SUI NUCLEI CHE SI RIPRODUCONO PER ITERAZIONE ¹⁾.

Nota di **Ermenegildo Daniele** (Catania).

Adunanza del 9 novembre 1913.

Fra i nuclei che furono oggetto di particolare studio compaiono in prima linea, per la loro semplicità ed importanza, quelli della forma

$$\varphi_1(x)\psi_1(y) + \dots + \varphi_m(x)\psi_m(y).$$

Se le φ e le ψ si suppongono costituire due sistemi di funzioni (reali) biortogonali, questi nuclei si possono caratterizzare dicendo che coincidono coi loro iterati, cioè soddisfano alla condizione

$$K(xy) = \int_a^b K(xs)K(sy)ds.$$

Possiamo ora domandarci più in generale: *esistono dei nuclei i quali si riproducano, non già dopo una sola, ma dopo n iterazioni?* Tali nuclei, come ora vedremo, esistono effettivamente, e si presentano come una immediata generalizzazione di quelli dianzi ricordati.

I. Chiamando, al solito, $K_1, K_2, \dots$ i successivi iterati di $K(xy)$, si ha per definizione dell'iterato d'ordine n (convenendo di fare $K_0 = K$):

$$K_n(xy) = \int_a^b K(xs)K_{n-1}(sy)ds.$$

La questione che ci proponiamo è dunque la seguente: *costruire un nucleo K , tale che sia*
(I) $K_n = K$.

La soluzione del problema è fornita dai noti teoremi generali, che insegnano a rappresentare un nucleo mediante le sue costanti caratteristiche.

¹⁾ Avevo già ricevuto le bozze di questa Nota, quando presi visione della Memoria postuma di G. LAURICELLA: *Sopra l'algebra delle funzioni permutabili di 2^a specie* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie III, tomo XXI (1913), pp. 317-351]. Il problema trattato in questa Memoria è, da un lato, molto più generale del mio, poichè l'equazione integrale di cui io trovo la soluzione è un caso particolarissimo di quella studiata dal LAURICELLA; d'altro lato il LAURICELLA considera soltanto nuclei simmetrici, mentre io astraggo da questa limitazione.

Premetteremo questo lemma: *Un nucleo soddisfacente alla (1) e privo di costanti caratteristiche è necessariamente nullo.*

Difatti dalla (1) segue immediatamente:

$$(2) \quad K_{n+1} = K_1, \quad K_{n+2} = K_2, \dots$$

ed allora calcolando le *traccie*, cioè le costanti t_i definite da

$$t_i = \int K_{i-1}(ss) ds,$$

si trova pure:

$$(3) \quad t_{n+1} = t_1, \quad t_{n+2} = t_2, \dots$$

Si sa che condizione necessaria e sufficiente affinché un nucleo non abbia costanti caratteristiche è che tutte le traccie, a partire dalla terza, sian nulle. Se dunque K , oltre a soddisfare alla (1), è pure supposto privo di costanti caratteristiche, segue dalle (3) che son nulle tutte le sue traccie; ed allora la funzione determinante $D(\lambda)$ si riduce ad 1.

Calcoliamo anche la funzione intera $D(xy\lambda)$. Rappresentandone lo sviluppo in serie di potenze di λ con

$$D(xy\lambda) = A_0 + A_1\lambda + A_2\lambda^2 + \dots,$$

si ha pei coefficienti A_i (ricordando che tutte le traccie son nulle):

$$A_0 = K, \quad A_1 = -K_1, \dots, A_i = (-1)^i K_i, \dots,$$

e quindi, tenendo presenti le (2):

$$D(xy\lambda) = \{K - K_1\lambda + K_2\lambda^2 + \dots + (-1)^{n-1} K_{n-1}\lambda^{n-1}\}(1 + \lambda^n + \lambda^{2n} + \dots).$$

La $D(xy\lambda)$ è dunque nient'altro che la funzione razionale in λ :

$$D(xy\lambda) = \frac{K - K_1\lambda + \dots + (-1)^{n-1} K_{n-1}\lambda^{n-1}}{1 - \lambda^n},$$

e poichè s'è già trovato $D(\lambda) = 1$, così la funzione precedente ci darà pure il nucleo risolvente $K(xy\lambda)$. Il quale verrebbe così ad avere per lo meno un polo, cioè $K(xy)$ avrebbe almeno una costante caratteristica, contrariamente all'ipotesi fatta. Questa ipotesi non è dunque compatibile se non colla condizione $K = 0$.

2. I nuclei da noi studiati sono così dotati di costanti caratteristiche. Sia λ una di queste, e $\Phi(x)$ una corrispondente funzione fondamentale; sia cioè

$$(4) \quad \Phi(x) = \lambda \int_a^b K(xs)\Phi(s) ds.$$

È noto che λ^{n+1} sarà una costante caratteristica di $K_n(xy)$ con $\Phi(x)$ ancora funzione fondamentale, ossia si avrà, accanto alla precedente:

$$(5) \quad \Phi(x) = \lambda^{n+1} \int_a^b K_n(xs)\Phi(s) ds.$$

Ma se si suppone $K_n = K$, gli integrali dei secondi membri nelle (4) e (5) risultano identici, e quindi λ deve verificare l'equazione:

$$\lambda^{n+1} = \lambda,$$

ossia, tralasciando la radice $\lambda = 0$ che non può essere una costante caratteristica:

$$\lambda'' = 1.$$

Per λ non sono dunque possibili altri valori all'infuori delle radici n^{me} dell'unità, che noi indicheremo con $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$; in altre parole il nucleo $K(xy)$ ammette un numero finito di costanti caratteristiche, che sono le $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ od una parte di esse.

Allora noi siamo in grado di scrivere senz'altro nella sua forma più generale la parte di K relativa ad una ε_i qualunque. Questa parte si può rappresentare con

$$\frac{\sum_1^{m_i} \varphi_h(x) \psi_h(y)}{\varepsilon_i},$$

dove $\varphi_1, \dots, \varphi_{m_i}; \psi_1, \dots, \psi_{m_i}$ sono due sistemi di funzioni biortogonali. Perciò K dovrà essere della forma:

$$(6) \quad K(xy) = \frac{\varphi_1(x) \psi_1(y)}{\alpha_1} + \dots + \frac{\varphi_v(x) \psi_v(y)}{\alpha_v} + Q(xy),$$

dove: $\alpha_1, \dots, \alpha_v$ (con $v \geq n$) sono le radici n^{me} dell'unità (ciascuna convenientemente ripetuta a seconda del *rango* della costante caratteristica ch'essa rappresenta); $\varphi_1, \dots, \varphi_v, \psi_1, \dots, \psi_v$ sono due sistemi di funzioni biortogonali (col che le parti relative alle diverse ε_i sono ortogonali fra di loro); $Q(xy)$ è un nucleo privo di costanti caratteristiche, ortogonale a tutte le parti relative alle singole ε_i .

3. Viceversa, sia $K(xy)$ un nucleo costruito nel modo più generale secondo la (6) e conformemente alle condizioni enunciate per le α , le φ , le ψ e Q . Applicando a K una prima iterazione, si trova:

$$K_1(xy) = \frac{\varphi_1(x) \psi_1(y)}{\alpha_1^2} + \dots + \frac{\varphi_v(x) \psi_v(y)}{\alpha_v^2} + Q_1(xy);$$

e successivamente:

$$K_2(xy) = \frac{\varphi_1(x) \psi_1(y)}{\alpha_1^3} + \dots + \frac{\varphi_v(x) \psi_v(y)}{\alpha_v^3} + Q_2(xy),$$

.....

$$\begin{aligned} K_{n-1}(xy) &= \frac{\varphi_1(x) \psi_1(y)}{\alpha_1^n} + \dots + \frac{\varphi_v(x) \psi_v(y)}{\alpha_v^n} + Q_{n-1}(xy) \\ &= \varphi_1(x) \psi_1(y) + \dots + \varphi_v(x) \psi_v(y) + Q_{n-1}(xy), \end{aligned}$$

$$K_n(xy) = \frac{\varphi_1(x) \psi_1(y)}{\alpha_1} + \dots + \frac{\varphi_v(x) \psi_v(y)}{\alpha_v} + Q_n(xy).$$

Si ritrova quindi $K(xy)$ a condizione di fare $Q_n = Q$; e siccome Q è privo di costanti caratteristiche, per il lemma del n° 1 ciò significa prendere $Q = 0$. Concludiamo: *i nuclei che si riproducono dopo n iterazioni sono tutti e soli quelli della forma*

$$(7) \quad K(xy) = \frac{\varphi_1(x) \psi_1(y)}{\alpha_1} + \dots + \frac{\varphi_v(x) \psi_v(y)}{\alpha_v},$$

dove $\alpha_1, \dots, \alpha_v$ ($v \geq n$) sono le radici n^{me} dell'unità, e le $\varphi_1, \dots, \varphi_v; \psi_1, \dots, \psi_v$ sono due sistemi di funzioni biortogonali qualunque.

I successivi nuclei iterati di K diventano poi:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{\varphi_1 \psi_1}{\alpha_1^2} + \dots + \frac{\varphi_v \psi_v}{\alpha_v^2}, \\ K_2 &= \frac{\varphi_1 \psi_1}{\alpha_1^3} + \dots + \frac{\varphi_v \psi_v}{\alpha_v^3}, \\ &\dots \dots \dots \\ K_{n-1} &= \varphi_1 \psi_1 + \dots + \varphi_v \psi_v; \end{aligned}$$

hanno cioè ancora l'analoga forma di K , in quanto che una qualunque potenza di α_i è sempre una radice n^{ma} dell'unità, per cui anche $K_1, K_2, \dots$ avranno la proprietà di riprodursi dopo un certo numero di iterazioni: qui s'intende che le iterazioni di K , vanno fatte rispetto allo stesso K , come nucleo principale. In particolare si vede che K_{n-1} è del tipo di quei nuclei che coincidono con tutti i loro iterati, cosa che si poteva dedurre direttamente osservando le (2) e la formola fondamentale

$$\int K_p(xs) K_q(sy) ds = K_{p+q+1}(xy).$$

4. Casi particolari.

a) Per $n = 1$ si ritrova il nucleo notissimo

$$(8) \quad K = \sum_i \varphi_i(x) \psi_i(y).$$

b) Per $n = 2$ si ha:

$$(9) \quad K = \sum_i^{\mu} \varphi_i(x) \psi_i(y) - \sum_i^v \varphi_i(x) \psi_i(y),$$

che diventa, dopo una prima iterazione, della forma (8). La successione $K, K_1, K_2, \dots$ è tale che tutti i termini di posto dispari sono uguali fra di loro, e così quelli di posto pari.

c) *Nucleo simmetrico.* — In questo caso nella (7) le φ e le ψ col medesimo indice sono uguali. Quanto alle ε_i debbono essere reali, quindi fra le ε_i non vi possono comparire che 1 (n dispari) oppure 1 e -1 (n pari). Siamo così ridotti alle due forme corrispondenti ai casi a) e b), cioè

$$\begin{aligned} K &= \sum_i^v \varphi_i(x) \varphi_i(y), \\ K &= \sum_i^{\mu} \varphi_i(x) \varphi_i(y) - \sum_i^v \varphi_i(x) \varphi_i(y), \end{aligned}$$

dove le $\varphi_1, \dots, \varphi_v$ formano un sistema di funzioni ortogonali. *Un nucleo simmetrico, che si riproduca per iterazione, si riproduce dopo una o due iterazioni al più.*

La ricerca dei nuclei di quest'ultimo tipo si può intendere contenuta implicitamente in una Nota di LAURICELLA ²⁾, nella quale è risolto il problema di costruire un nucleo

²⁾ G. LAURICELLA, *Sopra i nuclei reiterati* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (Roma), vol. XX, 1° semestre 1911, pp. 885-896].

simmetrico di cui sia dato l'iterato d'ordine n . Per quanto l'equazione di LAURICELLA

$$K_n = H(xy),$$

ove H è una funzione data, sia sostanzialmente diversa dalla $K_n = K$, nel caso della simmetria però si può facilmente, dalla soluzione del problema di LAURICELLA, dedurre quella del problema attuale.

Torino, 15 ottobre 1913.

E. DANIELE.