{\sin \beta^1}{\sin \varrho^1} = \frac{\sin \beta}{\sin \varrho} + 2$ und die allgemeinere $\frac{\sin \beta^x}{\sin \varrho^x} = \frac{\sin \beta}{\sin \varrho} + 2x$

reduciren sich auf $\sin \beta^1 = 2 \sin \varrho^1$ und $\sin \beta^x = x \cdot \sin \varrho^x$, weil nun $\beta = 0$ ist.

Ein bemerkenswerther anderer Fall ist der, wenn $\beta = \varrho$ ist und also der Kreis um μ den Hauptkreis $ABDC$ ebenfalls berührt. Es ist nun

$$\operatorname{tang} \frac{v}{2} = \frac{\sin(R-r)}{2 \sin R} \text{ und also}$$

$$\sin \beta^x = (2x + 1) \sin \varrho^x,$$

$$\operatorname{tang} \frac{x}{2} v = (x + \frac{1}{2}) \cdot \frac{\sin(R-r)}{\sin R} = (2x+1) \cdot \operatorname{tang} \frac{v}{2},$$

$$\operatorname{tang} \frac{x}{2} w = (x + \frac{1}{2}) \cdot \frac{\sin(R-r)}{\sin r} = (2x+1) \cdot \operatorname{tang} \frac{w}{2}.$$

Der Werth von φ findet sich nun aus der Gleichung

$$\operatorname{tang} \frac{v}{2} = \frac{\sin(R-r)}{2 \sin R} = \sqrt{\left(\frac{\sin(R-r-\varphi)}{\sin \varphi}\right)} \sqrt{\left(\frac{\sin R}{\sin r}\right)},$$

woraus man zieht

$$\frac{\sqrt{(\cot r - \cot R)}}{2} = \sqrt{(\cot \varphi - \cot(R-r))} \cdot \frac{\sin R}{\sin r},$$

und es ist also

$$\cot \varphi = \cot(R-r) + \left(\frac{\sin r + 2x \sin R}{2 \sin R}\right)^2 \cdot (\cot r - \cot R).$$

No. 6.

Die Formel

$$\sqrt{[\cot \varphi - \cot(R-r)]} = \sqrt{[\cot \varphi - \cot(R-r)]} + \sqrt{[\cot r - \cot R]}$$

drückt einen Zusammenhang unter den Radien φ , φ' , r , R von vier Kreisen aus, wovon die drei ersten Kreise einander äußerlich berühren, und im Inneren des letzten Kreises, der einen jeden von ihnen berührt, enthalten sind. Man kann nun die drei ersten Kreise oder vielmehr ihre Radien als gegeben betrachten und daraus den Radius R des sie einschließenden Berührungskreises herleiten. Setzen wir zur Abkürzung

$$\cot \varphi = \alpha, \cot \varphi' = \beta, \cot r = \gamma \text{ und } \cot R = x,$$

so ist

$$\cot(R-r) = \frac{\gamma x + 1}{\gamma - x},$$

und

$$\cot \varphi - \cot(R-r) = \frac{\alpha \gamma - \alpha x - \gamma x - 1}{\gamma - x}.$$

Erhebt man aber die oben stehende Gleichung zum Quadrate, so findet man

$$\cot \varphi - \cot \varphi' - \cot r + \cot R = 2\sqrt{[\cot \varphi - \cot(R-r)]} \cdot \sqrt{(\cot r - \cot R)},$$

oder einfacher

$$\beta - \alpha - \gamma + x = 2\sqrt{(\alpha \gamma - \alpha x - \gamma x - 1)}.$$

Wird diese Gleichung in Hinsicht auf x aufgelöst, so erhält man

$$x = -(\alpha + \beta + \gamma) \pm 2\sqrt{(\alpha \beta + \alpha \gamma + \beta \gamma - 1)}.$$

Die eine Wurzel ist $\cot R$ selbst, die andere aber ist die negative Cotangente des Radius R' eines Kreises, welcher kleiner als der vorige Kreis ist, und die drei gegebenen Kreise äußerlich berührt; also ist

$$\cot R = -(\alpha + \beta + \gamma) + 2\sqrt{(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - 1)} \quad \text{und}$$

$$\cot R' = \alpha + \beta + \gamma + 2\sqrt{(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - 1)}.$$

Setzt man im analogen Falle der Planimetrie $\alpha = \frac{1}{\xi'}$, $\beta = \frac{1}{\xi}$, $\gamma = \frac{1}{r}$, so findet man:

$$\frac{1}{R} = -(\alpha + \beta + \gamma) + 2\sqrt{(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)} \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{R'} = \alpha + \beta + \gamma + 2\sqrt{(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)},$$

welche Formeln nicht viel einfacher sind als die vorigen, und mit den von Herrn Steiner im ersten Bande (Seite 274.) dieses Journals für die Planimetrie hergeleiteten Formeln übereinstimmen.

Wenn wir nun die frühere Annahme, daß sich die beiden Kreise um m und M innerlich berühren, aufheben, und dagegen annehmen, daß sie sich auf ihrer convexen Seite berühren, so lassen sich ähnliche Entwicklungen machen, worauf wir hier aber der Kürze wegen nicht weiter eingehen.

Im März 1831.