

## Sur l'application des séries de M. Lindstedt à l'étude du mouvement des comètes périodiques.

Par *H. v. Zeipel.*

### Introduction.

Il est bien connu que dans le calcul du mouvement des planètes on peut se servir de certaines séries appelées par M. Poincaré les séries de M. Lindstedt. Les éléments des planètes se trouvent ainsi développés suivant les puissances d'une petite quantité  $\mu$  de l'ordre des masses planétaires. Les coefficients des diverses puissances de  $\mu$  sont des séries de Fourier d'un certain nombre d'arguments dépendant linéairement du temps. Dans les séries dont il s'agit on suppose essentiellement que les masses des planètes sont assez petites par rapport à celle du Soleil. Mais, dans les applications faites jusqu'ici, il a été admis aussi que les excentricités et les inclinaisons des orbites sont petites. Les séries de M. Lindstedt sont semiconvergentes. Etant donnée ensuite leur forme purement trigonométrique, il est à espérer qu'elles représenteront le mouvement des planètes avec une très grande approximation pendant des espaces de temps extrêmement longues.

En essayant d'étudier au moyen de séries analogues le mouvement dans un système planétaire, les excentricités et les inclinaisons étant quelconques, on se heurte à la difficulté de résoudre d'une manière générale les équations des variations séculaires. Quand le degré de liberté de ces équations dépasse l'unité, l'intégration ne peut encore être effectuée que dans les voisinages des valeurs maxima et minima de la partie séculaire  $R$  de la fonction perturbatrice. On sait que la fonction  $R$  est minima, quand les excentricités et les inclinaisons s'annulent. C'est à cause de cette propriété de la fonction  $R$  qu'il est possible de former les séries de M. Lindstedt représentant le mouvement des planètes, dont les excentricités et les inclinaisons sont petites. Mais la fonction  $R$  possède souvent d'autres maxima et minima. Quand la valeur de  $R$  est voisine d'une telle valeur maxima ou minima, il est encore possible de calculer des séries de M. Lindstedt représentant le mouvement. Dans les orbites ainsi obtenues les excentricités et les inclinaisons peuvent être considérables. C'est cela que je me propose de montrer dans ce mémoire.

Pour ne pas trop compliquer l'exposition je me limiterai d'abord à un cas spécial en admettant qu'une masse infiniment petite (astéroïde, comète, satellite ou météorite) est attirée par le Soleil et par une planète perturbatrice se mouvant autour du Soleil dans un cercle. Dans l'étude du mouvement d'un tel corps on est ramené à un système canonique d'équations différentielles ayant trois degrés de liberté

et rentrant dans le type général d'équations, qui a été étudié par M. Poincaré dans son travail «Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste», t. II, Chapitre XI. Les équations des variations séculaires forment un système canonique, dont le degré de liberté est l'unité. Elles peuvent donc être intégrées au moyen d'une quadrature et par des séries trigonométriques d'un seul argument. Mais quoique l'existence de ces séries est démontrée, on ne sait pas en général comment former analytiquement leurs coefficients. Ainsi, en cherchant de calculer les séries de M. Lindstedt, on est forcé, même dans ce cas relativement simple, de limiter le problème et d'admettre qu'on se trouve dans le voisinage d'une valeur maxima ou minima de la partie séculaire de la fonction perturbatrice.

Au chapitre II nous montrons comment les séries de M. Lindstedt peuvent alors être calculées. La méthode y exposée a l'avantage de pouvoir être appliquée dans la pratique.

Dans le chapitre suivant se trouvent quelques études sur la fonction  $R$  nécessaires ou utiles pour les recherches des maxima et minima de cette fonction.

Les recherches sur les maxima et les minima de la partie séculaire de la fonction perturbatrice, exposées au chapitre IV, prouvent que des orbites à grandes inclinaisons et ayant des excentricités toujours petites ne peuvent exister qu'en dehors de la planète perturbatrice. A l'intérieur de l'orbite de cette planète il ne peut y avoir des astéroïdes ayant des inclinaisons dépassant une certaine limite, fonction du rapport  $\alpha$  des deux grands axes. Cette limite est d'environ  $39^\circ$  auprès du Soleil, décroît quand  $\alpha$  augmente et s'annule quand  $\alpha = 1$ . Pour les orbites à grandes inclinaisons et à l'intérieur de la planète perturbatrice la limite supérieure de l'excentricité est considérable — même si la limite inférieure est petite — et se rapproche de l'unité, quand l'inclinaison est voisine de  $90^\circ$ . Une telle orbite sera sous certaines conditions bouleversée par la planète perturbatrice.

Je dis, par définition, qu'une orbite est stable (ou que le mouvement y est stable), si elle ne coupe jamais ni le Soleil ni l'orbite de la planète perturbatrice et si le rayon vecteur reste toujours au dessous d'une limite fixe et finie.

Les études mentionnées au chapitre IV m'ont permis aussi d'établir qu'il peut exister des orbites de comètes à mouvement stable dépendant de 6 constantes arbitraires d'intégration.

J'en ai trouvé plusieurs types différents. Pour toutes ces orbites le grand axe, l'excentricité et l'inclinaison ne sont que peu variables; et la longitude du nœud possède toujours un moyen mouvement. Quant à la distance  $g$  du périhélie au nœud il y a un premier type de comètes à mouvement stable, pour lequel  $g$  est toujours voisine de  $\pm 90^\circ$ , un second type, pour lequel  $g$  est toujours rapprochée de  $0^\circ$  ou de  $180^\circ$  et enfin un troisième type, dans lequel cet angle  $g$  est animé d'un moyen mouvement.

Les résultats, auxquels nous sommes arrivés dans le cas simple, où il n'y a qu'une seule planète perturbatrice, sont valables aussi dans le cas plus général, où une masse infiniment petite est attirée par le Soleil et par un certain nombre de planètes, dont les masses, les excentricités et les inclinaisons sont petites.

L'étude des perturbations séculaires dans ce cas général nous a conduit au théorème suivant:

Pour que l'excentricité de l'orbite de la masse infiniment petite, étant petite à un certain moment, reste toujours petite, il faut et il suffit que l'inclinaison soit située entre certaines limites, qui sont fonctions des masses planétaires et des rapports des grands axes.

Une résistance faible contre le mouvement, qui a pour effet de diminuer le grand axe et l'excentricité, tend donc aussi à établir certaines limites pour l'inclinaison.

Nous avons démontré aussi que les séries de M. Lindstedt peuvent être appliquées à l'étude du mouvement des comètes dans le système solaire si les éléments se trouvent dans le voisinage de certaines valeurs qui rendent maxima ou minima la partie séculaire  $R$  de la fonction perturbatrice. Si l'orbite de la comète est instable, les séries en question ne sont valables que pour le temps entre deux captures consécutives de la comète par une planète. Il est ainsi possible de calculer des séries d'une forme purement trigonométrique qui représenteront le mouvement de plusieurs des comètes périodiques pendant des espaces de temps beaucoup plus étendues que celles pendant lesquelles sont valables les méthodes anciennes. Il semble notamment que les méthodes exposées peuvent être employées pour les comètes Encke, Halley, Tuttle, Pons-Brooks et Olbers.

Chapitre I.

Equations différentielles du mouvement.

1. Les recherches suivantes ont pour but d'étudier le mouvement d'une masse infiniment petite (astéroïde, comète, satellite ou météorite), qui est attirée par le Soleil et par un certain nombre de planètes, dont les masses, les excentricités et les inclinaisons sont petites. D'abord nous simplifierons la question en admettant qu'il y a une seule planète perturbatrice (Jupiter) et que cette planète se meut autour du Soleil dans un cercle.

Soient  $x, y, z, r$  les coordonnées rectangulaires et le rayon vecteur de la comète dans un système de coordonnées dont l'origine est au centre du Soleil, et dont l'axe des  $z$  est perpendiculaire à l'orbite de Jupiter. Choisissons comme unité de longueur la distance de Jupiter au Soleil, comme unité de masse la somme des masses du Soleil et de Jupiter

et -fixons l'unité du temps de sorte que la constante  $f$  de Gauss soit  $= 1$ . Soit enfin  $\mu$  la masse de Jupiter et  $H$  l'angle au Soleil entre les rayons vecteurs menés vers la comète et vers Jupiter. Alors les équations du mouvement de la comète peuvent s'écrire:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x'} & \frac{dx'}{dt} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y'} & \frac{dy'}{dt} &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z'} & \frac{dz'}{dt} &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{aligned} \right\} (1)$$

où

$$\Phi = -\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) + \frac{1}{r} + \mu \left( \frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos H + r^2}} - r \cos H - \frac{1}{r} \right).$$

(Voir par ex. Tisserand, *Traité de Méc. Cél.*, t. I, p. 75).

Nous allons introduire comme variables les éléments canoniques\*, définies de la manière suivante. Imaginons un point mobile attiré par un centre fixe par une force de la grandeur  $\frac{1}{r^2}$ ,  $r$  étant la distance du point mobile au centre fixe. Le point mobile décrit alors une section conique autour du centre fixe comme foyer d'après les lois de Kepler. Admettons que l'orbite soit une ellipse et soient  $a, e, I, l, g, \theta$  ses éléments Keplériens de sorte que  $a$  est le demi grand axe,  $e$  l'excentricité,  $I$  l'inclinaison,  $l$  l'anomalie moyenne du point mobile,  $g$  la distance du périhélie au nœud ascendant et  $\theta$  la longitude de ce nœud. Les coordonnées  $x, y, z$  du point mobile par rapport au centre fixe et ses composantes de vitesse  $x' = \frac{dx}{dt}, y' = \frac{dy}{dt}, z' = \frac{dz}{dt}$  sont alors certaines fonctions bien connues des éléments Keplériens  $a, e, I, l, g, \theta$  ou bien des éléments canoniques  $L, G, \Theta, l, g, \theta$ , dont les trois premiers sont définies comme il suit

$$L = \sqrt{a}, \quad G = \sqrt{a(1 - e^2)}, \quad \Theta = \sqrt{a(1 - e^2)} \cos I.$$

En introduisant dans les équations (1) au lieu des variables  $x, y, z, x', y', z'$  les éléments canoniques  $L, G, \Theta, l, g, \theta$ , les équations deviennent:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= +\frac{\partial \Phi}{\partial l} & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial L} \\ \frac{dG}{dt} &= +\frac{\partial \Phi}{\partial g} & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial G} \\ \frac{d\Theta}{dt} &= +\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} & \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} \end{aligned} \right\} (2)$$

où

$$\Phi = \Phi_0 + \mu \Phi_1$$

$$\Phi_0 = \frac{1}{2L^2} \quad \Phi_1 = \frac{1}{A} - r \cos H - \frac{1}{r}.$$

Dans les formules qui précèdent et dans ce qui suit nous désignons par  $I$  l'angle aigu entre les plans des deux orbites. Les angles  $l$  et  $g$  sont comptés dans le sens du mouvement de la masse infiniment petite. L'angle  $\theta$  et la

longitude de la planète perturbatrice sont comptés sur le plan de l'orbite de cette planète dans un sens, qui, aux nœuds, fait l'angle aigu  $I$  avec le sens des angles  $l$  et  $g$ . La longitude de la planète perturbatrice est représentée par  $\pm t$  suivant que cette planète tourne dans le sens direct ou dans le sens indirect.

Cela étant, il est évident que la fonction perturbatrice ne contient les deux longitudes  $\theta$  et  $\pm t$  que dans la combinaison  $\theta \mp t$ . Nous mettons par suite

$$\theta' = \theta \mp t.$$

Les équations (2) subsistent encore si au lieu de  $\theta$  et  $\Theta$  nous écrivons  $\theta'$  et  $\Theta \pm \Theta$ .

2. La forme canonique des équations est conservée, si au lieu des variables

$$L, G, \Theta, l, g, \theta'$$

nous introduisons les variables nouvelles

$$\begin{aligned} x_1 &= L & x_2 &= \Theta & x_3 &= L - G \\ y_1 &= l + g & y_2 &= \theta' & y_3 &= -g \end{aligned}$$

et encore en mettant

$$\xi = \sqrt{2x_3} \cos y_3 \quad \eta = \sqrt{2x_3} \sin y_3$$

(voir Poincaré: Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, t. I, p. 18).

Les variables  $x_1, x_2, y_1, y_2, \xi, \eta$  satisfont ainsi aux équations

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_\nu}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial y_\nu} & \frac{dy_\nu}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x_\nu} & \nu &= 1, 2 \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \eta} & \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \xi} \end{aligned} \right\} (3)$$

où

$$F = F_0 + \mu F_1$$

$$F_0 = \frac{1}{2x_1^2} \pm x_2 \quad F_1 = \frac{1}{A} - r \cos H - \frac{1}{r}.$$

La fonction  $F_1$  peut être développée en série de Fourier

$$F_1 = \left. \begin{aligned} \sum C_{m_1, m_2}(\xi, \eta) \cos(m_1 y_1 + m_2 y_2) \\ + \sum S_{m_1, m_2}(\xi, \eta) \sin(m_1 y_1 + m_2 y_2) \end{aligned} \right\} (4)$$

où  $C_{m_1, m_2}$  et  $S_{m_1, m_2}$  dépendent aussi de  $x_1$  et de  $x_2$ .

3. Si l'inclinaison  $I$  est un angle très aigu, il est avantageux de faire un autre changement de variables. Dans ce cas nous introduirons au lieu de

$$L, G, \Theta, l, g, \theta'$$

les nouvelles variables

$$\begin{aligned} x_1' &= L & x_2' &= L - \Theta & x_3' &= G - \Theta \\ y_1' &= l + g + \theta' & y_2' &= -g - \theta' & y_3' &= g. \end{aligned}$$

On a  $x_1' y_1' + x_2' y_2' + x_3' y_3' = Ll + Gg + \Theta \theta'$  de sorte que la transformation est canonique (loc. cit. p. 17).

$$\begin{aligned} F_1 &= \sum \Theta(a) e^{h\alpha} (\sin \frac{1}{2} I)^f \cos[\alpha(l + g) - \alpha' \theta' + \beta g] \\ &= \sum \Theta(a) e^{h\alpha} (\sin \frac{1}{2} I)^f \cos[\alpha y_1 - \alpha' y_2 + \beta g] \\ &= \sum \Theta(a) e^{h\alpha} (\sin \frac{1}{2} I)^f \cos[\alpha y_1' + (\alpha + \alpha') y_2' + (\alpha + \alpha' + \beta) g] \end{aligned}$$

Nous poserons encore

$$\xi' = \sqrt{2x_3'} \cos y_3' \quad \eta' = \sqrt{2x_3'} \sin y_3'.$$

Les équations du mouvement deviennent alors

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx'_\nu}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial y'_\nu} & \frac{dy'_\nu}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x'_\nu} & \nu &= 1, 2 \\ \frac{d\xi'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \eta'} & \frac{d\eta'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \xi'} \end{aligned} \right\} (5)$$

où

$$F = F_0 + \mu F_1$$

$$F_0 = \frac{1}{2x_1'^2} \pm x_1' \mp x_2' \quad F_1 = \frac{1}{A} - r \cos H - \frac{1}{r}.$$

Maintenant nous écrivons l'expression de la fonction  $F_1$  de la manière suivante

$$F_1 = \left. \begin{aligned} \sum C'_{m_1', m_2'}(\xi', \eta') \cos(m_1' y_1' + m_2' y_2') \\ + \sum S'_{m_1', m_2'}(\xi', \eta') \sin(m_1' y_1' + m_2' y_2') \end{aligned} \right\} (6)$$

4. Les coefficients des développements (4) et (6) jouissent de certaines propriétés de symétrie dont nous aurons à faire l'usage dans ce qui suit. En effet, la fonction perturbatrice ne change pas si toutes les longitudes changent leurs signes. On a donc

$$\begin{aligned} C_{m_1, m_2}(\xi, -\eta) &= C_{m_1, m_2}(\xi, \eta) \\ S_{m_1, m_2}(\xi, -\eta) &= S_{m_1, m_2}(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Ensuite, la fonction perturbatrice ne change pas non plus, si toutes les longitudes augmentent en même temps de l'angle  $\pi$ . Il suit de là que

$$\begin{aligned} C_{m_1, m_2}(-\xi, -\eta) &= C_{m_1, m_2}(\xi, \eta) \\ S_{m_1, m_2}(-\xi, -\eta) &= S_{m_1, m_2}(\xi, \eta) \end{aligned}$$

si  $m_1 + m_2 =$  pair, tandis que

$$\begin{aligned} C_{m_1, m_2}(-\xi, -\eta) &= -C_{m_1, m_2}(\xi, \eta) \\ S_{m_1, m_2}(-\xi, -\eta) &= -S_{m_1, m_2}(\xi, \eta) \end{aligned}$$

si  $m_1 + m_2 =$  impair.

On aura des relations tout-à-fait analogues, quand il s'agit des coefficients du développement (6).

Je dis maintenant, que la fonction  $F_1$  est holomorphe si les orbites ne se coupent pas, d'une part au voisinage du point  $\xi = \eta = 0$  et d'autre part au voisinage de  $\xi' = \eta' = 0$ .

En effet, il est bien connu que  $F_1$  peut alors être développée ou bien d'après les puissances de  $e$ , l'inclinaison étant quelconque, ou bien d'après les puissances de  $\sin \frac{1}{2} I$ , l'excentricité étant quelconque. Si l'excentricité et l'inclinaison sont petites toutes les deux, ce développement prend la forme (voir Tisserand, Traité de Mécanique Céleste, t. I, p. 314):

et on a  $\alpha + \alpha' + \beta = \text{nombre pair} = 2\gamma$   
 $h - |\beta| = \text{nombre pair} \geq 0$   
 $f - |2\gamma| = \text{nombre pair} \geq 0.$

$F_1$  peut donc se développer d'une part d'après les puissances de  $e \cos g$  et  $e \sin g$  et d'autre part d'après les puissances de  $\sin^{1/2} I \cos g$  et  $\sin^{1/2} I \sin g$ .

Cela étant, on vérifie facilement les formules suivantes :

$$\left. \begin{aligned} a &= x_1^2 \\ e \cos g &= \xi \frac{\sqrt{4x_1 - \xi^2 - \eta^2}}{2x_1} \\ e \sin g &= -\eta \frac{\sqrt{4x_1 - \xi^2 - \eta^2}}{2x_1} \\ \sin^2 \frac{I}{2} &= \frac{2x_1 - 2x_2 - \xi^2 - \eta^2}{4x_1 - 2\xi^2 - 2\eta^2} \\ a &= x_1'^2 \\ \sin \frac{I}{2} \cos g &= \frac{\xi'}{\sqrt{4x_1' - 4x_2' + 2\xi'^2 + 2\eta'^2}} \\ \sin \frac{I}{2} \sin g &= \frac{\eta'}{\sqrt{4x_1' - 4x_2' + 2\xi'^2 + 2\eta'^2}} \\ \sqrt{1 - e^2} &= \frac{2x_1' - 2x_2' + \xi'^2 + \eta'^2}{2x_1'} \end{aligned} \right\} (7)$$

Elles montrent bien après ce qui précède, que  $F_1$  est holomorphe, si les orbites ne se coupent pas, d'une part au voisinage du point  $\xi = \eta = 0$ , et d'autre part au voisinage de  $\xi' = \eta' = 0$ .

Chapitre II.

Calcul des séries de M. Lindstedt.

5. Nous démontrerons maintenant, qu'on peut satisfaire formellement aux équations (3) par les séries

$$\left. \begin{aligned} x_\nu &= x_\nu^0 + \mu x_\nu^1 + \mu^2 x_\nu^2 + \dots \\ y_\nu &= y_\nu^0 + \mu y_\nu^1 + \mu^2 y_\nu^2 + \dots \\ \xi &= \xi^0 + \mu \xi^1 + \mu^2 \xi^2 + \dots \\ \eta &= \eta^0 + \mu \eta^1 + \mu^2 \eta^2 + \dots \end{aligned} \right\} (8)$$

où  $x_\nu^i, y_\nu^i, \xi^i$  et  $\eta^i$  sont des séries de Fourier des trois arguments

$$\begin{aligned} w_1 &= \pi t + c_1 \\ w_2 &= (q \mp 1) t + c_2 \\ w &= \sigma t + c. \end{aligned}$$

Les quantités  $c_1, c_2, c$  sont des constantes arbitraires. Enfin les coefficients  $q$  et  $\sigma$  sont donnés par des développements

$$\begin{aligned} F_1^0 &= \sum C_{m_1, m_2} (x_1^0, x_2^0, \xi^0, \eta^0) \cos [m_1 (w_1 + y_1^0) + m_2 (w_2 + y_2^0)] \\ &+ \sum S_{m_1, m_2} (x_1^0, x_2^0, \xi^0, \eta^0) \sin [m_1 (w_1 + y_1^0) + m_2 (w_2 + y_2^0)]. \end{aligned}$$

Puisque  $x_\nu^1, y_\nu^1, \xi^1, \eta^1, F_1^0$  sont des fonctions périodiques de  $w_1$  et de  $w_2$  de période  $2\pi$ , les dérivées de ces fonctions par rapport à  $w_1$  ou à  $w_2$  ne contiennent aucun terme indépendant de  $w_1$  et de  $w_2$ . En égalant les termes indépendants de  $w_1$  et  $w_2$  des deux membres des équations (10), nous obtenons donc les équations suivantes

$$\left. \begin{aligned} q &= \mu q^1 + \mu^2 q^2 + \dots \\ \sigma &= \mu \sigma^1 + \mu^2 \sigma^2 + \dots \end{aligned} \right\} (9)$$

tandis que  $n$  est une constante indépendante de  $\mu$ .

Les diverses quantités inconnues peuvent être déterminées en égalant dans les deux membres des équations (3) les termes de même ordre par rapport à  $\mu$ .

Ainsi, les termes d'ordre zéro donnent les conditions

$$\left. \begin{aligned} n \frac{\partial x_1^0}{\partial w_1} \mp \frac{\partial x_1^0}{\partial w_2} &= 0 \\ n \frac{\partial x_2^0}{\partial w_1} \mp \frac{\partial x_2^0}{\partial w_2} &= 0 \\ n + n \frac{\partial y_1^0}{\partial w_1} \mp \frac{\partial y_1^0}{\partial w_2} &= \frac{1}{x_1^{0^2}} \\ \mp 1 + n \frac{\partial y_2^0}{\partial w_1} \mp \frac{\partial y_2^0}{\partial w_2} &= \mp 1 \\ n \frac{\partial \xi^0}{\partial w_1} \mp \frac{\partial \xi^0}{\partial w_2} &= 0 \\ n \frac{\partial \eta^0}{\partial w_1} \mp \frac{\partial \eta^0}{\partial w_2} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Nous satisferons à ces équations en admettant que

$$\begin{aligned} x_1^0 &= \text{constante arbitraire} \\ n &= \frac{1}{x_1^{0^2}} \end{aligned}$$

et que  $x_2^0, y_1^0, y_2^0, \xi^0$  et  $\eta^0$  sont des fonctions de  $w$  indépendantes de  $w_1$  et de  $w_2$ .

En égalant dans les équations (3) les termes du premier ordre nous obtenons les relations

$$\left. \begin{aligned} n \frac{\partial x_1^1}{\partial w_1} \mp \frac{\partial x_1^1}{\partial w_2} &= \frac{\partial F_1^0}{\partial y_1^0} \\ n \frac{\partial x_2^1}{\partial w_1} \mp \frac{\partial x_2^1}{\partial w_2} + \sigma^1 \frac{\partial x_2^0}{\partial w} &= \frac{\partial F_1^0}{\partial y_2^0} \\ n \frac{\partial y_1^1}{\partial w_1} \mp \frac{\partial y_1^1}{\partial w_2} + \sigma^1 \frac{\partial y_1^0}{\partial w} &= -\frac{3}{x_1^{0^4}} x_1^1 - \frac{\partial F_1^0}{\partial x_1^0} \\ q^1 + n \frac{\partial y_2^1}{\partial w_1} \mp \frac{\partial y_2^1}{\partial w_2} + \sigma^1 \frac{\partial y_2^0}{\partial w} &= -\frac{\partial F_1^0}{\partial x_2^0} \\ n \frac{\partial \xi^1}{\partial w_1} \mp \frac{\partial \xi^1}{\partial w_2} + \sigma^1 \frac{d\xi^0}{dw} &= \frac{\partial F_1^0}{\partial \eta^0} \\ n \frac{\partial \eta^1}{\partial w_1} \mp \frac{\partial \eta^1}{\partial w_2} + \sigma^1 \frac{d\eta^0}{dw} &= -\frac{\partial F_1^0}{\partial \xi^0} \end{aligned} \right\} (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma^1 \frac{dx_2^0}{dw} &= 0 \\ \sigma^1 \frac{dy_1^0}{dw} &= -\frac{3}{x_1^{04}} [x_1^1] - \frac{\partial R}{\partial x_1^0} \\ q^1 + \sigma^1 \frac{dy_2^0}{dw} &= -\frac{\partial R}{\partial x_2^0} \\ \sigma^1 \frac{d\xi^0}{dw} &= \frac{\partial R}{\partial \eta^0} \\ \sigma^1 \frac{d\eta^0}{dw} &= -\frac{\partial R}{\partial \xi^0} \end{aligned} \right\} (11)$$

Ici  $R = C_{0,0}(x_1^0, x_2^0, \xi^0, \eta^0)$ ,

tandis que  $[x_1^1]$  est la partie de  $x_1^1$ , qui est indépendante de  $w_1$  et de  $w_2$ .

La première des équations (11) montre que

$$x_2^0 = \text{constante arbitraire.}$$

Pour déterminer les fonctions  $\xi^0$  et  $\eta^0$  il faut intégrer les deux dernières des équations (11), qui forment un système canonique à un degré de liberté:

$$\left. \begin{aligned} \sigma^1 \frac{d\xi^0}{dw} &= \frac{\partial R}{\partial \eta^0} \\ \sigma^1 \frac{d\eta^0}{dw} &= -\frac{\partial R}{\partial \xi^0} \end{aligned} \right\} (12)$$

$x_1^0$  et  $x_2^0$  devant être traités comme des paramètres.

6. L'intégration de ce système est théoriquement très simple. Elle peut, en effet, être effectuée par une quadrature en vertu de l'intégrale

$$R = \text{const.}$$

Mais pratiquement il est assez difficile d'intégrer en toute généralité les équations (12), puisque la fonction  $R$  est très compliquée. Mais heureusement il y a des cas étendus où l'intégration est même pratiquement assez simple. Cela arrive si les valeurs originales de  $\xi^0$  et de  $\eta^0$  se trouvent dans le voisinage d'une valeur maxima ou minima de  $R$  regardée comme fonction de  $\xi^0$  et de  $\eta^0$ .

Il est bien connu que la fonction  $R(x_1^0, x_2^0, \xi, \eta)$ , regardée comme fonction de  $\xi$  et de  $\eta$ , possède une valeur minima pour  $\xi = \eta = 0$  au moins pour des petites inclinaisons, c'est-à-dire si le rapport  $x_1^0 : x_2^0$  est voisin de l'unité. A ce minimum correspondent des séries de la forme (8), qui représentent les mouvements des astéroïdes à petites excentricités et petites inclinaisons.

Une étude approfondie de la fonction  $R$ , à laquelle nous consacrerons le chapitre IV, montrera d'une part que la fonction  $R$  n'a pas, pour toutes les valeurs des paramètres  $x_1^0$  et  $x_2^0$  dans le domaine  $0 < x_2^0 < x_1^0$ , une valeur minima dans le point  $\xi = \eta = 0$ . Mais cette étude montrera d'autre part qu'en revanche la fonction  $R$  possède d'autres minima encore inconnues. Les positions de ces nouvelles minima dépendent des valeurs des paramètres  $x_1^0$  et  $x_2^0$ . Elles sont situées ou bien sur l'axe des  $\xi$  ou bien sur l'axe des  $\eta$ , de sorte que dans les orbites correspondantes la ligne des apsides coïncide avec la ligne des nœuds ou en est

perpendiculaire. A ces valeurs minima nouvelles correspondent, comme nous le montrerons, des séries de la forme (8) faciles à calculer, représentant les mouvements de comètes, dont les périhélies sont à peu près fixes par rapport aux nœuds.

Enfin nous montrerons aussi que la fonction  $R$  atteint parfois une valeur maxima, si l'inclinaison est nulle. Au voisinage de ce maximum il existe des séries analogues aux séries (8) d'une forme très simple, et qui peuvent être appliquées à l'étude du mouvement de comètes, dont les orbites sont toujours peu inclinées et dont les périhélies tournent en vertu des perturbations séculaires.

7. En retournant maintenant aux équations (12) nous admettrons que la fonction  $R(x_1^0, x_2^0, \xi, \eta)$  a une valeur maxima ou minima pour

$$\xi = \xi^{0,0} \quad \eta = 0.$$

Remarquons d'abord que  $R$  est une fonction paire de  $\eta$ .  $R$  peut donc être développée d'après les puissances croissantes de  $\xi - \xi^{0,0}$  et  $\eta^2$ . Soit

$$R = A + \frac{1}{2} B (\xi - \xi^{0,0})^2 + \frac{1}{2} C \eta^2 + \dots$$

La quantité  $\sigma^1$  est encore indéterminée. Nous la déterminerons de sorte que  $\xi^0$  et  $\eta^0$  soient des fonctions périodiques de  $w$  ayant la période  $2\pi$ . Mettons

$$\left. \begin{aligned} \sigma^1 &= \sigma^{1,0} + \varepsilon^2 \sigma^{1,2} + \varepsilon^4 \sigma^{1,4} + \dots \\ \xi^0 &= \xi^{0,0} + \varepsilon \xi^{0,1} + \varepsilon^2 \xi^{0,2} + \dots \\ \eta^0 &= \varepsilon \eta^{0,1} + \varepsilon^2 \eta^{0,2} + \dots \end{aligned} \right\} (13)$$

Nous montrerons maintenant que l'on peut déterminer les constantes  $\sigma^{1,2k}$  ainsi que les fonctions  $\xi^{0,s}$ ,  $\eta^{0,s}$  sous la forme

$$\left. \begin{aligned} \xi^{0,\nu} &= c_{\nu}^{0,\nu} \cos \nu w + c_{\nu-2}^{0,\nu} \cos (\nu-2) w + \dots \\ &\quad + c_{\nu-2k}^{0,\nu} \cos (\nu-2k) w + \dots \\ \eta^{0,\nu} &= s_{\nu}^{0,\nu} \sin \nu w + s_{\nu-2}^{0,\nu} \sin (\nu-2) w + \dots \\ &\quad + s_{\nu-2k}^{0,\nu} \sin (\nu-2k) w + \dots \end{aligned} \right\} 2k \leq \nu.$$

de sorte que les équations (12) sont satisfaites,  $\varepsilon$  étant une constante arbitraire.

Pour calculer toutes les inconnues il faut évaluer les coefficients des mêmes puissances de  $\varepsilon$  dans les deux membres des équations (12). Les termes de degré zéro disparaissent évidemment des deux membres. En ne conservant que les termes du premier degré il vient

$$\left. \begin{aligned} \sigma^{1,0} c_1^{0,1} + C s_1^{0,1} &= 0 \\ B c_1^{0,1} + \sigma^{1,0} s_1^{0,1} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Pour que  $c_1^{0,1}$  et  $s_1^{0,1}$  ne disparaissent pas, il faut donc mettre

$$\sigma^{1,0} = BC.$$

Puisque pour  $\xi = \xi^{0,0}$ ,  $\eta = 0$  la fonction  $R$  est maxima ou minima, on a  $BC > 0$ . Nous pouvons donc poser

$$\sigma^{1,0} = +\sqrt{BC}.$$

Cette détermination faite, une des quantités  $c_1^{0.1}$  et  $s_1^{0.1}$  peut être choisie arbitrairement. Il est permis de supposer par exemple :

$$s_1^{0.1} = 1 \quad c_1^{0.1} = -\frac{C}{\sqrt{BC}} = -\frac{\sqrt{BC}}{B}$$

Egalons maintenant les termes du second degré en  $\varepsilon$  dans les deux membres des équations (12). Il vient

$$\begin{aligned} -\sigma^{1.0} \cdot 2c_2^{0.2} \sin 2w &\equiv C s_2^{0.2} \sin 2w + P_2^{0.2} \sin 2w \\ \sigma^{1.0} \cdot 2s_2^{0.2} \cos 2w &\equiv -B (c_2^{0.2} \cos 2w + c_0^{0.2}) \\ &\quad + Q_2^{0.2} \cos 2w + Q_0^{0.2} \end{aligned}$$

où les constantes  $P_2^{0.2}$ ,  $Q_2^{0.2}$ ,  $Q_0^{0.2}$  sont connues, puisqu'elles ne dépendent que de  $s_1^{0.1}$ ,  $c_1^{0.1}$  et des coefficients des termes du troisième degré dans le développement de  $R$  d'après les puissances de  $\xi - \xi^{0.0}$  et  $\eta$ . Les équations pour déterminer  $c_2^{0.2}$ ,  $s_2^{0.2}$ ,  $c_0^{0.2}$  deviennent

$$\begin{aligned} 2\sigma^{1.0} c_2^{0.2} + C s_2^{0.2} + P_2^{0.2} &= 0 \\ B c_2^{0.2} + 2\sigma^{1.0} s_2^{0.2} - Q_2^{0.2} &= 0 \\ B c_0^{0.2} - Q_0^{0.2} &= 0 \end{aligned}$$

Elles donnent uniformément les valeurs des quantités cherchées puisque

$$4\sigma^{1.0^2} - BC = 3BC \neq 0 \text{ et } B \neq 0.$$

Nous allons maintenant déterminer les fonctions  $\xi^{0.3}$  et  $\eta^{0.3}$  et la constante  $\sigma^{1.2}$ . Les équations dont il faut se servir sont

$$\begin{aligned} -\sigma^{1.0} (3c_3^{0.3} \sin 3w + c_1^{0.3} \sin w) \\ -\sigma^{1.2} c_1^{0.1} \sin w &\equiv C (s_3^{0.3} \sin 3w + s_1^{0.3} \sin w) \\ &\quad + P_3^{0.3} \sin 3w + P_1^{0.3} \sin w \\ \sigma^{1.0} (3s_3^{0.3} \cos 3w + s_1^{0.3} \cos w) \\ +\sigma^{1.2} s_1^{0.1} \cos w &\equiv -B (c_3^{0.3} \cos 3w + c_1^{0.3} \cos w) \\ &\quad + Q_3^{0.3} \cos 3w + Q_1^{0.3} \cos w \end{aligned}$$

où les constantes  $P_3^{0.3}$ ,  $P_1^{0.3}$ ,  $Q_3^{0.3}$ ,  $Q_1^{0.3}$  sont connues. En effet, elles ne dépendent que des coefficients déjà déterminés, qui entrent dans  $\xi^{0.1}$ ,  $\xi^{0.2}$ ,  $\eta^{0.1}$ ,  $\eta^{0.2}$ , et des coefficients des termes de la troisième et de la quatrième degré dans le développement de  $R$  d'après les puissances de  $\xi - \xi^{0.0}$  et  $\eta$ . Les équations ci-dessus peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} 3\sigma^{1.0} \cdot c_3^{0.3} + C \cdot s_3^{0.3} + P_3^{0.3} &= 0 \\ B \cdot c_3^{0.3} + 3\sigma^{1.0} \cdot s_3^{0.3} - Q_3^{0.3} &= 0 \\ \sigma^{1.0} \cdot c_1^{0.3} + C \cdot s_1^{0.3} + \sigma^{1.2} c_1^{0.1} + P_1^{0.3} &= 0 \\ B \cdot c_1^{0.3} + \sigma^{1.0} \cdot s_1^{0.3} + \sigma^{1.2} s_1^{0.1} - Q_1^{0.3} &= 0 \end{aligned}$$

Les deux premières donnent sans ambiguïté les inconnues  $c_3^{0.3}$  et  $s_3^{0.3}$ . Dans les deux dernières équations nous pouvons mettre

$$s_1^{0.3} = 0$$

sans restreindre la généralité, puisque  $\varepsilon$  est arbitraire. Après cela ces équations donnent sans difficultés les valeurs de  $c_1^{0.3}$  et  $\sigma^{1.2}$ , puisque le déterminant

$$\sigma^{1.0} s_1^{0.1} - B c_1^{0.1} = \sigma^{1.0} + \sqrt{BC} = 2\sqrt{BC} \text{ est } \neq 0.$$

Evidemment on peut continuer ainsi sans être jamais arrêté. Admettons que nous avons déterminé  $\xi^{0.1}$ ,  $\xi^{0.2}$ , ...  $\xi^{0.k-1}$ ,  $\eta^{0.1}$ ,  $\eta^{0.2}$ , ...  $\eta^{0.k-1}$  ainsi que les constantes  $\sigma^{1.0}$ ,  $\sigma^{1.2}$ , ...  $\sigma^{1.2l-2}$  où  $k = 2l$  ou  $2l + 1$ . Les équations pour calculer  $c_i^{0.k}$  et  $s_i^{0.k}$  seront toujours de la forme

$$\begin{aligned} i\sigma^{1.0} \cdot c_i^{0.k} + C \cdot s_i^{0.k} + P_i^{0.k} &= 0 \\ B \cdot c_i^{0.k} + i\sigma^{1.0} \cdot s_i^{0.k} - Q_i^{0.k} &= 0 \end{aligned}$$

si  $i \neq 1$ . Si au contraire  $i = 1$  ( $k$  étant alors  $= 2l + 1$ ) nous mettrons

$$s_1^{0.2l+1} = 0,$$

et nous aurons pour déterminer  $c_1^{0.2l+1}$  et  $\sigma^{1.2l}$  des équations.

$$\begin{aligned} \sigma^{1.0} \cdot c_1^{0.2l+1} + \sigma^{1.2l} \cdot c_1^{0.1} + P_1^{0.2l+1} &= 0 \\ B \cdot c_1^{0.2l+1} + \sigma^{1.2l} \cdot s_1^{0.1} - Q_1^{0.2l+1} &= 0 \end{aligned}$$

Ici les constantes  $P_i^{0.k}$ ,  $Q_i^{0.k}$ ,  $P_1^{0.2l+1}$ ,  $Q_1^{0.2l+1}$  sont connues. Enfin les déterminants

$$\begin{aligned} i^2 \sigma^{1.0^2} - BC &= (i^2 - 1) BC \\ \sigma^{1.0} s_1^{0.1} - B c_1^{0.1} &= 2\sqrt{BC} \end{aligned}$$

et sont  $\neq 0$ .

Ainsi en admettant pour  $\sigma^1$  l'expression (13) nous avons intégré les équations (12) par des séries de la forme

$$\left. \begin{aligned} \xi^0 &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Phi_k(\varepsilon^2) \cos kw \\ \eta^0 &= \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Psi_k(\varepsilon^2) \sin kw \end{aligned} \right\} (14)$$

$\Phi_k$  et  $\Psi_k$  étant des séries ordonnées d'après les puissances positives de  $\varepsilon^2$ .

8. Maintenant, voici comment il faut déterminer  $q^1$  et  $y_2^0$  par la troisième des équations (11). En introduisant dans la dérivée  $\frac{\partial R}{\partial x_2^0}$  du second membre de cette équation les expressions de  $\xi^0$  et  $\eta^0$  données par les formules (14), cette dérivée peut être développée en série de Fourier de la manière suivante

$$\frac{\partial R}{\partial x_2^0} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k X_k(\varepsilon^2) \cos kw$$

où les  $X_k$  sont des séries ordonnées d'après les puissances positives de  $\varepsilon^2$ .

Ce développement effectué, la constante  $q^1$  et la fonction  $y_2^0$  seront données par les formules

$$q^1 = -X_0(\varepsilon^2) * \tag{15}$$

$$y_2^0 = -\frac{1}{\sigma^1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \varepsilon^k X_k(\varepsilon^2) \sin k w \tag{16}$$

Venons en maintenant à la seconde des équations (11). C'est une équation différentielle avec les deux fonctions in-

connues  $y_1^0$  et  $[x_1^1]$ . Pour déterminer ces fonctions il nous faut encore une relation.

Pour la trouver retournons aux équations (10). Dans les dérivées partielles de  $F_1^0$ , qui s'y trouvent, nous introduirons pour  $\xi^0$  et  $\eta^0$  leurs développements (14), mais nous laissons à leurs places  $y_1^0$  et  $y_2^0$ . En désignant par  $x$  l'une quelconque des fonctions  $x_1^1$ ,  $x_2^1$  et  $\xi^1$ , nous aurons une équation de la forme

$$n \frac{\partial x}{\partial w_1} \mp \frac{\partial x}{\partial w_2} = \sum_{m, m_1, m_2} S_{m, m_1, m_2}(x_1^0, x_2^0, \varepsilon^2) \varepsilon^m \sin [m w + m_1 (w_1 + y_1^0) + m_2 (w_2 + y_2^0)]. \tag{17}$$

Des relations (11) il suit que  $S_{m, 0, 0} \equiv 0$ .

En admettant que  $n$  n'est pas un nombre rationnel on peut satisfaire à cette équation en posant

$$x = \sum \frac{S_{m, m_1, m_2}(x_1^0, x_2^0, \varepsilon^2) \varepsilon^m}{-n m_1 \pm m_2} \cos [m w + m_1 (w_1 + y_1^0) + m_2 (w_2 + y_2^0)]. \tag{18}$$

En appelant pour un instant  $[\varphi]$  la partie indépendante de  $w_1$  et de  $w_2$  d'une fonction  $\varphi$  périodique de période  $2\pi$  de  $w_1$  et de  $w_2$ , nous aurons donc pour les fonctions

$$x_1^1 - [x_1^1] \quad x_2^1 - [x_2^1] \quad \xi^1 - [\xi^1]$$

des développements de la forme (18).

Introduisons pour  $x_1^1$  son expression dans le second membre de la troisième des équations (10). En désignant par  $y$  une quelconque des fonctions  $y_1^1$ ,  $y_2^1$  et  $\eta^1$  nous aurons des équations de la forme

$$n \frac{\partial y}{\partial w_1} \mp \frac{\partial y}{\partial w_2} = \sum_{m, m_1, m_2} C_{m, m_1, m_2}(x_1^0, x_2^0, \varepsilon^2) \varepsilon^m \cos [m w + m_1 (w_1 + y_1^0) + m_2 (w_2 + y_2^0)] \tag{19}$$

et en vertu des relations (11) on a  $C_{m, 0, 0} \equiv 0$ .

Nous pouvons donc mettre  $y$ , c'est-à-dire l'une quelconque des fonctions

$$y_1^1 - [y_1^1] \quad y_2^1 - [y_2^1] \quad \eta^1 - [\eta^1]$$

sous la forme

$$y = \sum \frac{C_{m, m_1, m_2}(x_1^0, x_2^0, \varepsilon^2) \varepsilon^m}{n m_1 \mp m_2} \sin [m w + m_1 (w_1 + y_1^0) + m_2 (w_2 + y_2^0)]. \tag{20}$$

Passons maintenant à l'équation qui déterminera la fonction  $x_1^2$ . Cette équation peut s'écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} n \frac{\partial x_1^2}{\partial w_1} \mp \frac{\partial x_1^2}{\partial w_2} \\ + q^1 \frac{\partial x_1^1}{\partial w_2} + \sigma^1 \frac{\partial x_1^1}{\partial w} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial y_1^0 \partial x_1^0} [x_1^1] + \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial y_1^0 \partial x_2^0} [x_2^1] + \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial y_1^0 \partial \xi^0} [\xi^1] + \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial y_1^0 \partial y_1^0} [y_1^1] + \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial y_1^0 \partial y_2^0} [y_2^1] + \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial y_1^0 \partial \eta^0} [\eta^1] \\ + \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial y_1^0 \partial x_1^0} (x_1^1 - [x_1^1]) + \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial y_1^0 \partial x_2^0} (x_2^1 - [x_2^1]) + \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial y_1^0 \partial \xi^0} (\xi^1 - [\xi^1]) \\ + \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial y_1^0 \partial y_1^0} (y_1^1 - [y_1^1]) + \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial y_1^0 \partial y_2^0} (y_2^1 - [y_2^1]) + \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial y_1^0 \partial \eta^0} (\eta^1 - [\eta^1]) \end{array} \right. \tag{21}$$

Cherchons au second membre les termes indépendants de  $w_1$  et de  $w_2$ . Les dérivées de  $F_1^0$  qui se trouvent dans la première ligne ne contiennent aucun terme indépendant de  $w_1$ . Les termes indépendants de  $w_1$  et de  $w_2$  dans le second membre viennent donc tous des deux dernières lignes. Chacun des six termes de ces lignes se compose de deux facteurs dont l'un a la même forme que le second membre de la formule (17), tandis que l'autre a la forme du second membre de l'équation (19). Le produit des deux facteurs et la somme des deux dernières lignes du second membre est donc une série de la même forme que le second membre de l'équation (17). En égalant dans les deux membres de l'équation (21) les parties indépendantes de  $w_1$  et de  $w_2$

nous obtenons donc une équation de la forme

$$\sigma^1 \frac{d[x_1^1]}{dw} = \sum_{m=1}^{\infty} S_m(x_1^0, x_2^0, \varepsilon^2) \varepsilon^m \sin m w.$$

L'inconnue  $y_1^0$  a disparu avec  $w_1$  et le membre à droite est tout-à-fait connu. De cette équation nous tirons  $[x_1^1]$  sous la forme

$$[x_1^1] = \bar{x}_1^1 - \frac{1}{\sigma^1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} S_m(x_1^0, x_2^0, \varepsilon^2) \varepsilon^m \cos m w \tag{22}$$

où  $\bar{x}_1^1$  est une constante encore indéterminée.

\* Nous verrons au no. 13 [formules (38), (44) et (46)], que  $q^1$  est toujours  $< 0$  et que les nœuds tournent par suite toujours dans le sens indirect (voir le no. 1).

Nous sommes maintenant en état de déterminer la constante  $\bar{x}_1^1$  et la fonction  $y_1^0$  par la seconde des équations (11). Nous pouvons, en effet, mettre  $\frac{\partial R}{\partial x_1^0}$  sous la forme

$$\frac{\partial R}{\partial x_1^0} = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \Xi_k(\epsilon^2) \cos kw$$

et nous aurons enfin

$$\bar{x}_1^1 = -\frac{x_1^{04}}{3} \Xi_0(\epsilon^2) \quad (23)$$

et

$$y_1^0 = \frac{1}{\sigma^1} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{3}{\sigma^1 x_1^{04}} \frac{1}{k^2} S_k(\epsilon^2) - \frac{1}{k} \Xi_k(\epsilon^2) \right) \epsilon^k \sin kw. \quad (24)$$

Introduisons maintenant les développements (24) et (16) de  $y_1^0$  et de  $y_2^0$  dans les développements (18) et (20). Nous aurons ainsi des développements des formes

$$\sum C_{m,m_1,m_2}(\epsilon^2) \epsilon^m \cos(mw + m_1 w_1 + m_2 w_2) \quad (C)$$

$$\sum S_{m,m_1,m_2}(\epsilon^2) \epsilon^m \sin(mw + m_1 w_1 + m_2 w_2) \quad (S)$$

où  $C_{m,m_1,m_2}$  et  $S_{m,m_1,m_2}$  sont des séries ordonnées d'après les puissances positives de  $\epsilon^2$  avec des coefficients qui dépendent de  $x_1^0$  et  $x_2^0$ . Nous dirons que ces séries sont du type (C) et du type (S). Nous dirons en analogie que des séries des formes

$$\sum C_m(\epsilon^2) \epsilon^m \cos mw \quad (C_0)$$

$$\sum S_m(\epsilon^2) \epsilon^m \sin mw \quad (S_0)$$

sont des types (C<sub>0</sub>) et (S<sub>0</sub>).

En somme, il nous a réussi de déterminer les fonctions

$$\begin{matrix} x_1^0 & x_1^1 \\ x_2^0 & x_2^1 - [x_2^1] \\ \xi^0 & \xi^1 - [\xi^1] \end{matrix}$$

par des séries du type (C) et les fonctions

$$\begin{aligned} n \frac{\partial x_i^{k+1}}{\partial w_1} \mp \frac{\partial x_i^{k+1}}{\partial w_2} + q^1 \frac{\partial x_i^k}{\partial w_2} + \sigma^1 \frac{\partial x_i^k}{\partial w} + \dots + q^{k+1} \frac{\partial x_i^0}{\partial w_2} + \sigma^{k+1} \frac{\partial x_i^0}{\partial w} = \\ = \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial y_i^0 \partial x_2^0} [x_2^k] + \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial y_i^0 \partial \xi^0} [\xi^k] + \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial y_i^0 \partial y_1^0} [y_1^k] + \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial y_i^0 \partial y_2^0} [y_2^k] + \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial y_i^0 \partial \eta^0} [\eta^k] + X_i^k, \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} n \frac{\partial y_1^{k+1}}{\partial w_1} \mp \frac{\partial y_1^{k+1}}{\partial w_2} + q^1 \frac{\partial y_1^k}{\partial w_2} + \sigma^1 \frac{\partial y_1^k}{\partial w} + \dots + q^{k+1} \frac{\partial y_1^0}{\partial w_2} + \sigma^{k+1} \frac{\partial y_1^0}{\partial w} = \\ = -\frac{3}{x_1^{04}} x_1^{k+1} - \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial x_1^0 \partial x_2^0} [x_2^k] - \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial x_1^0 \partial \xi^0} [\xi^k] - \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial x_1^0 \partial y_1^0} [y_1^k] - \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial x_1^0 \partial y_2^0} [y_2^k] - \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial x_1^0 \partial \eta^0} [\eta^k] + Y_1^k \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} q^{k+1} + n \frac{\partial y_2^{k+1}}{\partial w_1} \mp \frac{\partial y_2^{k+1}}{\partial w_2} + q^1 \frac{\partial y_2^k}{\partial w_2} + \sigma^1 \frac{\partial y_2^k}{\partial w} + \dots + q^{k+1} \frac{\partial y_2^0}{\partial w_2} + \sigma^{k+1} \frac{\partial y_2^0}{\partial w} = \\ = -\frac{\partial^2 F_1^0}{\partial x_2^0 \partial x_2^0} [x_2^k] - \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial x_2^0 \partial \xi^0} [\xi^k] - \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial x_2^0 \partial y_1^0} [y_1^k] - \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial x_2^0 \partial y_2^0} [y_2^k] - \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial x_2^0 \partial \eta^0} [\eta^k] + Y_2^k \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{matrix} y_1^0 & y_1^1 - [y_1^1] \\ y_2^0 & y_2^1 - [y_2^1] \\ \eta^0 & \eta^1 - [\eta^1] \end{matrix}$$

par des séries du type (S). Enfin nous avons développé les constantes

$$\sigma^1 \text{ et } q^1$$

en séries procédant d'après les puissances positives de  $\epsilon^2$ .

9. Nous allons démontrer maintenant qu'il est possible de déterminer ainsi successivement tous les coefficients des séries (8) et (9) jusqu'à un degré quelconque.

Admettons, en effet, que nous ayons développé les fonctions

$$\begin{matrix} x_1^0 & x_1^1 & \dots & x_1^{k-1} & x_1^k \\ x_2^0 & x_2^1 & \dots & x_2^{k-1} & x_2^k - [x_2^k] \\ \xi^0 & \xi^1 & \dots & \xi^{k-1} & \xi^k - [\xi^k] \end{matrix}$$

en séries du type (C) et les fonctions

$$\begin{matrix} y_1^0 & y_1^1 & \dots & y_1^{k-1} & y_1^k - [y_1^k] \\ y_2^0 & y_2^1 & \dots & y_2^{k-1} & y_2^k - [y_2^k] \\ \eta^0 & \eta^1 & \dots & \eta^{k-1} & \eta^k - [\eta^k] \end{matrix}$$

en séries du type (S), et que nous ayons trouvé enfin que les constantes

$$\sigma^1, q^1, \sigma^2, q^2, \dots, \sigma^k, q^k$$

sont données par des séries de puissance en  $\epsilon^2$ . Je dis qu'on peut alors continuer et déterminer les inconnues,

$$[x_2^k], [\xi^k], x_1^{k+1}, x_2^{k+1} - [x_2^{k+1}] \text{ et } \xi^{k+1} - [\xi^{k+1}]$$

par des séries du type (C) et les fonctions

$$[y_1^k], [y_2^k], [\eta^k], y_1^{k+1} - [y_1^{k+1}], y_2^{k+1} - [y_2^{k+1}] \text{ et } \eta^{k+1} - [\eta^{k+1}]$$

par des séries du type (S) et enfin les constantes  $\sigma^{k+1}$  et  $q^{k+1}$  par des séries de puissance en  $\epsilon^2$ .

Afin d'obtenir les équations nécessaires pour le calcul de ces inconnues il faut introduire dans les équations (3) les développements (8) et égaliser ensuite les coefficients de  $\mu^{k+1}$  dans les deux membres. De cette manière nous pouvons écrire les formules suivantes:



$$\begin{aligned}
 n \frac{\partial \xi^{k+1}}{\partial w_1} + \frac{\partial \xi^{k+1}}{\partial w_2} + q^1 \frac{\partial \xi^k}{\partial w_2} + \sigma^1 \frac{\partial \xi^k}{\partial w} + \dots + q^{k+1} \frac{\partial \xi^0}{\partial w_2} + \sigma^{k+1} \frac{\partial \xi^0}{\partial w} &= \\
 = \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial \eta^0 \partial x_2^0} [x_2^k] + \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial \eta^0 \partial \xi^0} [\xi^k] + \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial \eta^0 \partial y_1^0} [y_1^k] + \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial \eta^0 \partial y_2^0} [y_2^k] + \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial \eta^0 \partial \eta^0} [\eta^k] + P^k & \\
 n \frac{\partial \eta^{k+1}}{\partial w_1} + \frac{\partial \eta^{k+1}}{\partial w_2} + q^1 \frac{\partial \eta^k}{\partial w_2} + \sigma^1 \frac{\partial \eta^k}{\partial w} + \dots + q^{k+1} \frac{\partial \eta^0}{\partial w_2} + \sigma^{k+1} \frac{\partial \eta^0}{\partial w} &= \\
 = - \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial \xi^0 \partial x_2^0} [x_2^k] - \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial \xi^0 \partial \xi^0} [\xi^k] - \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial \xi^0 \partial y_1^0} [y_1^k] - \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial \xi^0 \partial y_2^0} [y_2^k] - \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial \xi^0 \partial \eta^0} [\eta^k] + Q^k &
 \end{aligned} \tag{28}$$

Ici les  $X_i^k$ ,  $P^k$ ,  $Y_i^k$ ,  $Q^k$  sont des séries tout-à-fait connues les  $X_i^k$  et  $P^k$  du type (S), les  $Y_i^k$  et  $Q^k$  du type (C).

En égalant dans les deux membres de l'équation (25) les termes indépendants de  $w_1$  et de  $w_2$ , nous obtenons d'abord:

$$\sigma^1 \frac{d[x_i^k]}{dw} = [X_i^k] \quad i = 1, 2$$

Nous avons déjà employé la première de ces relations pour déterminer  $[x_1^k]$ . Elle est donc déjà satisfaite. La deuxième nous donne, après intégration  $[x_2^k]$  en forme d'une série du type (C<sub>0</sub>). Nous pouvons mettre la constante d'intégration = 0, puisque  $x_2^0$  est déjà une constante arbitraire.

Les équations (28) nous donnent de la même manière, en mettant pour  $[x_2^k]$  son développement déjà connu, les deux relations:

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma^1 \frac{d[\xi^k]}{dw} + \sigma^{k+1} \frac{d\xi^0}{dw} &= \frac{\partial^2 R}{\partial \eta^0 \partial \xi^0} [\xi^k] + \frac{\partial^2 R}{\partial \eta^{0^2}} [\eta^k] + U^k \\
 \sigma^1 \frac{d[\eta^k]}{dw} + \sigma^{k+1} \frac{d\eta^0}{dw} &= - \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^{0^2}} [\xi^k] - \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^0 \partial \eta^0} [\eta^k] + V^k
 \end{aligned} \right\} \tag{29}$$

Ici  $U^k$  est une série connue du type (S<sub>0</sub>),  $V^k$  une série connue du type (C<sub>0</sub>).

En choisissant d'une manière convenable la constante  $\sigma^{k+1}$ , ces équations peuvent être satisfaites par une fonction  $[\xi^k]$  du type (C<sub>0</sub>) et une fonction  $[\eta^k]$  du type (S<sub>0</sub>). Mettons en effet

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma^{k+1} &= \sigma^{k+1,0} + \epsilon^2 \sigma^{k+1,2} + \epsilon^4 \sigma^{k+1,4} + \dots \\
 [\xi^k] &= \xi^{k,0} + \epsilon \xi^{k,1} + \epsilon^2 \xi^{k,2} + \dots \\
 [\eta^k] &= \epsilon \eta^{k,1} + \epsilon^2 \eta^{k,2} + \dots
 \end{aligned} \right\} \tag{30}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \xi^{k,\nu} &= c_{\nu}^{k,\nu} \cos \nu w + c_{\nu-2}^{k,\nu} \cos (\nu - 2) w + \dots + c_{\nu-2k}^{k,\nu} \cos (\nu - 2k) w + \dots \\
 \eta^{k,\nu} &= s_{\nu}^{k,\nu} \sin \nu w + s_{\nu-2}^{k,\nu} \sin (\nu - 2) w + \dots + s_{\nu-2k}^{k,\nu} \sin (\nu - 2k) w + \dots
 \end{aligned} \right\} \tag{31}$$

Les dérivées partielles de la fonction  $R$ , qui apparaissent dans les seconds membres des équations (29), peuvent être écrites sous la forme

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^{0^2}} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \epsilon^{\nu} [B_{\nu}^{\nu} \cos \nu w + B_{\nu-2}^{\nu} \cos (\nu - 2) w + \dots] \\
 \frac{\partial^2 R}{\partial \eta^{0^2}} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \epsilon^{\nu} [C_{\nu}^{\nu} \cos \nu w + C_{\nu-2}^{\nu} \cos (\nu - 2) w + \dots] \\
 \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^0 \partial \eta^0} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \epsilon^{\nu} [D_{\nu}^{\nu} \sin \nu w + D_{\nu-2}^{\nu} \sin (\nu - 2) w + \dots]
 \end{aligned}$$

Nous écrirons  $B$  au lieu de  $B_0^0$  et  $C$  au lieu de  $C_0^0$  comme à la page 354.

En introduisant tous ces développements dans les équations (29) et en égalant dans les deux membres les

termes de même degré en  $\epsilon$ , nous obtenons des relations, qui détermineront les inconnues des formules (30) et (31).

Dans la première des équations (29) il n'y a pas de termes de degré zéro en  $\epsilon$ . Au contraire, dans la seconde équation il y en a et elles nous donnent pour déterminer  $\xi^{k,0}$  la relation

$$0 = -B \xi^{k,0} + Q_0^{k,0}$$

$Q_0^{k,0}$  étant une constante connue.

Les termes du premier degré en  $\epsilon$  conduisent aux formules

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma^{1,0} c_1^{k,1} + \sigma^{k+1,0} \cdot c_1^{0,1} + C s_1^{k,1} + P_1^{k,1} &= 0 \\
 B c_1^{k,1} + \sigma^{k+1,0} \cdot s_1^{0,1} + \sigma^{1,0} s_1^{k,1} - Q_1^{k,1} &= 0
 \end{aligned} \right\} \tag{32}$$

où  $P_1^{k,1}$  et  $Q_1^{k,1}$  sont des constantes connues.

Nous pouvons mettre

$$s_1^{k,1} = 0$$

sans restreindre la généralité, puisque  $\varepsilon$ , le coefficient de  $\sin w$  dans  $\eta^0$ , est arbitraire.

Après cela les équations (32) donnent sans difficulté les valeurs des inconnues  $c_1^{k,1}$  et  $\sigma^{k+1,0}$  puisque le déterminant

$$\sigma^{1,0} s_1^{0,1} - B c_1^{0,1} = 2\sqrt{BC} \neq 0.$$

Égalons maintenant les termes du second degré en  $\varepsilon$  dans les deux membres des équations (29). Il vient

$$\begin{aligned} -\sigma^{1,0} \cdot 2c_2^{k,2} \sin 2w &\equiv C s_2^{k,2} \sin 2w + P_2^{k,2} \sin 2w \\ \sigma^{1,0} \cdot 2s_2^{k,2} \cos 2w &\equiv -B (c_2^{k,2} \cos 2w + c_0^{k,2}) \\ &\quad + Q_2^{k,2} \cos 2w + Q_0^{k,2} \end{aligned}$$

où les constantes  $P_2^{k,2}$ ,  $Q_2^{k,2}$ ,  $Q_0^{k,2}$  sont évidemment connues.

Les équations pour déterminer  $c_2^{k,2}$ ,  $s_2^{k,2}$  et  $c_0^{k,2}$  deviennent

$$\begin{aligned} 2\sigma^{1,0} c_2^{k,2} + C s_2^{k,2} + P_2^{k,2} &= 0 \\ B c_2^{k,2} + 2\sigma^{1,0} s_2^{k,2} - Q_2^{k,2} &= 0 \\ B c_0^{k,2} - Q_0^{k,2} &= 0. \end{aligned}$$

Elles donnent uniformément les valeurs des constantes cherchées.

Pour déterminer les constantes  $c_3^{k,3}$ ,  $c_1^{k,3}$ ,  $s_3^{k,3}$ ,  $s_1^{k,3}$  et  $\sigma^{k+1,2}$  nous trouverons des équations, qui sont tout-à-fait analogues à celles, qui nous ont fourni les quantités  $c_3^{0,3}$ ,  $c_1^{0,3}$ ,  $s_3^{0,3}$ ,  $s_1^{0,3}$  et  $\sigma^{1,2}$ . On ne rencontrera donc aucune difficulté. En continuant enfin comme au no. 7 on pourra calculer successivement les coefficients des développements (30) et (31) jusqu'à un degré quelconque. Évidemment la fonction  $[\xi^k]$  pourra donc être développée en série du type (C<sub>0</sub>) tandis que la série donnant  $[\eta^k]$  sera du type (S<sub>0</sub>). L'intégration des équations (29) est donc effectuée comme nous l'avons désiré.

Passons maintenant à l'équation (27) et égalons y dans les deux membres les termes indépendants de  $w_1$  et de  $w_2$ . Il vient ainsi

$$q^{k+1} + \sigma^1 \frac{d[y_2^k]}{dw} = \text{une fonction connue du type (C}_0\text{)}.$$

$$\begin{aligned} n \frac{\partial x_1^{k+2}}{\partial w_1} \mp \frac{\partial x_1^{k+2}}{\partial w_2} + q^1 \frac{\partial x_1^{k+1}}{\partial w_2} + \sigma^1 \frac{\partial x_1^{k+1}}{\partial w} + \dots + q^{k+1} \frac{\partial x_1^1}{\partial w_2} + \sigma^{k+1} \frac{\partial x_1^1}{\partial w} = \\ = M[y_1^k] + N + \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial y_1^0 \partial x_1^0} [x_1^{k+1}] + \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial y_1^0 \partial x_2^0} [x_2^{k+1}] + \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial y_1^0 \partial \xi^0} [\xi^{k+1}] + \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial y_1^0 \partial y_1^0} [y_1^{k+1}] \\ + \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial y_1^0 \partial y_2^0} [y_2^{k+1}] + \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial y_1^0 \partial \eta^0} [\eta^{k+1}] \end{aligned}$$

où  $M$  et  $N$  sont des fonctions tout-à-fait connues, la première du type (C) la seconde du type (S). En ne conservant ici que les termes, qui sont indépendants de  $w_1$  et de  $w_2$  on aura l'équation

$$\sigma^1 \frac{d[x_1^{k+1}]}{dw} = [M][y_1^k] + [N]. \tag{38}$$

Je dis maintenant que

$$[M] = 0.$$

En cherchant l'expression de  $M$  on trouve, en effet, facilement

Il faut donc mettre  $q^{k+1} =$  le terme constant du second membre de sorte que  $q^{k+1}$  devient une série de puissance en  $\varepsilon^2$ . Ensuite on aura  $[y_2^k]$  après une intégration sous la forme d'une série du type (S<sub>0</sub>).

Après cela nous nous tournons vers l'équation (26). En ne conservant que les termes indépendants de  $w_1$  et de  $w_2$  elle nous donne la condition

$$\sigma^1 \frac{d[y_1^k]}{dw} = -\frac{3}{x_1^{0^4}} [x_1^{k+1}] + W^k \tag{33}$$

où  $W^k$  est une fonction connue du type (C<sub>0</sub>). Il y a deux inconnues  $[y_1^k]$  et  $[x_1^{k+1}]$ , qui entrent dans cette équation. Il nous faut donc encore une relation.

Dans ce qui précède nous avons fait disparaître des équations (25), (26), (27) et (28) les termes qui sont indépendants de  $w_1$  et de  $w_2$ . Ces équations peuvent donc être satisfaites par des fonctions périodiques de période  $2\pi$  de  $w$ ,  $w_1$  et  $w_2$ , de la même manière que nous avons satisfait aux équations (17) et (19) par les formules (18) et (20). Nous aurons ainsi

$$x_i^{k+1} - [x_i^{k+1}] = X_{i,k} + X'_i [y_1^k] \tag{34}$$

$X_{i,k}$  étant du type (C) et  $X'_i$  du type (S).

En connaissant maintenant  $x_1^{k+1} - [x_1^{k+1}]$ , qui entre dans l'équation (26), nous pouvons satisfaire à cette équation et aux équations (27) et (28) par des fonction de la forme

$$y_i^{k+1} - [y_i^{k+1}] = Y_{i,k} + Y'_i [y_1^k] \tag{35}$$

$$\xi^{k+1} - [\xi^{k+1}] = P_k + P' [y_1^k] \tag{36}$$

$$\eta^{k+1} - [\eta^{k+1}] = Q_k + Q' [y_1^k] \tag{37}$$

où  $Y_{i,k}$ ,  $P'$  et  $Q_k$  sont du type (S) tandis que  $Y'_i$ ,  $P_k$  et  $Q'$  sont du type (C).

Égalons maintenant dans les deux membres de la première des équations (3) les termes, qui sont de degré  $k + 2$  en  $\mu$ .

Il vient ainsi :

$$M = \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial y_1^0 \partial x_1^0} X_1' + \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial y_1^0 \partial x_2^0} X_2' + \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial y_1^0 \partial \xi^0} P' + \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial y_1^0 \partial y_1^0} Y_1' + \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial y_1^0 \partial y_2^0} Y_2' + \frac{\partial^2 F_1^0}{\partial y_1^0 \partial \eta^0} Q' \\ + \frac{\partial^3 F_1^0}{\partial y_1^{02} \partial x_1^0} x_1^1 + \frac{\partial^3 F_1^0}{\partial y_1^{02} \partial x_2^0} x_2^1 + \frac{\partial^3 F_1^0}{\partial y_1^{02} \partial \xi^0} \xi^1 + \frac{\partial^3 F_1^0}{\partial y_1^{02} \partial y_1^0} y_1^1 + \frac{\partial^3 F_1^0}{\partial y_1^{02} \partial y_2^0} y_2^1 + \frac{\partial^3 F_1^0}{\partial y_1^{02} \partial \eta^0} \eta^1.$$

On peut retrouver cette même fonction en mettant au second membre de l'équation (21)  $w_1 + \delta w_1$  au lieu de  $w_1$  et en développant d'après les puissances de  $\delta w_1$ . Le coefficient de  $\delta w_1$  dans ce développement n'est autre chose que  $M$ . Donc  $[M]$  est le coefficient de  $\delta w_1$ , dans le développement d'après les puissances de  $\delta w_1$ , de la partie du second membre de (17), qui est indépendante de  $w_1$  et de  $w_2$ . On a par suite  $[M] = 0$ .

L'équation (38) se simplifie donc et devient

$$\sigma^1 \frac{d[x_1^{k+1}]}{dw} = [N].$$

Après l'intégration on aura  $[x_1^{k+1}]$  sous forme d'une série du type  $(C_0)$  avec une constante arbitraire.

Cette constante arbitraire sera déterminée de sorte que le second membre de l'équation (33) ne possède pas de terme constant.

Cette détermination faite, nous pouvons satisfaire à l'équation (33) par une série  $[y_1^k]$  du type  $(S_0)$ .

En introduisant enfin ce développement de  $[y_1^k]$  dans les formules (34)-(37) nous pouvons trouver sous la forme désirée les expressions des fonctions

$$\frac{x_i^{k+1} - [x_i^{k+1}]}{\xi^{k+1} - [\xi^{k+1}]} = \frac{y_i^{k+1} - [y_i^{k+1}]}{\eta^{k+1} - [\eta^{k+1}]}.$$

Du reste, nous avons déjà formé les expressions des fonctions

$$[x_1^{k+1}], [x_2^k], [\xi^k], [y_1^k], [y_2^k], [\eta^k]$$

et des constantes  $\sigma^{k+1}$  et  $\rho^{k+1}$ .

La proposition de la page 360 se trouve ainsi démontrée. Les équations (3) peuvent donc être satisfaites formellement par les séries (8) et (9). Les fonctions  $x_i^k$  et  $\xi^k$  sont du type (C) tandis que  $y_i^k$  et  $\eta^k$  sont du type (S). La solution dépend des 6 constantes d'intégration

$$c, c_1, c_2, \epsilon, x_1^0, x_2^0.$$

Pour ces orbites la distance du périhélie au nœud ne fait que des petites oscillations autour de la valeur 0 ou  $\pi$ .

10. Dans ce qui précède nous avons admis que la fonction  $R$  a une valeur maxima ou une valeur minima pour

$$\xi = \xi^{0.0}, \eta = 0$$

et nous nous sommes appuyé sur ce fait que

$$\left. \begin{aligned} C_{m_1, m_2}(\xi, -\eta) &= C_{m_1, m_2}(\xi, \eta) \\ S_{m_1, m_2}(\xi, -\eta) &= -S_{m_1, m_2}(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} (39)$$

Admettons maintenant que la fonction  $R$  possède une valeur maxima ou minima pour

$$\xi = 0, \eta = \eta^{0.0}. \quad (40)$$

Ce cas peut être ramené facilement au cas déjà étudié.

Mettons en effet

$$y_1'' = y_1 + 1/2\pi, \quad y_2'' = y_2 + 1/2\pi, \quad \xi'' = \eta, \quad \eta'' = -\xi.$$

Les équations (3) deviennent alors

$$\frac{dx_v}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_v''} \quad \frac{dy_v''}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_v} \\ \frac{d\xi''}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \eta''} \quad \frac{d\eta''}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \xi''}.$$

On peut écrire

$$F_1 = \Sigma C_{m_1'', m_2''}(\xi'', \eta'') \cos(m_1'' y_1'' + m_2'' y_2'') + \Sigma S_{m_1'', m_2''}(\xi'', \eta'') \sin(m_1'' y_1'' + m_2'' y_2''). \quad (41)$$

Maintenant, en vertu des propriétés de symétrie des coefficients du développement (4), étudiées au no. 4, les coefficients du développement (41) possèdent les propriétés de symétrie suivantes:

$$C_{m_1'', m_2''}(\xi'', -\eta'') = C_{m_1'', m_2''}(\xi'', \eta'') \\ S_{m_1'', m_2''}(\xi'', -\eta'') = -S_{m_1'', m_2''}(\xi'', \eta'').$$

Enfin la fonction  $R$  a une valeur maxima ou minima au point (40), c'est-à-dire au point

$$\xi'' = \eta^{0.0} = \xi^{0.0}, \quad \eta'' = 0.$$

Nous sommes donc ramenés au cas déjà étudié.

Les variables nouvelles  $x_v, y_v'', \xi''$  et  $\eta''$  peuvent être développées en séries complètement analogues aux séries (8). Les fonctions  $x_i^k, \xi^{0.k}$  sont du type (C), tandis que  $y_i^{0.k}$  et  $\eta^{0.k}$  sont du type (S).

Pour les orbites, ainsi définies, la distance du périhélie au nœud fait des petites oscillations autour de la valeur  $+1/2\pi$  ou  $-1/2\pi$ .

11. Admettons maintenant que la fonction  $R$  a une valeur maxima ou minima pour  $\xi = \eta = 0$ . Ce cas est ramené immédiatement au cas plus général du nos. 7, 8, 9 en y mettant seulement  $\xi^{0.0} = 0$ . Les séries (8) existent donc aussi dans le cas spécial, qui nous occupe. Les  $x_i^k$  et  $\xi^k$  sont du type (C), les  $y_i^k$  et  $\eta^k$  du type (S). Les orbites ainsi définies sont caractérisées par des excentricités petites. Ensuite, la distance  $g$  du périhélie au nœud possède un moyen mouvement, dont la valeur est  $\pm \sigma$ , suivant que  $R$  est minima ou maxima au point  $\xi = \eta = 0$ . Ces orbites sont évidemment celles des astéroïdes. Nous montrerons plus tard aux nos. 16, 17, 22, 23 dans quelles conditions la fonction  $R$  est maxima ou minima pour  $\xi = \eta = 0$ . Nous trouverons ainsi les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'excentricité d'une orbite restera toujours petite, si elle est petite à un moment donné.

12. Nous supposons enfin que la fonction  $R$  a une valeur maxima quand l'inclinaison est nulle. Dans ce cas

nous choisissons les variables définies au no. 3. On est donc encore ramené au cas général étudié au nos. 7, 8 et 9 de sorte que les équations (5) sont satisfaites formellement par certaines séries analogues aux séries (8). Les  $x_i^{k'}$  et  $\xi^{k'}$  sont des séries du type (C) les  $y_i^{k'}$  et  $\eta^{k'}$  du type (S). Les orbites correspondantes appartiennent aux comètes périodiques, dont l'inclinaison est petite. La distance  $g$  du périhélie au nœud possède un moyen mouvement positif, dont la valeur est  $\sigma$ . Nous étudierons au no. 25 dans quelles conditions ces séries existent.

Pour toutes les orbites que nous avons rencontrées aux nos. 7-12 les éléments  $a, e$  et  $I$  font seulement des petites oscillations autour de certaines valeurs moyennes invariables ( $\mu$  et  $\varepsilon$  étant petites). Enfin, pour toutes, la longitude  $\theta$  du nœud va toujours en diminuant, puisque  $q$  est toujours une quantité négative. (Voir la note de la page 357).

Chapitre III.

Étude de la partie séculaire de la fonction perturbatrice.

13. Nous avons vu que le calcul des séries de M. Lindstedt dépend de l'intégration des équations (12) des variations séculaires. Dans ces équations  $R$  est le terme indépendant de  $l$  et de  $\theta'$  dans le développement de la fonction perturbatrice  $F_1$  en série de Fourier d'après les cosinus et les sinus des multiples de ces deux arguments.

Il importe d'étudier de plus près cette fonction. Pour l'étude en question il est plus commode de retourner aux variables kepleriennes  $a^0, I^0, e^0, g^0$ , qui correspondent aux variables canoniques  $x_1^0, x_2^0, \xi^0, \eta^0$ . Dans ce chapitre nous écrirons presque partout  $a, I, e, g$  au lieu de  $a^0, I^0, e^0, g^0$ . Les différences  $a - a^0, I - I^0, e - e^0, g - g^0$  entre les éléments

$$r \cos H = r \cos (w + g) \cos \theta' - r \sin (w + g) \sin \theta' \cdot \frac{k}{\sqrt{1 - e^2}}$$

$$A^2 = 1 + r^2 - 2 r \cos H .$$

Il est donc évident que le second terme de  $F_1$ , développé en série de Fourier, ne contient aucune partie indépendante de l'argument  $\theta'$ . Ensuite le terme constant du développement de  $\frac{1}{r}$  est

$$\frac{1}{4 \pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} dl d\theta' = \frac{1}{4 \pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a} du d\theta' = \frac{1}{a}$$

puisque

$$dl = (1 - e \cos u) du = \frac{r}{a} du$$

$u$  étant l'anomalie excentrique.

Ainsi, à une constante près, la fonction  $R$  est donnée par l'intégrale double

$$R = \frac{1}{4 \pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dl d\theta'}{A} = \frac{1}{4 \pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - e \cos u}{A} du d\theta' . \tag{44}$$

La distance  $A$  peut facilement être exprimée comme fonction de  $u, \theta', e, g, a, k$  en utilisant les formules bien connues

$$r = a (1 - e \cos u)$$

$$r \cos w = a (\cos u - e)$$

$$r \sin w = a \sqrt{1 - e^2} \sin u .$$

osculatrices  $a, I, e, g$  et les quantités constantes ou à variations séculaires  $a^0, I^0, e^0, g^0$  sont évidemment de l'ordre de la masse perturbatrice  $\mu$ . Puisque  $x_1^0$  et  $x_2^0$  devaient être regardées comme des paramètres, il en est de même de  $a$  et de  $k$ , en mettant

$$\frac{x_2^0}{x_1^0} = \sqrt{1 - e^2} \cos I = k . \tag{42}$$

Puisque l'inclinaison  $I$  n'est pas un angle obtus, on a toujours  $0 \leq k \leq 1$ .

En éliminant par la formule (42) l'inclinaison  $I, R$  devient une fonction de  $e$  et de  $g$  dépendant en outre des deux paramètres  $a$  et  $k$ . Il nous suffit d'étudier la fonction  $R$  dans le domaine

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq g \leq 2\pi \\ 0 \leq e \leq k' = \sqrt{1 - k^2} . \end{aligned} \right\} \tag{43}$$

En effet, pour des valeurs de  $e > k'$ , on aurait  $\cos I > 1$ .

Pour  $e = k'$ , l'inclinaison  $I$  disparaît, de la fonction perturbatrice dépend de  $g$  et  $\theta'$  seulement dans la combinaison  $g + \theta'$ . Dans ce cas  $R$  est donc indépendante de  $g$  de sorte que

$$R = \text{const. pour } e = k'.$$

Pour former la fonction  $R$  il faut partir de la fonction perturbatrice

$$F_1 = \frac{1}{A} - r \cos H - \frac{1}{r}$$

définie au no. 2; la développer en série de Fourier des deux arguments  $l$  et  $\theta'$  et conserver seulement le terme indépendant de ces deux arguments. Dans l'expression de  $F_1$   $r$  est la distance entre le Soleil et la comète,  $A$  la distance entre la comète et Jupiter et  $H$  l'angle au Soleil entre les rayons vecteurs menés vers la comète et vers Jupiter. On aura ainsi, en désignant par  $w$  l'anomalie vraie,

La fonction  $R$  est donnée sans ambiguïté par la formule (44) toutes les fois que les orbites ne se coupent pas. Evidemment  $R$  est holomorphe pour toutes les valeurs de  $e, g, a, k$  du domaine (43) auxquelles correspond une orbite ne rencontrant pas celle de Jupiter.

14. Il importe d'étudier le caractère de la fonction  $R$ , si les orbites se rencontrent. Évidemment, pour que les orbites se coupent, il faut et il suffit que l'une ou l'autre des conditions suivantes soit remplie :

- 1) 
$$1 = \frac{a(1 - e^2)}{1 \pm e \cos g}$$
- 2) 
$$e = k'$$

et que, de plus,  $a$  satisfasse à l'inégalité

$$\frac{1}{1 + k'} < a < \frac{1}{1 - k'}$$

La première de ces conditions exprime que  $r = 1$ , quand  $w = -g$ , ou quand  $w = \pi - g$ . En introduisant les variables

$$x = e \cos g \quad y = e \sin g$$

la relation 1) peut s'écrire

$$\left(x \pm \frac{1}{2a}\right)^2 + y^2 = \left(1 - \frac{1}{2a}\right)^2 \tag{45}$$

C'est l'équation de deux cercles dont les centres sont aux points  $x = \mp \frac{1}{2a}, y = 0$  et qui passent, l'un par le point  $x = -1, y = 0$ , l'autre par le point  $x = +1, y = 0$ .

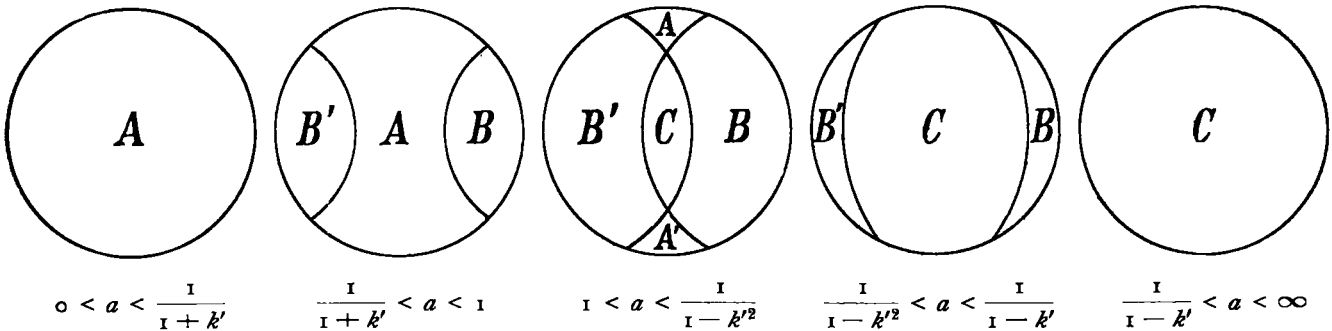
La position des cercles (45) par rapport au cercle

$$x^2 + y^2 = k'^2 \tag{46}$$

qui limite le domaine (43), dépend des valeurs de  $a$  et de  $k'$ .

Il faut distinguer ainsi 5 cas différents. Ils sont caractérisés assez nettement par les figures ci-dessous avec leurs inégalités correspondantes. On a admis pour fixer les idées que  $k' = 1/2$ . Dans tous les cas  $k'$  est le rayon du cercle complètement tracé. L'un des cercles non complètement tracés passe par le point  $x = +1, y = 0$ , l'autre par le point  $x = -1, y = 0$ . La distance minima de ces cercles à l'origine est dans tous les cas  $\left|1 - \frac{1}{a}\right|$ .

Figur 1-5.



Les cercles (45) et (46) limitent dans le plan des  $x, y$  des domaines  $A, B, C, A', B'$ , marqués par ces lettres sur les figures ci-dessus.

Nous allons démontrer maintenant le théorème suivant :

La fonction  $R$  est représentée dans les divers domaines  $A, B, C, A', B'$  par des fonctions analytiques différentes. Chacune de ces fonctions reste holomorphe dans le domaine correspondant et sur ses frontières (le cercle  $e = k'$  excepté).

Afin de démontrer cette proposition je vais d'abord exprimer  $R$  par une intégrale simple en effectuant l'intégration par rapport à  $\theta'$ . Mettons  $A^2$  sous la forme

Mettons

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1+r^2}}{A} d\theta' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta'}{\sqrt{1 - \tau \cos(\theta' + V)}} = F(\tau) \tag{50}$$

En substituant ensuite dans la formule (44) l'anomalie vraie  $w$  au lieu de l'anomalie moyenne  $l$  et en utilisant l'équation connue

$$dl = \frac{r^2}{a^2} \frac{dw}{\sqrt{1 - e^2}}$$

nous aurons enfin  $R$  exprimée par une intégrale simple

$$R = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{a^2} \frac{F(\tau)}{\sqrt{1 - e^2} \sqrt{1 + r^2}} dw \tag{51}$$

$$A^2 = (1 + r^2) [1 - \tau \cos(\theta' + V)] \tag{47}$$

Pour déterminer  $\tau$  et  $V$  nous aurons les équations

$$\begin{aligned} (1 + r^2) \tau \cos V &= 2r \cos(w + g) \\ (1 + r^2) \tau \sin V &= 2r \sin(w + g) \cos I. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\tau^2 = \frac{4r^2}{(1 + r^2)^2} [1 - \sin^2 I \sin^2(w + g)] \tag{48}$$

ou bien

$$\tau'^2 = 1 - \tau^2 = \frac{(1 - r^2)^2 + 4r^2 \sin^2 I \sin^2(w + g)}{(1 + r^2)^2} \tag{49}$$

Il est bien connu et facile à vérifier que  $F$  est représentée, si  $0 \leq \tau < 1$ , par la série hypergéométrique

$$F(\tau) = F(1/4, 3/4, 1, \tau^2) \tag{52}$$

ou bien par l'intégrale elliptique de première espèce au moyen de la formule

$$F(\tau) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1+\tau}} \int_0^{1/2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{2\tau}{1+\tau} \sin^2 \varphi}} \tag{53}$$

On sait de plus (voir Picard: *Traité d'analyse* t. III page 273) que  $F(\tau)$  est de la forme

$$F(\tau) = A(\tau^2) \log \tau^2 + B(\tau^2) \tag{54}$$

dans le voisinage de  $\tau = 1$ ,  $A$  et  $B$  étant développées suivant les puissances de  $\tau^2$ , et que

$$A(0) \neq 0 \tag{55}$$

Ensuite  $A, B$  et  $\log \tau^2$  sont réelles, si  $\tau^2$  est réelle et  $> 0$ . Enfin on a évidemment

$$A(0) < 0 \tag{56}$$

car, si  $A(0) > 0$ , on aurait pour  $\tau = 1$ ,  $\lim F(\tau) = -\infty$ , ce qui est impossible puisque  $F(\tau) > 0$ .

Maintenant il est facile d'étudier la fonction  $R$  au voisinage d'un point  $e_0, g_0, a_0, k_0$  situé sur l'un des cercles (45) et à l'intérieur du cercle (46). Admettons, pour fixer les idées, qu'on se trouve dans le cas de la Fig. 2 et que

$$\frac{a_0(1 - e_0^2)}{1 - e_0 \cos g_0} = 1$$

$$\tau'^2 = \frac{(1 - r^2) + 2\sqrt{-1}r\sqrt{\frac{k'^2 - e^2}{1 - e^2}} \sin(\omega + g)}{1 + r^2} \cdot \frac{(1 - r^2) - 2\sqrt{-1}r\sqrt{\frac{k'^2 - e^2}{1 - e^2}} \sin(\omega + g)}{1 + r^2} \tag{60}$$

Les deux facteurs peuvent être développés d'après les puissances de  $w - w_0, e - e_0, g - g_0, a - a_0$  et  $k - k_0$  et disparaissent avec ces quantités. Ensuite, pour  $e = e_0, g = g_0, a = a_0$  et  $k = k_0$  la racine  $w = w_0$  est une racine simple pour les deux facteurs. Par suite il est possible de mettre  $\tau'^2$  sous la forme

$$\tau'^2 = [(w - w_0 + H_1)^2 + H_2^2] T \tag{61}$$

$$I = \int_{w_0 - \varepsilon}^{w_0 + \varepsilon} H \log[\omega^2 + H_2^2] d\omega + \int_{w_0 - \varepsilon}^{w_0 + \varepsilon} H' d\omega = I_1 + I_1' \tag{62}$$

où  $H$  et  $H'$  sont holomorphes pour  $w = w_0, e = e_0, g = g_0, a = a_0, k = k_0$ . La seconde intégrale du deuxième membre est une fonction holomorphe dans le domaine (57). Il importe d'étudier l'intégrale  $I_1$ .

Mettons

$$\tilde{H} = \int_{w_0 - H_1}^w H d\omega \tag{63}$$

et appliquons la méthode de l'intégration par parties. Il vient

En mettant  $w_0 = \pi - g_0$

nous aurons  $\tau^2 = 1$  pour  $w = w_0$

et  $0 \leq \tau^2 < 1$  pour  $w \neq w_0$ .

Choisissons maintenant la quantité  $\delta$  aussi petite que l'on veut, et étudions la fonction  $R$  pour les valeurs réelles de  $e, g, a$  et  $k$ , qui se trouvent dans le domaine

$$|e - e_0| < \delta, |g - g_0| < \delta, |a - a_0| < \delta, |k - k_0| < \delta \tag{57}$$

Nous pouvons évidemment trouver une petite quantité  $\varepsilon$ , telle que la limite supérieure de  $\tau^2$  est  $< 1$ , quand  $e, g, a$  et  $k$  appartiennent au domaine (57), tandis que  $w$  se trouve dans l'un des domaines

$$0 \leq w \leq w_0 - \varepsilon \quad w_0 + \varepsilon \leq w \leq 2\pi \tag{58}$$

Cela étant, partageons le chemin d'intégration de l'intégrale (51) dans les trois parties

$$0 \dots (w_0 - \varepsilon) \quad (w_0 - \varepsilon) \dots (w_0 + \varepsilon) \quad (w_0 + \varepsilon) \dots 2\pi$$

En effectuant l'intégration sur la première et sur la troisième de ces parties nous trouverons évidemment des fonctions holomorphes dans le domaine (57). Il nous reste seulement à étudier l'intégrale

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{w_0 - \varepsilon}^{w_0 + \varepsilon} \frac{r^2 F(\tau)}{a^2 \sqrt{1 - e^2} \sqrt{1 + r^2}} d\omega \tag{59}$$

Ici nous ferons usage de la formule (54). La quantité  $\tau'^2$  peut se mettre sous la forme

Les fonctions réelles  $H_1$  et  $H_2$  ne dépendent pas de  $w$ , sont développées d'après les puissances de  $e - e_0, g - g_0, a - a_0$  et  $k - k_0$  et disparaissent avec ces quantités. Enfin  $T$  est développée d'après les puissances de  $w - w_0, e - e_0, g - g_0, a - a_0, k - k_0$  et ne disparaît pas avec ces quantités. Mettons, pour simplifier,  $\omega$  au lieu de  $w - w_0 + H_1$ .

Cela étant, l'intégrale  $I$  de la formule (59) peut s'écrire

$$I_1 = \int_{w_0 - \varepsilon}^{w_0 + \varepsilon} \tilde{H} \log[\omega^2 + H_2^2] + I_2$$

où

$$I_2 = - \int_{w_0 - \varepsilon}^{w_0 + \varepsilon} \tilde{H} \frac{2\omega}{\omega^2 + H_2^2} d\omega$$

Le premier terme de l'expression de  $I_1$  est une fonction holomorphe dans le domaine (57), si  $\varepsilon$  est assez grande par rapport à  $\delta$ , ce que nous pouvons supposer.

Dans l'intégrale  $I_2$  nous pouvons écrire

$$-2\omega \cdot \tilde{H} = \omega^2 \cdot G_1 + \omega \cdot G_2 = G_3 + \omega \cdot G_4 \quad (64)$$

où  $G_1$  et  $G_2$  sont développées d'après les puissances de  $\omega^2$ ,  $e - e_0$ ,  $g - g_0$ ,  $a - a_0$  et  $k - k_0$

tandis que  $G_3$  et  $G_4$  sont développées suivant les puissances de  $\omega^2 + H_2^2$ ,  $e - e_0$ ,  $g - g_0$ ,  $a - a_0$  et  $k - k_0$ .

On peut mettre

$$\left. \begin{aligned} G_3 &= H_2^2 H_3 + [\omega^2 + H_2^2] H_3' \\ G_4 &= H_4 + [\omega^2 + H_2^2] H_4' \end{aligned} \right\} (65)$$

en désignant par  $H_2^2 H_3$  et  $H_4$  les parties de  $G_3$  et  $G_4$  qui sont indépendantes de  $\omega^2 + H_2^2$ . Évidemment  $H_3$  et  $H_4$  sont holomorphes pour  $e = e_0$ ,  $g = g_0$ ,  $a = a_0$ ,  $k = k_0$ .

Nous aurons ainsi

$$I_2 = \int_{w_0-\varepsilon}^{w_0+\varepsilon} H_3' dw + \int_{w_0-\varepsilon}^{w_0+\varepsilon} \omega \cdot H_4' dw + H_4 \int_{w_0-\varepsilon}^{w_0+\varepsilon} \frac{\omega}{\omega^2 + H_2^2} dw + I_3$$

en mettant

$$I_3 = H_2^2 \cdot H_3 \int_{w_0-\varepsilon}^{w_0+\varepsilon} \frac{dw}{\omega^2 + H_2^2}$$

Les trois premiers termes sont évidemment des fonctions holomorphes pour  $e = e_0$ ,  $g = g_0$ ,  $a = a_0$ ,  $k = k_0$ .

Dans le calcul de  $I_3$  nous pouvons appliquer la formule

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \left[ \frac{1}{|a|} \operatorname{arctg} \frac{x}{|a|} \right]_{\alpha}^{\beta}$$

Il vient ainsi

$$\begin{aligned} I_3 &= |H_2| \cdot H_3 \left( \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon + H_1}{|H_2|} - \operatorname{arctg} \frac{-\varepsilon + H_1}{|H_2|} \right) \\ &= |H_2| \cdot H_3 \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{|H_2|}{\varepsilon + H_1} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{|H_2|}{\varepsilon - H_1} \right) \\ &= \pi \cdot |H_2| \cdot H_3 + \text{fonction holomorphe.} \end{aligned}$$

Ainsi nous avons démontré que l'expression (51) de  $R$  peut se mettre sous la forme

$$R = \pi \cdot |H_2| \cdot H_3 + H_5 \quad (66)$$

si  $e$ ,  $g$ ,  $a$  et  $k$  se trouvent dans le domaine (57). Dans ce domaine les fonctions  $H_2$ ,  $H_3$  et  $H_5$  sont holomorphes.

Il reste à montrer que les fonctions  $H_2$  et  $H_3$  ne disparaissent pas identiquement.

D'abord  $H_2$  ne peut pas être identiquement nulle; en effet, dans ce cas la quantité  $\tau'^2$  pourrait s'annuler dans le domaine (57) pour des valeurs de  $e$  et de  $g$  telles que

$$\frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos g} \neq 1$$

ce qui est impossible.

Ensuite  $H_3$  n'est pas non plus identiquement zéro. Pour le montrer cherchons la valeur de  $H_3$  pour  $e = e_0$ ,  $g = g_0$ ,  $a = a_0$ ,  $k = k_0$ . Dans la formule (64) on a

$$\begin{aligned} G_3 &= \omega^2 G_1 = A_2 \omega^2 + A_4 \omega^4 + \dots \\ &= -A_2 H_2^2 + A_4 H_2^4 - \dots \\ &\quad + (A_2 - 2A_4 H_2^2 + \dots)(\omega^2 + H_2^2) + \dots \end{aligned} \quad (67)$$

où  $A_2$ ,  $A_4$ , ... sont développées suivant les puissances de  $e - e_0$ ,  $g - g_0$ ,  $a - a_0$ ,  $k - k_0$ .

Nous désignerons par  $A_2^{(0)}$ ,  $A_4^{(0)}$ , ...  $H_3^{(0)}$ ,  $G_3^{(0)}$  etc. ce que deviennent les fonctions  $A_2$ ,  $A_4$ , ...  $H_3$ ,  $G_3$  etc., en y mettant  $w = w_0$ ,  $e = e_0$ ,  $g = g_0$ ,  $a = a_0$ ,  $k = k_0$ .

Les relations (65) et (67) montrent maintenant que

$$H_3^{(0)} = -A_2^{(0)}$$

La fonction  $\tilde{H}$  définie par la formule (63) peut s'écrire

$$\tilde{H} = B_1 \omega + B_2 \omega^2 + \dots$$

Les équations (64) et (67) montrent donc que

$$A_2^{(0)} = -2B_1^{(0)}$$

En dérivant par rapport à  $w$  la formule (63) et en mettant  $w = w_0$ ,  $e = e_0$ ,  $g = g_0$ ,  $a = a_0$ ,  $k = k_0$  après la différentiation il vient ensuite

$$B_1^{(0)} = H^{(0)}$$

En rapprochant enfin les formules (54), (56), (59) et (62) on en déduit que

$$H^{(0)} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{a_0^2 \sqrt{1 - e_0^2}} \frac{1}{\sqrt{2}} A^{(0)} < 0$$

Nous avons donc en effet

$$H_3^{(0)} < 0$$

et  $H_3$  n'est pas identiquement nulle.

C. Q. F. D.

Retournons maintenant encore une fois à la formule (66) pour étudier la fonction  $H_2$ . Évidemment cette fonction s'annule quand  $e$  et  $g$  satisfont à l'équation

$$a(1 - e^2) - 1 + e \cos g = 0 \quad (68)$$

En effet, pour de telles valeurs de  $e$  et de  $g$  les orbites se coupent et la quantité  $\tau'^2$ , donnée par la formule (61), s'annule en posant  $w = \pi - g$ .

Il faut donc que

$$H_2 = 0$$

sur la courbe (68).

Je dis maintenant que la fonction  $H_2$  change de signe, quand on traverse la courbe (68). En effet, en partant des formules (60) et (61), il est facile de calculer les premiers termes du développement de  $H_2$  d'après les puissances de  $e - e_0$  et de  $g - g_0$ . On trouve ainsi

$$H_2 = K \cdot [(2a_0 e_0 - \cos g_0)(e - e_0) + e_0 \sin g_0 (g - g_0) + \dots]$$

$K$  étant une quantité qui n'est pas nulle.

Les termes du premier degré ne disparaissent pas, et il en suit, que le signe de  $H_2$  change, quand on traverse la courbe (68).

D'après la formule (66) la fonction  $R$  est ainsi donnée par deux fonctions analytiques différentes  $R'$  et  $R''$  dans les deux domaines  $A$  et  $B$  de la Fig. 2. De ces fonctions  $R'$  est holomorphe dans le domaine  $A$ , et  $R''$  dans le domaine  $B$ . Ensuite ces fonctions  $R'$  et  $R''$  sont holomorphes aussi sur

les arcs des cercles (45), qui séparent les domaines  $A$  et  $B$  l'un de l'autre, sauf dans les points d'intersection des courbes (45) et (46). Enfin on a  $R' = R''$  sur la frontière, qui sépare les domaines  $A$  et  $B$ .

Nous avons supposé dans la démonstration précédente que

$$\frac{1}{1+k'} < a < 1.$$

Mais il est évidemment possible d'employer presque sans changement la même méthode pour traiter les cas

$$1 < a < \frac{1}{1-k'^2}$$

et

$$\frac{1}{1-k'^2} < a < \frac{1}{1-k'}$$

représentés par les Fig. 3 et 4 de la page 369. Pour calculer  $R$  il faut employer des fonctions analytiques différentes dans les domaines  $A, B, C, A', B'$ . Ces fonctions sont holomorphes, chacune dans le domaine  $A, B, C, A'$  ou  $B'$ , auquel elle appartient, et aussi sur les frontières de ce domaine à l'exception du cercle (46).

Il reste seulement à dire quelques mots sur la fonction  $R$  au voisinage d'un point d'intersection des deux cercles (45) dans le cas

$$1 < a < \frac{1}{1-k'^2}.$$

Pour ces valeurs des éléments les orbites se coupent en deux points symétriques, et la fonction  $v'$  s'annule pour les deux valeurs  $w = \pm \frac{1}{2}\pi$ .

Alors il faut partager le chemin d'intégration de l'intégrale (51) en quatre parties

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} + \varepsilon \dots \frac{\pi}{2} - \varepsilon & \quad \frac{\pi}{2} - \varepsilon \dots \frac{\pi}{2} + \varepsilon \\ \frac{\pi}{2} + \varepsilon \dots \frac{3\pi}{2} - \varepsilon & \quad \frac{3\pi}{2} - \varepsilon \dots \frac{3\pi}{2} + \varepsilon. \end{aligned}$$

L'intégration effectuée sur la première et sur la troisième de ces parties nous donne des fonctions holomorphes au point considéré. Les intégrales étendues sur la deuxième ou sur la quatrième partie demandent une attention spéciale. En continuant comme nous l'avons fait auparavant, il est évident que nous parviendrons à une expression de la forme

$$R = R_0 + |R_1| + |R_2|$$

donnant la fonction  $R$  au voisinage du point considéré. Ici  $R_0, R_1$  et  $R_2$  sont holomorphes à ce point.  $R_1$  change son signe quand on traverse l'une des courbes (45); et  $R_2$  quand on traverse l'autre.

Nous aurons ainsi quatre éléments différents donnant la fonction  $R$  dans les quatre domaines  $A, B, C, B'$  entourant le point considéré.

Evidemment, la proposition de la page 369 se trouve maintenant démontrée.

15. En passant maintenant à l'étude de la fonction  $R$  au voisinage d'un point du cercle (46) nous posons

$$x' = \sqrt{k'^2 - e^2} \cos g \quad y' = \sqrt{k'^2 - e^2} \sin g.$$

L'équation 
$$\frac{a(1-k'^2)}{1+k' \cos w} = 1$$

a deux racines simples  $\bar{w}$  et  $-\bar{w}$ , si

$$\frac{1}{1+k'} < a < \frac{1}{1-k'}. \tag{69}$$

Désignons par  $w_0$  la valeur de  $\bar{w}$  quand  $a = a_0, k = k_0$ .

Par suite, et étant donnée la formule (60), l'équation  $v'^2 = 0$  a une racine double se réduisant à  $w_0$  et une autre racine double se réduisant à  $-w_0$  pour  $x' = y' = 0, a = a_0, k = k_0$ . Ces racines sont développables suivant les puissances entières et positives de  $x', y', a - a_0, k - k_0$ .

En mettant, au voisinage de  $w = w_0$ , la quantité  $v'^2$  sous la forme (61) les fonctions  $H_1$  et  $H_2$  sont évidemment holomorphes et nulles pour  $x' = y' = 0, a = a_0, k = k_0$ , tandis que la fonction  $T$  est holomorphe et  $\neq 0$  pour  $w = w_0$  et  $x' = y' = 0, a = a_0, k = k_0$ . On trouve sans peine que

$$H_2 = -\frac{ak}{k'} [x' + \cot \bar{w} \cdot y'] + \dots$$

les termes non écrits étant au moins du troisième degré en  $x'$  et en  $y'$ .

Dans le voisinage de  $w = -w_0$  on aura pour  $v'^2$  une forme analogue en changeant seulement  $w_0$  en  $-w_0$ . Soient  $H_1', H_2'$  et  $T'$  ce que deviennent les fonctions  $H_1, H_2$  et  $T$  après ce changement.

Maintenant, en utilisant une méthode analogue à celle qui nous a conduit à la formule (66), nous pouvons arriver à l'expression suivante

$$R = \pi |H_2| H_3 + \pi |H_2'| H_3' + H_5.$$

Ici les fonctions  $H_3, H_3'$  et  $H_5$  sont holomorphes pour  $e = k'$ . Leurs développements d'après les puissances de  $x'$  et de  $y'$  ne contiennent par suite que des termes de degrés pairs.

Ensuite nous avons, comme à la page 374,

$$H_3 = H_3' = H_3^{(0)} < 0$$

pour  $e = k'$  c. à. d. pour  $x' = y' = 0$ .

Introduisons maintenant au lieu des variables  $x', y'$  les variables  $\xi', \eta'$  du no. 3 au moyen des formules

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{a}} \xi' \sqrt{1 + \frac{1}{4} \frac{\xi'^2 + \eta'^2}{a \cdot k}} \\ y' &= \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{a}} \eta' \sqrt{1 + \frac{1}{4} \frac{\xi'^2 + \eta'^2}{a \cdot k}} \end{aligned}$$

faciles à déduire. A l'ensemble des deux courbes (45) dans le plan des  $x, y$  correspond dans le plan des  $x', y'$  la courbe

$$x'^2 \frac{k'^2 - x'^2 - y'^2}{x'^2 + y'^2} = [a(k^2 + x'^2 + y'^2) - 1]^2$$

et dans le plan des  $\xi', \eta'$  une courbe ( $C'$ ), dont il est inutile d'écrire l'équation. Cette courbe ( $C'$ ) possède à l'origine un point double, dont les deux tangentes font les angles  $\pm w_0$  avec l'axe des  $\xi'$ . Les branches de cette même courbe divisent le domaine avoisinant l'origine en quatre parties. Nous dé-



signerons par  $A^{(+)}$  la partie environnant l'axe positif des  $\xi'$ , par  $B^{(+)}$  la partie entourant l'axe positif des  $\eta'$  et enfin par  $A^{(-)}$  et  $B^{(-)}$  les deux parties opposées à  $A^{(+)}$  et à  $B^{(+)}$

D'après ce qui précède, autant que subsistent les inégalités (69), la fonction  $R$  est donnée dans les quatre domaines  $A^{(+)}$ ,  $B^{(+)}$ ,  $A^{(-)}$ ,  $B^{(-)}$  par quatre fonctions différentes qui sont, toutes les quatre, holomorphes au voisinage de  $\xi' = \eta' = 0$ . En écrivant séparément les termes du premier degré on aura ainsi

$$\left. \begin{aligned} R &= -A\xi' + \mathfrak{P}_1(\xi', \eta') \text{ dans le domaine } A^{(+)} \\ R &= -B\eta' + \mathfrak{P}_2(\xi', \eta') \text{ » » » } B^{(+)} \\ R &= +A\xi' + \mathfrak{P}_1(-\xi', \eta') \text{ » » » } A^{(-)} \\ R &= +B\eta' + \mathfrak{P}_2(\xi', -\eta') \text{ » » » } B^{(-)}. \end{aligned} \right\} (70)$$

Evidemment, dans ces formules, les coefficients  $A$  et  $B$  ne sont jamais négatives.  $A$  est d'ailleurs toujours  $> 0$ , et  $B$  ne peut s'annuler que si  $u_0 = \pm \frac{1}{2}\pi$ , c'est-à-dire si  $a = \frac{1}{1 - k'^2}$ .

Retournons enfin aux variables  $e$  et  $g$ . Autant que les inégalités (69) ont lieu, la fonction  $R$  peut, au voisinage du cercle  $e = k'$ , être développée en une série de la forme

$$R = R_0 + R_1(k' - e)^{1/2} + R_2(k' - e)^{3/2} + R_3(k' - e)^{5/2} + \dots$$

Le coefficient  $R_1$  n'est jamais positif et ne peut s'annuler que pour  $g = \pm \frac{1}{2}\pi$  si  $a = \frac{1}{1 - k'^2}$ . On a donc dans le cas des inégalités (69)

$$\frac{\partial R}{\partial e} = +\infty \text{ pour } e = k'$$

sauf aux deux points exceptionnels, où les cercles (45) et (46) se coupent tous les trois en une fois.

Dans ce chapitre nous n'avons parlé jusqu'ici que de la partie séculaire  $R$  de la fonction perturbatrice. Mais il est possible d'étudier de la même manière les autres coefficients des développements (4) et (6). On démontre ainsi que les coefficients  $C_{m_1, m_2}(\xi, \eta)$  et  $S_{m_1, m_2}(\xi, \eta)$  sont holomorphes par rapport aux variables  $\xi, \eta, x_1$  et  $x_2$  même si les orbites se rencontrent, si seulement l'inclinaison n'est pas nulle. Si au contraire l'inclinaison disparaît on choisit les variables du no. 3 et on démontre comme au no. 15 que les coefficients  $C'_{m_1, m_2}(\xi', \eta')$  et  $S'_{m_1, m_2}(\xi', \eta')$  du développement (6) sont holomorphes par rapport aux variables  $\xi', \eta', x_1'$  et  $x_2'$  au point  $\xi' = \eta' = 0$ , même si les orbites se rencontrent. On démontre en même temps que les fonctions analytiques qui représentent ces coefficients  $C, S, C', S'$  doivent être remplacées par d'autres fonctions, dès que l'orbite de la comète a traversé l'orbite de Jupiter. Dans la démonstration on rencontre au lieu de la fonction

$F(\tau)$  de la formule (50) une fonction  $F^{(n)}(\tau)$  qui s'obtient de  $F(\tau)$  en mettant seulement dans son expression (50)  $\cos n(\theta' + V) d\theta'$  au lieu de  $d\theta'$ ,  $n$  étant un nombre entier. Maintenant la théorie des fonctions  $b^{(n)}$  de Laplace apprend que  $F^{(n)}(\tau)$  est donnée au voisinage de  $\tau = 1$  par une expression de même forme que l'expression (54) de  $F(\tau)$ . Dans la démonstration on ne rencontrera par suite aucune difficulté nouvelle.

Chapitre IV.

Maxima et minima de la partie séculaire de la fonction perturbatrice.

16. Au chapitre II nous avons montré que l'intégration des équations (12) des variations séculaires se simplifie beaucoup au voisinage d'une valeur maxima ou minima de la fonction  $R$ . Il importe donc de trouver les points  $(e, g)$  du domaine (43) pour lesquels la fonction  $R$  atteint ses maxima et minima.

Dans l'étude, que nous avons en vue, il est avantageux de distinguer trois cas, caractérisés par la position des nœuds de l'orbite de la masse infiniment petite :

- 1° Les deux nœuds se trouvent à l'intérieur de l'orbite de Jupiter, de sorte que l'orbite de la comète en restant dans son plan peut être réduite au Soleil sans couper l'orbite de Jupiter.
- 2° Les deux nœuds sont situés à l'extérieur de l'orbite de Jupiter, de sorte que l'orbite de la comète en restant dans son plan, peut se réduire à un cercle infiniment grand autour du Soleil comme centre sans toucher à l'orbite de Jupiter.
- 3° Des deux nœuds l'un est situé en dedans de, l'autre en dehors de l'orbite de Jupiter. Les deux orbites se comportent alors comme les anneaux d'une chaîne.

En traitant maintenant le cas 1°, nous commencerons par admettre, que le demi grand axe  $a$  est une quantité petite. Alors il est facile d'étudier complètement la fonction  $R$ , en se servant de son développement d'après les puissances de  $a$ .

Nous partons des formules

$$\begin{aligned} A^2 &= 1 + r^2 - 2r \cos H \\ &= 1 + r^2 - 2r [\cos(w + g) \cos \theta' - \sin(w + g) \sin \theta' \cos I] \\ &= 1 + r^2 - 2r [\mu \cos M + \nu \cos N] \end{aligned}$$

où  $w$  signifie l'anomalie vraie de la comète, tandis que

$$\begin{aligned} \mu &= \cos^2 \frac{1}{2} I & \nu &= \sin^2 \frac{1}{2} I \\ M &= w + g + \theta' & N &= w + g - \theta'. \end{aligned}$$

En employant les formules de Tisserand (Traité de Mécanique Céleste t. I p. 457) nous aurons le développement

$$\frac{1}{A} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_{ij}^{(n)} \cos(iM + jN) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sum \sum A_{ij}^{(n)} \cos[(i+j)(w+g) + (i-j)\theta']$$

les  $A_{ij}^{(n)}$  dépendant seulement de  $\mu$  et de  $\nu$ . Les indices  $i, j, n$  satisfont, comme on sait, à la relation

$$n - |i| - |j| = \text{nombre entier pair } \geq 0.$$

Etant donnée une fonction  $\Phi$ , développée en série de Fourier d'après plusieurs arguments  $v, u, \dots$  nous désignerons

souvent par  $[\Phi]_u$   
la partie du développement, qui est indépendante de  $u$ , et par  $[\Phi]_{u,v}$   
le terme du développement, qui ne contient ni  $u$  ni  $v$ , etc.  
Nous avons ainsi

$$\left[ \frac{1}{A} \right]_{\theta'} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sum_{i=-\infty}^{+\infty} A_{i,i}^{(n)} \cos 2i(w+g) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} r^{2m} \left( A_{0,0}^{(2m)} + 2 \sum_{i=1}^m A_{i,i}^{(2m)} \cos 2i(w+g) \right).$$

D'après les formules de Hansen (Tisserand t. I, page 249, 250) nous avons ensuite

$$\left[ \left( \frac{r}{a} \right)^{2m} \sin 2i w \right]_l = 0 \quad \left[ \left( \frac{r}{a} \right)^{2m} \cos 2i w \right]_l = X_0^{2m, 2i}$$

où

$$X_0^{2m, 2i} = \frac{(2m + 2i + 1)!}{(2m + 1)! (2i)!} \left( \frac{e^2}{4} \right)^i F(i - m, i - m - 1/2, 2i + 1, e^2) \tag{71}$$

[Tisserand t. I, page 258, formule (D<sub>2</sub>)]. Ici,  $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$  désigne, comme toujours, la série hypergéométrique de Gauss. Enfin, pour  $i = 0$ , le facteur, qui multiplie  $F$ , est = 1.

L'expression cherchée de la fonction  $R$  devient ainsi

$$R = \left[ \frac{1}{A} \right]_{l, \theta'} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left( A_{0,0}^{(2m)} X_0^{2m, 0} + 2 \sum_{i=1}^m A_{i,i}^{(2m)} X_0^{2m, 2i} \cos 2i g \right) a^{2m}. \tag{72}$$

D'après Tisserand (t. I page 458) la fonction  $A_{i,i}^{(2m)}$  est donnée par la formule

$$A_{i,i}^{(2m)} = k_{i,i}^{(2m)} (\mu \nu)^i F(2i - 2m, 2i + 2m + 1, 2i + 1, \nu)$$

où

$$k_{i,i}^{(2m)} = \frac{(2m + 2i)! (2m)!}{2^{4m} (2i)! (m+i)! (m-i)! (m!)^2}. \tag{73}$$

Cette formule se simplifie en vertu d'une propriété des polynômes hypergéométriques et peut s'écrire

$$A_{i,i}^{(2m)} = k_{i,i}^{(2m)} \left( \frac{\sin^2 I}{4} \right)^i F(i - m, i + m + 1/2, 2i + 1, \sin^2 I). \tag{74}$$

Les séries hypergéométriques des formules (71) et (74) sont évidemment des polynômes de degré  $m - i$ .

Nous écrivons le développement (63) de la manière suivante

$$R = 1 + R_2 a^2 + R_4 a^4 + \dots \tag{75}$$

En partant des formules (71), (73), (74) et en introduisant dans la dernière

$$\sin^2 I = 1 - \frac{k^2}{1 - e^2}$$

il est facile d'exprimer les coefficients  $R_2, R_4, \dots$  comme fonctions de  $e$  et de  $g$ . On trouve ainsi

$$\left. \begin{aligned} R_2 &= A_{0,0}^{(2)} X_0^{2,0} + 2 A_{1,1}^{(2)} X_0^{2,2} \cos 2g \\ &= \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 I \right) \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) + \frac{15}{16} \sin^2 I \cdot e^2 \cos 2g \\ &= \frac{1}{8} \left( -1 + \frac{3k^2}{1 - e^2} \right) \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) + \frac{15}{16} \left( 1 - \frac{k^2}{1 - e^2} \right) e^2 \cos 2g. \end{aligned} \right\} \tag{76}$$

Nous nous servirons souvent des variables

$$x = e \cos g \quad y = e \sin g.$$

La fonction  $R$  peut évidemment être développée en série d'après les puissances de  $x^2$  et de  $y^2$ . Nous poserons

$$R = R_{0,0} + R_{2,0} x^2 + R_{0,2} y^2 + \dots \tag{77}$$

Ici les coefficients sont développables suivant les puissances de  $a^2$ . Etant donnée l'expression ci-dessus de  $R_2$  on trouve facilement que

$$\left. \begin{aligned} R_{2,0} &= \frac{3}{4} a^2 + P_4 a^4 + P_6 a^6 + \dots \\ R_{0,2} &= \frac{15}{8} \left( k^2 - \frac{3}{5} \right) a^2 + Q_4 a^4 + Q_6 a^6 + \dots \end{aligned} \right\} (78)$$

les coefficients  $P_{2i}$  et  $Q_{2i}$  étant certains polynômes en  $k^2$ .

Après ces préparations nous allons chercher toutes les maxima et minima de la fonction  $R$ , en admettant toujours que  $a$  est une quantité petite. Dans ces recherches un rôle capital est joué par une quantité  $k^2_{0,2}$ , qui est la racine de l'équation

$$R_{0,2} = 0$$

qui, pour  $a = 0$ , se réduit à  $\frac{3}{5}$ . Cette racine peut évidemment être développée d'après les puissances de  $a^2$ , de sorte que

$$k^2_{0,2} = \frac{3}{5} + K_2 a^2 + K_4 a^4 + \dots \quad (79)$$

$K_2, K_4, \dots$  étant des coefficients numériques.

Il résulte maintenant des formules (77) et (78) que la fonction  $R$  a une valeur minima à l'origine  $x = y = 0$ , si

$$k^2_{0,2} < k^2 < 1.$$

Si au contraire  $0 < k^2 < k^2_{0,2}$

alors  $R$  est minimax au point  $x = y = 0$ .

Étudions maintenant la fonction  $R$  au voisinage du cercle  $e = k'$ . Nous savons déjà que  $R$  a une valeur constante sur cette courbe. Cette valeur est une valeur maxima pour  $R$  dans le domaine (43). En effet on a, en posant  $e = k'$  après la différentiation,

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial(e^2)} &= a^2 \frac{\partial R_2}{\partial(e^2)} + \dots \\ &= a^2 \frac{3}{16 k^2} [5 - k^2 - 5(1 - k^2) \cos 2g] + \dots \end{aligned}$$

Le membre à droite est  $> 0$ , quelle que soit  $g$ , si  $a$  est assez petite.

Pour découvrir toutes les autres maxima et minima pour  $R$  il faut résoudre les équations

$$\frac{\partial R}{\partial(e^2)} = 0 \quad \frac{\partial R}{\partial g} = 0. \quad (80)$$

Si  $a$  est petite, ce que nous admettons encore, toutes les racines de ces équations se trouvent nécessairement sur les axes où  $\sin 2g = 0$ .

En effet, les formules (71), (72) et (74) montrent que  $\frac{\partial R}{\partial g}$  est divisible par le facteur

$$a^2 e^2 \sin^2 I \sin 2g.$$

Dans le développement de l'autre facteur d'après les puissances de  $a^2$  le premier terme a la valeur

$$-\frac{15}{8}.$$

Cet autre facteur ne peut donc disparaître, si  $a$  est petite. Par suite, pour toutes les solutions des équations (80) on a nécessairement  $\sin 2g = 0$ .

Deux cas sont ainsi à distinguer suivant que  $\cos 2g = +1$  ou  $\cos 2g = -1$ .

Dans le premier cas nous avons d'après les formules (75) et (76)

$$\frac{\partial R}{\partial(e^2)} = a^2 \frac{\partial R_2}{\partial(e^2)} + \dots = \frac{3}{4} a^2 + \dots$$

Par suite, dans ce premier cas, les équations (80) n'ont aucune solution dans le domaine  $0 < e^2 < k'^2$ .

Dans le second cas, où  $\cos 2g = -1$ , les mêmes formules nous donnent

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial(e^2)} &= a^2 \frac{\partial R_2}{\partial(e^2)} + \dots \\ &= a^2 \left( -\frac{9}{8} + \frac{15}{8} k^2 \frac{1}{(1 - e^2)^2} \right) + \dots \end{aligned}$$

Le membre à droite s'annule dans le domaine  $0 < e^2 < 1$  seulement en posant

$$e^2 = e^2_{0,2} = 1 - \sqrt{\frac{5}{3} k^2 + c_2 a^2 + c_4 a^4 + \dots} \quad (81)$$

où les  $c_2, c_4, \dots$  sont des polynômes en  $\sqrt{k^2}$ .

Regardons l'équation

$$e^2_{0,2} = 0.$$

Elle est satisfaite en posant

$$k^2 = k'^2_{0,2} = \frac{3}{5} + K_2' a^2 + K_4' a^4 + \dots$$

Par suite, quand  $k^2$  croît vers  $k'^2_{0,2}$ , les deux solutions

$$x = 0 \quad y = \pm e_{0,2}$$

des équations  $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial y} = 0$

coincident avec la solution déjà étudiée

$$x = y = 0.$$

Il faut donc que l'équation

$$R_{0,2} = 0$$

soit satisfaite pour  $k^2 = k'^2_{0,2}$ . On a donc

$$k'^2_{0,2} \equiv k^2_{0,2}.$$

Il nous reste à examiner, si aux points

$$g = \pm \frac{\pi}{2} \quad e = e_{0,2} \quad (82)$$

la fonction  $R$  est maxima ou minima.

La formule 72 montre que  $\frac{\partial^2 R}{\partial g^2}$  est divisible par le facteur

$$a^2 \sin^2 I \cdot e^2.$$

En posant  $\cos 2g = -1$  dans le développement de l'autre facteur d'après les puissances de  $a^2$ , le premier terme de

ce développement devient  $+\frac{15}{4}$  en vertu de l'expression (76) de  $R_2$ . On a donc  $\frac{\partial^2 R}{\partial g^2} > 0$  au point (82), si  $k^2 < k_{0.2}^2$ . Ensuite on a évidemment  $\frac{\partial^2 R}{\partial e \partial g} = 0$  en ce point.

Enfin l'identité

$$\frac{\partial^2 R}{\partial e^2} \equiv 2 \frac{\partial R}{\partial (e^2)} + 4e^2 \frac{\partial^2 R}{\partial (e^2)^2}$$

montre, que  $\frac{\partial^2 R}{\partial e^2}$  est divisible par  $a^2 e^2$  au point (82). En posant  $\cos 2g = -1$  dans le développement de l'autre facteur suivant les puissances de  $a^2$ , le premier terme de ce développement devient

$$15k^2 : (1 - e^2)^3.$$

On a donc aussi  $\frac{\partial^2 R}{\partial e^2} > 0$  au point (82) si  $k^2 < k_{0.2}^2$  et si  $a$  est petite.

Par suite la fonction  $R$  est minima au point (82).

Cela étant, nous pouvons énoncer comme démontrée la proposition suivante:

Si  $a$  est petite et  $k_{0.2}^2 < k^2 < 1$ , la fonction  $R$  possède dans le domaine (43) une seule valeur minima, située au point  $e = 0$ . — Si au contraire,  $a$  étant petite, on a  $0 < k^2 < k_{0.2}^2$ , alors  $R$  a une minimax à l'origine et ses seules valeurs minima dans le domaine (43) aux deux points symétriques  $g = \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $e = e_{0.2}$ . — Enfin la valeur constante, que prend  $R$  sur le cercle  $e = k'$ , est sa plus grande valeur dans le domaine (43); et il n'y a pas d'autres valeurs maxima pour  $R$  dans ce domaine.

$$\begin{aligned} [1 + a^2 - 2a(\mu \cos M + \nu \cos N)]^{-3/2} &= e^{0.0} + 2e^{1.0} \cos M + 2e^{0.1} \cos N + 4e^{1.1} \cos M \cos N + \dots \\ [1 + a^2 - 2a(\mu \cos M + \nu \cos N)]^{-3/2} &= e^{0.0} + 2e^{1.0} \cos M + 2e^{0.1} \cos N + 4e^{1.1} \cos M \cos N + \dots \end{aligned}$$

Dans ce but nous partirons des formules bien connues

$$\begin{aligned} A^2 &= 1 + r^2 - 2r [\cos(w + g) \cos \theta' - \sin(w + g) \sin \theta' \cos I] \\ l &= u - e \sin u \quad r = a(1 - e \cos u) \quad r \cos w = a(\cos u - e) \quad r \sin w = a\sqrt{1 - e^2} \sin u \end{aligned}$$

$$R = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{A} dl d\theta' = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - e \cos u}{A} du d\theta'. \tag{83}$$

On a comme toujours

$$\cos I = \frac{k}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

Enfin  $\mu$  et  $\nu$  seront définies par les relations

$$\mu + \nu = 1 \quad \mu - \nu = k.$$

En posant  $g = 0$  nous trouverons l'expression de  $R_{2.0}$ . En effet, on a dans ce cas

$$A^2 = 1 + a^2(1 - e \cos u)^2 - 2a[\mu \cos(u + \theta') + \nu \cos(u - \theta') - e \cos \theta'].$$

En mettant

$$A_0^2 = 1 + a^2 - 2a[\mu \cos(u + \theta') + \nu \cos(u - \theta')]$$

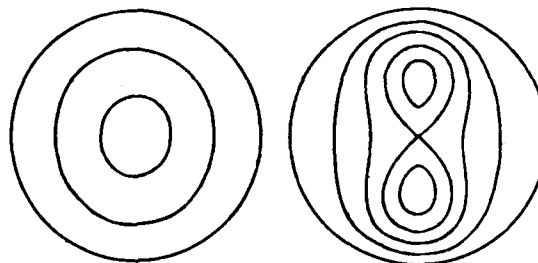
on en déduit facilement le développement

Les figures ci-dessous montrent la nature des courbes

$R = \text{const.}$

Figure 6.

Figure 7.



$k_{0.2}^2 < k^2 < 1$

$0 < k^2 < k_{0.2}^2$

17. Admettons maintenant que le demi grand axe  $a$  prend des valeurs plus grandes et quelconques, sans que néanmoins l'orbite de la masse infiniment petite coupe celle de Jupiter. Alors il est encore possible de montrer (par calcul numérique) que la fonction  $R$  a une valeur minima à l'origine  $x = y = 0$ , tant que

$$k_{0.2}^2 < k^2 < 1.$$

La quantité  $k_{0.2}^2$ , fonction de  $a$ , qui pour des petites valeurs de  $a$  est donnée par le développement (79), augmente avec  $a$  et atteint probablement la valeur  $k_{0.2}^2 = +1$  pour  $a = 1$ .

Pour le voir il faut développer  $R$  en série de puissances de  $x^2$  et de  $y^2$  et étudier les signes des coefficients  $R_{2.0}$  et  $R_{0.2}$  de ce développement

$$R = R_{0.0} + R_{2.0}x^2 + R_{0.2}y^2 + \dots \tag{77}$$

Nous montrerons d'abord comment les quantités  $R_{2.0}$  et  $R_{0.2}$  peuvent être exprimées au moyen des coefficients  $c^{i.k}$  et  $e^{i.k}$  des développements:

$$\frac{1 - e \cos u}{A} = \frac{1}{A_0} + e \left( -\frac{\cos u}{A_0} + \frac{a^2 \cos u}{A_0^3} - \frac{a \cos \theta'}{A_0^3} \right) + e^2 \left( -\frac{3}{2} \frac{a^2 \cos^2 u}{A_0^3} + \frac{a \cos u \cos \theta'}{A_0^3} + \frac{3}{2} \frac{a^4 \cos^2 u}{A_0^5} - 3 \frac{a^3 \cos u \cos \theta'}{A_0^5} + \frac{3}{2} \frac{a^2 \cos^2 \theta'}{A_0^5} \right) + \dots$$

Dans l'expression (83) de  $R$  nous introduisons de nouvelles variables d'intégration par la substitution

$$M = u + \theta' \quad N = u - \theta'.$$

Cette expression devient alors

$$R = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - e \cos u}{A} dM dN. \tag{84}$$

On a aussi

$$2 \cos^2 u = 1 + \cos(M + N) \quad 2 \cos^2 \theta' = 1 + \cos(M - N) \quad 2 \cos u \cos \theta' = \cos M + \cos N.$$

Il est facile maintenant d'effectuer les intégrations dans la formule (84). Le coefficient de  $e^2$ , qui d'après (77) n'est autre chose que  $R_{2,0}$ , aura la forme

$$R_{2,0} = -\frac{3}{4} a^2 (c^{0,0} + c^{1,1}) + \frac{1}{2} a (c^{1,0} + c^{0,1}) + \frac{3}{4} a^2 (1 + a^2) (e^{0,0} + e^{1,1}) - \frac{3}{2} a^3 (e^{1,0} + e^{0,1}). \tag{85}$$

Pour trouver l'expression de  $R_{0,2}$  mettons  $g = \frac{\pi}{2}$ . On a alors

$$A^2 = 1 + a^2 (1 - e \cos u)^2 + 2a [\sqrt{1 - e^2} \sin u \cos \theta' + (\cos u - e) \sin \theta' \cos I].$$

Posons

$$u = u' - \frac{\pi}{2}.$$

Il vient alors après développement

$$A^2 = A_0^2 + e [-2a^2 \sin u' - 2ak \sin \theta'] + e^2 [a^2 \sin^2 u' + a \cos u' \cos \theta' + ak \sin u' \sin \theta'] + \dots$$

où

$$A_0^2 = 1 + a^2 - 2a [\mu \cos(u' + \theta') + \nu \cos(u' - \theta')].$$

On en déduit ensuite

$$\frac{1 - e \sin u'}{A} = \frac{1}{A_0} + e \left( -\frac{\sin u'}{A_0} + \frac{a^2 \sin u'}{A_0^3} + \frac{ak \sin \theta'}{A_0^3} \right) + e^2 \left( -\frac{3}{2} \frac{a^2 \sin^2 u'}{A_0^3} - \frac{3}{2} \frac{ak \sin u' \sin \theta'}{A_0^3} - \frac{1}{2} \frac{a \cos u' \cos \theta'}{A_0^3} + \frac{3}{2} \frac{a^4 \sin^2 u'}{A_0^5} + 3 \frac{a^3 k \sin u' \sin \theta'}{A_0^5} + \frac{3}{2} \frac{a^2 k^2 \sin^2 \theta'}{A_0^5} \right) + \dots$$

En introduisant les nouvelles variables

$$M = u' + \theta' \quad N = u' - \theta'$$

l'expression de  $R$  devient

$$R = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - e \sin u'}{A} dM dN. \tag{86}$$

On a aussi

$$2 \sin^2 u' = 1 - \cos(M + N) \quad 2 \sin u' \sin \theta' = -\cos M + \cos N \\ 2 \sin^2 \theta' = 1 - \cos(M - N) \quad 2 \cos u' \cos \theta' = \cos M + \cos N.$$

Après avoir effectué les intégrations dans la formule (86) on trouve enfin pour  $R_{0,2}$  la forme suivante

$$R_{0,2} = -\frac{3}{4} a^2 (c^{0,0} - c^{1,1}) + \frac{3}{4} ak (c^{1,0} - c^{0,1}) - \frac{1}{4} a (c^{1,0} + c^{0,1}) + \frac{3}{4} a^4 (e^{0,0} - e^{1,1}) - \frac{3}{2} a^3 k (e^{1,0} - e^{0,1}) + \frac{3}{4} a^2 k^2 (e^{0,0} - e^{1,1}). \tag{87}$$

Les formules (85) et (87) se simplifient en vertu des formules de récurrence

$$3c^{0,0} + c^{1,1} = 3(1 + a^2) (e^{0,0} - e^{1,1}) - 6a(\mu - \nu) (e^{1,0} - e^{0,1}) \\ 3c^{0,0} - c^{1,1} = 3(1 + a^2) (e^{0,0} + e^{1,1}) - 6a(\mu + \nu) (e^{1,0} + e^{0,1})$$

faciles à vérifier (voir: Jacobi, Gesammelte Werke Bd. VI, S. 140).

Nous obtenons ainsi finalement

$$\begin{aligned}
 R_{2,0} &= -a^2 c^{1,1} + \frac{1}{2} a (c^{1,0} + c^{0,1}) \\
 R_{0,2} &= a^2 c^{1,1} - \frac{1}{4} a (c^{1,0} + c^{0,1}) + \frac{3}{4} a k (c^{1,0} - c^{0,1}) - \frac{3}{4} a^2 (1 - k^2) (e^{0,0} - e^{1,1}).
 \end{aligned}
 \tag{88}$$

Les coefficients  $c^{i,k}$  et  $e^{i,k}$  peuvent être développés en séries de puissance de  $a$  pourvu que  $|a| < 1$ . (Voir: Poincaré, *Leçons de Mécanique céleste*, t. II, p. 111). On pourrait donc développer  $R_{2,0}$  et  $R_{0,2}$  de la même manière. On aurait même pu trouver ces développements d'une manière plus simple en partant du développement (72). Mais les séries obtenues de cette manière convergent trop lentement, quand  $a$  est voisine de l'unité.

Il vaut mieux de commencer par le calcul des quantités  $b^{i,k}$ , définies par le développement

$$[1 + a^2 - 2a(\mu \cos M + \nu \cos N)]^{-1/2} = b^{0,0} + 2b^{1,0} \cos M + 2b^{0,1} \cos N + 4b^{1,1} \cos M \cos N + \dots$$

et de calculer ensuite  $c^{i,k}$  et  $e^{i,k}$  par les formules de récurrence:

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon &= a + \frac{1}{a} & \mu + \nu &= 1 & \mu - \nu &= k \\
 c^{0,0} + c^{1,1} &= \frac{\varepsilon(b^{0,0} - 3b^{1,1}) - 2(b^{1,0} + b^{0,1})}{a(\varepsilon^2 - 4)} \\
 c^{0,0} - c^{1,1} &= \frac{\varepsilon(b^{0,0} + 3b^{1,1}) - 2k(b^{1,0} - b^{0,1})}{a(\varepsilon^2 - 4k^2)} \\
 c^{1,0} + c^{0,1} &= \frac{2(b^{0,0} - 3b^{1,1}) - \varepsilon(b^{1,0} + b^{0,1})}{a(\varepsilon^2 - 4)} \\
 c^{1,0} - c^{0,1} &= \frac{2k(b^{0,0} + 3b^{1,1}) - \varepsilon(b^{1,0} - b^{0,1})}{a(\varepsilon^2 - 4k^2)} \\
 e^{0,0} - e^{1,1} &= \frac{\varepsilon(3c^{0,0} + c^{1,1}) + 2k(c^{1,0} - c^{0,1})}{3a(\varepsilon^2 - 4k^2)}
 \end{aligned} \right\} \tag{89}$$

(voir: Jacobi, *Gesammelte Werke* Bd. VI, S. 142).

En effet, les développements pour  $b^{i,k}$  convergent beaucoup plus rapidement que ceux qui donnent  $c^{i,k}$ ,  $e^{i,k}$ , ...

Voici maintenant comment nous avons calculé  $b^{0,0}$ ,  $b^{1,0}$ ,  $b^{0,1}$  et  $b^{1,1}$ . Des formules de Tisserand (*Traité de Mécanique céleste*, t. I pages 444, 447) on déduit immédiatement les développements

$$\left. \begin{aligned}
 b^{0,0} &= \frac{1}{2} b^{(0)} + \sum_{m=1}^{\infty} b^{(2m)} Q_{0,0}^{(2m)} & b^{0,1} &= \sum_{m=1}^{\infty} b^{(2m-1)} Q_{0,1}^{(2m-1)} \\
 b^{1,0} &= \sum_{m=1}^{\infty} b^{(2m-1)} Q_{1,0}^{(2m-1)} & b^{1,1} &= \sum_{m=1}^{\infty} b^{(2m)} Q_{1,1}^{(2m)}.
 \end{aligned} \right\} \tag{90}$$

Ici les  $b^{(i)}$  sont les coefficients de Laplace. Enfin les relations (c), (d), (e) de Tisserand (loc. cit. pages 447, 452, 456) feront connaître entièrement les quantités  $Q_{i,j}^{(n)}$ , qui dépendent seulement de  $\mu$  et de  $\nu$ , c'est-à-dire de  $k$ . Les formules de Tisserand sont

$$2 Q_{i,j}^{(n)} = R_{i,j}^{(n)} - R_{i,j}^{(n-2)} \tag{c}$$

$$R_{i,j}^{(n)} = c_{i,j}^{(n)} \mu^i \nu^j F^2 \left( \frac{i+j-n}{2}, \frac{i+j+n+2}{2}, j+1, \nu \right) \tag{d}$$

$$c_{i,j}^{(n)} = \frac{\Pi \left( \frac{n+i+j}{2} \right) \Pi \left( \frac{n-i+j}{2} \right)}{[\Pi(j)]^2 \Pi \left( \frac{n+i-j}{2} \right) \Pi \left( \frac{n-i-j}{2} \right)} \tag{e}$$

où

$$\Pi(s) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots s = s! .$$

Le calcul des polynômes de Jacobi, qui apparaissent dans la formule (d) est simplifié par certaines formules de récurrence à trois termes reliant ces polynômes.

C'est au moyen des formules (88), (89), (90), (c), (d), (e) que nous avons calculé le tableau ci-dessous donnant  $R_{2.0}$  et  $R_{0.2}$ .

	$I_0$	$a$					
		0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$R_{2.0}$	0°	+0.16659	+0.32256	+0.62800	+1.32003	+3.3769	+14.879
	10	+0.16389	+0.31230	+0.58906	+1.15399	+2.4508	+ 5.674
	20	+0.15669	+0.28684	+0.50394	+0.86804	+1.4643	+ 2.359
	30	+0.14709	+0.25645	+0.41859	+0.64958	+0.9597	+ 1.344
	40	+0.13715	+0.22844	+0.35143	+0.50854	+0.6982	+ 0.915
	50	+0.12826	+0.20579	+0.30327	+0.41952	+0.5518	+ 0.697
	60	+0.12113	+0.18899	+0.27038	+0.36345	+0.4658	+ 0.576
	70	+0.11601	+0.17758	+0.24927	+0.32917	+0.4154	+ 0.507
	80	+0.11295	+0.17100	+0.23749	+0.31061	+0.3888	+ 0.471
	90	+0.11193	+0.16886	+0.23370	+0.30474	+0.3804	+ 0.460
$R_{0.2}$	0	+0.16659	+0.32256	+0.62800	+1.32003	+3.3769	+14.879
	10	+0.14645	+0.27094	+0.48429	+0.85034	+1.3829	+ 1.276
	20	+0.09494	+0.15218	+0.21041	+0.22050	+0.0554	- 0.466
	30	+0.03086	+0.02711	-0.01129	-0.11793	-0.3272	- 0.648
	40	-0.03001	-0.07260	-0.15035	-0.27365	-0.4449	- 0.657
	50	-0.07988	-0.14268	-0.23149	-0.34655	-0.4840	- 0.638
	60	-0.11687	-0.18876	-0.27805	-0.38200	-0.4967	- 0.619
	70	-0.14178	-0.21720	-0.30415	-0.39946	-0.5001	- 0.604
	80	-0.15602	-0.23256	-0.31740	-0.40753	-0.5006	- 0.596
	90	-0.16064	-0.23742	-0.32145	-0.40989	-0.5006	- 0.592

On voit de ce tableau (où  $I_0$  signifie arccos  $k$ ) que  $R_{2.0} > 0$

quand  $0 < a \leq 0.9$   $0 < k^2 < 1$ .

Il est même vraisemblable que  $R_{2.0}$  reste  $> 0$ , autant que  $0 < a \leq 1$ .

Il apparaît aussi que l'équation  $R_{0.2} = 0$  définit une fonction  $k_{0.2}^2$  de  $a$ , qui augmente avec  $a$  (au moins tant que  $a \leq 0.9$ ) et qui prend la valeur  $k_{0.2}^2 = +3/5$  pour  $a = 0$  et probablement la valeur  $k_{0.2}^2 = +1$  pour  $a = 1$ . On a enfin  $R_{0.2} > 0$  quand  $k_{0.2}^2 < k^2 < 1$  et  $R_{0.2} < 0$  quand  $0 < k^2 < k_{0.2}^2$ .

Il est facile de calculer des valeurs de la fonction  $k_{0.2}$  ou bien de la fonction  $I_{0.2} = \arccos k_{0.2}$  en partant du tableau donnant  $R_{0.2}$  et en se servant des méthodes ordinaires d'interpolation. Nous avons trouvé ainsi les chiffres du petit tableau ci-joint.

$a$	$I_{0.2}$
0.0	39°.2
..	..
..	..
0.4	34.9
0.5	32.4
0.6	29.4
0.7	25.7
0.8	20.9
0.9	14

La fonction  $k_{0.2}$  étant ainsi définie, nous pouvons énoncer le théorème suivant:

A l'origine  $\xi = \eta = 0$  la fonction  $R$  a un minimum, si  $k_{0.2}^2 < k^2 < 1$ , et un maximax, si  $0 < k^2 < k_{0.2}^2$ .

En rapprochant ce résultat à celui du no. 11 nous pouvons évidemment exprimer le théorème en question de la manière suivante:

Admettons que l'excentricité de l'orbite d'une masse infiniment petite et intérieure à la planète perturbatrice est petite à un moment donné; pour que cette excentricité restera toujours petite il faut et il suffit que  $I < I_{0.2}$ .

Dans cet énoncé nous avons négligé la masse perturbatrice et le carré de l'excentricité.

18. Il serait intéressant de connaître à quelles valeurs l'excentricité peut croître si l'inclinaison de l'orbite à un moment quelconque dépasse la limite  $I_{0.2}$ . Cette question, assez difficile en général, se simplifie si le demi grand axe est petit. Soient donc  $a, I, e, g$  les éléments d'une orbite (ou plus exactement les parties séculaires de ces éléments); et admettons que  $a^2$  peut être négligée par rapport à l'unité. En ne conservant dans le développement (75) que les deux premiers termes, et étant donnée l'expression (76) de  $R_2$ , les relations entre  $I, e, g$  peuvent s'écrire de la manière suivante

$$k^2 = \cos^2 I (1 - e^2)$$

$$h = (2 - 3 \sin^2 I) (2 + 3 e^2) + 15 \sin^2 I \cdot e^2 \cdot \cos 2g$$

où  $k^2$  et  $h$  sont deux paramètres constants.

Puisque  $a$  est petite, la formule (79) nous donne  $k_{0.2}^2 = \frac{3}{5}$ .

Admettons maintenant que

$$\cos^2 I < \frac{3}{5}$$

c'est-à-dire que  $I > 39^\circ 14'$ . On aura alors aussi  $k^2 < k_{0.2}^2$ . La courbe que décrit le point dont les coordonnées polaires sont  $e$  et  $g$  aura donc le même caractère que l'une des courbes de la figure 7 de la page 384. Pour  $g = \pm \frac{\pi}{2}$  l'excentricité atteint sa plus grande valeur  $E$ , donnée par la plus grande racine de l'équation

$$-2 - 18E^2 + 6k^2 \frac{1 + 4E^2}{1 - E^2} = h.$$

$E$  sera donc une fonction de  $I$ , de  $e$ , et de  $g$ . Fixons l'inclinaison  $I (> 39^\circ 14')$  et cherchons la plus petite valeur  $E_m$  de  $E$ , quand  $e$  et  $g$  prennent toutes les valeurs possibles entre les limites

$$0 \leq e \leq 1 \quad 0 \leq g \leq 2\pi.$$

Admettons que  $E = E_m$  pour  $e = e_0$ ,  $g = g_0 \mp \pm \frac{\pi}{2}$ .

Cela est impossible. Fixons, en effet,  $e = e_0$  et faisons varier  $g$  vers  $\frac{\pi}{2}$ . Alors  $k^2$  reste constante, tandis que  $h$  prendra pour  $g = \frac{\pi}{2}$  une valeur plus petite que sa valeur pour  $g = g_0$ .

Maintenant nous avons

$$\frac{dh}{d(E^2)} = -18 + \frac{30k^2}{(1 - E^2)^2} > 0$$

puisque

$$E^2 > e_{0.2}^2 = 1 - \sqrt{\frac{5}{3}k^2}$$

(voir le no. 16 et la fig. 7). La valeur de  $E$  correspondant à  $e = e_0$ ,  $g = \frac{\pi}{2}$  serait donc plus petite que  $E_m$  ce qui est absurde.

Pour obtenir  $E_m$  il faut donc supposer  $\cos 2g = -1$ .

L'équation pour  $E$  devient alors, après l'élimination de  $k^2$  et  $h$ ,

$$\begin{aligned} -2 - 18E^2 + 6 \cos^2 I \cdot (1 - e^2) \frac{1 + 4E^2}{1 - E^2} + \\ + 2 - 6 \cos^2 I - 6e^2(-3 + 4 \cos^2 I) = 0. \end{aligned}$$

Après transformation cette équation peut s'écrire

$$\frac{6}{1 - E^2} (E^2 - e^2) (3E^2 - 3 + 5 \cos^2 I) = 0.$$

En choisissant toujours la plus grande racine nous aurons

$$E^2 = 1 - \frac{5}{3} \cos^2 I, \quad \text{si } e^2 < 1 - \frac{5}{3} \cos^2 I$$

$$\text{et } E^2 = e^2, \quad \text{si } e^2 > 1 - \frac{5}{3} \cos^2 I.$$

Il s'ensuit que

$$E_m = \sqrt{1 - \frac{5}{3} \cos^2 I}. \quad (91)$$

C'est la limite que l'excentricité atteindra nécessairement par suite des perturbations séculaires, si l'inclinaison de l'orbite dépasse à un moment quelconque  $39^\circ 14'$  (en supposant que  $a$  est très petite).

Nous donnons ci-dessous quelques valeurs numériques de la quantité  $E_m$ :

$I$	$E_m$
40°	0.148
45	0.408
50	0.558
55	0.672
60	0.764
70	0.897
80	0.975
90	1.000

On voit que  $E_m$  augmente rapidement, dès que  $I$  dépasse  $I_{0.2}$ .

19. Parmi les astéroïdes, en nombre de 665, dont les éléments se trouvent au Berliner Jahrbuch pour l'année 1911, il n'y a que six pour lesquelles la quantité

$$I_0 = \arccos(\sqrt{1 - e^2} \cos I)$$

dépasse la limite  $I_{0.2}$ . Voici les planètes en question

$$(2), (183), (473), (531), (582), (594).$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} I_0 = 38^\circ 0 \quad I_{0.2} = 32^\circ 3 \quad \text{pour } (594) \\ I_0 = 36.7 \quad I_{0.2} = 31.5 \quad \text{pour } (2) \end{aligned}$$

tandis que pour les autres quatre planètes la différence  $I_0 - I_{0.2}$  est moins considérable.

Pour les deux planètes (594) et (2) l'amplitude des perturbations séculaires de l'excentricité doit être considérable.

En ce qui concerne les comètes périodiques il doit être mentionné que la quantité  $I_0 - I_{0.2}$  est en général  $> 0$ . C'est seulement la comète Tempel<sub>1</sub> qui fait exception. On a, en effet, pour cette comète

$$I_0 = 25^\circ 9 \quad I_{0.2} = 26^\circ 9.$$

Nous allons faire ici une remarque importante au point de vue de l'évolution du système planétaire. Admettons qu'il y a dans l'espace une résistance contre le mouvement. Il est bien connu qu'elle aura pour effet de rendre les excentricités (et les grandes axes) de plus en plus petites pour enfin les réduire à zéro. Mais alors, en vertu de ce qui précède, l'effet combiné de la résistance et des perturbations séculaires d'une planète extérieure sera nécessairement de diminuer aussi les inclinaisons et de les abaisser plus ou moins au-dessous de la limite  $I_{0.2}$ . Ensuite, si la résistance est plus grande contre le mouvement rétrograde, les particules qui tournent dans le sens indirect seront plus tôt tirées vers le Soleil que les autres. Il arrivera ainsi un moment quand la nébuleuse primitivement caotique aura, à l'intérieure d'une masse perturbatrice et dominante (Jupiter), l'aspect que présente actuellement notre système solaire.

20. Nous avons démontré au no. 16 que la fonction  $R$  possède des valeurs minima en deux points symétriques

$$x = 0 \quad y = \pm e_{0.2}$$



si  $a$  est petit et si  $R_{0.2} < 0$ . (92)

Ces minima, existent-ils pour des valeurs quelconques de  $a$ , quand l'inégalité (92) est satisfaite?

Il ne m'a pas réussi à le démontrer généralement.

Mais je démontrerai maintenant que,  $a$  ayant une valeur quelconque, ces minima sur l'axe des  $y$  existent, si  $k^2$  est assez petit.

En effet, l'expression de  $R$  peut s'écrire, en vertu des formules (44) et (50), de la manière suivante

$$R = \frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} F(\tau) du. \quad (93)$$

Ensuite, pour  $g = \pm \frac{\pi}{2}$ , nous avons, d'après la formule (48),

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \frac{4r^2}{(1+r^2)^2} (\sin^2 w + \cos^2 I \cos^2 w) \\ &= \frac{4a^2}{(1+r^2)^2} \left( (1-e^2) \sin^2 u + \frac{k^2}{1-e^2} (\cos u - e)^2 \right). \end{aligned}$$

Nous regarderons  $a$  comme une quantité fixe, mais arbitraire, et  $k$  comme une infiniment petite du premier ordre. Nous poserons enfin

$$1 - e^2 = \rho k$$

et inversement

$$e = \sqrt{1 - \rho k}$$

en admettant que  $\rho$  est fini et différent de zéro.

Alors, pour  $g = \pm \frac{\pi}{2}$ , la quantité  $\tau^2$  est infiniment petite du premier ordre et peut être développée pour toutes les valeurs réelles de l'argument  $u$ , d'après les puissances de  $k$ . En mettant pour simplifier

$$\Phi = \frac{1}{1+a^2(1-\cos u)^2}$$

nous aurons, pour  $g = \pm \frac{\pi}{2}$ ,

$$\tau^2 = 4a^2 \cdot \Phi^2 \cdot \left( \rho \sin^2 u + \frac{1}{\rho} (\cos u - 1)^2 \right) k + \dots$$

Dans la formule (93), donnant  $R$ , la fonction  $F(\tau)$  est une série hypergéométrique en  $\tau^2$  [voir la relation (52)].

La fonction  $R$  peut donc, pour  $g = \pm \frac{\pi}{2}$ , être développée d'après les puissances de  $k$ . Les premiers termes de ce développement sont faciles à déduire. On obtient

$$R = R_0 + \left( P\rho + Q \frac{1}{\rho} \right) k + \dots$$

en posant

$$R_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi^{1/2} (1 - \cos u) du$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial g^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r}{a} \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \frac{8 \sin^2 I}{(1+r^2)^2} \left( \frac{\partial F}{\partial(\tau^2)} \cdot r^2 - 2 \frac{\partial F}{\partial(\tau^2)} r^2 \sin^2 w + \frac{\partial^2 F}{\partial(\tau^2)^2} \frac{8 \sin^2 I}{(1+r^2)^2} r^2 \sin^2 w \cdot r^2 \cos^2 w \right) du.$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \Phi^{3/4} \cos u du \\ &+ \frac{3a^2}{8\pi} \int_0^{2\pi} \Phi^{5/4} \sin^2 u (1 - \cos u) du \\ Q &= \frac{3a^2}{8\pi} \int_0^{2\pi} \Phi^{3/4} (1 - \cos u)^3 du. \end{aligned}$$

$Q$  est une quantité positive. Dans l'expression de  $P$  le second terme est évidemment positif. Le premier terme l'est aussi, car la quantité positive  $\Phi$  diminue avec  $\cos u$ . On a donc  $P > 0$ ,  $Q > 0$ .

Il est facile maintenant d'obtenir une solution de l'équation

$$\frac{\partial R}{\partial e} = 0$$

quand  $g = \pm \frac{\pi}{2}$ . En introduisant  $\rho$  au lieu de  $e$  et en développant suivant les puissances de  $k$ , cette équation devient en effet

$$-2 \left( P - \frac{Q}{\rho^2} \right) + A_1 k + A_2 k^2 + \dots = 0$$

les  $A_1, A_2, \dots$  étant des polynômes en  $\rho$  et  $\frac{1}{\rho}$ . Elle a une racine positive développée suivant les puissances de  $k$ , et se réduisant à  $\sqrt{Q} : P$ , quand  $k = 0$ .

Par suite les équations

$$\frac{\partial R}{\partial e} = 0 \quad \frac{\partial R}{\partial g} = 0$$

sont satisfaites en posant

$$\left. \begin{aligned} g &= \pm \frac{\pi}{2} \\ e = e_{0.2} &= 1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Q}{P}} \cdot k + E_2 k^2 + E_3 k^3 + \dots \end{aligned} \right\} (94)$$

Le demi grand axe  $a$  étant fixé arbitrairement, la série donnant  $e_{0.2}$  converge, si  $k$  est assez petit.

Je dis maintenant que la fonction  $R$  est minima au point  $e = e_{0.2}$ ,  $g = \pm \frac{\pi}{2}$ , si  $k$  est assez petit.

On a, en effet, dans ce point

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R}{\partial e^2} &= -\frac{2}{k} \frac{\partial R}{\partial \rho} + \frac{4e^2}{k^2} \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} \\ &= \frac{4}{k} \frac{2Q}{\rho^3} + \dots = \frac{8P}{k} \sqrt{\frac{P}{Q}} + \dots > 0 \end{aligned}$$

et  $\frac{\partial^2 R}{\partial e \partial g} = 0$ .

Enfin, étant donnée les formules (48) et (93), on obtient sans peine pour  $g = \pm \frac{\pi}{2}$

En y mettant

$$\begin{aligned} r^2 \sin^2 w &= a^2 (1 - e^2) \sin^2 u \\ r^2 \cos^2 w &= a^2 (\cos u - e)^2 \\ \sin^2 I &= 1 - \frac{k^2}{1 - e^2} \end{aligned}$$

cette formule devient, après développement et en n'y écrivant que le terme indépendant de  $k$ ,

$$\frac{\partial^2 R}{\partial g^2} = 2Q + \dots > 0.$$

Par suite au point (94) la fonction  $R$  prend en effet une valeur minima, si  $k$  est assez petit.

Pour de petites valeurs de  $a$  la quantité  $e_{0.2}$  de la formule (94) peut évidemment être développée suivant les puissances de  $a^2$ . Le développement ainsi obtenu coïncide avec celui que donne la relation (81). En effet, nous avons vu au no. 16, que cette formule (81) donne tous les minima de la fonction  $R$ , quand  $a$  et  $k$  sont petits.

Nous pouvons appliquer le résultat de ce numéro en calculant d'après le no. 10 les séries de M. Lindstedt, qui existent, quand les éléments se trouvent dans le voisinage des points (94). Les orbites correspondantes appartiennent à une certaine classe de comètes à mouvement stable. Dans ces orbites le demi grand axe est arbitraire; l'excentricité est près de l'unité;

la distance du périhélie au nœud est voisine de  $\pm \frac{\pi}{2}$ ; l'inclinaison est considérable; enfin le paramètre  $a(1 - e^2)$  est petit, de sorte que les deux nœuds se trouvent à l'intérieur de l'orbite de Jupiter.

21. Il serait peut-être intéressant d'appliquer les résultats du numéro précédent à un cas de la nature. Nous allons donc calculer la quantité  $e_{0.2}$  en partant des valeurs de  $a$  et de  $k$ , qui appartiennent à la comète de Halley.

Le demi grand axe de l'orbite de cette comète est

$$17.9676.$$

C'est la moyenne tirée de toutes les apparitions de la comète depuis 1378 jusqu'à 1835. (Voir J. G. Galle, Verzeichniss der Elemente der bisher berechneten Kometenbahnen.) En choisissant comme unité de longueur le demi grand axe de l'orbite de Jupiter nous obtenons donc

$$a = 17.9676 : 5.202800 = 3.45345.$$

Pour calculer approximativement le paramètre  $k$  nous partons des éléments osculateurs suivants, dus à M. Rosenberger (voir loc. cit. p. 50 et 51 et A. N. 13, p. 72 et 95)

argument du périhélie	110° 37' 59"	} équinoxe moyen de 1835 } Novembre 15.94542 t. m. } de Paris
longitude du nœud	55 9 47	
inclinaison	162 14 43	
excentricité	0.96738879 .	

En partant des formules de Tisserand y citées on déduit immédiatement le développement

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^{n+1} \sum \sum A_{ij}^{(n)} \cos [(i+j)(w+g) + (i-j)\theta']$$

En rapportant les éléments au plan invariable du système solaire et en prenant pour l'inclinaison la valeur de l'angle aigue, nous avons obtenu

$$\begin{aligned} I &= 18^\circ 47' 44'' \\ g &= 114 \ 27 \ 26 . \end{aligned}$$

On voit que  $g$  n'est pas très éloigné de  $90^\circ$ .

Les valeurs indiquées pour  $e$  et  $I$  nous donnent pour  $k$  et  $k'$  les chiffres que voici

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{1 - e^2} \cos I = 0.239789 \\ k' &= \sqrt{1 - k^2} = 0.970825 . \end{aligned}$$

Puisque  $k$  n'est pas très petit nous n'avons pas employé le développement (94) pour calculer  $e_{0.2}$ . Nous avons préféré de déterminer cette quantité en calculant au moyen de quadratures mécaniques un certain nombre de valeurs de la fonction  $R$  sur l'axe, où  $g = \frac{\pi}{2}$ . La valeur

de  $e$ , qui rend  $R = \text{minimum}$ , est la valeur cherchée de  $e_{0.2}$ .

Dans ces calculs nous nous sommes servi des formules (48), (51) et (53). Le champ d'intégration a été divisé de  $10^\circ$  à  $10^\circ$ . Pour le calcul de l'intégrale elliptique complète de la première espèce les tables de Legendre ont été employées. Voici les valeurs de  $R$  ainsi obtenues

$e$	$R$
0.86	0.276633
0.88	0.270214
0.90	0.263953
0.92	0.258338
0.940	0.253932
0.944	0.253301
0.948	0.252861
0.952	0.252609
0.956	0.252639
0.960	0.253137
0.964	0.254408
0.968	0.257389

On trouve de ces nombres au moyen de calcul d'interpolation que

$$e_{0.2} = 0.9537 .$$

C'est donc une valeur assez voisine de l'excentricité actuelle de l'orbite de la comète de Halley.

22. Nous allons maintenant étudier les maxima et les minima de la fonction  $R$  dans le deuxième cas de la page 378.

Nous admettons d'abord que  $\frac{1}{a}$  est une quantité petite. Alors il est facile d'étudier complètement la fonction  $R$  en se servant de son développement d'après les puissances de  $\frac{1}{a}$ .

Nous ferons l'usage des notations du no. 16.

d'où suit

$$\left[ \frac{1}{A} - \frac{1}{r} \right]_{\theta'} = \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{r} \right)^{2m+1} \left( A_{0,0}^{(2m)} + 2 \sum A_{i,i}^{(2m)} \cos 2i(w+g) \right).$$

D'après les formules de Hansen (loc. cit.) nous avons ensuite

$$\left[ \left( \frac{a}{r} \right)^{2m+1} \sin 2i w \right]_l = 0 \quad \left[ \left( \frac{a}{r} \right)^{2m+1} \cos 2i w \right]_l = X_0^{-(2m+1), 2i}$$

où

$$X_0^{-(2m+1), 2i} = \frac{(2m-1)!}{(2m-2i-1)!(2i)!} \left( \frac{e^2}{4} \right)^i (1-e^2)^{-2m+1/2} F(i-m+1, i-m+1/2, 2i+1, e^2) \tag{95}$$

[voir: Tisserand, t. I, page 258, formule (D<sub>2</sub>').]

L'expression cherchée de la fonction  $R$  devient ainsi

$$R = \left[ \frac{1}{A} - \frac{1}{r} \right]_{\theta', l} = \sum_{m=1}^{\infty} \left( A_{0,0}^{(2m)} X_0^{-(2m+1), 0} + 2 \sum_{i=1}^m A_{i,i}^{(2m)} X_0^{-(2m+1), 2i} \cos 2ig \right) a'^{2m+1} \tag{96}$$

en posant

$$a' = \frac{1}{a}.$$

Il faut remarquer que

$$X_0^{-(2m+1), 2m} \equiv 0$$

(voir: Tisserand, t. I, page 255).

Nous écrivons le développement (96) de la manière suivante

$$R = R'_3 a'^3 + R'_5 a'^5 + \dots \tag{97}$$

En partant des formules (73), (74), (95) et en introduisant dans la seconde

$$\sin^2 I = 1 - \frac{k^2}{1-e^2}$$

il est facile de donner les expressions des coefficients  $R'_3, R'_5, \dots$

On trouve ainsi

$$\left. \begin{aligned} R'_3 &= A_{0,0}^{(2)} X_0^{-3,0} = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 I \right) (1-e^2)^{-2+1/2} \\ R'_5 &= A_{0,0}^{(4)} X_0^{-5,0} + 2 A_{1,1}^{(4)} X_0^{-5,2} \cos 2g \\ &= \frac{9}{64} \left[ \left( 1 - 5 \sin^2 I + \frac{35}{8} \sin^4 I \right) \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) + \frac{15}{4} \sin^2 I \left( 1 - \frac{7}{6} \sin^2 I \right) e^2 \cos 2g \right] (1-e^2)^{-4+1/2}. \end{aligned} \right\} \tag{98}$$

En développant encore suivant les puissances de  $x^2$  et de  $y^2$  nous poserons

$$R = R'_{0,0} + R'_{2,0} x^2 + R'_{0,2} y^2 + \dots \tag{99}$$

Ici les coefficients sont développables suivant les puissances impaires de  $a'$ . Étant données les expressions ci-dessus de  $R'_3$  et  $R'_5$  on en déduit facilement que

$$\left. \begin{aligned} R'_{2,0} &= -\frac{3}{16} (1-5k^2) a'^3 + \frac{45}{256} (1-14k^2+21k^4) a'^5 + P_1' a'^7 + \dots \\ R'_{0,2} &= -\frac{3}{16} (1-5k^2) a'^3 + \frac{45}{256} (2-22k^2+28k^4) a'^5 + Q_1' a'^7 + \dots \end{aligned} \right\} \tag{100}$$

Ici les coefficients  $P'_{2i+1}$  et  $Q'_{2i+1}$  sont certains polynômes en  $k^2$ .

Dans les recherches que nous avons en vue il importe d'étudier les équations

$$R'_{2,0} = 0$$

et

$$R'_{0,2} = 0.$$

Soient  $k'^2_{2,0}$  la racine de la première, et  $k'^2_{0,2}$  la racine de la seconde de ces équations, qui pour  $a' = 0$  se réduit à  $\frac{1}{5}$ . Ces quantités peuvent se développer d'après les puissances de  $a'^2$ . On trouve facilement

$$\left. \begin{aligned} k'^2_{2,0} &= \frac{1}{5} + \frac{9}{50} a'^2 + \dots \\ k'^2_{0,2} &= \frac{1}{5} + \frac{12}{50} a'^2 + \dots \end{aligned} \right\} \tag{101}$$

On a donc pour des valeurs petites de  $a'$

$$k'^2_{2,0} < k'^2_{0,2}.$$

Nous allons maintenant chercher tous les maxima, minima et minimaxima de la fonction  $R$ , en admettant, que  $a'$  est une quantité petite.

Étudions d'abord, comment se comporte la fonction  $R$  au voisinage de l'origine  $x = y = 0$ . Il résulte des formules (99) et (100) que dans ce point la fonction  $R$  est

minima, si  $k'^2_{0.2} < k^2 < 1$   
 minimaxima, si  $k'^2_{2.0} < k^2 < k'^2_{0.2}$   
 maxima, si  $0 \leq k^2 < k'^2_{2.0}$ .

Étudions maintenant la fonction  $R$  au voisinage du cercle  $e = k'$ . Nous savons déjà que  $R$  a une valeur constante sur cette courbe. Cette valeur est une valeur maxima pour  $R$  dans le domaine (43), si étant donné  $k > 0$ , on prend  $a'$  assez petit. En effet, en posant  $e = k'$  après la différentiation, il vient

$$\frac{\partial R}{\partial(e^2)} = a'^3 \frac{\partial R_3'}{\partial(e^2)} + \dots = \frac{3}{4} (k^2)^{-3/2} a'^3 + \dots$$

Le membre à droite est  $> 0$ , quelle que soit  $g$ , si  $a'$  est assez petit.

Pour découvrir tous les autres maxima, minima et minimaxima pour  $R$  il faut résoudre les équations

$$\frac{\partial R}{\partial(e^2)} = 0 \quad \frac{\partial R}{\partial g} = 0 \quad (102)$$

Si  $a'$  est petit, ce que nous admettons toujours encore, toutes les racines de ces équations se trouvent nécessairement sur les axes où  $\sin 2g = 0$ .

En effet, les formules (74), (95) et (96) montrent que  $\frac{\partial R}{\partial g}$  est divisible par le facteur

$$a'^5 e^2 \sin^2 I \sin 2g.$$

Dans le développement de l'autre facteur d'après les puissances de  $a'^2$  le premier terme a la valeur

$$-\frac{135}{128} \left(1 - \frac{7}{6} \sin^2 I\right) (1 - e^2)^{-7/2}.$$

Cet autre facteur ne peut donc pas disparaître en même temps que la dérivée  $\frac{\partial R}{\partial(e^2)}$ , pour laquelle nous avons le développement

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial(e^2)} &= a'^3 \frac{\partial R_3'}{\partial(e^2)} + \dots \\ &= a'^3 \frac{3}{4} \left(1 - \frac{5}{4} \sin^2 I\right) (1 - e^2)^{-5/2} + \dots \end{aligned}$$

Par suite, pour toutes les solutions des équations (102) on a nécessairement  $\sin 2g = 0$ .

En étudiant la première des équations (102), deux cas sont à distinguer suivant que

$$\cos 2g = +1 \quad \text{ou} \quad \cos 2g = -1.$$

Pour chacun de ces deux cas la fonction  $\frac{\partial R}{\partial(e^2)}$  est de la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial(e^2)} &= a'^3 \frac{\partial R_3'}{\partial(e^2)} + \dots \\ &= a'^3 \frac{3}{16} (1 - e^2)^{-7/2} (-1 + 5k^2 + e^2) + \dots \end{aligned}$$

Dans les deux cas le terme du troisième degré en  $a'$  est le même, mais les termes de degré supérieur sont différents pour les deux cas. Étant donnée la forme générale

des coefficients  $R'_{2m+1}$  des formules (96) et (97), on voit immédiatement que le coefficient, qui multiplie  $a'^{2m+1}$  dans le développement de  $\frac{\partial R}{\partial(e^2)}$ , sera de la forme

$$(1 - e^2)^{-3m-1/2} H_{2m+1}$$

$H_{2m+1}$  étant un polynôme en  $k^2$  et en  $e^2$ .

On peut conclure de ce qui précède, que les équations (102) ne possèdent dans le domaine (43) que les quatre solutions suivantes

$$e^2 = e'^2_{2.0} = 1 - 5k^2 + \frac{3}{100} \frac{7 - 5k^2}{k^2} a'^2 + \dots \quad (103)$$

$$e^2 = e'^2_{0.2} = 1 - 5k^2 + \frac{3}{200} \frac{41 - 125k^2}{k^2} a'^2 + \dots \quad (104)$$

en supposant toujours, bien entendu, que,  $k^2$  étant fixé,  $a'$  est assez petit. (Nous n'avons pas donné ici tous les détails du calcul très élémentaire.)

La quantité  $e'^2_{2.0}$  n'est pas toujours positive. En effet, elle s'annule pour une certaine valeur de  $k^2$  voisine de  $\frac{1}{5}$ . Soit maintenant  $\bar{k}^2$  une racine de l'équation  $e'^2_{2.0} = 0$ . Je dis que  $\bar{k}^2$  coïncide nécessairement avec la quantité  $k'^2_{2.0}$ , qui annule le coefficient  $R'_{2.0}$ . En effet, quand  $k^2$  passe la valeur  $\bar{k}^2$ , les deux solutions

$$x = \pm e'_{2.0} \quad y = 0$$

des équations  $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial y} = 0$

coïncident avec la solution déjà étudiée

$$x = y = 0.$$

Il faut donc que  $\bar{k}^2$  annule le coefficient  $R'_{2.0}$  et que par suite  $\bar{k}^2$  coïncide avec la quantité  $k'^2_{2.0}$ , donnée par la première des formules (101).

De la même manière on démontre que la quantité  $k'^2_{0.2}$ , donnée par la seconde des formules (101) est la seule racine de l'équation

$$e'^2_{0.2} = 0.$$

Il nous reste à examiner si aux points (103) et (104) la fonction  $R$  est maxima, minima ou minimaxima.

La formule (96) montre que  $\frac{\partial^2 R}{\partial g^2}$  est toujours divisible par le facteur

$$a'^5 \sin^2 I \cdot e^2.$$

Dans le développement de l'autre facteur d'après les puissances de  $a'^2$  le premier terme devient

$$-\frac{135}{64} \left(1 - \frac{7}{6} \sin^2 I\right) (1 - e^2)^{-4+1/2} \cos 2g.$$

On a donc  $\frac{\partial^2 R}{\partial g^2} < 0$  aux points (103), et  $\frac{\partial^2 R}{\partial g^2} > 0$  aux points (104), si  $a'$  est assez petit, et si le point en question ne coïncide pas avec le point  $e = 0$ .

Ensuite on a dans tous les quatre points (103) et (104)  $\frac{\partial^2 R}{\partial e \partial g} = 0$ .

Enfin l'identité

$$\frac{\partial^2 R}{\partial e^2} = 2 \frac{\partial R}{\partial (e^2)} + 4 e^2 \frac{\partial^2 R}{\partial (e^2)^2}$$

montre que  $\frac{\partial^2 R}{\partial e^2}$  est divisible aux points (103) et (104) par le facteur  $a'^3 e^2$ .

Dans le développement de l'autre facteur suivant les puissances de  $a'^2$  le premier terme devient, en vertu de l'expression (98) de  $R'_3$ ,

$$+ \frac{3}{4} (5 k^2)^{-7/2}$$

On a donc  $\frac{\partial^2 R}{\partial e^2} > 0$  aux points (103) et (104), si  $a'$  est assez petit et si le point en question ne coïncide pas avec l'origine  $e = 0$ .

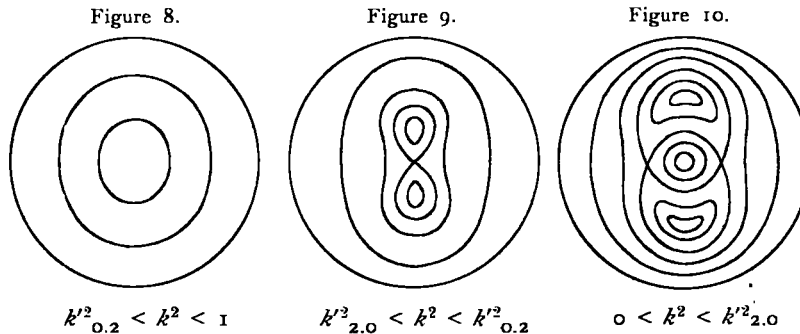
Par suite la fonction  $R$  est minimaxima aux points (103) et minima aux points (104), si  $a'$  est assez petit et si le point en question ne se confond pas avec  $e = 0$ .

Cela étant nous pouvons énoncer comme démontrée la proposition suivante, valable si, après avoir fixé arbitrairement  $k^2$  dans le domaine  $0 < k^2 < 1$ , on choisit  $a'$  assez petit.

En ne considérant que les valeurs de la fonction  $R$  à l'intérieur et sur la frontière du domaine  $e \leq k'$ , cette fonction a une valeur constante et maxima sur la frontière  $e = k'$ .

Si  $k'^2_{0.2} < k^2 < 1$ , la fonction  $R$  ne possède dans le domaine  $e < k'$  ni maxima, ni minimaxima et prend un seul minimum au point  $e = 0$ . — Si  $k'^2_{2.0} < k^2 < k'^2_{0.2}$ , la fonction  $R$  n'a aucun maximum dans le domaine  $e < k'$  et possède dans ce domaine un seul minimaximum, situé à l'origine  $e = 0$ , et seulement deux minima aux points  $g = \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $e = e'_{0.2}$ . — Si enfin  $0 < k^2 < k'^2_{2.0}$  la fonction  $R$  possède dans le domaine  $e < k'$  un seul maximum situé à l'origine  $e = 0$ , seulement deux minima aux points  $g = \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $e = e'_{0.2}$  et seulement deux minimaxima aux points  $g = 0$  ou  $\pi$ ,  $e = e'_{2.0}$ .

Les figures ci-dessous montrent le caractère des courbes  $R = \text{const.}$  dans les trois cas indiqués.



23. Admettons maintenant que la quantité  $a'$  (c'est à dire  $\frac{1}{a}$ ) prend des valeurs plus grandes et quelconques, sans que néanmoins l'orbite de la masse infiniment petite coupe celle de Jupiter. Alors il est encore possible d'étudier (au moyen de calcul numérique) les signes des coefficients  $R'_{2.0}$  et  $R'_{0.2}$  du développement (99) et de discuter ainsi comment

se comporte la fonction  $R$  au voisinage de l'origine  $e = 0$  pour des valeurs diverses des paramètres  $a'$  et  $k$ . Pour le calcul numérique des coefficients  $R'_{2.0}$  et  $R'_{0.2}$  il faut donner leurs expressions analytiques sous une forme convenable.

Nous allons maintenant exprimer ces coefficients au moyen des quantités  $b^{i,j}$ ,  $c^{i,j}$ ,  $e^{i,j}$  définies par les formules:

$$\begin{aligned} [1 + a'^2 - 2 a' (\mu \cos M + \nu \cos N)]^{-1/2} &= b^{0.0} + 2 b^{1.0} \cos M + 2 b^{0.1} \cos N + 4 b^{1.1} \cos M \cos N + \dots \\ [1 + a'^2 - 2 a' (\mu \cos M + \nu \cos N)]^{-3/2} &= c^{0.0} + 2 c^{1.0} \cos M + 2 c^{0.1} \cos N + 4 c^{1.1} \cos M \cos N + \dots \\ [1 + a'^2 - 2 a' (\mu \cos M + \nu \cos N)]^{-5/2} &= e^{0.0} + 2 e^{1.0} \cos M + 2 e^{0.1} \cos N + 4 e^{1.1} \cos M \cos N + \dots \end{aligned}$$

Entre ces quantités et les fonctions analogues  $b^{i,j}$ ,  $c^{i,j}$ ,  $e^{i,j}$ , définies auparavant (voir pages 383 et 387), existent, en vertu de la formule  $a a' = 1$ , les relations suivantes

$$\left. \begin{aligned} a^{1/2} b^{i,j} &= a'^{1/2} b'^{i,j} \\ a^{3/2} c^{i,j} &= a'^{3/2} c'^{i,j} \\ a^{5/2} e^{i,j} &= a'^{5/2} e'^{i,j} \end{aligned} \right\} (105)$$

De l'autre côté il est facile de voir qu'il n'est pas nécessaire d'admettre que  $a < 1$  dans la démonstration des formules (88). Ces formules sont ainsi valables aussi quand  $a > 1$ . En introduisant maintenant dans ces expressions (88) au lieu de  $a$ ,  $c^{i,j}$ ,  $e^{i,j}$  les quantités analogues  $a'$ ,  $c'^{i,j}$ ,  $e'^{i,j}$  en se servant de la formule  $a a' = 1$  et des relations (105) on trouve immédiatement pour  $R'_{2.0}$  et  $R'_{0.2}$  les formules suivantes

$$\begin{aligned}
 R'_{2.0} &= -a' c'^{1.1} + \frac{1}{2} a'^2 (c'^{1.0} + c'^{0.1}) \\
 R'_{0.2} &= a' c'^{1.1} - \frac{1}{4} a'^2 (c'^{1.0} + c'^{0.1}) + \frac{3}{4} a'^2 k (c'^{1.0} - c'^{0.1}) - \frac{3}{4} a'^3 (1 - k^2) (e'^{0.0} - e'^{1.1}).
 \end{aligned}
 \tag{106}$$

Pour le calcul des coefficients  $c'^{i,j}$  et  $e'^{i,j}$  nous avons suivi la méthode exposée aux pages 387 et 388 en y écrivant seulement  $a', b'^{i,j}, c'^{i,j}, e'^{i,j}$  au lieu de  $a, b^{i,j}, c^{i,j}, e^{i,j}$ .

C'est de cette manière que nous avons calculé le tableau ci-dessous donnant  $R'_{2.0}$  et  $R'_{0.2}$ . L'argument  $I_0$  est encore défini par la relation

$$\cos I_0 = \sqrt{1 - e^2} \cos I = k.$$

	$I_0$	$a'$					
		0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$R'_{2.0}$	0°	+0.06664	+0.16128	+0.37680	+0.92402	+2.7015	+13.391
	10	+0.06240	+0.14746	+0.32958	+0.73767	+1.7240	+4.165
	20	+0.05133	+0.11405	+0.23022	+0.43379	+0.7602	+1.207
	30	+0.03699	+0.07597	+0.13714	+0.22245	+0.3254	+0.426
	40	+0.02272	+0.04294	+0.06982	+0.10037	+0.1292	+0.149
	50	+0.01050	+0.01793	+0.02567	+0.03154	+0.0333	+0.028
	60	+0.00110	+0.00048	-0.00206	-0.00751	-0.0165	-0.030
	70	-0.00540	-0.01074	-0.01867	-0.02936	-0.0428	-0.059
	80	-0.00919	-0.01697	-0.02745	-0.04048	-0.0557	-0.074
	90	-0.01043	-0.01896	-0.03020	-0.04390	-0.0596	-0.077
$R'_{0.2}$	0	+0.06664	+0.16128	+0.37680	+0.92402	+2.7015	+13.391
	10	+0.06173	+0.14416	+0.31443	+0.66537	+1.3429	+2.090
	20	+0.04933	+0.10546	+0.19838	+0.32819	+0.4556	+0.497
	30	+0.03419	+0.06581	+0.10724	+0.14971	+0.1806	+0.199
	40	+0.02014	+0.03498	+0.05082	+0.06405	+0.0735	+0.084
	50	+0.00885	+0.01363	+0.01740	+0.01953	+0.0210	+0.026
	60	+0.00060	-0.00036	-0.00254	-0.00548	-0.0082	-0.008
	70	-0.00491	-0.00906	-0.01427	-0.01985	-0.0250	-0.028
	80	-0.00804	-0.01381	-0.02050	-0.02737	-0.0338	-0.038
	90	-0.00906	-0.01532	-0.02244	-0.02970	-0.0366	-0.042

On voit du tableau que l'équation  $R'_{2.0} = 0$  a toujours une racine  $I_0 = I'_{2.0} = \arccos k'_{2.0}$  si  $a' \leq 0.9$  et que l'équation  $R'_{0.2} = 0$  a aussi une racine  $I_0 = I'_{0.2} = \arccos k'_{0.2}$  si  $a' \leq 0.9$ . Il apparaît aussi que

$$\begin{aligned}
 R'_{2.0} > 0 &\text{ si } k'^2_{2.0} < k^2 < 1 \\
 R'_{2.0} < 0 &\text{ si } 0 < k^2 < k'^2_{2.0} \\
 R'_{0.2} > 0 &\text{ si } k'^2_{0.2} < k^2 < 1 \\
 R'_{0.2} < 0 &\text{ si } 0 < k^2 < k'^2_{0.2}.
 \end{aligned}$$

Du tableau nous avons tiré par calcul d'interpolation quelques valeurs des quantités  $I'_{2.0}$  et  $I'_{0.2}$ . Les voici

$a'$	$I'_{2.0}$	$I'_{0.2}$
0.0	63°43	63°43
..	...	...
..	...	...
0.4	61.43	60.89
0.5	60.34	59.67
0.6	59.06	58.38
0.7	57.56	57.25
0.8	55.95	56.6
0.9	54.1	57.2

On y voit que la quantité  $I'_{2.0} - I'_{0.2}$  est positive quand  $0 < a' < 0.74$  et négative quand  $a' > 0.74$ .

Les fonctions  $k'^2_{2.0}$  et  $k'^2_{0.2}$  étant ainsi définies nous pouvons énoncer comme démontré le théorème suivant:

A l'origine  $x = y = 0$  la fonction  $R$  est minima si  $k^2 > k'^2_{2.0}$  et  $k'^2_{0.2}$ ; minimaxima si  $k^2$  est situé entre  $k'^2_{2.0}$  et  $k'^2_{0.2}$  et maxima si  $k^2 < k'^2_{2.0}$  et  $k'^2_{0.2}$ .

En rapprochant ce résultat à celui du no. 11 nous pouvons exprimer le théorème en question de la manière suivante:

La condition nécessaire et suffisante pour que l'excentricité de l'orbite d'une masse infiniment petite et extérieure à la planète perturbatrice restera toujours petite, si elle est petite à un moment donné, c'est que l'inclinaison de l'orbite n'est pas située entre les deux angles  $I'_{2.0}$  et  $I'_{0.2}$ . (Dans cet énoncé nous avons négligé la masse perturbatrice et le carré de l'excentricité.)

Les astéroïdes extérieures à la planète perturbatrice appartiennent ainsi à deux catégories. Dans la première catégorie les inclinaisons sont plus petites que  $I'_{2.0}$  et  $I'_{0.2}$ ;

dans la seconde elles sont plus grandes que ces mêmes quantités.

Nous avons démontré au no. 22 que la fonction  $R$  possède des valeurs minima en deux point symétriques

$$x = 0 \quad y = \pm e'_{0.2}$$

si  $a'$  est petit et si  $k^2 < k'^2_{0.2}$ . Il me semble très vraisemblable que ces minima existent pour des valeurs convenables de  $k^2$ , tant que  $a' < 0.74 \dots$  (valeur de  $a'$  qui fait  $k'_{0.2} = k'_{2.0}$ ). Si au contraire  $a' > 0.74 \dots$ , il est probable que deux minima symétriques se trouvent sur l'axe des  $x$  au moins pour des valeurs convenables de  $k^2 < k'^2_{2.0}$ . Mais pour démontrer rigoureusement l'existence de ces minima et pour en déterminer la position il faudrait avoir recours aux calculs numériques.

24. Nous allons maintenant montrer que la fonction  $R$  peut posséder des valeurs minima aussi dans le troisième cas de la page 378. Dans ce cas, nous l'avons déjà remarqué, les deux orbites sont situées l'une par rapport à l'autre comme deux anneaux d'une chaîne. En traitant les deux premiers cas de la page citée nous avons profité de ce fait, que la fonction  $R$  pouvait être étudiée complètement, si  $a$  ou  $a'$  était assez petit. Maintenant nous verrons qu'une étude complète de la fonction  $R$  est possible dans le troisième cas (c'est-à-dire dans les domaines  $B$  et  $B'$  de la page 369), si la quantité  $k'$  est assez petite.

Admettons donc que  $k'$  soit petit. Alors, pour que les domaines  $B$  et  $B'$  existent, il faut que  $a' - 1$  soit aussi petit. En mettant

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= a'^2(1 - r^2) + 2\sqrt{-1} a' \sqrt{\frac{k'^2 - e^2}{1 - e^2}} \frac{r}{a} \sin(w + g) \\ \Phi' &= a'^2(1 - r^2) - 2\sqrt{-1} a' \sqrt{\frac{k'^2 - e^2}{1 - e^2}} \frac{r}{a} \sin(w + g) \\ \Psi &= a'^2(1 + r^2) \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

La formule (49) peut s'écrire alors

$$\tau'^2 = \Phi \Phi' \Psi^{-2}. \quad (112)$$

Introduisons maintenant dans les formules (111) donnant  $\Phi$ ,  $\Phi'$  et  $\Psi$  les expressions suivantes

$$\begin{aligned} a' &= 1 + sk' & e &= \epsilon k' \\ a'r &= 1 - e \cos u = 1 - \epsilon k' \frac{z^2 + 1}{2z} \\ a'r \cos w &= \cos u - e = \frac{z^2 + 1}{2z} - \epsilon k' \\ a'r \sin w &= \sqrt{1 - e^2} \sin u = \sqrt{1 - \epsilon^2 k'^2} \frac{z^2 - 1}{2z\sqrt{-1}} \end{aligned}$$

Les fonctions  $z^2 \Phi$ ,  $z^2 \Phi'$ ,  $z^2 \Psi$  deviennent alors des polynômes de quatrième degré en  $z$  et peuvent se développer après les puissances de  $k'$ . Mettons

$$\left. \begin{aligned} z^2 \Phi &= \Phi_1 k' + \Phi_2 k'^2 + \dots \\ z^2 \Phi' &= \Phi'_1 k' + \Phi'_2 k'^2 + \dots \\ z^2 \Psi &= \Psi_0 + \Psi_1 k' + \dots \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

$$a' = 1 + sk' \quad (107)$$

il faut que

$$-1 < s < +1.$$

En mettant ensuite

$$e = \epsilon k' \quad (108)$$

nous avons

$$0 \leq \epsilon \leq 1.$$

Cela étant, la quantité  $\tau'^2$ , introduite par la formule (49), est de l'ordre de  $k'^2$  et développable d'après les puissances de  $k'$ . En effet, nous avons

$$\frac{r}{a} - a' = 1 - e \cos u - a' = -k'(\epsilon \cos u + s)$$

et

$$\sin^2 I = \frac{k'^2 - e^2}{1 - e^2} = k'^2 \frac{1 - \epsilon^2}{1 - \epsilon^2 k'^2}.$$

Dans l'étude de la fonction  $R$  nous partons des formules (93) et (54). Comme variable d'intégration nous introduirons  $z$  au lieu de  $u$  au moyen de la relation

$$z = E^{\sqrt{-1}u} \quad (109)$$

en désignant par  $E$  la base des logarithmes naturelles. Nous trouvons ainsi

$$R = \frac{a'}{2\pi \sqrt{-1}} \int_{|z|=1} \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} F(x) \frac{dz}{z}. \quad (110)$$

Il faut maintenant étudier de plus près la quantité  $\tau'^2$ . Mettons

Les coefficients  $\Phi_i$ ,  $\Phi'_i$ ,  $\Psi_i$ , qui sont des polynômes de quatrième degré en  $z$ , sont aussi des polynômes en  $\epsilon$ ,  $\sqrt{1 - \epsilon^2}$ ,  $s$ ,  $\cos g$  et  $\sin g$ . En mettant pour simplifier

$$\gamma = E^{\sqrt{-1}g}; \quad \gamma' = E^{-\sqrt{-1}g}; \quad \epsilon_1 = \sqrt{1 - \epsilon^2} \quad (114)$$

on trouve facilement que

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= z[(\epsilon + \epsilon_1 \gamma)z^2 + 2sz + (\epsilon - \epsilon_1 \gamma')] \\ \Phi'_1 &= z[(\epsilon - \epsilon_1 \gamma)z^2 + 2sz + (\epsilon + \epsilon_1 \gamma')] \\ \Psi_0 &= z^2. \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

Il importe d'étudier les racines de l'équation

$$\frac{1}{z} \Phi_1 = 0. \quad (116)$$

Admettons d'abord que  $g = 0$ , de sorte que  $\gamma = \gamma' = 1$ . Alors les racines de l'équation (116) sont

$$z = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 + 1 - 2\epsilon^2}}{\epsilon + \epsilon_1}.$$

Ces racines sont des imaginaires conjuguées si

$$\varepsilon^2 > \frac{1}{2}(1 + s^2).$$

Leur valeur absolue commune

$$\sqrt{\frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\varepsilon + \varepsilon_1}}$$

est alors  $< 1$ . Les racines de l'équation (116) sont donc à l'intérieur du cercle  $|z| = 1$ , quand

$$g = 0 \text{ et } \frac{1}{2}(1 + s^2) < \varepsilon^2 < 1.$$

Cherchons maintenant dans quelles conditions une racine de l'équation (116) peut se trouver sur le cercle  $|z| = 1$ . En introduisant

$$z = E \sqrt{-1}^u$$

dans l'équation, dont il s'agit, il vient

$$s + \varepsilon \cos u + \sqrt{-1} \varepsilon_1 \sin(u + g) = 0.$$

Cette équation ne peut être satisfaite que dans les conditions suivantes

- 1° si  $\varepsilon = 1$  en mettant  $\cos u = -s$
- 2° si  $\varepsilon \cos g = -s$  » »  $u = -g$
- 3° si  $\varepsilon \cos g = +s$  » »  $u = -g + \pi$ .

Il faut conclure de là que l'équation (116) a ses racines à l'intérieur du cercle  $|z| = 1$  aussitôt que

$$\varepsilon \cos g > |s| \text{ et } \varepsilon < 1. \tag{117}$$

La fonction  $\Phi_1'$  s'obtient de  $\Phi_1$  en changeant seulement le signe de  $\varepsilon_1$ . Il est donc évident que l'équation

$$\frac{1}{z} \Phi_1' = 0 \tag{118}$$

a ses deux racines à l'extérieur du cercle  $|z| = 1$ , quand  $\varepsilon$  et  $g$  satisfont aux inégalités (117).

Les quantités  $\varepsilon + \varepsilon_1 \gamma$  et  $\varepsilon + \varepsilon_1 \gamma'$  ne peuvent pas disparaître que si

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad g = \pi.$$

C'est donc seulement dans ce point qu'une racine de l'équation (116) peut devenir infinie ou une racine de l'équation (118) peut s'annuler. Il est par suite possible de trouver une quantité  $\varrho$  si grande que les racines de l'équation (116) sont à l'intérieur du cercle

$$|z| = \varrho$$

tandis que les racines de l'équation (118) sont à l'extérieur du cercle

$$|z| = \frac{1}{\varrho}$$

aussitôt que  $\varepsilon$  et  $g$  appartiennent au domaine

$$0 \leq \varepsilon \leq 1 \quad -\frac{\pi}{2} \leq g \leq +\frac{\pi}{2}. \tag{119}$$

Regardons maintenant les équations du quatrième degré

$$z^2 \Phi = 0 \tag{120}$$

et  $z^2 \Phi' = 0. \tag{121}$

En faisant aller  $k'$  vers zéro, une racine de chacune de ces équations va vers zéro, tandis qu'une autre se rapproche de l'infini; les deux autres racines de l'équation (120) se confondent avec les racines de l'équation (116), tandis que les racines restantes de l'équation (121) coïncident avec les racines de l'équation (118).

Tournons-nous enfin vers l'équation

$$z^2 \Psi = 0. \tag{122}$$

Quand  $k'$  va vers zéro, deux racines de cette équation se rapprochent évidemment de zéro, tandis que les deux autres se rapprochent de l'infini.

Choisissons maintenant  $\varrho' > \varrho$ . Après cela nous pouvons évidemment trouver une quantité  $\delta$  si petite que les conditions suivantes 1°-5° soient remplies, aussitôt que  $\varepsilon$  et  $g$  appartiennent au domaine (119) et  $k'$  au domaine

$$|k'| < \delta: \tag{123}$$

- 1° une racine de l'équation (120), une racine de l'équation (121) et deux racines de l'équation (122) doivent rester à l'intérieur du cercle  $|z| = \frac{1}{\varrho'}$ ;
- 2° une racine de l'équation (120), une racine de l'équation (121) et deux racines de l'équation (122) doivent rester à l'extérieur du cercle  $|z| = \varrho'$ ;
- 3° les deux racines restantes de l'équation (120) doivent se trouver dans le cercle  $|z| = \varrho$ ;
- 4° les deux racines restantes de l'équation (121) doivent être situées en dehors du cercle  $|z| = \frac{1}{\varrho}$ ;
- 5° la quantité  $\tau'^2$  doit rester plus petite qu'un certain nombre  $\delta'$ , choisi arbitrairement et  $< 1$ , pour toutes les valeurs de  $z$  situées entre les deux circonférences  $|z| = \varrho$  et  $|z| = \frac{1}{\varrho}$ .

Enfin nous imposerons à la quantité  $\delta$  de l'inégalité (123) une sixième condition. Fixons arbitrairement dans le domaine (117) un point  $\varepsilon_0, g_0$  et une quantité  $\delta''$  si petite que le domaine

$$|\varepsilon - \varepsilon_0| < \delta'' \quad |g - g_0| < \delta'' \tag{124}$$

se trouve à l'intérieur du domaine (117). Evidemment nous pouvons admettre que la quantité  $\delta$  de la formule (123) est si petite que pour toutes les valeurs de  $k'$  du domaine (123) et pour toutes les valeurs de  $\varepsilon$  et  $g$  du domaine (124) l'équation (120) ait trois racines à l'intérieur du cercle  $|z| = 1$ , tandis que l'équation (121) ait trois racines à l'extérieur de ce cercle.

Après ces préparations retournons maintenant à l'expression (110) de la fonction  $R$  et à la formule (54) donnant  $F(\tau)$ . Admettons toujours que  $|k'| < \delta$  et étudions la fonction  $R$  d'abord dans le domaine (124). En vertu de l'équation (112) nous pouvons écrire

$$\log \tau'^2 = \log k'^2 + \log \frac{\Phi}{k'z} + \log \frac{z \Phi'}{k'} - 2 \log \Psi.$$



Posons pour abrégé [voir formule (54)]

$$\frac{a'r}{\sqrt{1+r^2}} A(x'^2) = P; \quad \frac{a'r}{\sqrt{1+r^2}} B(x'^2) = Q. \quad (125)$$

Alors l'expression (110) de  $R$  peut s'écrire

$$R = R_1 \log k'^2 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5$$

ou

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|z|=1} P \frac{dz}{z} \\ R_2 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|z|=1} P \log \frac{\Phi}{k'x z} \frac{dz}{z} \\ R_3 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|z|=1} P \log \frac{x\Phi'}{k' z} \frac{dz}{z} \\ R_4 &= \frac{-2}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|z|=1} P \log \Psi \frac{dz}{z} \\ R_5 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|z|=1} Q \frac{dz}{z} \end{aligned} \right\} (126)$$

D'après la cinquième condition de la page 408 la fonction  $P$  est holomorphe et uniforme dans le domaine

$$\frac{1}{\varrho} \leq |x| \leq \varrho \quad |\varepsilon - \varepsilon_0| < \delta^n \quad |g - g_0| < \delta^n \quad |k'| < \delta.$$

Ensuite nous savons que l'équation (120) a trois racines à l'intérieur du cercle  $|z| = 1$  et sa quatrième racine à l'extérieur du cercle  $|z| = \varrho'$ , tandis que l'équation (121) a trois racines à l'extérieur du cercle  $|z| = 1$  et sa quatrième racine dans le cercle  $|z| = \frac{1}{\varrho'}$ . Par suite la fonction  $\log \frac{\Phi}{k'z}$  est holomorphe et uniforme dans le domaine

$$1 \leq |z| \leq \varrho \quad |\varepsilon - \varepsilon_0| < \delta^n \quad |g - g_0| < \delta^n \quad |k'| < \delta$$

tandis que la fonction  $\log \frac{z\Phi'}{k'}$  est holomorphe dans le domaine

$$\frac{1}{\varrho} \leq |z| \leq 1 \quad |\varepsilon - \varepsilon_0| < \delta^n \quad |g - g_0| < \delta^n \quad |k'| < \delta.$$

Cela étant, nous pouvons dans les formules donnant  $R_2$  et  $R_3$  changer les chemins d'intégration et écrire

$$\left. \begin{aligned} R_2 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|z|=\varrho} P \log \frac{\Phi}{k'z z} \frac{dz}{z} \\ R_3 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|z|=\frac{1}{\varrho}} P \log \frac{z\Phi'}{k' z} \frac{dz}{z} \end{aligned} \right\} (127)$$

Maintenant laissons le point  $\varepsilon, g$  sortir du domaine (124).

Fixons arbitrairement petite une quantité  $\delta_1$ .

Je dis que les fonctions  $R_1, \dots, R_5$  définies tout à l'heure restent holomorphes dans le domaine

$$0 \leq \varepsilon \leq 1 - \delta_1 \quad -\frac{\pi}{2} \leq g \leq +\frac{\pi}{2} \quad |k'| < \delta. \quad (128)$$

D'abord, en effet, la fonction  $x'^2$  est holomorphe et  $< \delta'$  en valeur absolue dans le domaine (129) et sur les trois chemins d'intégration  $|z| = 1, |z| = \varrho, |z| = \frac{1}{\varrho}$ . Par suite les fonctions  $P$  et  $Q$  sont holomorphes dans ces mêmes conditions. — Ensuite, étant données les positions des racines de l'équation (122), la fonction  $\log \Psi$  est aussi holomorphe dans le domaine

$$0 \leq \varepsilon \leq 1 \quad -\frac{\pi}{2} \leq g \leq +\frac{\pi}{2} \quad |k'| < \delta \quad (129)$$

et sur le chemin d'intégration  $|z| = 1$ . — Enfin des polynômes du quatrième degré  $\frac{z^2\Phi}{k'}$  et  $\frac{z^2\Phi'}{k'}$ , qui sont holomorphes dans le domaine (128), le premier a trois racines dans le cercle  $|z| = \varrho$ , tandis que le second a une seule racine dans le cercle  $|z| = \frac{1}{\varrho}$ . Par suite, la fonction  $\log \frac{\Phi}{k'z}$  est holomorphe et uniforme dans le domaine (128) et sur le chemin d'intégration  $|z| = \varrho$ , tandis que la fonction  $\log \frac{z\Phi'}{k'}$  est holomorphe et uniforme dans ce même domaine (128) et sur le chemin d'intégration  $|z| = \frac{1}{\varrho}$ .

Cela étant, les fonctions  $R_1, \dots, R_5$  sont évidemment holomorphes dans le domaine (128). C. Q. F. D.

Il reste à étudier ces fonctions au voisinage de  $\varepsilon = 1$ . Evidemment, d'après ce qui précède, les fonctions  $R_1, R_4, R_5$  sont encore holomorphes pour  $\varepsilon = 1$ . De l'autre côté  $R_2$  et  $R_3$  sont développables d'après les puissances de  $\sqrt{1-\varepsilon}$  et  $k'$ , puisque les fonctions  $P, \log \frac{\Phi}{k'z}, \log \frac{z\Phi'}{k'}$  peuvent être développées ainsi,  $z$  étant quelconque sur le chemin d'intégration.

En résumant, nous pouvons conclure que la fonction  $R$  peut dans le domaine  $B$  (voir page 369) être mise sous la forme

$$R = R_1 \log k'^2 + R'. \quad (130)$$

Ici  $R_1$  et  $R'$  sont développables d'après les puissances entières et positives de  $k'$ , pourvu que  $|k'| < \delta$ , et cela quelles que soient les valeurs de  $\varepsilon$  et  $g$  dans le domaine (119). — Ensuite ces fonctions sont développables suivant les puissances entières et positives de  $\varepsilon - \varepsilon_0$  et  $g - g_0$ ,  $\varepsilon_0$  et  $g_0$  étant un point quelconque du domaine  $0 \leq \varepsilon < 1, -\frac{\pi}{2} \leq g \leq \frac{\pi}{2}$ . — Enfin au voisinage d'un point quelconque du cercle  $\varepsilon = 1$  elles peuvent être développées d'après les puissances entières et positives de  $\sqrt{1-\varepsilon}$  et de  $g - g_0$ .

Nous allons calculer maintenant les parties de  $R_1$  et  $R'$ , qui sont indépendantes de  $k'$ . Dans ce but nous mettons  $k' = 0$  dans les formules (111), (125), (126) et (127). On obtient alors

$$a' = 1 \quad r = 1$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} A(0)$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} B(0) \qquad \frac{\Phi}{k'z} = (\varepsilon + \varepsilon_1 \gamma) + 2s \frac{1}{z} + (\varepsilon - \varepsilon_1 \gamma') \frac{1}{z^2}$$

$$\psi = 2 \qquad \frac{z\Phi'}{k'} = (\varepsilon - \varepsilon_1 \gamma) z^2 + 2sz + (\varepsilon + \varepsilon_1 \gamma')$$

En désignant par  $z_1$  et  $z_2$  les racines de l'équation (116) et par  $z_1'$  et  $z_2'$  les racines de l'équation (118), nous pouvons introduire dans les formules (127) les expressions suivantes:

$$\log \frac{\Phi}{k'z} = \log(\varepsilon + \varepsilon_1 \gamma) + \log\left(1 - \frac{z_1}{z}\right) + \log\left(1 - \frac{z_2}{z}\right) = \log(\varepsilon + \varepsilon_1 \gamma) - \frac{z_1}{z} - \dots - \frac{z_2}{z} - \dots$$

$$\log \frac{z\Phi'}{k'} = \log(\varepsilon + \varepsilon_1 \gamma') + \log\left(1 - \frac{z}{z_1'}\right) + \log\left(1 - \frac{z}{z_2'}\right) = \log(\varepsilon + \varepsilon_1 \gamma') - \frac{z}{z_1'} - \dots - \frac{z}{z_2'} - \dots$$

Ces développements sont valables, puisque  $z_1$  et  $z_2$  sont à l'intérieur du cercle  $|z| = \rho$ , tandis que  $z_1'$  et  $z_2'$  sont à l'extérieur du cercle  $|z| = \frac{1}{\rho}$ .

En mettant  $k' = 0$  dans les formules (126) et (127) on obtient ainsi

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} A(0) \qquad R_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} A(0) \log \frac{1}{4}$$

$$R_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} A(0) \log(\varepsilon + \varepsilon_1 \gamma) \qquad R_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} B(0)$$

$$R_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} A(0) \log(\varepsilon + \varepsilon_1 \gamma')$$

En écrivant que les termes indépendants de  $k'$  dans les développements de  $R_1$  et de  $R'$  nous arrivons aux formules suivantes

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} A(0) + \dots \\ R' &= \frac{1}{\sqrt{2}} A(0) \log \frac{1 + 2\varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2} \cos g}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} B(0) + \dots \end{aligned} \right\} (131)$$

Les recherches de ce numéro avaient pour but de trouver toutes les solutions des équations

$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial R}{\partial g} = 0 \qquad (132)$$

qui existent dans le domaine  $B$ , en admettant que  $k'$  est petit. Recherchons d'abord toutes les solutions des équations

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial g} = 0 \qquad (133)$$

à l'intérieur du domaine (119) en mettant pour abrégé

$$f = 1 + 2\varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2} \cos g.$$

On obtient après dérivation

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = \frac{2(1 - 2\varepsilon^2)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \cos g$$

$$\frac{\partial f}{\partial g} = -2\varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin g.$$

Les équations (133) possèdent donc une seule solution à l'intérieur du domaine (119). Cette solution

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad g = 0$$

correspond à une valeur maxima de la fonction  $f$ .

Retournons maintenant aux équations (132). Pour des petites valeurs de  $k'$  elles possèdent une seule solution à l'intérieur du domaine  $0 \leq \varepsilon \leq k'$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq g \leq +\frac{\pi}{2}$ . Cette solution, qui peut s'écrire

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = k' \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathfrak{B}(k', k' \log k') \right); \qquad g = 0 \qquad (134)$$

où  $\mathfrak{B}(0,0) = 0$ , correspond à une valeur minima de la fonction  $R$ , puisque  $A(0) < 0$ , comme nous l'avons vu à la page 371.

Considérons l'équation

$$s = \frac{\varepsilon_1}{k'}.$$

Pour des petites valeurs de  $k'$  elle a une seule racine

$$s = s_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathfrak{B}_1(k', k' \log k')$$

où  $\mathfrak{B}_1(0,0) = 0$ .

Nous pouvons maintenant énoncer comme démontré le théorème suivant:

Pour des valeurs assez petites de  $k'$  la fonction  $R$  possède ni maxima ni minimaxima dans le domaine  $B$ . Si  $|a' - 1| > s_1 k'$ ,  $R$  n'a pas de minima dans ce domaine. Si au contraire  $|a' - 1| < s_1 k'$ , la fonction  $R$  possède dans le domaine  $B$  un seul minimum situé au point (134).

Si les paramètres  $a'$  et  $k'$  varient, les points

$$e = e_1 \quad g = 0 \text{ ou } \pi, \quad (135)$$

où la fonction  $R$  est minima dans les domaine  $B$  ou  $B'$ , se déplacent. Mais, il ne m'a pas réussi à les poursuivre analytiquement, si  $a' - 1$  et  $k'$  cessent d'être petits. Mon but a été seulement de diriger l'attention sur l'existence de ces minima assez remarquables. Evidemment il n'offre pas de difficulté sérieuse de trouver par calcul numérique leurs positions pour des valeurs données des paramètres  $a'$  et  $k'$ .

Nous pouvons appliquer le résultat de ce numéro en calculant d'après les nos. 7, 8 et 9, les séries de M. Lindstedt, qui existent, quand les éléments se trouvent dans le voisinage des points (135). Les orbites correspondantes appartiennent à une certaine classe de comètes à mouvement stable. Dans ces orbites le demi grand axe, l'excentricité et l'inclinaison sont à peu près constants; la distance du périhélie au nœud est toujours voisine de 0 ou de  $\pi$ ; la ligne des nœuds a un mouvement rétrograde; enfin les orbites de la comète et de la planète perturbatrice sont situées l'une par rapport à l'autre comme les anneaux d'une chaîne.

25. En étudiant la fonction  $R$  pour des petites valeurs de  $a$  au no. 16 et pour des petites valeurs de  $a'$  au no. 22 nous avons déjà fait la remarque, que dans ces deux cas la fonction  $R$  augmente si,  $g$  restant constant, l'excentricité  $e$  va en augmentant vers la valeur  $k'$ . La formule (42) nous montre que l'inclinaison  $I$  diminue vers zéro, quand l'excentricité  $e$  croît vers  $k'$ . Pour les valeurs de  $e$  voisines de  $k'$  il est donc avantageux d'introduire les variables du no. 3. Entre les variables  $\xi', \eta'$  de ce no. 3 et les variables keplériennes nous avons évidemment les relations suivantes

$$\begin{aligned} \xi'^2 + \eta'^2 &= 2\sqrt{a}\sqrt{1-e^2} - 2\sqrt{a}\sqrt{1-e^2}\cos I \\ &= 2\sqrt{a}(\sqrt{1-e^2} - k) \\ \eta' : \xi' &= \operatorname{tg} g. \end{aligned}$$

Si donc,  $g$  restant constant, l'excentricité  $e$  augmente vers  $k'$ , le point correspondant  $\xi', \eta'$  se rapproche de l'origine sur une ligne droite.

Il faut donc conclure que la fonction  $R$  considérée comme fonction des variables  $\xi'$  et  $\eta'$  du no. 3 a une valeur maxima au point  $\xi' = \eta' = 0$ , si  $a$  est assez petit ou bien si  $a'$  est assez petit.

Nous savons déjà que  $R$  est holomorphe au voisinage de  $\xi' = \eta' = 0$  aussitôt que

$$0 < a < \frac{1}{1+k'} \quad (136)$$

ou bien que

$$0 < a' < 1 - k'$$

(voir le chapitre III). Ensuite, étant données les propriétés de symétrie de la fonction perturbatrice exposées au no. 4, il faut que  $R$  est de la forme

$$R = R''_{0,0} + R''_{2,0}\xi'^2 + R''_{0,2}\eta'^2 + \dots$$

D'après ce qui a été dit tout à l'heure, les inégalités

$$R''_{2,0} < 0 \quad R''_{0,2} < 0 \quad (137)$$

subsistent aussitôt que,  $k'$  ayant été fixé arbitrairement mais  $< 1$ , on choisit  $a$  ou  $a'$  assez petit.

On peut se demander, si ces inégalités ont lieu toujours en même temps que l'une ou l'autre des inégalités (136). Pour répondre à cette question introduisons dans les formules (72) et (96) au lieu des variables keplériennes  $e, I, g$  les variables du no. 3, c'est-à-dire  $\xi', \eta'$  et  $x_2' = \sqrt{a}(1-k)$ , au moyen des développements suivants, faciles à déduire,

$$\left. \begin{aligned} e^2 &= k'^2 - \frac{k}{\sqrt{a}}(\xi'^2 + \eta'^2) + \dots \\ \sin^2 I &= \frac{1}{k\sqrt{a}}(\xi'^2 + \eta'^2) + \dots \\ \sin^2 I \cos 2g &= \frac{1}{k\sqrt{a}}(\xi'^2 - \eta'^2) + \dots \end{aligned} \right\} (138)$$

Dans ces développements les termes négligés sont au moins du quatrième degré en  $\xi'$  et  $\eta'$ . En ne conservant dans  $R$  que les termes en  $\xi'^2$  et en  $\eta'^2$  il est facile d'obtenir pour  $R''_{2,0}$  et pour  $R''_{0,2}$  des développements d'une part d'après les puissances de  $a$  d'autre part d'après les puissances de  $a'$ . Ces développements, dont les coefficients ne dépendent que de  $k'$ , convergent d'une part quand  $a < \frac{1}{1+k'}$  et d'autre part quand  $a' < 1 - k'$  (voir Poincaré, Leçons de Mécanique Céleste, t. II no. 287). Dans les formules (72) et (96) les développements des fonctions

$$X_0^{2m, 2i} \text{ et } X_0^{-(2m+1), 2i}$$

d'après les puissances de  $e^2$  ne contiennent que des termes positifs. Ensuite dans les développements des fonctions  $A_{i,i}^{(2m)}$  d'après les puissances de  $\sin^2 I$  [voir formule (74)] les termes sont alternativement positifs et négatifs. On peut conclure de cela et des formules (138), que la seconde des inégalités (137) est toujours remplie, quand l'une ou l'autre des inégalités (136) est satisfaite.

Il semble être plus difficile de discuter rigoureusement le signe du coefficient  $R''_{2,0}$  quand  $a$  ou  $a'$  n'est plus une quantité assez petite. Mais voyons ce qu'il arriverait, si le coefficient  $R''_{2,0}$  pouvait être positif, étant donnée l'une ou l'autre des inégalités (136). Alors la fonction  $R$  aurait une valeur minimaxima au point  $\xi' = \eta' = 0$ . Par suite, une orbite infiniment peu inclinée vers l'orbite de la planète perturbatrice, et ne pouvant jamais rencontrer l'orbite de cette planète, pourrait par l'effet des perturbations séculaires obtenir une inclinaison finie. Cela me semble très invraisemblable. J'ai donc pensé qu'il serait probablement inutile d'examiner le signe du coefficient  $R''_{2,0}$  au moyen de calculs numériques nécessairement assez longs.

Il faut conclure de ces recherches et de celles du no. 12 qu'il existent des orbites de comète à mouvement stable, dont les inclinaisons sont petites, et pour lesquelles la distance du périhélie au nœud possède un moyen mouvement positif (de la valeur  $+\sigma$  d'après le no. 7). Dans ces orbites l'excentricité est à peu près constante ( $= k'$ ) ainsi que le demi grand axe. Enfin les nœuds tournent dans le sens opposé à celui du mouvement de la comète. Parmi ces orbites deux classes sont à distinguer. Dans l'une les deux nœuds se trouvent à l'intérieur de l'orbite de la planète

perturbatrice, dans l'autre les nœuds sont situés, au contraire, en dehors de cette orbite.

Chapitre V.

**Généralisations. Applications aux orbites instables.**

26. Dans ce qui précède nous avons supposé qu'il y avait une seule planète perturbatrice, et que l'excentricité de son orbite était nulle. Mais il est possible de généraliser en admettant que le nombre des planètes perturbatrices est quelconque  $N$  et que leurs masses ainsi que les excentricités et les inclinaisons de leurs orbites sont petites. Alors les coordonnées de ces  $N$  planètes peuvent se développer en séries trigonométriques renfermant  $3N - 1$  arguments, qui dépendent linéairement du temps. Soient

$$\begin{aligned} \omega_i &= n_i t + \gamma_i & i &= 1, 2, \dots, N \\ \omega'_i &= \mu n'_i t + \gamma'_i & i &= 1, 2, \dots, (2N - 1) \end{aligned}$$

ces arguments. Les  $n_i$  et les  $n'_i$  sont de l'ordre zéro, tandis que  $\mu$  est de l'ordre des masses planétaires. Les  $\gamma_i$  et les  $\gamma'_i$  sont des constantes.

Dans l'étude du mouvement d'une comète de masse infiniment petite dans ce système planétaire nous choisissons comme variables les quantités

$$\begin{aligned} x_1 &= L & x_2 &= \Theta & \xi &= \sqrt{2(L - G)} \cos g \\ y_1 &= l + g & y_2 &= \theta & \eta &= -\sqrt{2(L - G)} \sin g \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} x'_1 &= L & x'_2 &= L - \Theta & \xi' &= \sqrt{2(G - \Theta)} \cos g \\ y'_1 &= l + g + \theta & y'_2 &= -g - \theta & \eta' &= \sqrt{2(G - \Theta)} \sin g \end{aligned}$$

si l'inclinaison est petite (voir le no. 2). Le plan invariable de tout le système est choisi comme plan fondamental.

Cela étant, il est possible de généraliser les méthodes du chapitre II et de trouver des développements de la forme (8), où les  $x_v^i, y_v^i, \xi^i$  et  $\eta^i$  sont des séries de Fourier renfermant d'une part les  $3N - 1$  arguments  $\omega_i$  et  $\omega'_i$ , et d'autre part les trois arguments

$$\begin{aligned} w_1 &= nt + c_1 \\ w &= \sigma t + c \\ w' &= qt + c'. \end{aligned}$$

Ici  $c_1, c$  et  $c'$  sont des constantes,  $q$  et  $\sigma$  sont données par des séries de la forme (9), tandis que  $n$  est une constante indépendante de  $\mu$ .

Je n'entrerai pas dans tous les détails de l'exposition des séries (8). Je resterai seulement devant les équations donnant  $\xi^0$  et  $\eta^0$ . Ces équations sont

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{2N-1} n'_i \frac{\partial \xi^0}{\partial \omega'_i} + \sigma^1 \frac{\partial \xi^0}{\partial w} &= \frac{\partial R}{\partial \eta^0} \\ \sum_{i=1}^{2N-1} n'_i \frac{\partial \eta^0}{\partial \omega'_i} + \sigma^1 \frac{\partial \eta^0}{\partial w} &= -\frac{\partial R}{\partial \xi^0} \end{aligned} \right\} (139)$$

Dans l'expression de  $R$ , qui est la partie séculaire de la fonction perturbatrice, il faut introduire pour les éléments des planètes leurs parties séculaires d'ordre zéro par rapport à  $\mu$ .  $R$  est donc développable suivant les puissances des  $4N - 2$  quantités  $E_i \cos \omega'_i$  et  $E_i \sin \omega'_i$ , les  $E_i$  désignant ce qu'on appelle les modules des excentricités et des inclinaisons. En négligeant d'abord ces modules, ce qui revient à négliger les excentricités et les inclinaisons, la fonction  $R$  aura la forme

$$R = R^{(0)} = \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i}{a_i} R_i. \quad (140)$$

Les  $\beta_i$  sont les masses des planètes, la masse de Jupiter étant choisie comme l'unité; les  $a_i$  sont les parties séculaires d'ordre zéro des demi grands axes des orbites des planètes; enfin les  $R_i$  s'obtiennent par la formule (44) en y mettant seulement

$$\frac{a}{a_i} \text{ au lieu de } a.$$

Alors les équations (139) prennent la forme des équations (12) en y introduisant  $R^{(0)}$  au lieu de  $R$ .

Admettons que la fonction  $R^{(0)}$  possède une valeur maxima ou minima dans un point sur l'axe des  $\xi$  ou sur l'axe des  $\eta$ .

Il est facile de s'en convaincre que, dans le voisinage de cette valeur maxima ou minima de  $R^{(0)}$ , les inconnues  $\xi^0$  et  $\eta^0$  peuvent en général se développer suivant les puissances de

$$\begin{aligned} \epsilon \cos w & & E_i \cos \omega'_i & & i &= 1, 2, \dots, (2N - 1) \\ \epsilon \sin w & & E_i \sin \omega'_i & & & \end{aligned}$$

$\epsilon$  étant un petit paramètre arbitraire; enfin on aura pour  $\sigma^1$  un développement analogue procédant suivant les puissances de  $\epsilon^2, E_1^2, \dots, E_{2N-1}^2$ . Après cela il ne sera pas difficile de calculer les séries de M. Lindstedt, qui auront enfin la forme déjà indiquée.

27. Il importe donc avant tout d'étudier la fonction  $R^{(0)}$  dans le domaine  $e \leq k'$  et de trouver dans ce domaine les points où  $R^{(0)}$  est maximum ou minimum.

Nous aurons alors à considérer une famille de cercles (141), qui s'obtiennent de l'équation (45) en y introduisant successivement  $\frac{a}{a_i}$  au lieu de  $a$  pour  $i = 1, 2, \dots, N$ ,

$$\left(x \pm \frac{a_i}{2a}\right)^2 + y^2 = \left(1 - \frac{a_i}{2a}\right)^2 \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (141)$$

Au moyen de ces cercles le domaine (46) sera divisé en un certain nombre de parties ( $D_j$ ). A l'un quelconque de ces domaines ( $D_j$ ) correspond une fonction  $R_j$ , holomorphe dans ce domaine et sur ses frontières (le cercle  $e = k'$  excepté) et donnant dans ce domaine la valeur de  $R^{(0)}$ .

Considérons, en particulier, le cas où l'inclinaison est petite, et introduisons les variables  $\xi'$  et  $\eta'$  du no. 3. Le domaine avoisinant l'origine  $\xi' = \eta' = 0$  sera divisé en un certain nombre de domaines ( $D_j$ ) par un certain nombre de courbes passant par l'origine et correspondant aux courbes (141).

Pour l'un quelconque ( $D_j$ ) de ces domaines avoisinant l'origine il existe une fonction  $R_j$  holomorphe pour  $\xi' = \eta' = 0$  et représentant la fonction  $R^{(0)}$  dans ce domaine.

28. Considérons maintenant les valeurs maxima et minima de la fonction  $R^{(0)}$ .

A l'origine  $\xi = \eta = 0$  la fonction  $R^{(0)}$  peut être minima, minimaxima ou maxima selon les valeurs des paramètres  $a$  et  $k$ . Il est évident que  $R^{(0)}$  est toujours minimum à l'origine si  $k^2$  est assez près de l'unité.

Considérons d'abord les orbites où  $a$  est plus petit que le demi grand axe de l'orbite de Jupiter. Etant donnée la masse dominante de cette planète, il est évident, en regardant les tableaux donnant  $R_{2,0}$ ,  $R_{0,2}$ ,  $R'_{2,0}$  et  $R'_{0,2}$ , que la fonction  $R^{(0)}$  est minima à l'origine  $\xi = \eta = 0$  si

$$k^2_{0,2} < k^2 < 1$$

et minimaxima si  $0 < k^2 < k^2_{0,2}$ .

La proposition de la page 390 et la remarque sur l'évolution du système planétaire de la page 392 sont donc encore valables pour les parties du système solaire à l'intérieur de l'orbite de Jupiter. Seulement, par l'effet des autres planètes la limite  $I_{0,2}$  (de la page 389) sera un peu plus élevée.

Considérons ensuite les valeurs de  $a$  qui sont plus grandes que le demi grand axe de l'orbite de Jupiter. Si  $a$  est situé entre certaines limites, notamment si  $a$  est plus grand que le demi grand axe de l'orbite de la dernière planète (Neptune) ou un peu plus grand que le demi grand axe de l'orbite d'Uranus, de Saturne ou de Jupiter, alors  $R^{(0)}$  peut devenir maximum pour des petites valeurs de  $k^2$ . Au contraire, si  $a$  est un peu plus petit que le demi grand axe de l'orbite de Saturne,  $R^{(0)}$  est minimaximum pour des valeurs petites de  $k^2$ .

Nous pouvons conclure de là qu'il peut exister dans le système solaire des orbites toujours peu excentriques ayant des inclinaisons voisines de  $90^\circ$ . Ces orbites peuvent exister notamment un peu en dehors de l'orbite de Jupiter, de Saturne ou d'Uranus. Mais surtout elles pourraient se trouver à l'extérieur de la dernière planète du système.

La fonction  $R$  peut encore prendre des valeurs maxima ou minima en dehors de l'origine  $\xi = \eta = 0$ . Si les éléments d'une comète sont voisins d'un point  $\xi, \eta$ , où  $R^{(0)}$  est ainsi maximum ou minimum, les séries de M. Lindstedt peuvent être appliquées à l'étude de son mouvement. L'orbite ainsi définie peut être instable, notamment si le point  $\xi, \eta$ , où la branche considérée  $R_j$  de la fonction  $R^{(0)}$  est maxima ou minima, est situé un peu en dehors du domaine ( $D_j$ ), dans lequel la branche considérée représente la valeur moyenne  $R^{(0)}$  de la fonction perturbatrice.

Upsala, 1909 Novembre.

29. Considérons en particulier le cas de la comète d'Encke. L'inclinaison de son orbite est petite. Nous choisissons donc les variables  $\xi', \eta'$  du no. 3. Soit  $a$  le demi grand axe de son orbite,  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) les demi grands axes des orbites de Mercure, de Venus, de la Terre, ... de Neptune. Alors nous avons

$$\frac{a}{a_i} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1+k'} \quad \text{pour } i = 5, 6, 7, 8.$$

C'est donc seulement pour les indices  $i = 1, 2, 3, 4$  que les cercles (141) peuvent couper le cercle (46).

Pour la comète d'Encke l'angle  $g$  est d'environ  $185^\circ$ . C'est donc dans le domaine ( $D_j$ ) environnant la partie négative de l'axe des  $\xi'$  qu'il faut étudier la fonction  $R^{(0)}$ .

Nous écrivons

$$R^{(0)} = \bar{R}^{(0)} + \bar{R}'^{(0)}$$

où  $\bar{R}^{(0)}$  est dû à influence de Jupiter, de Saturne, d'Uranus et de Neptune, tandis que  $\bar{R}'^{(0)}$  est dû aux quatre planètes intérieures. On aura donc

$$\bar{R}^{(0)} = \bar{R}^{(0)}_{2,0} \xi'^2 + \bar{R}^{(0)}_{0,2} \eta'^2 + \dots$$

pour tout le domaine avoisinant l'origine  $\xi' = \eta' = 0$ , tandis que, pour le domaine ( $D_j$ ) environnant la partie négative de l'axe des  $\xi'$ ,

$$\bar{R}'^{(0)} = \bar{R}'^{(0)}_{1,0} \xi' + \bar{R}'^{(0)}_{2,0} \xi'^2 + \bar{R}'^{(0)}_{0,2} \eta'^2 + \dots$$

On aura

$$\bar{R}^{(0)}_{2,0} < 0 \quad \bar{R}'^{(0)}_{0,2} < 0$$

puisque la fonction  $\bar{R}^{(0)}$  est maxima à l'origine (voir le no. 25). Ensuite on aura

$$\bar{R}^{(0)}_{1,0} > 0.$$

[voir le troisième des développements (70)]. Enfin les coefficients  $\bar{R}^{(0)}_{i,j}$  sont petits par rapport aux  $\bar{R}^{(0)}_{2,0}$  et  $\bar{R}^{(0)}_{0,2}$ , puisque les masses de Mercure, de Venus, de la Terre et de Mars sont petites par rapport à la masse de Jupiter.

On voit donc que la branche, qui représente  $R^{(0)}$  dans le domaine entourant la partie négative de l'axe des  $\xi'$ , a une valeur maxima dans un point sur l'axe positif des  $\xi'$  et situé tout près de l'origine.

Il faut conclure de là qu'il est possible de représenter le mouvement de la comète d'Encke au moyen de séries d'une forme purement trigonométrique, et cela pour tout le temps entre deux captures de la comète par l'une des quatre planètes intérieures.

H. v. Zeipel.

(122) Gerda. Korrektur der Ephemeride (B. J. 1912): 1910 Febr. 9  $-38^s 12 + 2' 14'' 8$ . C. F. Pechüle.

(410) Chloris. Korrektur der Ephemeride (V. R. I. 38): 1910 Febr. 8  $-46^s + 2' 8$ . C. F. Pechüle.

(550) Senta. Korrektur der Ephemeride (V. R. I. 38): 1910 Febr. 14  $+36^s - 4' 6$ . A. Charlois.

(639) [1907 ZT]. Korrektur der Ephemeride (V. R. I. 38): 1910 Febr. 8  $+7^m 51^s - 49' 2$ . C. F. Pechüle.