Ueber das Polvierseit.

Von

A. BRILL in München.

Wenn die Elemente eines geometrischen Gebildes sich in Gruppen von übereinstimmenden Eigenschaften anordnen lassen, so besitzt das Gebilde meist auch ein Interesse vom Standpunkte der Algebra. Es ist Hesse's grosses Verdienst, durch Untersuchung längst bekannter geometrischer Figuren auf diesen Zusammenhang die Algebra um wichtige Beispiele zur Gruppentheorie bereichert zu haben. Aber auch umgekehrt lassen algebraische Sätze zuweilen eine geometrische Interpretation zu, die auf Figuren mit solchen Gruppeneigenschaften führt. Auf diesem Wege bin ich zu einer einfachen Configuration in der Ebene gelangt, welche, im Wesentlichen aus dem Polvierseit von Hesse*) und dessen Polarfigur, einem Polviereck, bestehend, mehrfach Beziehungen der erwähnten Art aufweist, die meines Wissens nicht bekannt sind.

Gegeben sei ein Kegelschnitt K und ein Dreieit in einer Ebene. Sucht man zu dessen Eckpunkten die Polaren in Bezug auf K , so bilden dieselben wieder ein Dreieit, das bekanntlich zu dem ersten perspectivisch gelegen ist. Zieht man die Verbindungslinien entsprechender Eckpunkte und die Gerade, auf der sich entsprechende Seiten schneiden, so bilden diese $3 + 3 + 3 + 1 = 10$ Geraden ein Zehnsseit, dessen Seiten sich mehrfach zu je dreien in einem Punkte schneiden und dessen 45 Eckpunkte mehrfach zu je dreien in einer Geraden liegen**), so zwar, dass sich die Seiten auf 20 verschiedene

*) Crelle's Journal für Mathematik, Band 20, S. 285. Die Bezeichnungen „Polvierseit“, „Polviereck“ entnehme ich Reye's Geometrie der Lage, 2. Aufl., Bd. 1, S. 191.

**) Diese Figur ist auch im Hexagrammum mysticum nachweisbar, wo die 60 Pascal'schen Linien sich, wie Herr G. Veronese (Accad. dei Lincei 1877) gezeigt hat, zu 6 Zehnseiten der oben angegebenen Art gruppieren lassen, deren dreifache Eckpunkte die 60 Kirkman'schen Punkte sind.

Arten zu Dreiseiten gruppieren lassen, welche, zusammen mit K , auf gleiche Weise der Construction zu Grunde gelegt werden können.

In der That: Sind $S_1 S_2 S_3$ die Seiten des gegebenen Dreiseits, $S_{23} S_{31} S_{12}$ die des Dreiseits der Polaren, $S_{14} S_{24} S_{34}$ die Verbindungslinien entsprechender Eckpunkte der beiden Dreiseite (statt S_{ik} werden wir auch S_{ki} schreiben); ist ferner S_4 die Axe der Collineation, auf der sich bezüglich die Geraden $S_1 S_{23}$; $S_2 S_{31}$; $S_3 S_{12}$ schneiden, und die zugleich Polare des Collineationscentrums (des Schnittpunktes von $S_{14} S_{24} S_{34}$) ist, so gehen nach Construction durch einen Punkt je die Seiten:

$$(1) \quad \begin{cases} S_2 S_3 S_{14}(P_{23}); & S_{12} S_{13} S_{14}(P_1); & S_4 S_1 S_{23}(P_{14}); \\ S_3 S_1 S_{24}(P_{31}); & S_{23} S_{21} S_{24}(P_2); & S_4 S_2 S_{31}(P_{24}); \\ S_1 S_2 S_{34}(P_{12}); & S_{31} S_{32} S_{34}(P_3); & S_4 S_3 S_{12}(P_{31}), \end{cases}$$

wo die Klammer die Bezeichnung jedes Schnittpunktes enthält. Dabei bedeutet P_i den Pol der Geraden S_i , P_{ik} den von S_{ik} in Bezug auf K .

Diese Aufzählung, die im Wesentlichen nur den Gang der Construction wiedergiebt, bleibt nun bei folgenden Vertauschungen ungeändert:

1. Wenn man die Indices 23, 31, 12 bezüglich mit 1, 2, 3 vertauscht. Man kann also, statt von dem Dreiseit $S_1 S_2 S_3$, auch von dem $S_{23} S_{31} S_{12}$ ausgehen.

2. Wenn man in allen Indices die Ziffern 1, 2, 3, 4 in irgend einer *anderen* Anordnung benutzt. Man kann also statt von $S_1 S_2 S_3$ auch z. B. von $S_1 S_2 S_4$ ausgehen; oder, indem man eine Vertauschung 2. auf eine 1. folgen lässt, von irgend dreien der vier Seiten $S_{23} S_{31} S_{12} S_4$, u. s. w. Ueberhaupt kann man der Construction irgend drei von den vier Seiten des Zehnseits, die in der folgenden Aufzählung in einer Zeile stehen, zu Grunde legen:

$$(2) \quad \begin{aligned} & S_1 S_2 S_3 S_4, \\ & S_{23} S_{31} S_{12} S_4, \\ & S_{12} S_{24} S_{41} S_3, \\ & S_{41} S_{13} S_{34} S_2, \\ & S_{34} S_{42} S_{23} S_1. \end{aligned}$$

Von den 10 Punkten $P_i P_{ik}$ ($i, k = 1, \dots, 4$) kann jeder als ein unendlich kleines Dreieck angesehen werden, in welchem drei von den 45 Eckpunkten des Zehnseits zusammengefallen sind. Dualistisch entsprechend lassen sich die 10 Seiten $S_i S_{ik}$ als dreifache Seiten des von den 10 Punkten $P_i P_{ik}$ gebildeten Zehnsecks auffassen. Bei der Aufstellung der folgenden Sätze, die sämmtlich auch in dualistischer Uebertragung ausgesprochen werden können, wollen wir an die Figur des *Zehnsecks* anknüpfen.

Wenn man die übrigen $45 - 3 \cdot 10 = 15$ Seiten desselben construirt, so lassen sich dieselben in folgender Weise zu fünf Dreiseiten von merkwürdigen Eigenschaften gruppiren:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &: P_{23}P_{14}; P_{31}P_{24}; P_{12}P_{34}; \\ \Delta_2 &: P_{12}P_2; P_{13}P_3; P_{14}P_4; \\ \Delta_3 &: P_{23}P_3; P_{24}P_4; P_{21}P_1; \\ \Delta_4 &: P_{34}P_4; P_{31}P_1; P_{32}P_2; \\ \Delta_5 &: P_{41}P_1; P_{42}P_2; P_{43}P_3; \end{aligned}$$

wo $P_{23}P_{14}$ die Verbindungslinie dieser Punkte bezeichnet, u. s. w.

Je zwei der Dreiseite Δ sind perspectivisch gelegen. Denn z. B. die Punkte P_{12}, P_{13}, P_{14} , welche auf der Linie S_1 liegen, (vgl. (1)), sind die Schnittpunkte je einer Seite des Dreiecks Δ , mit einer von Δ_2 , u. s. w.

Wenn man irgend einem der Dreiseite Δ_i , als Dreieck aufgefasst, einen Kegelschnitt umzuschreiben verlangt, welcher den gegebenen Kegelschnitt K in zwei Punkten (die auch zusammenfallen können) berührt, so erhält man die vier Lösungen, welche diese Aufgabe zulässt, indem man die Schnittpunkte von K mit den vier Geraden sucht, die in der i^{ten} Zeile der Tabelle (2) verzeichnet sind; also z. B. für das Dreieck Δ_1 die Schnittpunkte von K mit $S_1S_2S_3S_4$. In der That, die Seiten des Dreiecks Δ_1 sind die Diagonalen eines vollständigen Vierseits, dessen Eckpunkte $P_{14}P_{23}; P_{24}P_{31}; P_{34}P_{12}$ paarweise zu K harmonisch conjugirt sind, indem P_{14} auf der Polaren S_{23} von P_{23} gelegen ist, u. s. w. Dies ist aber gerade die Bedingung (v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, § 369, S. 238) für die Verbindungslinien der vier Paare von Berührungspunkten, welche die einem Dreieck umschriebenen Kegelschnitte mit einem gegebenen K besitzen können.

Da sich aus dem Dreieck der Diagonalen, wenn K bekannt ist, das Vierseit eindeutig bestimmt, so kann man unsere Figur auch aus einem der Dreiecke Δ entstehen lassen.

Die fünf Dreiecke Δ besitzen aber noch eine weitere merkwürdige Beziehung zu dem Kegelschnitt K , die ich als das Ergebniss algebraischer Betrachtungen*) hier ohne Beweis anführen will.

Durch drei feste Punkte in der Ebene kann man bekanntlich sechs Kegelschnitte legen, die einen gegebenen Kegelschnitt K osculiren (in drei consecutiven Punkten schneiden).

Ist nun ein Dreieck Δ_1 und ein Kegelschnitt K beliebig in der Ebene gegeben, so sind die sechs Punkte von K , in welchen die dem Dreieck Δ_1 umschriebenen Kegelschnitte osculiren, zugleich Osculationspunkte für die vier anderen Dreiecken $\Delta_2 \dots \Delta_5$ umschriebenen Kegel-

*) Diese Annalen, Band XX, S. 351 ff.

schnitte, und zwar lassen sich diese Dreiecke nach dem Vorstehenden aus Δ_1 und K durch folgende lineare Construction ableiten.

Man suche zu Δ_1 das Polvierseit, dessen Diagonalen die Seiten von Δ_1 sind. Die Eckpunkte desselben liegen paarweise auf den Seiten von Δ_1 , und sind je die Doppelpunkte der Involution, die sich aus den Paaren der Schnittpunkte mit den beiden anderen Seiten und dem Kegelschnitt K bestimmt. Zu irgend dreien von den Seiten dieses Vierseits suche man die Pole in Bezug auf K und betrachte das aus den Verbindungslinien der drei Pole und aus der nicht benutzten Seite bestehende Vierseit. Die Diagonalen desselben bilden eines der gesuchten Dreiecke.

München, im Juni 1882.