Zur Theorie des optischen Drehvermögens von Krystallen.

Von L. SOHNCKE in Karlsruhe.

§ 1.

Einleitung.

Welcher Ursache die Drehung der Polarisationsebene im Quarz und anderen Krystallen zuzuschreiben sei, ist noch eine offene Frage. Zwar hat Fresnel als nächste Ursache die Zerlegung eines der Axe parallel einfallenden Strahls in 2 entgegengesetzt circulare von verschiedener Geschwindigkeit erkannt; und Airy konnte, hiervon ausgehend, nachweisen, dass alle hergehörigen Erscheinungen des Quarz ihre Erklärung finden, wenn man annimmt, ein in beliebiger Richtung einfallender Strahl zerlege sich im Quarz im Allgemeinen in 2 elliptisch polarisirte Strahlen. Der Unterschied ihrer Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, sowie das Axenverhältniss der Schwingungsellipsen wurden sodann von Jamin*) gemessen. Aber die eigentliche Ursache für dieses eigenthümliche Verhalten war hierdurch nicht erklärt.

Der Lösung dieser Frage hat man sich von anderer Seite auf einem merkwürdigen Wege zu nähern gesucht. Nachdem nämlich Mac Cullagh durch Probiren gefunden hatte, welche Glieder man zu den gewöhnlichen optischen Elasticitätsgleichungen hinzufügen müsse, damit aus den so vervollständigten Gleichungen die Drehung der Polarisationsebene folge, gelang es Herrn Carl Neumann für diese Zusatzglieder eine mechanische Deutung zu finden; er wies nämlich nach**), dass sich die Mac Cullagh'schen Gleichungen ergeben, wenn man die Annahme macht: „die relative Verrückung eines Aethertheilchens gegen ein anderes wirke auf letzteres ebenso, wie das Element eines elektrischen Stroms auf einen Magnetpol.“ Auch Clebsch***) ist selbst-

*) Ann. d. Ch. et d. Ph. III^{me} Série, 1850, t. 30, pag. 55.

**) Die magnetische Drehung der Polarisationsebene. Halle, Waisenhaus, 1863.

***) Theorie der circularpolarisirenden Medien. § 2. In Borchardt's Journ. f. Math. Bd. 57.

ständig auf dieselbe Deutung der etwas allgemeineren Zusatzglieder gekommen, welche Cauchy angegeben hatte.

Eine andere Ansicht über die Ursache des Drehvermögens hat Herr Boltzmann geäußert*). Weil nämlich die Rechnung ergebe, dass bei verschwindend kleiner Distanz zweier Aethertheilchen die Drehung der Polarisationssebene nicht möglich sei (ebensowenig wie die Dispersion durch Brechung), so könne dieselbe „bloss daher rühren, dass die Wellenlänge nicht mehr sehr gross gegenüber den Dimensionen der Wirkungssphäre eines Moleküls sei.“ Obgleich Herr Boltzmann die Theorie nicht entwickelt, musste seine Ansicht doch erwähnt werden, weil sie für ihn der Anlass gewesen ist, jenen — freilich doch nur als eine empirische Formel aufzufassenden — Ausdruck für die Abhängigkeit der Drehung von der Wellenlänge aufzustellen, durch welchen die Beobachtungen besser als durch die früheren Formeln von Biot und Stefan wiedergegeben werden.

Diese theoretischen Versuche geben keine Rechenschaft über den Zusammenhang des Drehvermögens mit der Structur der drehenden Krystalle, und doch ist dieser Zusammenhang ein so inniger, dass sich bei allen krystallisirten drehenden Substanzen die rechtsdrehende Varietät von der linksdrehenden schon äusserlich durch die Lage gewisser Krystallflächen unterscheidet (wenn auch diese Flächen nicht immer bei allen Exemplaren ausgebildet sind).

Ein Versuch, diesen Zusammenhang zu berücksichtigen, liegt in der Briot'schen Theorie vor**). Zwar die einfache, schon von Fresnel gehegte Vorstellung, dass die Aethermoleküle im Quarz in Schrauben geordnet seien, deren Axen der optischen Axe parallel, zeigt sich nach Herrn Briot's Rechnungen unvernünftig zur Erklärung der optischen Drehung, indem die einfache Torsion in einer Schraubenlinie keinerlei Wirkung auf die der Schraubenaxe parallelen Strahlen ausübt. Daher muss die Dissymmetrie des Aethers in den drehenden Krystallen eine complicirtere sein. Weil nun die Rechnung lehrt, dass sich ein zur Axe der Aetherschrauben senkrechter Strahl in 2 entgegengesetzt rotirende elliptische Strahlen von verschiedener Geschwindigkeit theilt, so macht Herr Briot die Annahme, der Aether im Quarz sei geordnet nach Schraubenlinien von durchweg gleichem Drehungssinn, aber verschiedener Richtung, nämlich so, dass die Schraubenaxen mit den Radien der sechsseitigen Basis des Quarzprismas der Reihe nach zusammenfallen. Hieraus ergeben sich wirklich Formeln, welche die Er-

*) Ueber den Zusammenhang der Drehung der Polarisationssebene und der Wellenlänge. In Poggendorff's Annalen. Jubelband.

**) Ch. Briot: Versuche über die math. Theorie des Lichts. Deutsch von Klinkerfues. 1867. (Original 1863) Buch IV, Cap. 3. Krystalle mit Circularpolarisation. Siehe auch die Vorrede p. XVIII—XXI.

scheinungen des Quarz im Wesentlichen darstellen. Trotzdem scheint mir die Biot'sche Theorie nicht naturgemäss; vor allen Dingen fehlt der Nachweis, wie die, durch die Trapezflächen des Quarz sich verathende Anordnung der Massentheilchen nach Schrauben, deren Axen der Hauptaxe *parallel* sind, im Aether schraubenförmige Anordnungen *senkrecht* zur Hauptaxe erzeugen kann. Wenn man also die Drehung der Polarisationsebene in einen unmittelbaren Zusammenhang mit der Structur der Krystalle bringen könnte, so würde, wie mir scheint, dadurch eine naturgemässere Theorie angebahnt sein.

Dieser Versuch ist in der vorliegenden Abhandlung gemacht. Ihr Gedankengang ist kurz folgender: Die optische Drehung des Quarz lässt sich, wie Herr Reusch 1869 gezeigt hat*), durch rein mechanische Mittel ziemlich vollkommen nachahmen, indem man nämlich eine grössere Anzahl Blättchen zweiaxigen Glimmers von möglichst gleicher, sehr geringer Dicke in der Weise aufeinanderschichtet, dass jedes folgende gegen das vorhergehende aus ursprünglich völlig paralleler Lage um 60^0 (oder 45^0), immer in demselben Sinn, gedreht ist. Ein solches Präparat zeigt fast dieselben optischen Erscheinungen wie eine senkrecht zur Axe geschnittene Quarzplatte, und zwar wie ein rechts- oder linksdrehender Quarz, je nach dem Sinne der wendeltreppförmigen Aufschichtung. Auch zeigen sich bei Aufeinanderlegung einer rechts- und einer linksdrehenden Glimmercombination (von gleich viel Blättchen gleicher Beschaffenheit) die Airy'schen Spiralen vorzüglich deutlich. Nur insofern weicht das Verhalten des Präparats von dem des Quarz ab, als sich im Polarisationsapparat, bei Drehung des Präparats in seiner eigenen Ebene, gewisse kleine Aenderungen der Farbenerscheinung einstellen. In Bezug hierauf vermuthet Herr Reusch, dass sich das Verhalten der Glimmercombination dem des „Quarz um so mehr nähern wird, je dünner die Lamellen und je grösser die Zahl der Umgänge.“

Ich entwickle nun im Folgenden die Theorie dieser Glimmercombinationen für senkrechten Durchgang der Strahlen, und wende sie dann auf den Fall an, dass die mit einer gewissen, von der optischen Beschaffenheit der Blättchen abhängenden Zahl multiplicirte Dicke der Blättchen klein gegen die Wellenlänge ist. *In diesem Falle ergibt sich für die Drehung der Polarisationsebene dasselbe Gesetz, welches beim Quarz als das, von Boltzmann vervollständigte, Biot'sche Gesetz bekannt ist.* Für die Berechtigung, dem Quarz eine derartige Structur zuzuschreiben, verweise ich alsdann noch auf meine allgemeine Theorie der Krystallstructur.

*) Monatsbericht der Königl. Akad. der Wiss. zu Berlin, Gesamtsitzung vom 8. Juli 1869, p. 530–538. Auch in Poggendorff's Annalen Bd. 138, p. 628.

Abschnitt I.

Theorie der Glimmercombination von Reusch für senkrechten Durchgang der Strahlen.

§ 2.

Vorbereitungen.

Ein geradlinig polarisirter, senkrecht auf das erste Blättchen der Combination fallender Strahl zerlegt sich beim Durchgang durch das Blättchen in 2 aufeinander senkrecht polarisirte Strahlen, welche in den folgenden Blättchen entsprechende Zerlegungen erfahren; aus dem letzten Blättchen treten schliesslich in ein und derselben geraden Linie 2 Strahlen aus, die bezüglich im Hauptschnitt des letzten Blättchens und senkrecht dazu polarisirt sind. Beide sind im Allgemeinen in verschiedener Phase und setzen sich daher zu einem elliptisch polarisirten Strahl zusammen, der alsdann auf den Analysator fällt.

Zum Verständniss des eigenthümlichen Verhaltens der Glimmercombination im Polarisationsapparat genügt es nun schon, *eine nur aus 3 Blättchen aufgeschichtete Combination zu betrachten*. Ich nehme jedes Blättchen gegen das vorhergehende unter 120° gedreht an, was bezüglich des optischen Verhaltens ganz auf dasselbe hinauskommt, als sei die Aufschichtung mit einem Drehungswinkel von 60° , jedoch im entgegengesetzten Drehungssinn, ausgeführt. Dann besteht z. B. eine 24 Blättchen enthaltende Combination, wie sie Herr Steeg in Homburg herstellt, aus 8 solchen parallel aufeinandergelegten Blättchen-triaden.

Ich verfolge nun den Durchgang durch die einzelnen Blättchen einer Triade, betrachte die 2 aus dem letzten Blättchen austretenden Strahlen genauer, und untersuche schliesslich den den Analysator verlassenden Strahl. Hierbei werden folgende üblichen Annahmen gemacht, die für den Vorgang selbst unwesentlich sind, aber sehr zur Vereinfachung der Rechnung beitragen. Die Amplitude des einfallenden Strahls sei 1; beim Durchgang durch jede Grenzfläche dringt nun bloss ein Bruchtheil in das folgende Medium, jedoch wird der aus diesem Grunde hinzuzufügende Factor als für unsre Betrachtung einflusslos weggelassen; ebenso wird von der geringen Absorption in den Krystallblättchen und ihrer eventuellen Verschiedenheit für beide Strahlen abgesehen. Ferner denke man den Ursprung des Strahls unmittelbar am ersten Blättchen, denke die Blättchen lückenlos aneinanderliegend, und betrachte die austretenden Strahlen unmittelbar beim Verlassen des letzten Blättchens; auch die durch den Analysator bewirkte Zerlegung denke man unmittelbar an der Austrittsfläche des letzten Blättchens vor sich gehend. — Es bedeute:

- d die bei allen Blättchen gleiche Blättchendicke;
 T die Oscillationsdauer des angewandten Lichtstrahls;
 h_n die zur Zeit t vorhandene Entfernung des Aethertheilchens aus der Gleichgewichtslage bei dem im Hauptschnitt (H_n) des n^{ten} Blättchens polarisirten Strahl an seiner Austrittsstelle aus dem Blättchen;
 s_n dasselbe für den senkrecht zum Hauptschnitt (nach S_n) polarisirten Strahl;
 o und e die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der, bezüglich im Hauptschnitt und senkrecht dazu polarisirten, Wellenebenen;
 j den Winkel des Hauptschnitts H_1 des ersten Blättchens mit der Polarisationsebene P des einfallenden Strahls;
 v den Winkel der Hauptschnitte zweier aufeinanderfolgender Blättchen [erst später $= 120^\circ$ gesetzt].

Als Normalfall, in dem die Winkel j und v beide positiv gerechnet werden, wählen wir den, wo die Ebene P sich erst um den $\angle j$ und dann in demselben Sinne weiter um den $\angle v$ drehen muss, damit sie erst mit H_1 und dann mit H_2 zusammenfalle.

Die Figur zeigt den Schnitt der Polarisations Ebenen: des Polarisators P , Analysators A , und der 4 bei 2 Blättchen auftretenden Strahlen, mit der Zeichnungsebene, welche senkrecht zum Strahl ist.

Unter obigen Voraussetzungen haben die 2 aus dem ersten Blättchen tretenden, resp. nach H_1 und S_1 polarisirten Strahlen die Gleichungen:

$$h_1 = \cos j \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{d}{o} \right),$$

$$s_1 = \sin j \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{d}{e} \right).$$

Jeder dieser Strahlen liefert beim Eintritt in das zweite Blättchen eine im Hauptschnitt des letzteren (H_2) und eine senkrecht dazu (nach S_2) polarisirte Komponente; also haben die beiden das zweite Blättchen durchsetzenden Strahlen bei ihrem Eintritt die Gleichungen:

$$h'' = h_1 \cos v - s_1 \sin v,$$

$$s'' = s_1 \cos v + h_1 \sin v;$$

bei ihrem Austritt aber die Gleichungen:

$$h_2 = \cos v \cdot \cos j \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{2d}{o} \right) - \sin v \cdot \sin j \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{o} \right) d \right),$$

$$s_2 = \cos v \cdot \sin j \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{2d}{e} \right) + \sin v \cdot \cos j \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \left(\frac{1}{o} + \frac{1}{e} \right) d \right).$$

In das dritte Blättchen treten die nach H_3 und S_3 polarisirten Strahlen:

$$h''' = h_2 \cos \nu - s_2 \sin \nu,$$

$$s''' = s_2 \cos \nu + h_2 \sin \nu.$$

Aus dem dritten Blättchen endlich treten die Strahlen:

$$(1) \left\{ \begin{aligned} h_3 &= \cos \nu \cdot \left\{ \cos \nu \cos j \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{3d}{o} \right) - \sin \nu \sin j \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \left(\frac{1}{e} + \frac{2}{o} \right) d \right) \right\} \\ &\quad - \sin \nu \cdot \left\{ \cos \nu \sin j \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \left(\frac{2}{e} + \frac{1}{o} \right) d \right) + \sin \nu \cos j \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \left(\frac{2}{o} + \frac{1}{e} \right) d \right) \right\}, \\ s_3 &= \cos \nu \cdot \left\{ \cos \nu \sin j \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{3d}{e} \right) + \sin \nu \cos j \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \left(\frac{1}{o} + \frac{2}{e} \right) d \right) \right\} \\ &\quad + \sin \nu \cdot \left\{ \cos \nu \cos j \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \left(\frac{2}{o} + \frac{1}{e} \right) d \right) - \sin \nu \sin j \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \left(\frac{2}{e} + \frac{1}{o} \right) d \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Man bemerke, dass der Ausdruck für h_3 in jenen für s_3 übergeht (und ebenso allgemein der für h_a in jenen für s_a), wenn man j durch $j - 90^\circ$ ersetzt und gleichzeitig o und e mit einander vertauscht.

(Hätte man den Ursprung des Strahls nicht an der Eintrittsfläche angenommen, die austretenden Strahlen nicht an der Oberfläche untersucht und die Zwischenräume der Blättchen nicht als verschwindend, sondern mit irgend einem isotropen Stoff erfüllt angenommen — Copalfirniß bei dem wirklichen Präparat —, so hätte man für h_3 und s_3 Ausdrücke erhalten, die sich von den obigen nur dadurch unterscheiden, dass $t - \left(\frac{x}{V} + \frac{x_1}{V_1} \right)$ an Stelle von t stände, wo x und x_1 die Längen der resp. in Luft und im Zwischenmedium zurückgelegten Wege, V und V_1 die zugehörigen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten bedeuten. Die Einsetzung dieses Ausdrucks für t würde an den folgenden Entwicklungen nichts ändern.)

§ 3.

Umformung der Gleichungen (1). Berechnung der Amplituden der 2 das dritte Blättchen verlassenden Strahlen.

Die Strahlengleichungen h_3 und s_3 sind auf die Form zu bringen:

$$h_3 = A_h \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{D_h}{\lambda} \right),$$

$$s_3 = A_s \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{D_s}{\lambda} \right),$$

wo λ die Wellenlänge in Luft $= V \cdot T$.

Von den 4, nach Richtung und Schwingungsebene zusammenfallenden Strahlen, aus denen h_3 (und ebenso s_3) besteht, sind 2 in gleicher Phase, setzen sich also unmittelbar durch Addition ihrer Am-

plituden zusammen. Somit bleiben nur noch 3 Strahlen zusammenzusetzen, und zwar sowohl bei h_3 als bei s_3 . Es ist nämlich:

$$(2) \quad \begin{cases} h_3 = \begin{cases} \cos^2 \nu \cos j \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{3d}{o} \right), \\ - \sin \nu \sin (\nu + j) \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \left(\frac{2}{o} + \frac{1}{e} \right) d \right), \\ - \sin \nu \cos \nu \sin j \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \left(\frac{1}{o} + \frac{2}{e} \right) d \right); \\ s_3 = \begin{cases} \cos^2 \nu \cdot \sin j \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{3d}{e} \right), \\ + \sin \nu \cdot \cos (\nu + j) \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \left(\frac{2}{e} + \frac{1}{o} \right) d \right), \\ + \sin \nu \cdot \cos \nu \cdot \cos j \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \left(\frac{1}{e} + \frac{2}{o} \right) d \right). \end{cases} \end{cases}$$

Nun setzen sich n nach Richtung und Schwingungsebene zusammenfallende Strahlen mit den Gleichungen:

$$y_n = a_n \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\delta_n}{\lambda} \right)$$

nach dem Fresnel'schen Parallelogramm zu 1 Strahl:

$$h = A \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{D}{\lambda} \right)$$

zusammen, wo A und D durch die Gleichungen gegeben sind:

$$(3) \quad A^2 = \left(\sum_n a_n \cdot \sin \frac{\delta_n}{\lambda} 2\pi \right)^2 + \left(\sum_n a_n \cdot \cos \frac{\delta_n}{\lambda} 2\pi \right)^2,$$

$$(4) \quad \operatorname{tg} \frac{D}{\lambda} 2\pi = \frac{\sum a_n \cdot \sin \frac{\delta_n}{\lambda} 2\pi}{\sum a_n \cdot \cos \frac{\delta_n}{\lambda} 2\pi}.$$

Also ergibt sich mit Anwendung von Gleichung (3):

$$\begin{aligned} A_h^2 &= \left[a \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3d}{o} - b \sin \frac{2\pi}{T} \left(\frac{2}{o} + \frac{1}{e} \right) d - c \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(\frac{1}{o} + \frac{2}{e} \right) d \right]^2 \\ &\quad + \left[a \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3d}{o} - b \cos \frac{2\pi}{T} \left(\frac{2}{o} + \frac{1}{e} \right) d - c \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \left(\frac{1}{o} + \frac{2}{e} \right) d \right]^2, \\ A_s^2 &= \left[a' \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3d}{e} + b' \sin \frac{2\pi}{T} \left(\frac{2}{e} + \frac{1}{o} \right) d + c' \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(\frac{1}{e} + \frac{2}{o} \right) d \right]^2 \\ &\quad + \left[a' \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3d}{e} + b' \cos \frac{2\pi}{T} \left(\frac{2}{e} + \frac{1}{o} \right) d + c' \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \left(\frac{1}{e} + \frac{2}{o} \right) d \right]^2, \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(5) \quad a = \cos^2 \nu \cdot \cos j; \quad b = \sin \nu \cdot \sin (\nu + j); \quad c = \sin \nu \cos \nu \sin j;$$

$$(5') \quad a' = \cos^2 \nu \cdot \sin j; \quad b' = \sin \nu \cdot \cos (\nu + j); \quad c' = \sin \nu \cos \nu \cos j.$$

Man findet leicht:

$$A_h^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2b(a-c) \cos \frac{2\pi}{T} \left(\frac{1}{o} - \frac{1}{e} \right) d - 2ac \cos 2 \cdot \frac{2\pi}{T} \left(\frac{1}{o} - \frac{1}{e} \right) d.$$

Hieraus folgt, wenn man zugleich zur Abkürzung:

$$(6) \quad \frac{\pi}{T} \left(\frac{1}{o} - \frac{1}{e} \right) \cdot d = \xi$$

setzt, durch leichte Umformung:

$$A_h^2 = (a-b-c)^2 + 4b(a-c) \sin^2 \xi + 4ac \sin^2 2\xi.$$

Einsetzung der Werthe für a , b , c giebt den schliesslichen Ausdruck für A_h^2 . Aus ihm erhält man, zufolge der bei Gleichung (1) gemachten Bemerkung, den Ausdruck für A_s^2 , wenn man j durch $j - 90$ ersetzt, und o und e miteinander vertauscht. Also:

$$(7) \quad \begin{cases} A_h^2 = \cos^2(2\nu+j) + \sin 2\nu \cdot \sin(2\nu+2j) \cdot \sin^2 \xi \\ \quad \quad \quad + \cos^2 \nu \cdot \sin 2\nu \cdot \sin 2j \cdot \sin^2 2\xi, \\ A_s^2 = \sin^2(2\nu+j) - \sin 2\nu \cdot \sin(2\nu+2j) \cdot \sin^2 \xi \\ \quad \quad \quad - \cos^2 \nu \cdot \sin 2\nu \cdot \sin 2j \cdot \sin^2 2\xi. \end{cases}$$

Man bemerkt, dass:

$$(8) \quad A_h^2 + A_s^2 = 1.$$

Diese Relation, welche die Gleichheit der Intensität *dicht vor und hinter* der Glimmertriade ausspricht, ist eine selbstverständliche Folge unserer Annahmen, nach denen von allen Intensitätsverlusten abgesehen werden sollte. In Wahrheit wird die Summe der Intensitäten beider austretenden Strahlen kleiner sein als die Intensität des eintretenden; jedoch kann sie stets = 1 gesetzt werden, weil das ja nur auf ein Messen der Intensität nach anderer Masseinheit hinauskommt.

Setzen wir jetzt, dem wirklichen Glimmerpräparat entsprechend, $\nu = 120^\circ$, so finden wir für die Amplituden der 2 aus der Triade austretenden, senkrecht zu einander polarisirten Strahlen die Gleichungen:

$$(I) \quad \begin{cases} A_h^2 = \frac{1}{4} (\cos j - \sqrt{3} \cdot \sin j)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} (\sin 2j + \sqrt{3} \cdot \cos 2j) \cdot \sin^2 \xi \\ \quad \quad \quad - \frac{\sqrt{3}}{8} \sin 2j \cdot \sin^2 2\xi, \\ A_s^2 = \frac{1}{4} (\sin j + \sqrt{3} \cdot \cos j)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} (\sin 2j + \sqrt{3} \cdot \cos 2j) \cdot \sin^2 \xi \\ \quad \quad \quad + \frac{\sqrt{3}}{8} \sin 2j \cdot \sin^2 2\xi. \end{cases}$$

§ 4.

Berechnung des Phasenunterschiedes der 2 das dritte Blättchen verlassenden Strahlen.

Die Phasen der beiden austretenden Strahlen sind nach Gleichung (4) bestimmt durch die Gleichungen:

$$\operatorname{tg} \frac{D_h}{\lambda} 2\pi = \frac{a \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3d}{o} - b \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(\frac{2}{o} + \frac{1}{e} \right) d - c \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(\frac{1}{o} + \frac{2}{e} \right) d}{a \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3d}{o} - b \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \left(\frac{2}{o} + \frac{1}{e} \right) d - c \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \left(\frac{1}{o} + \frac{2}{e} \right) d},$$

$$\operatorname{tg} \frac{D_s}{\lambda} 2\pi = \frac{a' \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3d}{e} + b' \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(\frac{2}{e} + \frac{1}{o} \right) d + c' \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(\frac{1}{e} + \frac{2}{o} \right) d}{a' \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3d}{e} + b' \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \left(\frac{2}{e} + \frac{1}{o} \right) d + c' \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \left(\frac{1}{e} + \frac{2}{o} \right) d},$$

deren rechte Seiten resp. mit $\frac{Z}{N}$ und $\frac{Z'}{N'}$ bezeichnet werden sollen. Hier haben a, b, c, a', b', c' die in (5) und (5') angegebene Bedeutung. Für den Phasenunterschied $\frac{D_h - D_s}{\lambda} 2\pi$ ergibt sich nun die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \frac{D_h - D_s}{\lambda} 2\pi = \frac{\frac{Z}{N} - \frac{Z'}{N'}}{1 + \frac{Z}{N} \cdot \frac{Z'}{N'}} = \frac{ZN' - NZ'}{ZZ' + NN'}.$$

Bei der Berechnung des Zählers $ZN' - NZ'$ fasse man immer diejenigen 2 Glieder zusammen, welche — eins aus ZN' , das andre aus NZ' herrührend — mit demselben Product von zweien der Buchstabengrößen a, b, c, a', b', c' multiplicirt sind. Entsprechend verfähre man bei der Bildung des Nenners $ZZ' + NN'$. Benutzt man dann zugleich den Buchstaben ξ , Gleichung (6), so wird:

$$(9) \quad \operatorname{tg} \frac{D_h - D_s}{\lambda} 2\pi = \frac{aa' \sin 6\xi + (ab' - a'b) \sin 4\xi + (ac' - a'c - bb' + cc') \sin 2\xi}{aa' \cos 6\xi + (ab' - a'b) \cos 4\xi + (ac' - a'c - bb' - cc') \cos 2\xi - (bc' + b'c)},$$

wo der Zähler und Nenner der rechten Seite zur Abkürzung mit $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{N}$ bezeichnet werden sollen.

Behufs der Berechnung des Zählers $\mathfrak{Z}$ bedenke man, dass

$$\sin 6\xi = \sin 2\xi \cdot (3 - 4 \sin^2 2\xi).$$

Dann erhält man:

$$(10) \quad \mathfrak{Z} = \sin 2\xi \cdot (H - 4K \sin^2 \xi),$$

wo

$$H = 3aa'' + 2(ab' - a'b) + ac' - a'c - bb' + cc',$$

$$K = ab' - a'b + 4aa' \cos^2 \xi.$$

Diese beiden Grössen sind nun zu berechnen; zunächst H . Aus den Definitionsgleichungen (5) und (5') folgt:

$$\begin{aligned}aa' &= \frac{\cos^4 \nu \cdot \sin 2j}{2}; \\bb' &= \frac{1}{2} \sin(2\nu + 2j) \cdot (1 - \cos^2 \nu); \\cc' &= \frac{1}{2} \sin^2 \nu \cdot \cos^2 \nu \cdot \sin 2j; \\ab' - a'b &= \cos^2 \nu \cdot \sin \nu \cdot \cos(\nu + 2j); \\ac' - a'c &= \cos^3 \nu \cdot \sin \nu \cdot \cos 2j.\end{aligned}$$

Mit Hülfe dieser Werthe kann man successive bilden:

$$\begin{aligned}3aa' + cc' &= \frac{1}{2} \sin 2j \cdot \cos^2 \nu \cdot (1 + 2 \cos^2 \nu); \\3aa' + cc' + ac' - a'c &= \frac{1}{2} \sin 2j \cdot \cos^2 \nu + \cos^3 \nu \cdot \sin(\nu + 2j); \\3aa' + cc' + ac' - a'c + ab' - a'b &= \frac{1}{2} \sin 2j \cdot \cos^2 \nu + \cos^2 \nu \cdot \sin(2\nu + 2j); \\3aa' + cc' + ac' - a'c + ab' - a'b - bb' &= \\&= \cos^2 \nu \cdot \left\{ \frac{\sin 2j + \sin(2\nu + 2j)}{2} + \sin(2\nu + 2j) \right\} - \frac{1}{2} \sin(2\nu + 2j); \\H &= \sin(2\nu + 2j) \cdot (2 \cos^2 \nu - \frac{1}{2}).\end{aligned}$$

Ohne Schwierigkeit ergibt sich:

$$K = \cos^2 \nu \cdot \{ \sin \nu \cdot \cos(\nu + 2j) + 2 \cos^2 \nu \cdot \sin 2j \cdot \cos^2 \xi \}.$$

Diese Werthe von H und K wären in Gleichung (10) einzusetzen. Jetzt soll aber sogleich der specielle Werth $\nu = 120^\circ$ eingeführt werden; dann wird $H = 0$. Man erkennt also, dass die Tangente des Phasenunterschiedes beider Strahlen in Bezug auf $\sin \xi$ von der dritten Ordnung ist, und zwar *nur* für unseren Fall $\nu = 120^\circ$ (und für $\nu = 60^\circ$, was aber im Wesentlichen auf dasselbe hinauskommt). Es wird:

$$(11) \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{2} \sin^3 \xi \cdot \cos \xi \cdot \{ \sqrt{3} \cdot \cos 2j + \sin 2j \cdot (1 + 2 \sin^2 \xi) \}.$$

Zur Berechnung des Nenners $\mathfrak{N}$ (Gleichung (9)) bedenke man, dass:

$$\cos 6 \xi = 1 - 2 \sin^2 \xi - 4 \cos 2 \xi \cdot \sin^2 2 \xi.$$

Dann erhält man:

$$(12) \quad \mathfrak{N} = P - 2 Q \cdot \sin^2 \xi - 2 R \sin^2 2 \xi,$$

wo gesetzt ist:

$$\begin{aligned}P &= (a' + b' + c') \cdot (a - b - c), \\Q &= aa' - cc' + ac' - a'c - bb', \\R &= ab' - a'b + 2aa' \cdot \cos 2 \xi.\end{aligned}$$

Durch Einführung der Werthe für $a, b, \dots$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{2} \sin(4\nu + 2j); \\Q &= \frac{1}{2} \cos 2\nu \cdot \sin(2\nu + 2j); \\R &= \cos^2 \nu \cdot [\sin \nu \cdot \cos(\nu + 2j) + \cos^2 \nu \cdot \sin 2j \cdot \cos 2\xi].\end{aligned}$$

Diese Werthe wären in Gleichung (12) einzusetzen. Wir führen aber sofort den speciellen Werth $\nu = 120^\circ$ ein, und erhalten:

$$(13) \quad \Re = \frac{1}{4} \left\{ \sqrt{3} \cdot \cos 2j \cos^2 \xi \cdot (1 + 2 \sin^2 \xi) - \sin 2j \cdot (1 + \sin^2 \xi) \cdot (1 - 4 \sin^2 \xi \cdot \cos^2 \xi) \right\}.$$

Benutzt man die Werthe von β und $\Re$ aus Gleichung (11) und (13) in der Gleichung (9), so erhält man für den Phasenunterschied der 2 aus der Triade austretenden, senkrecht aufeinander polarisirten Strahlen die Gleichung:

$$(II) \quad \operatorname{tg} \frac{D_h - D_s}{\lambda} 2\pi = \frac{2 \sin^2 \xi \cos \xi \cdot \{ \sqrt{3} \cdot \cos 2j + \sin 2j \cdot (1 + 2 \sin^2 \xi) \}}{\{ \sqrt{3} \cdot \cos 2j \cdot \cos^2 \xi \cdot (1 + 2 \sin^2 \xi) - \sin 2j \cdot (1 + \sin^2 \xi) \cdot (1 - 4 \sin^2 \xi \cos^2 \xi) \}}.$$

§ 5.

Wann sich beide Strahlen zu 1 Circularstrahl zusammensetzen?

Die Formeln (I) und (II) ermöglichen es, den elliptischen Strahl, zu dem sich h_3 und s_3 im Allgemeinen zusammensetzen, genauer zu untersuchen. — Sollen beide einen Circularstrahl liefern, so ist die Erfüllung folgender 2 Bedingungen erforderlich:

- 1) Die Differenz des Ursprungs $D_h - D_s$ muss $(2m+1) \cdot \frac{\lambda}{4}$ betragen ($m = \text{ganze Zahl}$).
- 2) Die Amplituden müssen gleich sein.

In Folge der ersten Bedingung muss $\operatorname{tg} \frac{D_h - D_s}{\lambda} 2\pi = \infty$, also der Nenner des sub (II) stehenden Ausdrucks $= 0$ sein. Hieraus folgt:

$$(14) \quad \operatorname{tg} 2j = \frac{\sqrt{3} \cdot \cos^2 \xi \cdot (1 + 2 \sin^2 \xi)}{(1 + \sin^2 \xi) \cdot (1 - 4 \sin^2 \xi \cos^2 \xi)}.$$

In Folge der zweiten Bedingung muss nach Gleichung (8) $A_h^2 = \frac{1}{2}$ sein. Hieraus folgt nach Gleichung (I):

$$(14') \quad \operatorname{tg} 2j = - \frac{1 - 3 \sin^2 \xi}{\sqrt{3} \cdot \cos^2 \xi \cdot (1 + 2 \sin^2 \xi)}.$$

Weil beide Bedingungen zugleich bestehen, so müssen die 2 gefundenen Werthe von $\operatorname{tg} 2j$ einander gleich sein. Die hieraus entspringende Gleichung ergibt:

$$\sin^2 \xi = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}.$$

Resultat: Nur wenn die Dicke der Blättchen und die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Wellenebenen in ihnen solche Werthe haben, dass $\sin^2 \frac{\pi}{T} \left(\frac{1}{o} - \frac{1}{e} \right) d = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ ist, ist die Zusammensetzung beider aus

der Triade tretenden Strahlen zu 1 Circularstrahl überhaupt möglich. Sie tritt aber nur dann wirklich ein, wenn die Polarisationssebene des einfallenden Strahls mit dem Hauptschnitt des ersten Blättchens den aus Gleichung (14) oder (14') folgenden $\angle j$ bildet.

Weil, wie wir sehn werden, bei den wirklich hergestellten Glimmercombinationen $\sin^2 \xi$ einen viel kleineren Werth hat (etwas kleiner als 0,09 statt des obigen 0,794), *so tritt hier niemals ein Circularstrahl aus.*

§ 6.

Wann sich beide Strahlen zu einem geradlinig polarisirten zusammensetzen?

Soll die Schwingungsellipse in eine gerade Linie übergehen, so muss die Differenz des Ursprungs beider Componenten $m \cdot \frac{\lambda}{2}$ betragen (m = ganze Zahl). Hieraus folgt $\operatorname{tg} \frac{D_h - D_s}{\lambda} 2\pi = 0$, also nach Gleichung (II):

$$(15) \quad \sin^3 \xi \cdot \cos \xi \cdot [\sqrt{3} \cdot \cos 2j + \sin 2j \cdot (1 + 2 \sin^2 \xi)] = 0.$$

Diese Gleichung ist auf drei Arten erfüllbar, nämlich dadurch, dass der erste oder zweite oder dritte Factor verschwindet.

a) *Es sei $\sin \xi = 0$.* Wenn die Blättchen so beschaffen sind, dass diese Bedingung erfüllt ist, so ist der austretende Strahl unter allen Umständen geradlinig polarisirt. Wichtiger als das strenge Erfülltsein dieser Bedingung ist für unsere Untersuchung aber der Fall, *dass $\sin \xi$ nur einen kleinen Werth hat.* Dann tritt, welches auch das Azimuth j sein mag, ein elliptisch polarisirter Strahl aus, dessen Schwingungsellipse sehr gestreckt ist, der sich also nahezu wie ein geradlinig polarisirter Strahl verhält.

b) *Es sei $\cos \xi = 0$.* Obgleich dieser Werth den Phasenunterschied im Allgemeinen zu 0 macht, so darf man doch nicht schliessen, dass dies für jedes Azimuth j gilt. Denn für $j = 0$ und für $j = 90^\circ$ verwandelt sich Gleichung (II) in folgende:

$$\operatorname{tg} \frac{D_h - D_s}{\lambda} 2\pi = \frac{2 \cdot \sin^3 \xi}{\cos \xi \cdot (1 + 2 \sin^2 \xi)};$$

diese Gleichung lehrt aber, dass für $\cos \xi = 0$ die Differenz des Ursprungs beider Strahlen $(2m + 1) \frac{\lambda}{4}$ beträgt, so dass beide Strahlen jetzt sogar so weit als möglich davon entfernt sind, einen geradlinig polarisirten Strahl zu liefern. Bei dem wirklichen Glimmerpräparat ist übrigens $\cos \xi$ etwa = 0,95, so dass dieser Fall praktisch nicht in Betracht kommt.

c) Es sei der dritte Factor der Gleichung (15) = 0; so folgt:

$$(16) \quad \operatorname{tg} 2j = - \frac{\sqrt{3}}{1 + 2 \sin^2 \xi}.$$

Hieraus folgt, dass für jede Glimmertriade (jedes gegebene ξ) ein (durch Gleichung (16) bestimmter) $\angle j$ existirt, für welchen beide austretenden Strahlen sich zu einem geradlinig schwingenden zusammensetzen.

Ausser den genannten giebt es noch 2 specielle Fälle, in denen nur 1 geradlinig polarisirter Strahl austritt: nämlich wenn einer der beiden, resp. nach H_3 und S_3 polarisirten, Strahlen die Intensität 0, der andere also die Intensität 1 hat. Die Gleichungen (I) geben:

$$\varrho \cdot \cos 2j + \sigma \cdot \sin 2j = + \text{ oder } - 1,$$

je nachdem man A_k^2 oder $A_s^2 = 1$ setzt. Hier bedeutet:

$$\varrho = 1 - 3 \sin^2 \xi; \quad \sigma = \sqrt{3} \cdot \cos^2 \xi \cdot (1 + 2 \sin^2 \xi);$$

also

$$\varrho^2 + \sigma^2 = 4 \cdot (1 - \cos^2 \xi \cdot \sin^6 \xi).$$

Die gefundene Gleichung liefert:

$$(17) \quad \pm \sin 2j = \frac{1}{\varrho^2 + \sigma^2} \cdot \{ \sigma \pm \varrho \cdot \sqrt{\varrho^2 + \sigma^2 - 1} \}.$$

wo links + oder - zu nehmen ist, je nachdem A_k^2 oder $A_s^2 = 1$ gesetzt ward.

Diese Gleichung bestimmt jene Werthe des Azimuth j , für welche nur ein geradlinig (und zwar resp. nach H_3 oder S_3) polarisirter Strahl austritt.

Resultat: Sollen die 2 aus der Glimmertriade tretenden Strahlen sich für jedes Azimuth j zu einem möglichst gestreckt elliptisch (oder ganz geradlinig) schwingenden Strahl zusammensetzen, so muss $\sin \xi$ möglichst klein (oder genau = 0) sein. Ausserdem giebt es aber noch einige, durch die Gleichungen (16) und (17) bestimmte specielle Werthe des Azimuth j , für welche aus einer gegebenen Glimmertriade nur 1 geradlinig polarisirter Strahl austritt.

§ 7.

Ueber die durch die Glimmertriade bewirkte Drehung der Polarisationssebene.

Vermittelst der Gleichungen (I) und (II) liesse sich die Lage der Schwingungsellipse des austretenden Strahls ermitteln. Einfacher untersucht man diesen Strahl aber dadurch, dass man ihn durch eine Analysatorvorrichtung gehn lässt. Indem nun der elliptische Strahl in 2 geradlinige Componenten, bezüglich $\parallel$ schwingend der grossen

und der kleinen Ellipsenaxe, zerlegt werden kann, so erkennt man, dass der aus dem Analysator kommende Strahl das Maximum der Intensität dann besitzen wird, wenn die Polarisationssebene des Analysators zusammenfällt mit der Polarisationssebene derjenigen Componente, die $\parallel$ der grossen Ellipsenaxe schwingt. *Den Winkel, welchen jetzt die Polarisationssebene des Analysators mit der des Polarisators bildet, ist man — nach Analogie — berechtigt, als Drehungswinkel der Polarisationssebene des einfallenden Strahls, in Folge des Durchgangs durch die Glimmertriade, zu bezeichnen.* Behufs seiner Ermittlung berechnen wir zuerst die Intensität J des bei beliebiger Analysatorstellung aus letzterem tretenden Strahls, wobei α den $\angle$ der Polarisationssebenen von Polarisator und Analysator bedeutet, natürlich von P aus (vgl. die Figur) in demselben Sinne herum als $+$ gerechnet wie j . Darauf suchen wir jenen Werth von α , welcher die Intensität J zu einem Maximum macht.

Die Gleichung des den Analysator verlassenden Strahls ist:

$$y = h_3 \cdot \cos \beta + s_3 \sin \beta,$$

wo zur Abkürzung

$$(18) \quad j + 2\nu - \alpha = \beta$$

gesetzt ist, und wo h_3 und s_3 die in 2) angegebenen Werthe haben. Die Gleichung lässt sich auch so schreiben:

$$y = m \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{3d}{o} \right) + n \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{3d}{e} \right) + \\ + p \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \left(\frac{2}{o} + \frac{1}{e} \right) d \right) + q \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \left(\frac{1}{o} + \frac{2}{e} \right) d \right),$$

wo gesetzt ist:

$$m = \cos^2 \nu \cdot \cos j \cdot \cos \beta;$$

$$n = \cos^2 \nu \cdot \sin j \cdot \sin \beta;$$

$$p = \sin \nu \cdot \{ \cos \nu \cdot \cos j \cdot \sin \beta - \sin(\nu + j) \cos \beta \},$$

$$q = \sin \nu \cdot \{ \cos(\nu + j) \cdot \sin \beta - \cos \nu \cdot \sin j \cdot \cos \beta \}.$$

Dieser Strahl besteht, wie man sieht, aus 4 Strahlen von derselben Richtung und Schwingungsebene. Seine Intensität J , d. h. sein Amplitudenquadrat, findet sich nach Gleichung (3):

$$J = \left[m \sin \frac{2\pi}{T} \frac{3d}{o} + n \sin \frac{2\pi}{T} \frac{3d}{e} + p \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(\frac{2}{o} + \frac{1}{e} \right) d + q \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \left(\frac{1}{o} + \frac{2}{e} \right) d \right]^2 + \\ + \left[m \cos \frac{2\pi}{T} \frac{3d}{o} + n \cos \frac{2\pi}{T} \frac{3d}{e} + p \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \left(\frac{2}{o} + \frac{1}{e} \right) d + q \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \left(\frac{1}{o} + \frac{2}{e} \right) d \right]^2,$$

d. i. mit Benutzung des Buchstabens ξ (Gleichung (6)), und nach einer Entwicklung wie in § 3.:

$$J = (m+n+p+q)^2 - 4(mp+nq+pq)\sin^2\xi - 4(mq+np)\sin^22\xi - 4mn\sin^23\xi.$$

Die Berechnung der aus $m n p q$ zusammengesetzten Ausdrücke ergibt:

$$\begin{aligned}(m+n+p+q)^2 &= \cos^2\alpha; \\ 4mn &= r \cdot \sin 2\beta; \\ 4 \cdot (mp+nq+pq) &= g \sin 2\beta - h \cos 2\beta; \\ 4 \cdot (mq+np) &= k \sin 2\beta - l \cos 2\beta,\end{aligned}$$

wo folgende Bezeichnungen eingeführt sind:

$$(19) \quad \begin{cases} g = \cos^2\nu \cdot \sin 2\nu \cdot \cos 2j - \sin^2\nu \cdot \sin(2\nu+2j) - \sin^2\nu \cdot \cos^2\nu \cdot \sin 2j, \\ h = \sin 2\nu \cdot \sin(2\nu+2j), \\ k = \cos\nu \cdot \sin 2\nu \cdot \cos(\nu+2j), \\ l = \cos^2\nu \cdot \sin 2\nu \cdot \sin 2j, \\ r = \cos^4\nu \cdot \sin 2j. \end{cases}$$

Drückt man jetzt $\sin^22\xi$ und $\sin^23\xi$ nur mittelst Potenzen von $\sin^2\xi$ aus und fasst alle mit $\sin 2\beta$ multiplicirten Glieder zusammen, ebenso alle mit $\cos 2\beta$ multiplicirten, so wird:

$$(20) \quad J = \cos^2\alpha - P \cdot \sin^2\xi \cdot \sin 2\beta + Q \cdot \sin^2\xi \cdot \cos 2\beta;$$

wo gesetzt ist:

$$(21) \quad \begin{cases} P = g + 4k + 9r - 4(k+6r)\sin^2\xi + 16r\sin^4\xi; \\ Q = h + 4l - 4l\sin^2\xi. \end{cases}$$

Um nun jenen Werth von α zu ermitteln, für welchen J ein Maximum wird, bildet man $\frac{\partial J}{\partial \alpha}$, — wobei zu beachten, dass nach Gleichung (18) $\beta = j + 2\nu - \alpha$, während P, Q, ξ frei von α sind, — und setzt es = 0. Daraus folgt die Gleichung:

$$(22) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\sin^2\xi \cdot \{P \cdot \cos(4\nu+2j) + Q \sin(4\nu+2j)\}}{1 - 2\sin^2\xi \cdot \{P \cdot \sin(4\nu+2j) - Q \cos(4\nu+2j)\}}.$$

Dies ist die Bedingungsgleichung für den Eintritt sowohl des Maximums als des Minimums. In der That weiss man von vornherein, dass beide bei zwei aufeinander senkrechten Stellungen der Polarisations-ebene des Analysators eintreten (bei denen nämlich die eine und die andere Axe der Schwingungsellipse in diese Polarisations-ebene fällt). Hat also J für einen gewissen Winkel α' sein Maximum, wobei Gleichung (22) durch dieses α' befriedigt werden muss, so wird dieselbe Gleichung, wie man sieht, auch durch $\alpha' + 90^\circ$ befriedigt.

Wenn $\sin \xi = 0$, wie es z. B. bei Anwendung von nicht doppeltbrechenden Blättchen der Fall ist, so darf natürlich keine Drehung der

Polarisationsebene eintreten: dann entspricht also dem Intensitätsmaximum der Werth $\alpha = 0$, dem Minimum der Werth $\alpha = 90^\circ$.

Wenn aber $\sin \xi$ klein ist, wodurch auch $\operatorname{tg} 2\alpha$ klein wird (denn P und Q sind ihrer Natur nach stets endliche Grössen), so entspricht — wegen der Continuität — dem Maximum der kleine Werth von α , dem Minimum der um 90° grössere.

In dem Specialfall $\nu = 120^\circ$ wird:

$$(19') \quad \begin{cases} g = \frac{3}{16} \sin 2j + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos 2j; & h = \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2j + \frac{3}{4} \cos 2j; \\ k = -\frac{3}{8} \sin 2j - \frac{\sqrt{3}}{8} \cos 2j; & l = -\frac{\sqrt{3}}{8} \sin 2j; & r = \frac{1}{16} \sin 2j; \end{cases}$$

folglich:

$$(21') \quad \begin{cases} P = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(2j + 120^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2j \cdot \sin^2 \xi + \sin 2j \cdot \sin^4 \xi; \\ Q = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(2j + 120^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2j \cdot \sin^2 \xi, \end{cases}$$

Einsetzung dieser Werthe in Gleichung (22) liefert für den Drehungswinkel α der Polarisationsebene nach Durchgang durch die Glimmertriade die Gleichung:

$$(III) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sqrt{3} \cdot \sin^2 \xi \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \xi + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin 2j \cdot \cos(2j + 120^\circ) \cdot \sin^4 \xi \right\}}{1 - \frac{3}{2} \sin^4 \xi - 2 \cdot \sin 2j \cdot \sin(2j + 120^\circ) \cdot \sin^6 \xi}.$$

§ 8.

Discussion der Formel (III).

a) *Drehungssinn.* Für kleinere Werthe von $\sin^2 \xi$ ist $\operatorname{tg} 2\alpha$ klein und positiv, also der Drehungswinkel α ein zwischen 0 und 90° liegender positiver Winkel. (Vergl. die Figur auf Seite 508.) Die Drehung der Polarisationsebene erfolgt also in demselben Drehungssinn, in welchem die Blättchen bei der Aufsichtung um 120° gegeneinander gedreht sind, so dass hiernach rechts- und linksdrehende Glimmertriaden unterschieden werden müssen. Dies bestätigen meine Beobachtungen an einer Glimmertriade, die ich an einem anderen Orte ausführlich mittheilen werde.

b) *Der Zahlwerth von $\sin \xi$* ist von wesentlichem Einfluss auf die Erscheinung. Wäre er $= 0$, so würde zwar (nach § 6., a) ein vollkommen geradlinig polarisirter Strahl austreten; seine Polarisationsebene würde aber, nach Gleichung (III), gar keine Drehung erlitten haben. Weil bei dem wirklichen Glimmerpräparat eine Drehung erfolgt (und zwar für jede Farbe), so kann hier $\sin \xi$ für keine Farbe

= 0 sein. Zur Ermittlung des Zahlwerths, ohne die unbequeme Bestimmung der optischen Constanten des angewandten Glimmers ausführen zu müssen, verfuhr ich so: Ich liess Sonnenlicht durch den Polarisator, die Glimmertriade und den Analysator gehn, zerlegte es dann durch ein Prisma, und beobachtete die Drehung der Polarisations-ebene einer bestimmten Farbe (Broch's Methode); *und zwar für das Azimuth $j=0$ oder $j=90$.* Der beobachtete Drehungswinkel α muss die Gleichung (III) erfüllen, welche in diesem Falle die Gestalt annimmt:

$$(III') \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sqrt{3} \cdot \sin^2 \xi \cdot \left\{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \xi\right\}}{1 - \frac{3}{2} \sin^4 \xi}.$$

Von den aus dieser quadratischen Gleichung folgenden 2 Werthen für $\sin^2 \xi$ erweist sich nur einer als brauchbar, indem der andere > 1 ist. Für die Fraunhofer'schen Linien D und F ergab sich $\sin^2 \xi$ nicht sehr verschieden, nämlich nach vorläufigen Versuchen etwas kleiner als 0,09.

c) *Einfluss des Azimuths j .* Die Grösse der Drehung ist nur wenig verschieden für Strahlen mit verschiedenem Azimuth j , denn in Gleichung (III) sind die Glieder ersten und zweiten Grades bezüglich $\sin^2 \xi$ gänzlich frei von j ; Functionen von j finden sich erst mit der dritten Potenz der kleinen Grösse $\sin^2 \xi$ multiplicirt. Einen viel grösseren Einfluss hat das Azimuth j auf die Gestalt der Schwingungsellipse des aus der Triade tretenden Strahls, d. h. darauf, ob sich letzterer mehr oder weniger dem geradlinig polarisirten Zustand nähert. Denn in der Bestimmungsgleichung (II) für die Phasendifferenz findet sich gar kein von j freies Glied. Allerdings ist die Phasendifferenz überhaupt klein, da $\operatorname{tg} \frac{D_A - D_s}{\lambda} 2\pi$ den Factor $\sin^3 \xi$ enthält, und schon $\sin^2 \xi$ nicht gross ist. Daher kann die Schwingungsellipse einem Kreise nie sehr nahe kommen.

Diese Folgerungen finden sich durch meine Versuche bestätigt.

d) *Abhängigkeit der Erscheinung von der Farbe.* Wegen der Kleinheit von $\sin^2 \xi$ kann man in erster roher Näherung in Gleichung (III) alle Glieder mit höheren Potenzen fortlassen und $\sin^2 \xi$ selbst durch ξ^2 ersetzen; und weil gleichzeitig $\operatorname{tg} 2\alpha$ klein sein muss, so kann man es ebenfalls durch 2α ersetzen, so dass sich der Drehungswinkel als angenähert proportional mit ξ^2 ergibt. Nun ist aber $\xi = \frac{\pi d}{\lambda} \left(\frac{V}{o} - \frac{V}{e} \right)$, was aus Gleichung (6) folgt, wenn dort Zähler und Nenner mit V (Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Luft) multiplicirt, und $V \cdot T$ durch λ (Wellenlänge in Luft) ersetzt wird. Nimmt man nun in erster Näherung den Zähler des Werths von ξ als constant für die ver-

schiedenen Farben an, so ist ξ umgekehrt proportional mit der Wellenlänge, also *der Drehungswinkel* (in roher Näherung) *umgekehrt proportional dem Quadrat der Wellenlänge*. Dies bestätigen meine Messungen vollständig.

Gleichung (II) lehrt, dass die Phasendifferenz, und somit die Gestalt der Schwingungsellipse, ebenfalls wesentlich von der Wellenlänge abhängt. Uebereinstimmend hiermit lehren die Beobachtungen, dass bei festgehaltenem Azimuth j die Annäherung der verschiedenfarbigen Strahlen an den Zustand der geradlinigen Polarisirung eine durchaus verschiedene ist.

§ 9.

Glimmercombinationen aus mehr als 3 Blättchen.

a) *Die Combination bestehe aus $3n$ Blättchen* (n = ganze Zahl), gegen einander um 120° gedreht, so dass sie als aus n Triaden aufgeschichtet angesehen werden kann. Weil die durch eine Triade bewirkte Drehung mit Annäherung als unabhängig vom Azimuth j angesehen werden kann (§ 8., c), so kann die Drehung nach dem Durchgange des Strahls durch n congruente Triaden nicht sehr verschieden sein von dem n -fachen Betrage der durch die erste Triade erzeugten Drehung. Dies lehrt wirklich die Beobachtung an einer von Herrn Steeg hergestellten Combination von 8 Triaden, im Vergleich mit einer einzelnen, aus möglichst eben solchen Blättchen construirten, Triade. — Die Beobachtungen an der Combination aus 24 Blättchen zeigen ferner, dass auch hier der Drehungswinkel mit Näherung umgekehrt proportional dem Quadrat der Wellenlänge ist, und ausserdem, dass er einigermassen vom Azimuth des einfallenden Strahls abhängt. — Besonders deutlich stellt sich ferner heraus, dass die verschiedenen Farben sehr verschieden elliptisch polarisirt sind, indem (bei den meisten Azimuthen) jedesmal *eine* Farbe dem Zustande der geradlinigen Polarisirung am nächsten kommt, während ihre Nachbarfarben nach beiden Seiten des Spektrums hin sich mehr und mehr von diesem Zustande entfernen.

b) *Die Combination bestehe aus $3n + 1$ oder $3n + 2$ Blättchen*, gegen einander um 120° gedreht. Ihr Verhalten kann sich nicht wesentlich von dem einer aus n Triaden gebildeten Combination unterscheiden. Das folgt aus der Untersuchung der Drehungen, welche der Durchgang durch ein Blättchen, sowie durch 2 unter 120° gedrehte Blättchen, bewirkt.

Man findet für die Intensität des durch 1 Blättchen und dann durch den Analysator gegangenen Strahls den Werth:

$$J_1 = \cos^2 \alpha - \sin 2j \cdot \sin (2j - 2\alpha) \cdot \sin^2 \xi.$$

Hieraus folgt für den Drehungswinkel α die Gleichung:

$$(23) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 4j \cdot \sin^2 \xi}{1 - 2 \sin^2 2j \cdot \sin^2 \xi}.$$

Die Intensität eines durch 2 (unter ν^0 gedrehte) Blättchen und dann durch den Analysator gegangenen Strahls erhält man durch analoge Betrachtungen wie im § 7.:

$$J_2 = \cos^2 \alpha - P' \cdot \sin 2\beta' \cdot \sin^2 \xi + Q' \cdot \cos 2\beta' \cdot \sin^2 \xi,$$

wo gesetzt ist:

$$P' = \sin 2\nu \cdot \cos 2j + 4 \sin 2j \cdot \cos^2 \nu \cdot \cos^2 \xi;$$

$$Q' = \sin 2\nu \cdot \sin 2j; \quad \beta' = j + \nu - \alpha.$$

Hieraus folgt für die durch diesen Durchgang erzeugte Drehung α die Gleichung:

$$(24) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \sin^2 \xi \cdot \{P' \cdot \cos(2\nu + 2j) + Q' \cdot \sin(2\nu + 2j)\}}{1 - 2 \sin^2 \xi \cdot \{P' \cdot \sin(2\nu + 2j) - Q' \cdot \cos(2\nu + 2j)\}},$$

welche bei $\nu = 120^0$ in folgende übergeht:

$$(25) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin^2 \xi \cdot \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{3} + 2 \cdot \sin 2j \cdot \cos(2j - 120^0) \cdot \cos^2 \xi \right\}}{1 - \sin^2 \xi \cdot \left\{ \frac{3}{2} + 2 \cdot \sin 2j \cdot \sin(2j - 120^0) \cdot \cos^2 \xi \right\}}.$$

Beiläufig sei bemerkt, dass diese Gleichung den Haupttheil der Theorie für diejenigen Erscheinungen enthält, welche die von Reusch a. a. O. sogenannte „*Stufe*“ darbietet.

Die Gleichungen (23) und (25) zeigen 1) dass die Drehung, welche der Durchgang durch 1 oder 2 Blättchen bewirkt, sehr stark vom Azimuth j abhängt, und 2) dass sie etwa proportional mit $\sin^2 \xi$ ist, somit klein ist, wenn diese Grösse klein ist. — Hat also der Strahl eine grössere Anzahl von Triaden durchlaufen, und geht dann noch durch 1 oder 2 Blättchen, so erfährt seine Polarisationssebene bei letzterem Durchgange noch eine weitere Drehung; die Grösse derselben ist zwar durch das Azimuth j , mit dem der Strahl den letzteren Durchgang beginnt, bedingt, sie ist jedoch jedenfalls klein, wenn $\sin^2 \xi$ kein ist, und kommt somit gegen diejenige Drehung wenig in Betracht, die schon vorher durch die sämmtlichen Triaden bewirkt war.

II. Abschnitt.

Die Drehung der Polarisationssebene im Quarz und in anderen Krystallen.

§ 10.

Uebergang von der Glimmercombination zum Quarz.

Bei der Anwendung der Gleichungen (II) und (III) des vorigen Abschnitts auf die wirklich hergestellte Glimmertriade hat sich gezeigt, dass sowohl der Drehungswinkel der Polarisationssebene, als auch namentlich das Axenverhältniss der Schwingungsellipse nicht ganz unabhängig vom Azimuth j sind, weil $\sin \xi$ einen zwar nicht grossen, aber doch keineswegs zu vernachlässigenden Werth hat.

Nehmen wir jetzt an, $\sin \xi$ sei so klein, dass seine sechste Potenz bereits vernachlässigt werden kann, so wird die Schwingungsellipse sehr gestreckt sein, weil die Phasendifferenz der zur elliptischen Schwingung sich zusammensetzenden Strahlen den Factor $\cdot \sin^3 \xi$ enthält (vgl. Gl. II). Die Drehung der Polarisationssebene aber wird jetzt ganz unabhängig vom Azimuth j , weil die Gleichung (III) unter obiger Voraussetzung in folgende übergeht:

$$(26) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \sqrt{3} \cdot \sin^2 \xi \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \xi \right\}.$$

Gehen wir noch weiter, und nehmen $\sin \xi$ so klein an, dass bereits seine dritte Potenz als verschwindend zu erachten ist, so wird sich die Schwingungsellipse des austretenden Strahls nicht mehr merklich von einer geraden Linie unterscheiden (vgl. Gl. II); Gleichung III aber, welche die Drehung der Polarisationssebene bestimmt, geht jetzt in folgende über:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \sqrt{3} \cdot \sin^2 \xi,$$

oder mit Einsetzung des Werthes für ξ nach Gleichung (6) und § 8. d:

$$(27) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \sqrt{3} \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi d(n_0 - n_e)}{\lambda} \right),$$

indem für $\frac{V}{0}$ und $\frac{V}{e}$ resp. n_0 und n_e geschrieben ist.

Die Bedingung, dass $\sin \xi$ äusserst klein ist, würde erfüllt sein, wenn die Blättchen so beschaffen wären, dass $\frac{(n_0 - n_e)d}{\lambda}$ äusserst wenig von einer ganzen Zahl verschieden wäre. — Dieselbe Bedingung ist aber auch dann erfüllt, wenn entweder die Blättchendicke (d), oder der Unterschied der beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in den Blättchen, oder beide zugleich so klein sind, dass $\frac{(n_0 - n_e)d}{\lambda}$ ein äusserst kleiner Bruch wird. Diese letztere Annahme soll fortan beibehalten

werden. Jetzt kann man wegen der Kleinheit von ξ und der daraus folgenden Kleinheit von α (siehe die Bemerkung zu Gleichung (22) am Ende von § 7.) für $\sin$ und tg die Bogen selbst setzen, so dass Gleichung (27) übergeht in:

$$\alpha = \frac{\sqrt{3} \cdot \pi^2 \cdot d^2 \cdot (n_0 - n_e)^2}{2 \cdot \lambda^2},$$

oder wenn für den Bogen α der zugehörige Winkel ω , in Graden gemessen, eingeführt wird:

$$(28) \quad \omega = \frac{90 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \cdot d^2 (n_0 - n_e)^2}{\lambda^2}.$$

Soviel beträgt die Drehung beim Durchgang durch 1 Triade. Jetzt sei eine grosse Anzahl (p) von congruenten Triaden aufeinander geschichtet: Dann beträgt die durch alle zusammen bewirkte Drehung, welche φ heisse, p mal soviel, denn die Einzeldrehung ist nach Gleichung (28) unabhängig vom Azimuth j . Also ist:

$$\varphi = \frac{p \cdot 90 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi d^2 (n_0 - n_e)^2}{\lambda^2}.$$

Die Dicke der einzelnen Triade heisse δ ; sie ist im Allgemeinen durchaus nicht gleich der dreifachen Blättchendicke, weil ja die Blättchen nicht unmittelbar aufeinander zu liegen brauchen (vgl. den Schluss von § 2.). Dann ist die Gesamtdicke der p Triaden, d. h. die Dicke der ganzen Blättchencombination $D = p \cdot \delta$. Setzt man also $\frac{D}{\delta}$ für p ein, und nennt die, bei unverändertem Zustande der Blättchencombination constante, von der Farbe unabhängige Grösse:

$$\frac{90 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \cdot d^2}{\delta} = K,$$

so erhält man für die *Drehung der Polarisationssebene in der Blättchencombination von der Dicke D* den Werth:

$$(VI) \quad \varphi = \frac{K \cdot D (n_0 - n_e)^2}{\lambda^2}.$$

Man erkennt, dass die *Drehung proportional ist mit der Dicke der Blättchencombination*. Setzt man ferner in erster Näherung $n_0 - n_e$ als constant für alle Farben voraus, — was darauf hinauskommt, nur die Doppeldrehung zu berücksichtigen, die mit der Brechung verbundene Farbenzerstreuung aber zu vernachlässigen — so zeigt sich die *Drehung umgekehrt proportional dem Quadrat der Wellenlänge*. Diese beiden Resultate stimmen nun vollständig mit den von Biot für die Drehung im Quarz aufgestellten Gesetzen überein, deren zweites überdies bekanntlich durchaus nicht streng richtig ist, wie es ja auch hier nur als angenähert richtig auftritt. Somit findet sich die von Reusch a. a. O. ausgesprochene Vermuthung, dass sich das Ver-

halten der Glimmercombination demjenigen des Quarz wohl um so mehr nähern werde, je dünner die Lamellen sind, hiermit auf das Vollständigste bestätigt.

Auf Grund des gewonnenen Resultats scheint die *Hypothese* nicht ungerechtfertigt, den Quarz als aus lauter congruenten, um 120° gegeneinander gedrehten, nach Art der optisch zweiaxigen Krystalle doppelbrechenden Blättchen aufgebaut anzusehen, ganz entsprechend der Glimmercombination von Reusch. Kennte man nun noch das Gesetz, nach welchem bei den einzelnen hypothetischen Blättchen des Quarz die Grösse $n_0 - n_e$ von der Wellenlänge abhängt, so lieferte Gleichung (IV) nicht nur den angenäherten, sondern den genauen Zusammenhang zwischen der Drehung und der Wellenlänge. In Ermangelung jener Kenntniss bleibt nichts übrig, als eine möglichst plausible Annahme zu machen, die jetzt begründet werden soll. — Von Mascart liegen Messungen über die den einzelnen Fraunhofer'schen Linien zugehörigen Werthe der Brechungsquotienten n_0 und n_e für Strahlen senkrecht zur Axe des Quarz vor*). Aus ihnen ist die dritte Spalte der folgenden Tabelle abgeleitet. Die Wellenlängen λ sind ebenfalls nach Mascart angegeben, jedoch nur soweit, als sie in der Rechnung von Einfluss sind. Sie beziehen sich auf Luft (wie stets λ in dieser ganzen Abhandlung).

Fraunhofer'sche Linien	Wellenlängen λ in Millimetern	$n_e - n_0$		Differenz
		beobachtet	berechnet	
A		0,00910		
a		0,00901		
B	0,000687	0,00903	0,00901	+ 0,00002
C	656	907	904	+ 3
D	589	915	912	+ 3
E	527	918	923	— 5
b	517	924	925	— 1
F	486	931	932	— 1
G	431	943	949	— 6
H	397	954	963	— 9
L	382	955	970	— 15
M	373	971	975	— 4
N	358	981	984	— 3
O	344	991	994	— 3
P	336	980	0,01000	— 20

*) Die Zahlen sind aus Ketteler's Abh. „Ueber d. Einfluss d. ponderablen Molek. auf d. Dispersion“. Poggend. Ann. d. Phys. Bd. 140, Seite 50 entnommen.

Der Werth von $n_e - n_0$ ist nicht merklich verschieden, mag man unter den n die Brechungsquotienten aus dem leeren Raum oder aus Luft in Quarz verstehen.

Wie man sieht, ist es für diese Richtung wirklich in erster Näherung erlaubt, $n_e - n_0$ constant ($= 0,00942$) zu setzen. In zweiter Näherung lässt sich die Gesammtheit der für $n_e - n_0$ gefundenen Zahlen durch eine zweigliedrige Interpolationsformel von der Gestalt:

$$n_e - n_0 = \alpha + \frac{\beta}{\lambda^2}$$

wiedergeben, wo die Constanten α und β etwa die Zahlwerthe 0,00870 und $\frac{0,01466}{10^5}$ haben. (Diese Zahlen sind nicht streng abgeleitet, sondern durch Probiren gefunden.) Die aus dieser Formel berechneten Werthe stehn in der vorletzten Spalte der Tabelle, die Differenz der beobachteten und berechneten Werthe in der letzten. —

Jetzt machen wir die einfache Annahme, dass für die bei uns in Betracht kommenden Strahlen, welche die hypothetischen Blättchen senkrecht durchdringen, die den verschiedenen Farben entsprechenden Werthe von $n_e - n_0$ durch eine Interpolationsformel von derselben Gestalt:

$$n_e - n_0 = a + \frac{b}{\lambda^2}$$

darstellbar sind. Dann nimmt Gleichung (IV) die Gestalt an:

$$(29) \quad \varphi = KD \cdot \left\{ \frac{a^2}{\lambda^2} + \frac{2ab}{\lambda^4} + \frac{b^2}{\lambda^6} \right\}.$$

Diese Formel stimmt nun in vorzüglicher Weise mit der besten bisher für die Drehung im Quarz aufgestellten empirischen Formel überein, welche für eine Quarzplatte von 1^{mm} Dicke lautet (vgl. Boltzmann a. a. O.):

$$(30) \quad \varphi = \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \frac{D}{\lambda^6} + \dots$$

Von dieser Formel benutzt aber Boltzmann bei der wirklichen Zahlenrechnung nur die zwei ersten Glieder, in denen $B = \frac{7,07018}{10^6}$, $C = \frac{0,14983}{10^{12}}$ ist. Um das Grössenverhältniss des Hauptgliedes $\frac{B}{\lambda^2}$ zu dem Correctionsgliede $\frac{C}{\lambda^4}$ besser zu übersehn, schreiben wir die Boltzmann'sche Formel so:

$$(31) \quad \varphi = \frac{7,07018}{10^6 \cdot \lambda^2} \cdot \left\{ 1 + \frac{0,02119}{10^6 \cdot \lambda^2} \right\}.$$

Machen wir nun betreffs $n_e - n_0$ noch die weitere Annahme, die zwar einfach, aber freilich im Uebrigen nicht weiter begründet ist, — dass die Constanten a und b sogar dasselbe Grössenverhältniss haben, wie die entsprechenden Constanten α und β bei Strahlen senkrecht zur Axe, d. h. setzen wir:

$$a = \mu \cdot \alpha; \quad b = \mu \cdot \beta,$$

wo μ eine constante Zahl ist, so folgt aus Gleichung (29):

$$\varphi = \frac{K \cdot (\mu \alpha)^2 \cdot D}{\lambda^2} \cdot \left\{ 1 + 2 \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \cdot \frac{1}{\lambda^4} \right\},$$

oder mit Einsetzung der obigen angenäherten Zahlwerthe für α und β :

$$(32) \quad \varphi = \frac{K(\mu \alpha)^2 \cdot D}{\lambda^2} \cdot \left\{ 1 + \frac{0,0337}{10^6 \cdot \lambda^2} + \frac{0,0002839}{10^{12} \cdot \lambda^4} \right\}.$$

Man erkennt, dass in dieser Gleichung das erste Correctionsglied nicht nur von derselben Grössenordnung ist, wie in der Boltzmann'schen Formel (31), sondern dass es sogar keinen allzuverschiedenen Zahlwerth besitzt, was um so mehr überraschen muss, als unsere beiden Annahmen über die für $n_e - n_o$ zu wählende Function fast nur ihrer Einfachheit wegen gemacht wurden. — Das letzte Glied der Formel (32) ist schon ganz unmerklich; denn setzt man für λ den mittleren Werth 0,0005, so findet man den Werth dieses dritten Gliedes in der Klammer = 0,000018, dessen Vernachlässigung gegen 1, den Beobachtungen gegenüber, vollständig gerechtfertigt ist.

Hiermit ist gezeigt, dass aus der über die Structur des Quarz gemachten Hypothese die Drehung der Polarisationssebene mit Nothwendigkeit folgt, und dass sich auch das *genaue* Gesetz für diese Drehung ohne Schwierigkeiten ableiten lässt.

§ 11.

Ueber die Structur der optisch drehenden Krystalle im Allgemeinen.

Sieht man sich nach anderweitigen Thatsachen um, welche geeignet sind, obige Hypothese von der Quarzstructur zu stützen, so weist vor Allem das Auftreten der Trapezflächen, welche den Quarz schon äusserlich als von rechts oder links gedrehter Beschaffenheit erkennen lassen, auch auf einen inneren schraubenförmigen Bau hin. Die wahre Berechtigung erwächst jener Hypothese aber erst aus der neuerdings von mir entwickelten allgemeinen *Theorie der Krystallstructur**), deren Grundgedanke nebst einigen hergehörigen Einzelheiten hier noch angedeutet werden soll.

Als Grundhypothese dient der Satz: *In jedem Krystall sind die Moleküle so geordnet, dass ihre Schwerpunkte ein regelmässiges Punktsystem bilden.* Hier fordert der Begriff des regelmässigen Punkt-

*) Die unbegrenzten regelmässigen Punktsysteme als Grundlage einer Theorie der Krystallstructur. Carlsruhe. Braun'sche Hofbuchh. 1876. — Im Auszuge Poggend. Annalen. Erg. Bd. VII.

systems noch eine Erklärung. Mit Rücksicht auf die gegen den Molekularabstand ungemein grossen Dimensionen jedes sichtbaren Krystalls denke man sich das Punktsystem als von grenzenloser Ausdehnung; *regelmässig ist es nun dann, wenn um jeden Punkt des Systems alle anderen ebenso liegen, wie um jeden anderen*, so dass keiner irgend eine Besonderheit vor den anderen voraus hat. Untersucht man nun rein geometrisch, was für verschiedene Arten von regelmässigen unendlichen Punktsystemen es überhaupt nur geben kann, so findet man 54 wesentlich verschiedene Systeme mit zahlreichen Varietäten. Diese sämtlichen Systeme lassen sich nach dem Charakter der ihnen innewohnenden Symmetrie in 8 Gruppen zusammenfassen, welche den bekannten Krystallsystemen vollständig entsprechen. Hierbei ist das rhomboëdrische Krystallsystem als ein eigenes neben das hexagonale gestellt, und die Halbflächenner des regulären Systems, (welche in der Bravais'schen Theorie der Krystallstructur nur vermöge einer Hülfshypothese Platz finden), treten als gleichberechtigtes eigenes Krystallsystem neben den Vollflächennern auf. Auch alle übrigen geometrischen und physikalischen Eigenschaften der Krystalle finden ihre Analogie in den geometrischen Eigenschaften jener Punktsysteme.

Nun finden sich unter den regelmässigen Punktsystemen nicht wenige mit einer *schraubenförmigen* Anordnung der Punkte. Legt man durch einen Punkt eines solchen Systems senkrecht zur Schraubenaxe eine Ebene, so ist sie in ihrer unendlichen Ausdehnung mit unendlich vielen Punkten besetzt; sie heisse eine „*Molekularebene*“. In den einfachsten Fällen besteht dann das ganze schraubenförmige Punktsystem aus lauter äquidistanten, zur Schraubenaxe senkrechten, congruent besetzten Molekularebenen, deren jede folgende gegen die vorhergehende immer um denselben Winkel (von 120° oder 60° oder 90°) in demselben Sinn gedreht ist. Solche Systeme bieten also die überraschendste Analogie zu der Glimmercombination mit unendlich dünnen Blättchen dar. Sie unterstützen obige Hypothese von der Quarzstructur in hohem Grade.

In complicirteren Fällen treten an die Stelle jeder solchen Molekularebene zwei derselben, congruent und parallel besetzt, jedoch so, dass im Allgemeinen die Punkte der einen nicht vertical über denen der anderen liegen. Dann ist jedes solche Ebenenpaar gegen das vorhergehende um stets denselben Winkel gedreht. Umstehende Figur stellt z. B. einen Theil der Projection des dreizähligen Doppelschraubensystems auf eine Molekularebene vor. Darin bedeuten die Endpunkte der mit „1“ bezeichneten kurzen Seiten der Sechsecke die Projectionen der Punkte eines solchen Ebenenpaares, die Endpunkte der mit „2“ und der mit „3“ bezeichneten kurzen Seiten die Projectionen der Punkte des nächsten und des drittfolgenden Ebenenpaares, welche

gegen das erste um 120° und nochmals 120° um eine zur Zeichnungsebene senkrechte, durch den Mittelpunkt eines Sechsecks gelegte Axe gedreht sind. Jedes Sechseck ist also die Projection der Punkte einer dreizähligen, mit Punktpaaren besetzten, unendlichen Schraube. — Weil jedes einzelne Ebenenpaar den geometrischen Charakter des monoklinen Krystallsystems besitzt, so ist es vollständig geeignet, die Stelle des einzelnen doppelbrechenden Blättchens der Reusch'schen Glimmercombination zu vertreten. Indess soll nicht behauptet werden, dass gerade dieses Punktsystem der Structur des Quarz zu Grunde liegen müsse.

Es ist wichtig hervorzuheben, dass nur in zweien von den genannten 8 Gruppen keine schraubenförmigen Punktsysteme auftreten, nämlich in den dem triklinen und monoklinen Krystallsysteme entsprechenden. *Im regulären Krystallsystem fehlen sie nicht*; dies ist z. B. für das Verständniss des Drehvermögens des chlorsauren Natrons von Wichtigkeit.

Wenn in vorstehender Abhandlung der Versuch gemacht ist, das optische Drehvermögen von Krystallen aus ihrer Structur abzuleiten, so ist dieser Versuch doch weit entfernt, eine fertige Theorie jener Erscheinung zu sein. Eine solche wird vielmehr von den Aether-Bewegungsgleichungen auszugehen haben, welche mit Rücksicht auf die schraubenförmige Anordnung der Körpermoleküle zu bilden sind; und zwar werden — auf Grund des Briot'schen Beweises, dass eine *einfach* schraubenförmige Anordnung der Aethertheilchen zur Erklärung der Erscheinung unvermögend sei, — vermuthlich die complicirteren unter den regelmässigen schraubenförmigen Punktsystemen zu Grunde gelegt werden müssen. —

Carlsruhe, den 20. November 1875.