Astronomische Nachrichten.

Expedition auf der Königlichen Sternwarte bei Kiel.

Herausgeber: Prof. Dr. C. A. F. Peters.

Band 89.

Nr. 2127

15.

Zur Bestimmung des Gewichts von Beobachtungen, deren mittleres Fehlerquadrat sich aus mehreren Theilen zusammensetzt.

Von Professor *Helmert*.

Bei rechnerischer Verwerthung astronomischen und geodätischen Beobachtungsmaterials ist ein nothwendiges Erforderniss zur Erzielung möglichst scharfer Endresultate die Kenntniss der relativen Genauigkeit der Beobachtungen. In der Regel muss diese erst aus dem gegebenen Material selbst gewonnen werden und man bewegt sich dabei so lange, bis das mittlere Fehlerquadrat der Beobachtungen nur aus einem Gliede besteht, in völlig bekannten Geleisen. Besteht es jedoch aus mehreren Gliedern, so gelangt man bei der Genauigkeitsuntersuchung auf ein noch nicht durchaus cultivirtes Gebiet.

Die Berücksichtigung eines zweigliedrigen mittleren Fehlerquadrates ist nach Hirsch und Plantamour's Vorgange erforderlich bei der Ausgleichung von Gebirgsnivelllements, indem zu den Fehlerquellen in der Ebene, welchen unter gewissen Voraussetzungen durch einen nur eingliedrigen Ausdruck genügt wird, noch diejenige Unsicherheit über die wahre Länge der Lattenscala hinzutritt, die aus der Veränderlichkeit des Holzes, dem gebräuchlichen Lattenmaterial, entspringt und die schon bei Höhenunterschieden von 100^m nicht ganz gegen die ersterwähnten Einflüsse zurücktritt.

Die Berücksichtigung eines dreigliedrigen mittleren Fehlerquadrates würde von einer strengen alle Vernachlässigung und Abkürzungen vermeidenden Ausgleichung eines Dreiecksnetzes, bei welchem Richtungen von verschiedner Qualität concurriren, geboten werden. Ein erstes Glied erfordern die Unsicherheit im Ablesen an

den Theilungen, die zufälligen Theilungsfehler, die unregelmässigen Aenderungen des Instruments durch Wärmeeinflüsse u. dergl.; ein zweites Glied die Unsicherheit im Visiren; ein drittes Glied die Unsicherheit durch persönliche Auffassung der Objecte, constante Lateralrefractionen u. dergl. Dieses letzte Glied würde erst bei der Netzausgleichung in Frage kommen. Selbstverständlich ist, dass eine Fehlerursache wie die der regelmässigen Theilungsfehler vor Beginn der Ausgleichung durch directe Correctionen nach der in der Astronomie üblichen Weise ausgeschieden werden müsste, ihre nothdürftige Elimination aber nicht der bekannten Gruppenbildung gleichartiger Sätze überlassen bleiben dürfte, da die Complication regelmässiger und zufälliger Fehler den Blick für das Studium der letztern trübt und die Wahrscheinlichkeit der Annäherung an die Wahrheit vermindert.

Ohne für diesmal der Frage an einem practischen Falle näher zu treten, ob es nützlich sei, auf die verschiedene Qualität der Richtungen eines Dreiecksnetzes Rücksicht zu nehmen, wollen wir doch darauf hinweisen, dass ein eingehendes Studium des mit Recht für die Elemente eines Hauptdreiecksnetzes in der Regel reichlich angesammelten Beobachtungsmaterials zum Zwecke eines strengen Ausgleichungsverfahrens a priori ein brauchbares Glied in derjenigen Kette von Massnahmen ¹⁾ zu sein verspricht, die man einzuschlagen beginnt, um das grosse Missverhältniss in der Genauigkeit der direct gemessenen Längen und der aus Dreiecksketten abgeleiteten zu mildern. ²⁾

¹⁾ Wir denken hier namentlich an die neuen Untersuchungen, welche man nach den Verhandl. der Perman. Commission der Europ. Gradmessung von 1875 in Frankreich über die relative Güte von Tag- und Nachtbeobachtungen angestellt hat, sowie an die daselbst versuchten Verbesserungen der Theodoliten.

²⁾ Vergl. die Astr. Vierteljahrshr. VIII, S. 27 u. 37. Dass es angesichts dieses Missverhältnisses zweckmässig ist, ältere Apparate wie z. B. den Bessel'schen neben den neueren, etwas genauer aber weit langsamer arbeitenden beizubehalten, ist zweifellos. Nur wenn bei relativ genügender Genauigkeit die Schnelligkeit der Arbeit einer Basismessung ihre Kosten nicht zu hoch ansteigen lässt, wird man daran denken können, Dreiecksketten mit Grundlinien reichlich auszustatten.

Von den verschiedenen Aufgaben nun, welche sich in Bezug auf das Vorige darbieten, soll diejenige betrachtet werden, wo eine Anzahl von einander unabhängiger Fehlergrößen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ gegeben sind, die sich als wahre Beobachtungsfehler auffassen lassen wie z. B. Dreiecksabschlüsse und Nivellements-polygonabschlüsse.

Jede dieser Größen setze sich aus zwei Theilen, zwei verschiedenen Gruppen von Ursachen entsprechend, zusammen; es sei also im Allgemeinen

$$(1) \quad \varepsilon_i = u_i \varepsilon_i' + v_i \varepsilon_i''$$

und sollen hierin die Coefficienten u_i und v_i der Theilfehler als bekannt vorausgesetzt, ferner aber angenommen werden, dass die durchschnittlichen Quadrate der Theilfehler ε' für alle Indices i gleich $\mu_0'^2$, die von ε'' gleich $\mu_0''^2$ seien.

Die Aufgabe ist, aus den Grössen ε_i die plausibelsten Werthe von $\mu_0'^2$ und $\mu_0''^2$ abzuleiten.

Zunächst folgt aus (1) durch Quadrirung

$$\varepsilon_i^2 = u_i^2 \varepsilon_i'^2 + 2u_i v_i \varepsilon_i' \varepsilon_i'' + v_i^2 \varepsilon_i''^2.$$

Der Durchschnitt aller möglichen Werthe linker Hand sei mit μ_i^2 bezeichnet, dann ist

$$(2) \quad \mu_i^2 = u_i^2 \mu_0'^2 + v_i^2 \mu_0''^2.$$

Denn rechter Hand ist der Durchschnitt des Productes $\varepsilon_i' \varepsilon_i''$, wenn wenigstens einer der Theilfehler ein gerades Fehlergesetz befolgt, Null und die beiden quadratischen Glieder geben dasjenige, was in Formel (2) rechter Hand steht.

Betrachtet man jetzt ε_i^2 *) als eine Beobachtung von μ_i^2 , so hat man zur Bestimmung der plausibelsten Werthe von $\mu_0'^2$ und $\mu_0''^2$ die n Gleichungen

$$(3) \quad \mu_i^2 = u_i^2 \mu_0'^2 + v_i^2 \mu_0''^2 \quad i = 1 \dots n.$$

Den untern Index Null an den beiden μ^2 haben wir zur Unterscheidung der plausibelsten und wahren Werthe in den Gleichungen (3) weggelassen.

Um nun zunächst den plausibelsten Werth μ^2 aus diesem System abzuleiten, denken wir uns die Gleichungen bezw. mit den noch unbestimmten Factoren $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ multiplicirt. Die Addition giebt

$$(4) \quad \mu^2 = [\varepsilon_i^2 \alpha_i]$$

wenn die α den Gleichungen

$$(5) \quad \begin{cases} [u_i^2 \alpha_i] = 1 \\ [v_i^2 \alpha_i] = 0 \end{cases}$$

entsprechen. Wir bestimmen die α vollständig dadurch, dass das mittlere Fehlerquadrat der Bestimmung von μ^2 nach (4) ein Minimum werde.

Es ist aber das Quadrat des thatsächlichen Fehlers der Bestimmung (4) gleich

$$([\varepsilon_i^2 \alpha_i] - \mu_0'^2)^2,$$

daher das mittlere Fehlerquadrat zu (4) der Durchschnitt aller möglichen Werthe hiervon d. i. von

$$(6) \quad [\varepsilon_i^2 \alpha_i]^2 - 2\mu_0'^2 [\varepsilon_i^2 \alpha_i] + \mu_0'^4.$$

Bezeichnet man zu entwickelnde Durchschnittswerthe durch geschlungene Parenthesen, so hat man für's erste Glied rechter Hand in (6), da wie bemerkt, die ε_i unabhängig von einander vorausgesetzt werden:

$$(7) \quad \{[\varepsilon_i^2 \alpha_i]^2\} = \{[\varepsilon_i^4 \alpha_i^2]\} + \{[\varepsilon_i^2 \alpha_i] [\varepsilon_i^2 \alpha_i]\} - \{[\varepsilon_i^2 \alpha_i]^2\} \\ = \{[\varepsilon_i^4 \alpha_i^2]\} + \{[\varepsilon_i^2 \alpha_i]\}^2 - \{[\varepsilon_i^2 \alpha_i]^2\}.$$

Es ist weiter, da die wahren Werthe der μ mit μ_0 bezeichnet worden sind, unter Rücksicht auf (1) und (2)

$$\{[\varepsilon_i^2 \alpha_i]\} = \mu_0'^2 [u_i^2 \alpha_i] + \mu_0''^2 [v_i^2 \alpha_i],$$

mithin wegen (5)

$$(8) \quad \begin{cases} \{[\varepsilon_i^2 \alpha_i]\} = \mu_0'^2 \text{ und} \\ \{[\varepsilon_i^2 \alpha_i]\}^2 = \mu_0'^4. \end{cases}$$

Ferner ist

$$(9) \quad \{[\varepsilon_i^2 \alpha_i]^2\} = [u_i^4 \alpha_i^2] \mu_0'^4 + 2[u_i^2 v_i^2 \alpha_i^2] \mu_0'^2 \mu_0''^2 \\ + [v_i^4 \alpha_i^2] \mu_0''^4.$$

und

$$\{[\varepsilon_i^4 \alpha_i^2]\} = [u_i^4 \alpha_i^2] \{ \varepsilon'^4 \} + 6[u_i^2 v_i^2 \alpha_i^2] \\ \{ \varepsilon'^2 \varepsilon''^2 \} + [v_i^4 \alpha_i^2] \{ \varepsilon''^4 \}.$$

Befolgen aber ε' und ε'' das Gauss'sche Fehlergesetz, so ist

$$\begin{cases} \{ \varepsilon'^4 \} = 3 \mu_0'^4 \\ \{ \varepsilon''^4 \} = 3 \mu_0''^4. \end{cases}$$

Dies adoptirt und eingesetzt, wird mit Rücksicht auf (9)

$$(10) \quad \{[\varepsilon_i^4 \alpha_i^2]\} = 3 \{[\varepsilon_i^2 \alpha_i]^2\} \\ = 3([u_i^2 \mu_0'^2 + v_i^2 \mu_0''^2]^2 \alpha_i^2).$$

Die Substitution von (8) bis (10) in (7) und (6) ergiebt nach einfacher Reduction als mittleres Fehlerquadrat zu (4)

$$(11) \quad 2([u_i^2 \mu_0'^2 + v_i^2 \mu_0''^2]^2 \alpha_i^2).$$

Die plausibelste Bestimmung μ^2 verlangt, dass dieser Ausdruck durch geeignete Wahl der α ein Minimum werde; dabei ist auf die Bedingungsgleichungen (5), denen die α genügen müssen, Rücksicht zu nehmen.

Dies geschieht dadurch, dass der Ausdruck

$\frac{1}{2} [(u_i^2 \mu_0'^2 + v_i^2 \mu_0''^2)^2 \alpha_i] - Q_{1.1} [u_i^2 \alpha_i] - Q_{1.2} [v_i^2 \alpha_i]$, zu einem Minimum gemacht wird; $Q_{1.1}$ und $Q_{1.2}$ sind hierbei zu bestimmende Multiplicatoren. Die Differentiation nach α_i giebt

(12) $(u_i^2 \mu_0'^2 + v_i^2 \mu_0''^2)^2 \alpha_i = Q_{1.1} u_i^2 + Q_{1.2} v_i^2$, welche Gleichung α_i liefert, sobald die Q aus den, durch

*) Dass man von ε_i^2 und nicht von ε_i auszugehen hat, folgt aus den Elementen der M. d. kl. Qu.

Substitution des aus (12) folgenden α Werthes in die (5) hervorgehenden Gleichungen

$$(13) \quad \begin{cases} \left[\frac{u_i^4}{(u_i^2 \mu_0'^2 + v_i^2 \mu_0''^2)^2} \right] Q_{1.1} + \left[\frac{u_i^2 v_i^2}{(u_i^2 \mu_0'^2 + v_i^2 \mu_0''^2)^2} \right] Q_{1.2} = 1 \\ \left[\frac{u_i^2 v_i^2}{\div} \right] Q_{1.1} + \left[\frac{v_i^4}{\div} \right] Q_{1.2} = 0 \end{cases}$$

gefunden sind. Der mittlere Fehler der hier zugehörigen Bestimmung von $\mu'^2 = [\epsilon_i^2 \alpha_i]$ wird wie leicht zu finden, gleich

$$(14) \quad \pm \sqrt{2 Q_{1.1}}.$$

Für den speciellen Fall, wo die v_i Null sind also einfach

$$(15) \quad \epsilon_i = u_i \epsilon_i'$$

ist, geben die Gleichungen (12), (13), (4) und (14) nachstehende bekannte Lösung

$$(16) \quad \mu'^2 = \frac{1}{n} \left[\frac{\epsilon_i'^2}{u_i^2} \right] \pm \mu_0'^2 \sqrt{\frac{2}{n}},$$

indem $Q_{1.1} = \mu_0'^4 : n$ und $\alpha_i = 1 : n u_i^2$ werden.

Die in den oben erwähnten Gleichungen liegende allgemeinere Lösung kann man weit bequemer dadurch erhalten, dass man die Normalgleichungen

$$(17) \quad \begin{cases} \left[\frac{u_i^4}{(u_i^2 \mu_0'^2 + v_i^2 \mu_0''^2)^2} \right] \mu'^2 + \left[\frac{u_i^2 v_i^2}{(u_i^2 \mu_0'^2 + v_i^2 \mu_0''^2)^2} \right] \mu''^2 = \left[\frac{\epsilon_i^2 u_i^2}{(u_i^2 \mu_0'^2 + v_i^2 \mu_0''^2)^2} \right] \\ \left[\frac{u_i^2 v_i^2}{\div} \right] \mu'^2 + \left[\frac{v_i^4}{\div} \right] \mu''^2 = \left[\frac{\epsilon_i^2 v_i^2}{\div} \right] \end{cases}$$

aufföst, welche aus den als Fehlergleichungen anzusehenden Gleichungen (3) abzuleiten sind, wobei man denselben die resp. Gewichte

$$(18) \quad \frac{1}{(u_i^2 \mu_0'^2 + v_i^2 \mu_0''^2)^2}$$

beizulegen hat. In der That giebt die allgemeine Auflösung der (17) sofort der Reihe nach die Gleichungen (4), (13) und (12). Ueberraschen kann indessen die vorstehende neue Form der Lösung nicht. Denn das mittlere Fehlerquadrat einer Bestimmung

$$u_i^2 \mu'^2 + v_i^2 \mu''^2 = \epsilon_i^2$$

ist unter Voraussetzung des Gauss'schen Fehlergesetzes bekanntlich gleich

$$(19) \quad 2 (u_i^2 \mu_0'^2 + v_i^2 \mu_0''^2)^2.$$

Unterwirft man daher das System (3) einer Ausgleichung, so sind die Gewichte der Gleichungen proportional dem Ausdruck (18) anzunehmen. Und somit herrscht völlige Uebereinstimmung. Sie besteht auch bezüglich der Genauigkeitsberechnung:

Da nämlich das mittlere Fehlerquadrat (19) doppelt so gross ist als die reciproken Gewichte, so ist der

$$(20) \quad \begin{cases} \left[\frac{u_i^4}{(u_i^2 \mu'^2 + v_i^2 \mu''^2)^2} \right] \mu'^2 + \left[\frac{u_i^2 v_i^2}{(u_i^2 \mu'^2 + v_i^2 \mu''^2)^2} \right] \mu''^2 = \left[\frac{\epsilon_i^2 u_i^2}{(u_i^2 \mu'^2 + v_i^2 \mu''^2)^2} \right] \\ \left[\frac{u_i^2 v_i^2}{\div} \right] \mu'^2 + \left[\frac{v_i^4}{\div} \right] \mu''^2 = \left[\frac{\epsilon_i^2 v_i^2}{\div} \right] \end{cases}$$

Man kann die Glieder linker Hand vereinigen und erhält damit

mittlere Fehler der Gewichtseinheit gleich $\sqrt{2}$. Das reciproke Gewicht der Unbekannten μ'^2 wird aber in bekannter Weise aus der allgemeinen Auflösung der (17) gleich derselben Grösse $Q_{1.1}$ gefunden, die in (12), (13) und (14) vorkommt und man erhält daher als mittleren Fehler für μ'^2 wieder den mit (14) harmonirenden Ausdruck $\sqrt{2 Q_{1.1}}$.

Zugleich erkennt man bei dieser Gelegenheit, dass auch der plausibelste Werth μ''^2 aus dem Normalgleichungssystem (17) hervorgehen wird und nicht minder sein Gewicht.

Die praktische Ausführung der Rechnung kann den Formeln (17) nur genähert Rechnung tragen. Da man die in den Nennern vorkommenden μ_0 nicht kennt, so sind die plausibelsten μ selbst dafür zu setzen. Die Gleichungen (17) gehen damit über in

$$(21) \quad \begin{cases} \left[\frac{u_i^2}{u_i^2 \mu'^2 + v_i^2 \mu''^2} \right] = \left[\frac{\epsilon_i^2 u_i^2}{(u_i^2 \mu'^2 + v_i^2 \mu''^2)^2} \right] \\ \left[\frac{v_i^2}{u_i^2 \mu'^2 + v_i^2 \mu''^2} \right] = \left[\frac{\epsilon_i^2 v_i^2}{(u_i^2 \mu'^2 + v_i^2 \mu''^2)^2} \right] \end{cases}$$

Man sieht alsbald, dass diese Ausgleichungen keine directe Auflösung nach μ'^2 und μ''^2 gestatten. Daher bleibt man besser bei den (17) stehen, in denen man für $\mu_0'^2$ und $\mu_0''^2$ zuerst irgend welche Näherungswerthe substituirt, die man entsprechend successive einander folgenden Auflösungsresultaten der (17) durch bessere Näherungen ersetzt bis schliesslich die (20) und damit auch die (21) erfüllt werden. Ein Beispiel wird dies weiterhin erläutern.

Multiplieirt man die erste Gl. (21) mit μ'^2 , die zweite mit μ''^2 und addirt, so folgt noch

$$(21^*) \quad \left[\frac{\epsilon_i^2}{u_i^2 \mu'^2 + v_i^2 \mu''^2} \right] = u_i,$$

worin der kundige Leser eine bekannte Relation wiedererkennen wird, deren Erfüllung einer brauchbaren Lösung nicht fehlen darf.

Was nun die Genauigkeit der dem System (20) oder (21) entsprechenden Werthe μ'^2 und μ''^2 anbetrifft, so ist diese selbstredend geringer, als wenn letztere aus dem System (17) hätten gewonnen werden können. Sie wird in plausibelster Näherung charakterisirt für μ'^2 durch $\sqrt{2Q_{1,1}}$, wobei aber $Q_{1,1}$ eben nicht aus (17) sondern aus (20) durch allgemeine Auflösung zu entnehmen ist. Ein mathematisch strengerer aber praktisch unbrauchbarer Ausdruck würde sich ergeben, wenn man das den (20) entsprechende System der α ableiten und in die Quadratwurzel des Ausdrucks (11) einführen wollte.

Um allgemein eine Vorstellung von dem Genauigkeitsverlust zu erhalten, welcher durch Anwendung anderer α , als Gl. (12) fordert, entsteht, nehmen wir an, es sei

$$(22) \quad \mu'^2 = [\epsilon_i^2 \alpha_i']$$

gesetzt worden, und

$$(23) \quad \alpha_i' = \alpha_i + d_i.$$

Da nun jedenfalls

$$\begin{aligned} [u_i^2 \alpha_i'] &= 1 \\ [v_i^2 \alpha_i'] &= 0 \end{aligned}$$

sein muss, weil sonst aus dem System (3) für μ'^2 nicht obiger Werth folgen kann, so hat man wegen (5) auch

$$(24) \quad [u_i^2 d_i] = 0 = [v_i^2 d_i].$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} 2[(u_i^2 \mu_0'^2 + v_i^2 \mu_0''^2)^2 \alpha_i'^2] &= 2[(u_i^2 \mu_0'^2 + v_i^2 \mu_0''^2)^2 \alpha_i^2] \\ &+ 4[(u_i^2 \mu_0'^2 + v_i^2 \mu_0''^2) \alpha_i d_i] \\ &+ 2[(u_i^2 \mu_0'^2 + v_i^2 \mu_0''^2)^2 d_i^2]. \end{aligned}$$

Setzt man im mittlern Theil rechts α aus (12) ein

und berücksichtigt die (24), so reducirt er sich auf Null. Der erste Theil rechter Hand ist $2Q_{1,1}$ und das Fehlerquadrat der günstigsten Bestimmung. Man erhält daher als Zunahme des mittleren Fehlerquadrates

$$(25) \quad 2[(u_i^2 \mu_0'^2 + v_i^2 \mu_0''^2)^2 d_i^2],$$

worin also die d die Abweichungen gegen die günstigsten α sind. Da man diese nicht anwenden kann, entsteht immer ein Genauigkeitsverlust, auch dann noch, wenn die (20) erfüllt werden. Die Schätzung dieses letzteren Verlustes übergehen wir, da sie wenig Werth hat und keineswegs bequem ausführbar ist.

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit für die Ausgleichung des Systems (3) ist, wie oben bemerkt wurde, nach der Begründung der Formeln gleich $\sqrt{2}$. Es lässt derselbe sich aber nach erfolgter Ausgleichung auch mittelst der Widersprüche der Gleichungen (3), nämlich mit Hülfe der Grössen

$$(26) \quad w_i = \epsilon_i^2 - u_i^2 \mu'^2 - v_i^2 \mu''^2; \text{ Gew. } \frac{1}{u_i^2 \mu'^2 + v_i^2 \mu''^2}$$

berechnen. Man erhält als mittleren Fehler der Gewichtseinheit

$$(27) \quad \sqrt{\left(\frac{w_i}{u_i^2 \mu'^2 + v_i^2 \mu''^2} \right)^2 : n - 2},$$

unter Befolgung des bekannten Entwicklungsganges für dergleichen Rechnungen bei vermittelnden Beobachtungen. Eine völlige Uebereinstimmung mit $\sqrt{2}$ ist aber schon deshalb nicht zu erwarten, weil die Ausgleichung und auch die (26) die Gewichte nicht ganz correct einführen.

Ehe wir zu einem Beispiele übergehen, soll nun zum Schlusse der Theorie noch der nachstehende Satz bewiesen werden:

Die Gleichungen (21) geben im Falle der Gültigkeit des Gauss'schen Fehlergesetzes nicht nur plausibelste, sondern thatsächlich wahrscheinlichste Werthe. Es ist aber die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese über die Präcisionen h der Beobachtungen proportional

$$(28) \quad h_1 h_2 \dots h_n e^{-[h_i^2 \epsilon_i^2]};$$

hierbei ist

$$(29) \quad h_i^2 = \frac{1}{2(u_i^2 \mu'^2 + v_i^2 \mu''^2)}.$$

(Schluss in nächster Nummer.)