6.

Aufstufungen der einfachen Functionen.

(Von dem Herrn Prof. Oettinger zu Heidelberg.)

§. 1.

Eine Reihe von Functionen, die unter einander unabhängig sein oder auch in einem Zusammenhange stehen können, werden auf die bekannte Weise bezeichnet:

$$\dots X_{-3}, X_{-2}, X_{-1}, X_0, X_1, X_2, X_3, \dots$$

Die Function X_0 , deren Stellenzahl 0 ist, heiße das Mittelglied. Die Glieder auf seiner Rechten unterscheiden sich von denen auf der Linken dadurch, daß jene positive, diese negative Stellenzahlen haben. Diese Eigenschaft bestimmt für den Fall, wo ein gemeinschaftliches Bildungsgesetz unter den Gliedern der Reihe angenommen wird, die Verschiedenheit der Ableitungsweise. Die vorgelegte Reihe ist der Annahme nach unbeschränkt oder unendlich; sie kann aber nach Willkür beschränkt oder endlich angenommen werden.

Die Differenzen-Rechnung hat die Glieder dieser Grundreihe weiter untersucht, und gezeigt, welche wichtige Folgerungen sich an eine leitende Grundidee knüpfen lassen. Die Idee, welche dieser Rechnung zu Grunde liegt, ist einfach und besteht darin: daß sie zwei Nachbarglieder mit einander vergleicht, das frühere von dem spätern abzieht, und den Überschufs beider näher untersucht.

An diese Idee wollen wir folgende ähnliche knüpfen, und von einem vorhergehenden Gliede auf das nachfolgende übergehen und beide zusammen zählen, und ferner das nachfolgende vom vorhergehenden abziehen.

Das zuerst angedeutete Geschäft wollen wir durch das Wort Aufstufung, das zuletzt angedeutete durch Abstufung bezeichnen.

Die Differenzen-Rechnung hat das Grundgeschäft, worauf sie beruht, mit dem griechischen Buchstaben Δ bezeichnet; nach dieser Analogie soll das Geschäft des Aufstufens durch einen andern griechischen Buchstaben ζ und das des Abstufens durch ψ angedeutet werden.

Nach diesen Bemerkungen ergeben sich für die genannten drei Geschäfte, die wir an den Functionen der vorliegenden Reihe vornehmen

1. für das Geschäft des Aufstufens:

2. für das Geschäft des Unterschied - Nehmens:

3. für das Geschäft des Abstufens:

Die Functionen nun, die auf die genannte Art behandelt werden sollen, sollen mit dem allgemeinen Namen aufsteigende Functionen genannt werden.

Nachdem nun die Principien des Calculs festgestellt sind, so wenden wir uns zuerst zu der Betrachtung der aufstufenden Functionen, und suchen ihre Bildungs- und Ableitungs-Gesetze auf.

Aus dem unter 1. angegebenen Grundgesetze ergeben sich leicht folgende, die Ableitungsweise verdeutlichende Fälle:

.....

u. s. w.

$$\dots \zeta X_{-3}, \zeta X_{-2}, \zeta X_{-1}, \zeta X_0, \zeta X_1, \zeta X_2, \zeta X_3, \dots$$

.....

u. s. w.

Hierin wird unter $\zeta^2 = \zeta\zeta$ die Aufstufung von der Aufstufung, oder die zweite Aufstufung verstanden. Alle, auf die genannte Art gefundenen Glieder vereinigen sich zu folgender Reihe:

$$\dots \zeta^2 X_{-3}, \zeta^2 X_{-2}, \zeta^2 X_{-1}, \zeta^2 X_0, \zeta^2 X_1, \zeta^2 X_2, \zeta^2 X_3, \dots$$

die füglich zweite Aufstufungs-Reihe genannt werden mag. Setzen wir diese Ableitung weiter fort, so gelangen wir zur dritten, vierten u. s. w. Aufstufungs-Reihe, und dadurch zu folgender Darstellung:

$$4. \quad \left\{ \begin{array}{l} \dots X_{-2}, \quad X_{-1}, \quad X_0, \quad X_1, \quad X_2, \dots \\ \dots \zeta X_{-2}, \quad \zeta X_{-1}, \quad \zeta X_0, \quad \zeta X_1, \quad \zeta X_2, \dots \\ \dots \zeta^2 X_{-2}, \quad \zeta^2 X_{-1}, \quad \zeta^2 X_0, \quad \zeta^2 X_1, \quad \zeta^2 X_2, \dots \\ \dots \zeta^3 X_{-2}, \quad \zeta^3 X_{-1}, \quad \zeta^3 X_0, \quad \zeta^3 X_1, \quad \zeta^3 X_2, \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Man kann nun auch den umgekehrten Weg betreten, und von der 3ten auf die 2te, von dieser auf die erste Aufstufungsreihe, dann auf die Grundreihe übergehen, und es läßt sich leicht erkennen, daß man dadurch auf Reihen kömmt, die vor der Grundreihe liegen, bei denen die Stellenzahlen der Glieder, wie hier, unverändert bleiben, die Exponenten von ζ aber negativ werden und fallen. Die zunächst vor der Grundreihe liegende wird folgende Gestalt haben:

$$\dots \zeta^{-1} X_{-2}, \zeta^{-1} X_{-1}, \zeta^{-1} X_0, \zeta^{-1} X_1, \zeta^{-1} X_2, \dots$$

die dieser vorhergehende, folgende:

$$\dots \zeta^{-2} X_{-2}, \zeta^{-2} X_{-1}, \zeta^{-2} X_0, \zeta^{-2} X_1, \zeta^{-2} X_2, \dots$$

Die Fortsetzung dieser Ableitung führt zur folgender Zusammenstellung:

$$5. \quad \left\{ \begin{array}{l} \dots \zeta^{-3} X_{-2}, \quad \zeta^{-3} X_{-1}, \quad \zeta^{-3} X_0, \quad \zeta^{-3} X_1, \quad \zeta^{-3} X_2, \dots \\ \dots \zeta^{-2} X_{-2}, \quad \zeta^{-2} X_{-1}, \quad \zeta^{-2} X_0, \quad \zeta^{-2} X_1, \quad \zeta^{-2} X_2, \dots \\ \dots \zeta^{-1} X_{-2}, \quad \zeta^{-1} X_{-1}, \quad \zeta^{-1} X_0, \quad \zeta^{-1} X_1, \quad \zeta^{-1} X_2, \dots \\ \quad X_{-2}, \quad X_{-1}, \quad X_0, \quad X_1, \quad X_2, \dots \end{array} \right.$$

Das Gesetz für die Aufstufungen, welches beiden Darstellungen 4. und 5. zu Grunde liegt, stellt sich durch folgende Gleichungen allgemein dar:

$$6. \quad \zeta^m X_{\pm n} = \zeta^{m-1} X_{\pm n} + \zeta^{m-1} X_{\pm n+1}.$$

$$7. \quad \zeta^{-m} X_{\pm n} = \zeta^{-m-1} X_{\pm n} + \zeta^{-m-1} X_{\pm n+1}.$$

§. 3.

Wir gehen nun, nach der Feststellung der allgemeinen Grundzüge unseres Calculs, zu weiteren Folgerungen über, und stellen zuerst das Ge-

setz, wonach irgend ein Glied einer spätern Aufstufungs-Reihe aus den Gliedern der Grundreihe dargestellt wird, dar.

Setzt man zu dem Ende in (7.) $m=2$ und $+n=0$, so entsteht:

$$\zeta^2 X_0 = \zeta X_0 + \zeta X_1.$$

Stellt man ferner die ersten Aufstufungen ζX_0 und ζX_1 nach den Gleichungen des vorhergehenden §. durch die Glieder der Grundreihe dar, und ordnet sie nach den Stellenzahlen, so erhält man:

$$\begin{aligned} \zeta^2 X_0 &= X_0 + X_1 \\ &\quad X_1 + X_2, \end{aligned}$$

und hieraus durch Vereinigung:

$$8. \quad \zeta^2 X_0 = X_0 + 2X_1 + X_2.$$

Auf gleiche Weise stellt sich ein Glied der dritten Aufstufungsreihe aus denen der Grundreihe dar, denn wird in (6.) $m=3$ und $+n=0$ gesetzt, so wird

$$\zeta^3 X_0 = \zeta^2 X_0 + \zeta^2 X_1.$$

Entwickelt man den Ausdruck $\zeta^2 X_0$ und $\zeta^2 X_1$ nach der Gleichung (8.), letzteren dadurch, daß man die Stellenzahlen erhöht, und ordnet die erhaltenen Glieder nach den Stellenzahlen von X , so zieht man hieraus:

$$\begin{aligned} \zeta^3 X_0 &= X_0 + 2X_1 + X_2 \\ &\quad + X_1 + 2X_2 + X_3. \end{aligned}$$

Die Vereinigung dieser Glieder erzeugt:

$$9. \quad \zeta^3 X_0 = X_0 + 3X_1 + 3X_2 + X_3.$$

Eben so findet sich folgende Darstellung:

$$\zeta^4 X_0 = X_0 + 4X_1 + 6X_2 + 4X_3 + X_4 \text{ u. s. w.}$$

Man erkennt aus den behandelten Fällen leicht, daß das Übergangs-Gesetz bei allen Reihen gleich ist, und es wird daher allen Reihen, die gleich weit von einander entfernt liegen, ein gleiches Ableitungsgesetz zu Grunde liegen. Eben so erkennt man leicht, daß die Glieder der entwickelten Reihe mit Vorzahlen verbunden sind, die mit denen des Binomiums übereinstimmen müssen, da sie auf dieselbe Weise erzeugt werden. Das allgemeine Ableitungsgesetz läßt sich also so vorstellen:

$$10. \quad \zeta^m X_0 = X_0 + \frac{m}{1} X_1 + \frac{m(m-1)}{1.2} X_2 + \dots + \frac{m}{1} X_{m-1} + X_m.$$

Die Identität der entwickelten Reihe mit der Darstellung des Binomiums wäre vollkommen, wenn die Stellenzahlen von X als Exponenten erschienen. Zeigen wir diese Übertragung der Exponenten auf Stellenzahlen, um eine Übereinstimmung mit dem Binomium herbeizuführen, durch den

griechischen Buchstaben Θ an (cf. Differenzial-Calcul, Mainz bei S. Müller, Pag. 200 u. ff.), wonach also $\Theta^{m-r} X_0$ für X_{m-r} zu setzen ist, so geht die vorstehende Gleichung in folgende über:

$$11. \quad \zeta^m X_0 = X_0 + \frac{m}{1} \Theta^1 X_0 + \frac{m(m-1)}{1.2} \Theta^2 X_0 + \dots + \Theta^m X_0,$$

und diese, wenn X_0 , das mit jedem Gliede verbunden ist, ausgeschieden wird, in folgende:

$$\zeta^m X_0 = \left(1 + \frac{m}{1} \Theta + \frac{m(m-1)}{1.2} \Theta^2 + \dots + \Theta^m\right) X_0.$$

Hieraus geht eine ganz kurze Darstellung hervor, und es ist:

$$12. \quad \zeta^m X_0 = (1 + \Theta)^m X_0.$$

Berücksichtigen wir, daß die gemachten Schlüsse nicht allein von dem Mittelgliede der Reihen, X_0 , sondern von jedem andern Gliede gelten, so reihen sich hieran folgende Gleichungen:

$$13. \quad \zeta^m X_p = (1 + \Theta)^m X_p = X_p + \frac{m}{1} X_{p+1} + \frac{m(m-1)}{1.2} X_{p+2} \dots$$

und

$$14. \quad \zeta^m X_{-p} = (1 + \Theta)^m X_{-p} = X_{-p} + \frac{m}{1} X_{-p+1} + \frac{m(m-1)}{1.2} X_{-p+2} \dots$$

§. 4.

Auf das Zusammenfallen der so eben gewonnenen Entwicklungen mit den Gesetzen des Binomiums gründet sich der weitere Schluss, daß die Binomial-Gesetze mit ihren Veränderungen auch auf die Aufstufungen übertragen werden können. Soll daher ein Glied einer Reihe, die vor der Grundreihe liegt, durch Glieder der Grundreihe dargestellt werden, so ergiebt sich diese Darstellung unmittelbar, wenn wir in der Gleichung (12.) $-m$ statt m setzen, und $\Theta + 1$ der Anordnung $1 + \Theta$ vorziehen. Hiedurch gewinnen wir

$$15. \quad \zeta^{-m} X_0 = (1 + \Theta)^{-m} X_0 = (\Theta + 1)^{-m} X_0 \\ = X_{-m} - \frac{m}{1} X_{-m+1} + \frac{m(m+1)}{1.2} X_{-m+2} - \dots$$

Eben so folgt aus (13.) und (14.):

$$16. \quad \zeta^{-m} X_p = (\Theta + 1)^{-m} X_p = X_{p-m} - \frac{m}{1} X_{p-m+1} + \dots$$

$$17. \quad \zeta^{-m} X_{-p} = (\Theta + 1)^{-m} X_{-p} = X_{-p-m} - \frac{m}{1} X_{-p-m+1} + \dots$$

Diese Darstellungen lassen jedoch keine Einsicht in die Entwicklung selbst zu, daher theilen wir noch folgende andere mit, die uns Veranlassung zu mancherlei Anwendungen geben wird.

Setzt man nemlich in der Gleichung (6.) $m = 0$, und statt n allmählig die Werthe $-1, -2, -3, \dots$, so hat man vorerst:

$$X_{-1} = \zeta^{-1} X_{-1} + \zeta^{-1} X_0,$$

und durch Umstellung und gleiche Behandlung folgende:

$$\begin{aligned}\zeta^{-1} X_0 &= X_{-1} - \zeta^{-1} X_0, \\ -\zeta^{-1} X_{-1} &= -X_{-2} + \zeta^{-1} X_{-1}, \\ \zeta^{-1} X_{-2} &= X_{-3} - \zeta^{-1} X_{-2}, \\ -\zeta^{-1} X_{-3} &= -X_{-4} + \zeta^{-1} X_{-3}, \\ &\dots\end{aligned}$$

Die Substituierung der gefundenen Werthe verschafft die Möglichkeit, die Function $\zeta^{-1} X_0$ durch zwei, drei, vier u. s. w. Glieder der Grundreihe darzustellen, und man hat für die Darstellung durch zwei Glieder:

$$\zeta^{-1} X_0 = X_{-1} - X_{-2} + \zeta^{-1} X_{-3},$$

durch drei Glieder:

$$\zeta^{-1} X_0 = X_{-1} - X_{-2} + X_{-3} - \zeta^{-1} X_{-4},$$

durch vier Glieder:

$$\zeta^{-1} X_0 = X_{-1} - X_{-2} + X_{-3} - X_{-4} + \zeta^{-1} X_{-5},$$

und allgemein durch $(n+1)$ Glieder:

$$18. \quad \zeta^{-1} X_0 = X_{-1} - X_{-2} + X_{-3} - X_{-4} + \dots (-)^n X_{-n-1} (-)^{n+1} \zeta^{-1} X_{-n-1}.$$

Nehmen wir aber eine Substitution bis ins Unendliche an, so wird auch die Gliederanzahl unbeschränkt sein, und wir erhalten alsdann folgende Gleichung:

$$19. \quad \zeta^{-1} X_0 = X_{-1} - X_{-2} + X_{-3} - X_{-4} + \dots$$

Wir haben demnach zwei Darstellungsweisen für die Glieder der Reihe, welche der Grundreihe vorhergeht, gefunden, und zwar durch eine endliche und unendliche Gliederanzahl. Diese Eigenthümlichkeit der aufstufenden Functionen halten wir fest, und legen sie für weitere Entwicklungen zu Grund. Der Kürze wegen wollen wir die Functionen $\zeta^{-1} X_0, \zeta^{-1} X_1, \dots, \zeta^{-2} X_0$ u. s. w., zur Unterscheidung von $\zeta X_0, \zeta^2 X_0, \dots$, durch den Namen negative Aufstufungen bezeichnen.

Die entwickelte Darstellung der zweiten negativen Aufstufung gewinnt sich dadurch, daß man die Aufstufung von der ersten Aufstufung nimmt, oder, was diesem gleichkömmt, die Gleichungen (18.) und (19.) mit ζ^{-1} vervielfacht, und dann die einzelnen Glieder der Gleichung nach den in (18.) und (19.) gefundenen Vorschriften entwickelt. Suchen wir daher zuerst die Darstellung für eine endliche Glieder-Anzahl, so gewinnen wir

dadurch, daß wir die Glieder der Gleichung (18.) mit ζ^{-1} vervielfachen:
 $\zeta^{-2} X_0 = \zeta^{-1} X_{-1} - \zeta^{-1} X_{-2} + \zeta^{-1} X_{-3} - \dots (-)^n \zeta^{-1} X_{-n-1} (-)^{n+1} \zeta^{-2} X_{-n-1}$.
 Die Gleichung (18.) gilt für $(n+1)$ Glieder der Grundreihe. Damit nun auch hier eine Reihe von $(n+1)$ Gliedern der Grundreihe gewonnen werde, so muß das erste Glied auf der rechten Seite des Gleichheits-Zeichens $\zeta^{-1} X_{-1}$ nach (18.) so entwickelt werden, daß $(n+1)$ Glieder der Grundreihe vorkommen. Seine Stellenzahl aber ist um 1 niedriger als die von $\zeta^{-1} X_0$, daher müssen bei der Entwicklung von $\zeta^{-1} X_{-1}$ die Stellenzahlen sämtlich um 1 erniedrigt werden. Demzufolge erhalten wir:

$$\zeta^{-1} X_{-1} = X_{-1} - X_{-2} + X_{-3} - \dots (-)^n X_{-n-2} (-)^{n+1} \zeta^{-1} X_{-n-2}.$$

Wird das zweite Glied $-\zeta^{-1}X_{-2}$ auf gleiche Art entwickelt, so müssen die Stellenzahlen der Glieder in der entwickelten Reihe, der Übereinstimmung wegen, so weit herunter geführt werden, daß das letzte Glied unter folgender Gestalt X_{-n-2} erscheine. Hierzu werden nur n Glieder der Grundreihe nöthig sein, denn es ist

$$-\zeta^{-1} X_{-2} = -X_{-3} + X_{-4} - X_{-5} + \dots (-)^n X_{-n-2} (-)^{n+1} \zeta^{-1} X_{-n-2}.$$

Behalten wir die angegebene Entwicklungsweise bei, und berücksichtigen wir, daß die Entwicklung jedes spätern Gliedes ein Glied der Grundreihe weniger liefern wird, so entsteht durch Einführung der entwickelten Reihen und Ordnen nach den Stellenzahlen der Functionen:

$$\begin{aligned} \zeta^{-2} X_0 = & X_{-2} - X_{-3} + X_{-4} - X_{-5} \dots (-)^n X_{-n-2} (-)^{n+1} \zeta^{-1} X_{-n-2} (-)^{n+1} \zeta^{-2} X_{-n-1} \\ & - X_{-3} + X_{-4} - X_{-5} \dots (-)^n X_{-n-2} (-)^{n+1} \zeta^{-1} X_{-n-2} \\ & + X_{-4} - X_{-5} \dots (-)^n X_{-n-2} (-)^{n+1} \zeta^{-1} X_{-n-2} \\ & - X_{-5} \dots (-)^n X_{-n-2} (-)^{n+1} \zeta^{-1} X_{-n-2} \\ & \\ & (-)^n X_{-n-2} (-)^{n+1} \zeta^{-1} X_{-n-2}. \end{aligned}$$

Die Übereinstimmung der Glieder der entwickelten Reihen in verticaler Richtung macht ihre Vereinigung in eine einzige möglich. Berücksichtigt man, daß das erste Glied einmal, das zweite zweimal, das dritte dreimal u. s. w., das $(n + 1)$ te $(n + 1)$ mal vorkommt, so hat man:

$$20. \quad \zeta^{-2} X_0 = X_{-2} - 2X_{-3} + 3X_{-4} - \dots (-)^n (n+1) X_{-n-2} \\ (-)^{n+1} (n+1) \zeta^{-1} X_{-n-2} (-)^{n+1} \zeta^{-2} X_{-n-1}.$$

Leichter gewinnt man die Darstellung der zweiten negativen Aufstufung, durch eine unendliche Glieder-Anzahl der Grundreihe; denn die Grenzglieder, die bei der vorstehenden Ableitungsweise nöthig werden, fallen weg. Diese Bemerkung führt unmittelbar zu folgender Darstellung:

erhalten unmittelbar:

$$\zeta^{-3} X_0 = X_{-3} - \frac{2.3}{1.2} X_{-4} + \frac{3.4}{1.2} X_{-5} - \frac{4.5}{1.2} X_{-6} + \dots,$$

Der Gang für die Ableitung der höhern negativen Aufstufungen bewegt sich in denselben Grenzen, und bleibt für alle Fälle gleich. Das Bildungsgesetz, welches einer endlichen und unendlichen Gliederanzahl zu Grunde liegt, läßt sich in seiner Allgemeinheit aus den behandelten Fällen erkennen. In Worten es deutlich machen zu wollen, wäre zu weitläufig, daher mag es in folgender Gleichung vorgelegt werden:

$$\begin{aligned} 22. \quad \zeta^{-m} X_0 &= X_{-m} - \frac{2.3 \dots m}{1.2 \dots (m-1)} X_{-m-1} + \frac{3.4 \dots (m+1)}{1.2 \dots (m-1)} X_{-m-2} \dots \\ (-)^{n-1} \frac{n(n+1) \dots (n+m-2)}{1.2 \dots (m-1)} X_{-m-n+1} &(-)^n \frac{n(n+1) \dots (n+m-1)}{1.2 \dots (m-1)} X_{-m-n} \\ (-)^{n+1} \left[\frac{(n+1)(n+2) \dots (n+m-1)}{1.2 \dots (m-1)} \zeta^{-1} X_{-m-n} \right. &+ \frac{(n+1)(n+2) \dots (n+m-2)}{1.2 \dots (m-2)} \zeta^{-2} X_{-m-n+1} + \dots \\ &\left. + \frac{n+1}{1} \zeta^{-m+1} X_{-n-2} + \zeta^{-m} X_{-n-1} \right], \end{aligned}$$

oder in Zeichen:

$$\begin{aligned} 23. \quad \zeta^{-m} X_0 &= X_{-m} - \frac{2^{m-1}|1|}{1^{m-1}|1|} X_{-m-1} + \frac{3^{m-1}|1|}{1^{m-1}|1|} X_{-m-2} \dots (-)^n \frac{(n+1)^{m-1}|1|}{1^{m-1}|1|} X_{-m-n} \\ (-)^{n+1} \left[\frac{(n+1)^{m-1}|1|}{1^{m-1}|1|} \zeta^{-1} X_{-n-m} \right. &+ \frac{(n+1)^{m-2}|1|}{1^{m-1}|1|} \zeta^{-2} X_{-n-m+1} \dots + \frac{n+1}{1} \zeta^{-m+1} X_{-n-2} + \zeta^{-m} X_{-n-1} \end{aligned}$$

Für eine unendliche Gliederanzahl gilt folgende Darstellung:

$$24. \quad \zeta^{-m} X_0 = X_{-m} - \frac{2.3 \dots m}{1.2 \dots (m-1)} X_{-m-1} + \frac{3.4 \dots (m+1)}{1.2 \dots (m-1)} X_{-m-2} - \dots,$$

oder

$$25. \quad \zeta^{-m} X_0 = X_{-m} - \frac{2^{m-1}|1|}{1^{m-1}|1|} X_{-m-1} + \frac{3^{m-1}|1|}{1^{m-1}|1|} X_{-m-2} - \dots$$

Die Entwicklungen (24.) und (25.) fallen mit (15.) vollkommen zusammen, wenn man berücksichtigt, daß

$$\begin{aligned} \frac{m}{1} &= \frac{2^{m-1}|1|}{1^{m-1}|1|} = \frac{2.3.4 \dots (m-1).m}{1.2.3 \dots (m-1)}, \\ \frac{m(m+1)}{1.2} &= \frac{3^{m-1}|1|}{1^{m-1}|1|} = \frac{3.4.5 \dots (m-1).m(m+1)}{1.2.3 \dots (m-1)}, \\ \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} &= \frac{4^{m-1}|1|}{1^{m-1}|1|} = \frac{4.5.6 \dots (m-1).m(m+1)(m+2)}{1.2.3 \dots (m-1)} \end{aligned}$$

u. s. w. ist.

§. 5.

Wir wenden uns von der so eben beantworteten Frage zu der umgekehrten: Wie wird ein Glied der Grundreihe aus den Gliedern der Auf-

stufungs-Reihen abgeleitet? Zu dem Ende setzen wir in der Grundgleichung (6.) $m = 1$ und $n = 0$, und erhalten durch Umstellung

$$26. \quad X_1 = \zeta X_0 - X_0.$$

Diese Gleichung wird uns als Vorschrift für die Ableitungen dienen. Die Stelligenzahlen dieser Gleichung können, wie oben gezeigt wurde, nach Willkür erhöht werden. Erhöhen wir sie um 1, so ist

$$X_2 = \zeta X_1 - X_1.$$

Setzt man nun statt des ersten Gliedes ζX_1 auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens den Werth, den man durch Vervielfachen der Gleichung (26.) mit ζ erhält, also $\zeta X_1 = \zeta^2 X_0 - \zeta X_0$, und statt des zweiten Gliedes X_1 den Werth nach (26.) unmittelbar, so erhalten wir

$$\begin{aligned} X_2 &= \zeta^2 X_0 - \zeta X_0 \\ &\quad - \zeta X_0 + X_0, \end{aligned}$$

also

$$27. \quad X_2 = \zeta^2 X_0 - 2\zeta X_0 + X_0.$$

Erhöhen wir hierin die Stelligenzahlen, so entsteht:

$$X_3 = \zeta^3 X_0 - 2\zeta^2 X_0 + X_1.$$

Behandeln wir nun die Ausdrücke auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens auf die eben angegebene Weise nach (26.), so ist

$\zeta^2 X_1 = \zeta^3 X_0 - \zeta^2 X_0$, $\zeta X_1 = \zeta^2 X_0 - \zeta X_0$, und $X_1 = \zeta^{-1} X_0 - X_0$, also

$$\begin{aligned} X_3 &= \zeta^3 X_0 - \zeta^2 X_0 \\ &\quad - 2\zeta^2 X_0 + 2\zeta X_0 \\ &\quad + \zeta X_0 - X_0. \end{aligned}$$

Die Vereinigung dieser Glieder erzeugt:

$$X_3 = \zeta^3 X_0 - 3\zeta^2 X_0 + 3\zeta X_0 - X_0.$$

Das Ableitungsgesetz zeigt einen unveränderlichen Gang. Vorzahlen und Exponenten von ζ stimmen mit denen des Binomiums; es wird also allgemein:

$$28. \quad X_n = \zeta^n X_0 - \frac{n}{1} \zeta^{n-1} X_0 + \frac{n(n-1)}{1.2} \zeta^{n-2} X_0 - \dots (-)^n X_0$$

oder, wenn X_0 ausgeschieden wird:

$$29. \quad X_n = (\zeta - 1)^n X_0.$$

Auch hier gilt das nemliche Ableitungsgesetz für die Reihen, welche vor der Grundreihe liegen; eben so bei erhöhten oder erniedrigten Stelligenzahlen, und es wird

$$30. \quad X_{-n} = (\zeta - 1)^{-n} X_0 = \zeta^{-n} X_0 + \frac{n}{1} \zeta^{-n-1} X_0 + \frac{n(n+1)}{1.2} \zeta^{-n-2} X_0 + \dots$$

§. 6.

Wir haben bisher die Untersuchung der aufstufenden Functionen ganz im Allgemeinen gehalten und ihre Eigenthümlichkeiten weiter erforscht. Das Allgemeine gehört dem Gebiete der Speculation an. Das Concrete giebt Leben und Anschauung. Um nun Anwendungen machen zu können, müssen wir diese allgemeine Betrachtungsweise verlassen, und uns auf das Specielle beschränken. Wir nehmen deswegen an: die Glieder der Grundreihe in (4.) und (5.) stehen in einem solchen Zusammenhange, daß jedes nachfolgende Glied aus dem vorhergehenden auf gleiche Weise mittelst einer veränderlichen GröÙe abgeleitet werde. Bezeichnet man nun das Mittelglied, als die Function, aus der alle Glieder erwachsen, durch fx , die Zunahme der veränderlichen GröÙe mit Δx , so ziehen wir hieraus folgende Darstellung:

$$31. \quad f(x-2\Delta x), \quad f(x-\Delta x), \quad fx, \quad f(x+\Delta x), \quad f(x+2\Delta x) \dots$$

Die vorzüglichsten Functionen, welche die Analysis aufgefunden hat, sind: x^p , $x^{p\Delta x}$, a^x , $\log x$, $\sin x$, $\cos x$. Wenden wir nun das Gesagte auf die genannten Functionen an, so führen sie zu folgenden eigenthümlichen Grundreihen, und zwar:

für die Potenzialgrößen:

$$32. \quad x^p, \quad (x+\Delta x)^p, \quad (x+2\Delta x)^p, \quad (x+3\Delta x)^p, \dots$$

für die Facultäten:

$$33. \quad x^{p\Delta x}, \quad (x+\Delta x)^{p\Delta x}, \quad (x+2\Delta x)^{p\Delta x}, \dots$$

für die Exponentialgrößen:

$$34. \quad a^x, \quad a^{x+\Delta x}, \quad a^{x+2\Delta x}, \quad a^{x+3\Delta x}, \dots$$

für die Logarithmen:

$$35. \quad \log x, \quad \log(x+\Delta x), \quad \log(x+2\Delta x), \dots$$

für die Sinus:

$$36. \quad \sin x, \quad \sin(x+\Delta x), \quad \sin(x+2\Delta x), \dots$$

für die Cosinus:

$$37. \quad \cos x, \quad \cos(x+\Delta x), \quad \cos(x+2\Delta x), \dots$$

Einfachere Darstellungen ergeben sich noch, wenn $\Delta x = 1$ gesetzt wird.

Wir gehen nun zu den Darstellungen der Aufstufungen der Functionen selbst über. Sie zerfallen, ihrer Natur nach, in die positiven und negativen Aufstufungen. Die Grundgleichung, welche für die Darstellung der ersten positiven Aufstufung jeder einfachen Function gilt, ist:

$$38. \quad \zeta fx = fx + f(x+\Delta x).$$

Sie führt zu der allgemeinen Vorschrift: Man lasse, um die erste Aufstufung einer Function zu erhalten, die veränderliche Gröfse einer Function um Δx wachsen, und zähle die ursprüngliche Function zu.

I. Darstellung der Aufstufungen der einfachen Functionen, wenn die Zunahme Δx eine endliche Gröfse ist.

A. Darstellung der positiven Aufstufungen der einfachen Functionen.

§. 7.

Darstellung der Aufstufungen der Potenzialfunctionen $\zeta^m x^p$.

Die erste Aufstufung der Potenzialfunction x^p wird sich nach (38.), wenn $fx = x^p$ gesetzt wird, durch folgende Gleichung bilden:

$$fx^p = x^p + (x + \Delta x)^p.$$

Wird das Binomium $(x + \Delta x)^p$ in eine Reihe entwickelt, und die gleichen Glieder vereinigt, so entsteht folgende entwickelte Darstellung:

$$39. \quad \zeta x^p = 2x^p + \frac{p}{1} x^{p-1} \Delta x + \frac{p(p-1)}{1.2} x^{p-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^p.$$

Ist aber $fx = \frac{1}{x^p} = x^{-p}$, so wird

$$\zeta \frac{1}{x^p} = \frac{1}{x^p} + \frac{1}{(x + \Delta x)^p} = \frac{x^p + (x + \Delta x)^p}{x^p (x + \Delta x)^p}.$$

Berücksichtigt man, daß der Zähler in dieser Darstellung, $x^p + (x + \Delta x)^p = \zeta x^p$ ist, so gewinnt man

$$40. \quad \zeta \frac{1}{x^p} = \frac{\zeta x^p}{x^p (x + \Delta x)^p} = \frac{\zeta x^p}{(x^2 + \Delta x)^p}.$$

Die entwickelte Darstellung giebt folgende Gleichung:

$$41. \quad \zeta \frac{1}{x^p} = \frac{2}{x^p} - \frac{p \Delta x}{x^{p+1}} + \frac{p(p+1)(\Delta x)^2}{1.2 \cdot x^{p+2}} - \dots$$

Die nemliche Entwicklung gilt auch für Functionen mit gebrochenen Exponenten, $x^{\frac{q}{r}}$, $x^{-\frac{q}{r}}$.

Die höhern Aufstufungen von x^p ergeben sich unmittelbar aus der Gleichung (10.), wenn $X_0 = fx = x^p$, $X_1 = f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^p$ u. s. w. gesetzt wird. Es ist

$$42. \quad \zeta^m x^p = x^p + \frac{m}{1}(x + \Delta x)^p + \frac{m(m-1)}{1.2}(x + \Delta x)^p + \dots$$

$$\dots + \frac{m}{1}(x + (m-1)\Delta x)^p + (x + m\Delta x)^p.$$

Werden die Binomien der entwickelten Reihe in Reihen dargestellt, so entsteht:

$$\begin{aligned} & \zeta^m x^n = x^n \\ & + m \left(x^n + \frac{P}{1} x^{n-1} \Delta x + \frac{P(P-1)}{1.2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^P \right) \\ & + \frac{m(m-1)}{1.2} \left(x^n + \frac{P}{1} x^{n-1} 2\Delta x + \frac{P(P-1)}{1.2} x^{n-2} 2^2 (\Delta x)^2 + \dots + 2^P (\Delta x)^P \right) \\ & + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \left(x^n + \frac{P}{1} x^{n-1} 3\Delta x + \frac{P(P-1)}{1.2} x^{n-2} 3^2 (\Delta x)^2 + \dots + 3^P (\Delta x)^P \right) \\ & \\ & x^n + \frac{P}{1} x^{n-1} m \Delta x + \frac{P(P-1)}{1.2} x^{n-2} m^2 (\Delta x)^2 + \dots + n^P (\Delta x)^P. \end{aligned}$$

Eine Zusammenstellung der Glieder dieser Reihen nach den steigenden Potenzen der Zunahme führt zu Folgendem:

$$\begin{aligned}
 43. \quad \zeta^m x^p = & \left(1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} + \dots + \frac{m}{1} + 1\right) x^p \\
 & + \frac{p}{1} \left(m + 2 \frac{m(m-1)}{1.2} + \dots + (m-1) \frac{m}{1} + m\right) x^{p-1} \Delta x \\
 & + \frac{p(p-1)}{1.2} \left(m + 2^2 \frac{m(m-1)}{1.2} + \dots + (m-1)^2 \frac{m}{1} + m^2\right) x^{p-2} (\Delta x)^2 \\
 & \dots \dots \dots \\
 & \left(m + 2^p \frac{m(m-1)}{1.2} + 3^p \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \dots + (m-1)^p \frac{m}{1} + m^p\right) (\Delta x)^p.
 \end{aligned}$$

Eine andere Darstellung wird durch die Gleichung (39.) gewonnen, wenn man sie als Vorschrift betrachtet, von ihr auf die zweite Aufstufung, und von dieser auf die dritte nach gleicher Methode u. s. w. fort geht. Diese Ableitungsweise ist die zurücklaufende, und wird demungeachtet zu einer unabhängigen Bildungsweise führen. Vervielfacht man nemlich die Gleichung (39.) mit ζ , so entsteht:

$$\zeta^2 x^p = 2 \zeta x^p + \frac{p}{1} \Delta x \zeta x^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} (\Delta x)^2 \zeta x^{p-2} + \dots,$$

und die Entwicklung der zweiten Aufstufung verlangt, daß alle Glieder auf der rechten Seite nach Vorschrift der Gleichung (39.) dargestellt wer-

den, was leicht dadurch erzwengt wird, dafs allmählig $p, p-1, p-2, \dots$ statt p in (39.) gesetzt werden. Ordnet man dann nach den Potenzen von Δx , so fließt hieraus:

$$\zeta^2 x^p = 2^2 x^p + 2 \frac{p}{1} \left| x^{p-1} \Delta x + 2 \frac{p(p-1)}{1.2} \left| x^{p-2} (\Delta x)^2 + 2 \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} \left| x^{p-3} (\Delta x)^3 + \dots \right. \right. \right. \\ \left. + 2 \frac{p}{1} \right| \quad + p(p-1) \quad \left. \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2} \right. \\ \left. + 2 \frac{p(p-1)}{1.2} \right| \quad \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2} (p-2) \\ \left. 2 \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} \right|$$

Die Vorzahlen der einzelnen Glieder bestehen in Facultäten, deren Zähler harmoniren, deren Nenner aber verschieden sind. Bringt man Harmonie in diese durch Vervollständigen, so folgert sich hieraus leicht die Darstellung:

$$\zeta^2 x^p = 2^2 x^p + 2^2 \frac{p}{1} x^{p-1} \Delta x + 2.1 \left| \frac{p(p-1)}{1.2} x^{p-2} (\Delta x)^2 + 2.1 \left| \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} x^{p-3} (\Delta x)^3. \right. \right. \\ \left. + \frac{2}{1} \right| \quad + 3 \\ \left. + 2.1 \right| \quad + 3 \\ \left. + 2.1 \right|$$

Nennt man nun die Vorzahlen der Glieder dieser Reihen, der Kürze wegen, $A_1, A_2, A_3, \dots$, so stellt sich die vorstehende Reihe so dar:

$$\zeta^2 x^p = A_1 x^p + A_2 \frac{p}{1} x^{p-1} \Delta x + A_3 \frac{p(p-1)}{1.2} x^{p-2} (\Delta x)^2 + \dots$$

Aus dieser Reihe leitet sich die dritte Aufstufung durch Vervielfachen aller Glieder mit ζ ab. Daher ist:

$$\zeta^3 x^p = A_1 \zeta x^p + A_2 \frac{p}{1} \Delta x \zeta x^{p-1} + A_3 \frac{p(p-1)}{1.2} (\Delta x)^2 \zeta x^{p-2} + \dots$$

Werden die Ausdrücke $\zeta x^p, \zeta x^{p-1}, \zeta x^{p-2}$, nach Vorschrift der Gleichung (39.), in Reihen entwickelt, so führen sie zu folgender Darstellung:

$$\zeta^3 x^p = 2 A_1 x^p + A_1 \frac{p}{1} x^{p-1} \Delta x + A_1 \frac{p(p-1)}{1.2} x^{p-2} (\Delta x)^2 + \dots \\ + 2 A_2 \frac{p}{1} x^{p-1} \Delta x + A_2 p \frac{(p-1)}{1} x^{p-2} (\Delta x)^2 + \dots \\ + 2 A_3 \frac{p(p-1)}{1.2} x^{p-2} (\Delta x)^2 + \dots$$

Die nemliche Bemerkung, wie vorhin, über die Facultäten der Vorzahlen, rechtfertigt folgende Darstellung:

$$\zeta^3 x^p = 2 A_1 x^p + A_1 \left[\frac{p}{1} x^{p-1} \Delta x + A_1 \left[\frac{p(p-1)}{1.2} x^{p-2} (\Delta x)^2 + A_1 \left[\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} x^{p-3} \Delta x + \dots \right. \right. \right. \\ \left. \left. + 2 A_2 \left[\begin{array}{c} + 2 A_2 \\ + 2 A_3 \end{array} \right] \right. \right. \left. \left. + 3 A_2 \left[\begin{array}{c} + 3 A_2 \\ + 3 A_3 \end{array} \right] \right. \right. \left. \left. + 2 A_4 \right] \right]$$

Das Bildungsgesetz, welches den Vorzahlen dieser Reihe zu Grunde liegt, tritt deutlich hervor. Nennt man die Vorzahl des $(n+1)$ ten Gliedes dieser Reihe B_{n+1} , so hat man:

$$44. \quad B_{n+1} = A_1 + \frac{n}{1} A_2 + \frac{n(n-1)}{1.2} A_3 + \dots + \frac{n}{1} A_n + 2 A_{n+1}.$$

Da nun der Übergang von einer Aufstufung zu der folgenden unverändert derselbe bleibt, so ist auch das vorliegende Bildungsgesetz allgemein. Sind die Vorzahlen der vorhergehenden Aufstufung bekannt, so können aus ihnen nach (44.) die Vorzahlen der nachfolgenden gebildet werden. Wendet man dieses Bildungsgesetz an, so führt es zu folgenden Entwicklungen:

$$45. \quad \zeta^2 x^p = 4 x^p + 4 p x^{p-1} \Delta x + 6 \frac{p(p-1)}{1.2} x^{p-2} (\Delta x)^2 + 10 \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} x^{p-3} (\Delta x)^3 + \dots \\ + (2^n + 2) \frac{p \dots (p-n+1)}{1.2 \dots n} x^{p-n} (\Delta x)^n + \dots \\ \zeta^3 x^p = 8 x^p + 12 p x^{p-1} \Delta x + 24 \frac{p(p-1)}{1.2} x^{p-2} (\Delta x)^2 + 54 \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} x^{p-3} (\Delta x)^3 + \dots \\ \zeta^4 x^p = 16 x^p + 32 p x^{p-1} \Delta x + 80 \frac{p(p-1)}{1.2} x^{p-2} (\Delta x)^2 + 224 \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} x^{p-3} (\Delta x)^3 + \dots \\ \zeta^5 x^p = 32 x^p + 80 p x^{p-1} \Delta x + 240 \frac{p(p-1)}{1.2} x^{p-2} (\Delta x)^2 + 800 \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} x^{p-3} (\Delta x)^3 + \dots \\ \text{u. s. w.}$$

Auf gleiche Weise lassen sich die Aufstufungen für x^{-p} bestimmen.

§. 8.

Anwendungen der Gleichungen des vorigen §.

Bezeichnen wir nun die m te Aufstufung von x im Einklange mit den Darstellungen (45.) durch folgende Reihe:

$$46. \quad \zeta^m x^p = m_1 x^p + m_2 p x^{p-1} \Delta x + m_3 \frac{p(p-1)}{1.2} x^{p-2} (\Delta x)^2 + \dots,$$

worin $m_1, m_2, m_3, \dots$ die Vorzahlen bezeichnen, wie sie nach der Gleichung (44.) gewonnen werden, und berücksichtigen wir, daß die Gleichungen (46.), (42.) und (43.) Darstellungen für eine und dieselbe Sache sind, so ergibt sich aus der Vereinigung von (42.) und (44.) folgende neue:

$$47. \quad x^p + \frac{m}{1}(x + \Delta x)^p + \frac{m(m-1)}{1.2}(x + 2\Delta x)^p + \dots + (x + m\Delta x)^p \\ = m_1 x^p + m_2 p x^{p-1} \Delta x + m_3 \frac{p(p-1)}{1.2} x^{p-2} (\Delta x)^2 + \dots,$$

worin die Reihe auf der linken Seite als Summenreihe, und die auf der rechten als ihr Summen-Ausdruck, oder nach Umständen auch umgekehrt genommen werden kann. Die Glieder-Anzahl der ersten Reihe hängt von m , die der andern von p ab. Ist m gröfser als p , so wird die zweite als Summen-Ausdruck der ersten, ist m kleiner als p , die erste als Summen-Ausdruck der zweiten betrachtet werden können.

An der ersten Reihe zeigt sich zugleich ein bestimmtes Bildungsgesetz, denn in ihr erscheinen die gleichen Potenzen der um gleiche Gröfßen wachsenden Function, die mit bestimmten Facultäten verbunden sind. Nehmen wir für einen speciellen Fall $\Delta x = 1$, so bildet diese Reihe die Potenzen der natürlichen Zahlen, und es entsteht, wenn wir die Summenreihe durch $\zeta^m x^p$ oder durch $S_r \frac{m^{r-1}}{1^{r-1}} x^p$ andeuten, wobei für den letzten Fall zu berücksichtigen ist, daß r alle Werthe von 0, 1, 2, m bezeichnet, folgende Darstellung:

$$48. \quad S_r \frac{m^{r-1}}{1^{r-1}} x^p = x^p + \frac{m}{1}(x+1)^p + \frac{m(m-1)}{1.2}(x+2)^p + \dots + \frac{m(m-1)\dots 2.1}{1.2\dots m}(x+m)^p \\ = m_1 x^p + m_2 x^{p-1} + \dots + m_{m+1} x^0.$$

Setzen wir hierin $x = 1$, $p = 3$ und $m = 5$, so wird

$$S_r \frac{5^{r-1}}{1^{r-1}} 1^3 = 1^3 + \frac{5}{1} 2^3 + \frac{5.4}{1.2} 3^3 + \frac{5.4.3}{1.2.3} 4^3 + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} 5^3 + \frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5} 6^3 \\ = 32 + 80.3 + 240.3 + 800 = 1792.$$

Die Gleichung (48.) wird dann besonders brauchbar, wenn p im Verhältnisse zu m eine kleine Zahl ist. Die Coefficienten $m_1, m_2, m_3, \dots$ in (46.) können auch nach (43.) berechnet werden.

§. 9.

Darstellung von $\zeta^m \frac{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\dots(x+(p-1)\Delta x)}{1.2.3\dots p}$.

Die erste Aufstufung der Function $\frac{x^{p|\Delta x}}{1^{p|1}}$ wird nach (38.) durch folgende Gleichung:

$$\zeta \frac{x^{p|\Delta x}}{1^{p|\Delta x}} = \frac{x(x+\Delta x)\dots(x+(p-1)\Delta x)}{1.2\dots p} + \frac{(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\dots(x+p\Delta x)}{1.2\dots p}$$

dargestellt. Die höhern Aufstufungen sind nach (10.) in folgender Gleichung

chung enthalten:

$$49. \quad \zeta_m \frac{x^{p|\Delta x}}{1^{p|1}} = \frac{x^{p|\Delta x}}{1^{p|1}} + \frac{m(x+\Delta x)^{p|\Delta x}}{1^{p|1}} + \frac{m(m-1)(x+2\Delta x)^{p|\Delta x}}{1.2} + \dots + \frac{(x+m\Delta x)^{p|\Delta x}}{1^{p|1}}.$$

Eine zurücklaufende Bildungsweise, wie in §. 7., die uns eine andere Darstellung der höhern Aufstufungen der Facultäten gäbe, und dadurch weitere Anwendungen gestattete, läßt sich nicht gewinnen. Man kann jedoch die Facultäten in Potenzialgrößen auflösen, und dann lassen sich auf sie die in §. 7. gewonnenen Entwicklungen anwenden. Da diese Anwendung uns nichts Neues bieten würde, so beschränken wir uns auf folgenden einzelnen Fall, worin statt einer einzelnen Facultät die Reihe der natürlichen Zahlen, welche ein Aggregat einfacher Facultäten sind, vorkommt. Die Reihe der natürlichen Zahlen mit ihrem Summen-Ausdrucke ist bekanntlich:

$$50. \quad Sx = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + x = \frac{x(x+1)}{1.2}.$$

Hierin ist die Zunahme $\Delta x = 1$. Läßt man in Sx nach (38.) die Function x um die Zunahme 1 wachsen, und zählt die ursprüngliche Function zu, so ist

$$\zeta Sx = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + x \\ + 2 + 3 + 4 + \dots + x + (x+1).$$

Werden die beiden Reihen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in ihren Summen-Ausdrücken vereinigt, so gewinnt man:

$$51. \quad \zeta Sx = \frac{2x(x+2)}{1.2}.$$

Bestimmt man gleichfalls die Summenfunction für die zweite Aufstufung, so ist:

$$\zeta^2 Sx = \frac{4x(x+3)}{1.2} = \frac{2^2 x(x+3)}{1.2} = 2x(x+3).$$

Eben so erhält man:

$$\zeta^3 Sx = \frac{8x(x+4)}{1.2} = \frac{2^3 x(x+4)}{1.2} = 2^2 x(x+4),$$

$$\zeta^4 Sx = \frac{16x(x+5)}{1.2} = \frac{2^4 x(x+5)}{1.2} = 2^3 x(x+5),$$

und hieraus allgemein:

$$52. \quad \zeta^m Sx = 2^{m-1} x(x+m+1).$$

Die speciellen Fälle führen zu folgenden merkwürdigen Reihen mit ihren Summen-Ausdrücken:

$$53. \quad \begin{cases} 1+2.2+2.3+\dots+2.x+(x+1)=x(x+2) \\ 1+3.2+4.3+\dots+4.x+3(x+1)+(x+2)=2x(x+3) \\ 1+4.2+7.3+8.4+\dots+8.x+7(x+1)+4(x+2)+(x+3)=2^2 x(x+4), \\ \text{u. s. w.} \end{cases} \quad \text{u. s. w.}$$

Hierher gehört auch noch folgende zusammengesetzte Reihe, deren Glieder die ungeraden Zahlen sind, verbunden mit den Vorzahlen des Binomiums, und die einen sehr einfachen Summen-Ausdruck erzeugen:

$$54. \quad 1 + \frac{m}{1} \cdot 3 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot 5 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 7 + \dots + 2m + 1 = 2^m(m+1).$$

Der Summen-Ausdruck erscheint als eine Function von der Zahl 2, und der Glieder-Anzahl m .

Die Gleichung (54.) führt zu dem Resultate: Jede gerade Zahl von der Form $2^m(m+1)$ läßt sich in die m ersten ungeraden Zahlen, die mit den Vorzahlen des Binomiums der m ten Potenz verbunden sind, zerlegen.

Die Gleichung (52.) führt zu folgendem: Jede Zahl von der Form $2^{m-1}(x+m+1)$ läßt sich in die $(x+m)$ ersten Zahlen zerlegen, die mit Vorzahlen besonderer Natur nach Angabe der Gleichungen (53.) verbunden sind.

§. 10.

Darstellung der Aufstufungen der Exponentialgrößen.

Die Aufstufungen der Exponentialgrößen führen auf sehr einfache Darstellungen. Die Gleichung (38.) führt zu der ersten Aufstufung, und es ist:

$$55. \quad \zeta a^x = a^x + a^{x+\Delta x} = (1 + a^{\Delta x}) a^x.$$

Aus der Gleichung (10.) folgt unmittelbar:

$$56. \quad \zeta^m a^x = a^x + \frac{m}{1} a^{x+\Delta x} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{x+2\Delta x} + \dots + a^{x+m\Delta x}.$$

Um auch hier weitere Vergleichen anstellen zu können, suchen wir eine zurücklaufende Bildungsweise auf. Sie folgt unmittelbar aus (54.), wenn wir von der ersten Abstufung auf die zweite dadurch übergehen, daß wir die Abstufung von der Abstufung nehmen, und also die Gleichung

$$\zeta a^x = (1 + a^{\Delta x}) a^x$$

mit ζ vervielfachen. Daraus ergibt sich:

$$\zeta^2 a^x = (1 + a^{\Delta x}) \zeta a^x = (1 + a^{\Delta x}) (1 + a^{\Delta x}) a^{\Delta x} = (1 + a^{\Delta x})^2 a^x.$$

Vervielfachen wir diese Gleichung mit ζ , so erhalten wir:

$$\zeta^3 a^x = (1 + a^{\Delta x})^2 \zeta a^x = (1 + a^{\Delta x})^2 (1 + a^{\Delta x}) a^x = (1 + a^{\Delta x})^3 a^x.$$

Der angezeigte Ableitungsgang bleibt für alle Fälle gleich, und es ist hieraus das allgemeine Bildungsgesetz leicht erkennbar:

$$57. \quad \zeta^m a^x = (1 + a^{\Delta x})^m a^x.$$

Die Gleichungen (56.) und (57.) sind Darstellungen für eine und dieselbe Sache, also einander gleich. Ihre Vereinigung führt zu der Summirung einer geometrischen Reihe, deren Glieder mit den Vorzahlen des Binomiums verbunden sind, und es ist:

$$58. \quad a^x + \frac{m}{1} a^{x+\Delta x} + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{x+2\Delta x} + \dots + a^{x+m\Delta x} = (1 + a^{\Delta x})^m a^x.$$

Da a , x und Δx unabhängig von einander sind, so lassen sich hieraus mancherlei Ableitungen gewinnen.

Es mögen ferner noch die Aufstufungen der Function $\frac{1}{a^x}$ hier stehen. Nach (38.) ist

$$\zeta \frac{1}{a^x} = \frac{1}{a^x} + \frac{1}{a^{x+\Delta x}}.$$

Werden die beiden Ausdrücke auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in einen vereinigt, so führt dies zu folgender Darstellung:

$$\zeta \frac{1}{a^x} = \frac{1}{a^{x+\Delta x}} + \frac{a^{\Delta x}}{a^{x+\Delta x}} = \frac{1+a^{\Delta x}}{a^{x+\Delta x}} = \frac{1+a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}} \cdot \frac{1}{a^x}.$$

Von der ersten Aufstufung, die wir so eben erhalten haben, nehmen wir abermals die Aufstufung, um die zweite zu gewinnen. Daher ist

$$\zeta^2 \frac{1}{a^x} = \frac{1+a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}} \zeta \frac{1}{a^x} = \frac{1+a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}} \cdot \frac{1+a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}} \cdot \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1+a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}} \right)^2 \cdot \frac{1}{a^x}.$$

Die Aufstufung von der zweiten Aufstufung giebt die dritte, und es ist:

$$\zeta^3 \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1+a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}} \right)^2 \zeta \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1+a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}} \right)^2 \cdot \frac{(1+a^{\Delta x})}{a^{\Delta x}} \cdot \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1+a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}} \right)^3 \cdot \frac{1}{a^x}.$$

Das allgemeine Gesetz erkennt sich hieraus leicht, und ist:

$$59. \quad \zeta^m \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1+a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}} \right)^m \cdot \frac{1}{a^x}.$$

Berücksichtigen wir ferner, daß nach (10.)

$$\zeta^m \frac{1}{a^x} = \frac{1}{a^x} + \frac{m}{a^{x+\Delta x}} + \frac{m(m-1)}{a^{x+2\Delta x}} + \dots + \frac{1}{a^{x+m\Delta x}}$$

ist, so zieht man leicht hieraus folgende Gleichung:

$$60. \quad \frac{1}{a^x} + \frac{m}{a^{x+\Delta x}} + \frac{m(m-1)}{a^{x+2\Delta x}} + \dots + \frac{1}{a^{x+m\Delta x}} = \left(\frac{1+a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}} \right)^m \cdot \frac{1}{a^x}.$$

§. 11.

Darstellung der Aufstufungen von $\sin x$.

Da die Logarithmen keine andere kurze Darstellung der Aufstufungen liefern, als die allgemeine unter (10.) angegebene, so gehen wir zu

den Aufstufungen der Sinus über. Die Gleichung (10.) führt zu folgender Darstellung:

$$61. \zeta^m \sin x = \sin x + \frac{m}{1} \sin(x + \Delta x) + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \sin(x + 2\Delta x) \dots + \sin(x + m\Delta x).$$

Auch hier suchen wir zu weiteren Anwendungen eine zurücklaufende Bildungsweise auf. Sie läßt sich mittelst folgender Gleichung, die wir aus der Trigonometrie entlehnen, gewinnen:

$$62. \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2},$$

welche die Summe zweier Sinus durch den Sinus der Summe und den Cosinus des Unterschiedes beider Winkel darstellt.

Die erste Aufstufung des Sinus ist nach (38.):

$$\zeta \sin x = \sin x + \sin(x + \Delta x).$$

Wird in (62.) $p = x + \Delta x$ und $q = x$ gesetzt, so entsteht

$$63. \zeta \sin x = \sin x + \sin(x + \Delta x) = 2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cos \frac{\Delta x}{2}.$$

Diese Gleichung ist Resultat und Vorschrift für die Bildung der Aufstufungen des Sinus. Die Vorschrift, die sie enthält, ist: Um die Aufstufung von $\sin x$ zu erhalten, lasse man den Sinus um die halbe Zunahme wachsen, und vervielfache den so erhaltenen Sinus mit dem zweifachen Cosinus der halben Zunahme.

Die zweite Aufstufung ist Aufstufung von der ersten Aufstufung, also

$$\zeta^2 \sin x = 2 \cos \frac{\Delta x}{2} \zeta \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Wird nun $\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ nach der eben gefundenen Vorschrift behandelt, so entsteht:

$$\zeta^2 \sin x = 2^2 \sin(x + \Delta x) \left(\cos \frac{\Delta x}{2}\right)^2.$$

Eben so wird:

$$\begin{aligned} \zeta^3 \sin x &= 2^2 \left(\cos \frac{\Delta x}{2}\right)^2 \zeta \sin(x + \Delta x) = 2^2 \left(\cos \frac{\Delta x}{2}\right)^2 \cdot 2 \sin\left(x + \frac{3\Delta x}{2}\right) \cos \frac{\Delta x}{2} \\ &= 2^3 \sin\left(x + \frac{3\Delta x}{2}\right) \left(\cos \frac{\Delta x}{2}\right)^3 \end{aligned}$$

u. s. w. Diese Ableitungsweise führt zu folgendem allgemeinen Bildungsgesetz:

$$64. \zeta^m \sin x = 2^m \sin\left(x + \frac{m\Delta x}{2}\right) \left(\cos \frac{\Delta x}{2}\right)^m.$$

Die Gleichungen (61.) und (64.) erzeugen durch ihre Vereinigung eine Reihe, die einem bestimmten Bildungsgesetz unterliegt und ihren Summen-Ausdruck:

$$65. \quad \sin x + \frac{m}{1} \sin(x + \Delta x) + \frac{m(m-1)}{1.2} \sin(x + 2\Delta x) + \dots + \sin(x + m\Delta x) \\ = 2^m \sin\left(x + \frac{m\Delta x}{2}\right) \left(\cos \frac{\Delta x}{2}\right)^m.$$

Ordnen wir die Substitutionen statt p und q in der Gleichung (62.) anders, und setzen $p = x$ und $q = x + \Delta x$, so erhalten wir für die erste Aufstufung des Sinus:

$$\zeta \sin x = \sin(x + \Delta x) + \sin x = 2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left(-\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Berücksichtigen wir, daß $\cos\left(-\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos \frac{\Delta x}{2}$, so folgt hieraus:

$$66. \quad \zeta \sin x = -2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cos \frac{\Delta x}{2}.$$

Diese Darstellung ist von der Darstellung (63.) nicht durch die Bildungsweise, sondern nur durch das Zeichen verschieden. Leiten wir daher nach ihr die spätern Aufstufungen ab, so wird sie auf abwechselnde Zeichen führen, und es wird entstehen:

$$\zeta^2 \sin x = 2^2 \sin\left(x + \Delta x\right) \left(\cos \frac{\Delta x}{2}\right)^2,$$

$$\zeta^3 \sin x = -2^3 \sin\left(x + \frac{3\Delta x}{2}\right) \left(\cos \frac{\Delta x}{2}\right)^2,$$

und demnach:

$$67. \quad \zeta^m \sin x = (-)^m 2^m \sin\left(x + \frac{m\Delta x}{2}\right) \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^m.$$

Diese Verschiedenheit der Resultate darf nicht befremden; sie kommt häufig vor, wie dies aus der Lehre der Wurzelgrößen und quadratischen Gleichungen u. s. w. bekannt ist. Wir sehen, daß der Calcul, als allgemeine Form, auf unbestimmte Resultate führen kann. Im einzelnen Fall muß sich entscheiden, welche Darstellung die richtige ist.

§. 12.

Darstellung der Aufstufungen für $\cos x$.

Die m te Aufstufung des Cosinus bestimmt sich nach (10.) im Allgemeinen durch:

$$68. \quad \zeta^m \cos x = \cos x + \frac{m}{1} \cos(x + \Delta x) + \frac{m(m-1)}{1.2} \cos(x + 2\Delta x) + \dots + \cos(x + m\Delta x).$$

Wir suchen nun eine zurücklaufende Bildungsweise. Die Gleichung aus der Trigonometrie:

$$69. \quad \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

wird uns die Ableitungen vorbereiten. Setzt man nemlich hierin $p = x + \Delta x$ und $q = x$, so entsteht:

$$70. \quad \zeta \cos x = \cos x + \cos(x + \Delta x) = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cos \frac{\Delta x}{2}.$$

Die Vorschrift, die wir hieraus für die Ableitung der Aufstufungen entnehmen, ist: Man lasse die veränderliche Gröfse um die halbe Zunahme wachsen, und vervielfache den so erhaltenen Cosinus mit dem doppelten Cosinus der halben Zunahme.

Hiernach leitet sich die zweite Aufstufung aus der ersten leicht ab. Es ist:

$$\begin{aligned} \zeta^2 \cos x &= 2 \cos \frac{\Delta x}{2} \zeta \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 2 \cos \frac{\Delta x}{2} 2 \cos \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos(x + \Delta x) \\ &= 2^2 \cos(x + \Delta x) \left(\cos \frac{\Delta x}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Eben so erhält man:

$$\zeta^3 \cos x = 2^2 \left(\cos \frac{\Delta x}{2}\right)^2 \zeta \cos(x + \Delta x) = 2^3 \cos\left(x + \frac{3\Delta x}{2}\right) \left(\cos \frac{\Delta x}{2}\right)^3,$$

und hieraus allgemein:

$$71. \quad \zeta^m \cos x = 2^m \cos\left(x + \frac{m\Delta x}{2}\right) \left(\cos \frac{\Delta x}{2}\right)^m.$$

Die Verbindung von (68.) und (71.) führt zu folgender Gleichung zwischen einer Reihe und ihrem Summen-Ausdrucke:

$$\begin{aligned} 72. \quad \cos x + \frac{m}{1} \cos(x + \Delta x) + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos(x + 2\Delta x) + \dots + \cos(x + m\Delta x) \\ = 2^m \cos\left(x + \frac{m\Delta x}{2}\right) \left(\cos \frac{\Delta x}{2}\right)^m. \end{aligned}$$

Auch hier lassen sich bei anderer Anordnung der Substitution in (69.) andere Resultate gewinnen. Wird nemlich $p = x$ und $q = x + \Delta x$ gesetzt, so erhält die erste Aufstufung für $\cos x$ folgende Gestalt:

$$\zeta \cos x = \cos x + \cos(x + \Delta x) = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left(-\frac{\Delta x}{2}\right),$$

oder, da $\cos\left(-\frac{\Delta x}{2}\right) = -\cos \frac{\Delta x}{2}$ ist:

$$73. \quad \zeta \cos x = -2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cos \frac{\Delta x}{2}.$$

Die höhern Aufstufungen von $\cos x$ erhalten dann folgende Formen:

$$\zeta^2 \cos x = 2^2 \cos(x + \Delta x) \left(\cos \frac{\Delta x}{2} \right)^2,$$

$$\zeta^3 \cos x = -2^3 \cos\left(x + \frac{3\Delta x}{2}\right) \left(\cos \frac{\Delta x}{2} \right)^3,$$

und allgemein:

$$74. \quad \zeta^m \cos x = (-)^m 2^m \cos\left(x + \frac{m\Delta x}{2}\right) \left(\cos \frac{\Delta x}{2} \right)^m.$$

Hieraus ergibt sich auch folgende veränderte Darstellung der Gleichung (72.):

$$75. \quad \cos x + \frac{m}{1} \cos(x + \Delta x) + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos(x + 2\Delta x) + \dots + \cos(x + m\Delta x) \\ = (-)^m 2^m \cos\left(x + \frac{m\Delta x}{2}\right) \left(\cos \frac{\Delta x}{2} \right)^m.$$

(Die Fortsetzung folgt.)