Bemerkung zu dem Aufsätze: „Notiz über Modulargleichungen
bei zusammengesetztem Transformationsgrad.“

(Bd. XIV dieser Annalen, p. 537—544).

Von

JOSEPH GIERSTER in Bamberg.

Die in der Ueberschrift bezeichnete Arbeit*) hatte den Zweck, die Modulargleichungen des Geschlechtes $p = 0$ zwischen J und J' für zusammengesetzte Transformationsgrade aufzustellen. Dieselbe schloss sich an die Klein'sche Abhandlung:**) „Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades“ an. Wie in dieser, so wurde auch in jener für einen gegebenen Transformationsgrad n J als rationale Function

$$(1) \quad J = \frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)}$$

einer Hilfsgrösse τ dargestellt, während der Uebergang von J zu J' durch eine lineare Transformation von τ , nämlich

$$(2) \quad \tau' = \frac{c}{\tau}$$

erfolgte. Der Grad von $\varphi(\tau)$ war N , der von $\psi(\tau)$ $N - n$.

Ferner wurde dann auch der Zusammenhang dieser Hilfsgrössen τ mit dem Multiplikator

$$M = \frac{1}{n} \frac{q^{\frac{1}{6n}} \prod (1 - q^{\frac{2\nu}{n}})^2}{q^{\frac{1}{6}} \prod (1 - q^{2\nu})^2}, \quad q = e^{i\pi\omega}$$

zu entwickeln gesucht. Dabei haben sich leider Unrichtigkeiten eingestellt. Auf sie kommt Herr Kiepert in seiner Abhandlung: „Ueber Theilung und Transformation der elliptischen Functionen“ zu sprechen***). Die Quelle derselben liegt in der Gleichung (pag. 539, Zeile 17)

*) Die Angaben von Seitenzahlen beziehen sich auf diese Arbeit.

**) Math. Annalen Bd. XIV, pag. 111.

***) Vergl. den vorliegenden Band der Math. Annalen, p. 369 ff., insbesondere pag. 371 daselbst.

$$(3) \quad \psi(\tau') = k \cdot \tau^{-N+n-1} \psi(\tau),$$

welche, wie man sich aus Tabelle III pag. 541 überzeugt, nur gilt, wenn n eine Primzahl oder das Quadrat einer solchen ist. Setzt man (3) als bestehend voraus, so hat man einfach

$$(4) \quad \tau^{n-1} = C \cdot M^{12}.$$

In der That kommt aus (1) sogleich

$$\frac{dJ}{d\tau} = \frac{\varphi'(\tau) \cdot \psi(\tau) - \varphi(\tau) \cdot \psi'(\tau)}{\psi^2(\tau)}.$$

Der Zähler dieses Ausdruckes (die Functionaldeterminante von $\varphi(\tau)$ und $\psi(\tau)$) enthält aber jeden x fachen Factor $(\tau - \alpha)^x$ ($x > 1$) eines Ausdruckes $\varphi(\tau) + \lambda \psi(\tau)$ genau $x - 1$ fachen, und da $p = 0$ ist, so ist der genannte Zähler bis auf einen constanten Factor gleich dem Producte $\Pi(\tau - \alpha)^{x-1}$. Nach pag. 538 kennt man aber diese x fachen Factoren sämmtlich. Es treten ausser den vielfachen Factoren von $\psi(\tau)$ nur noch bei $J = 0$ und $J = 1$ solche auf. Bei $J = 0$ hat man $\frac{1}{3}(N - \varepsilon_0)$ 3 fache Factoren von $\varphi(\tau)$, bei $J = 1$ aber $\frac{1}{2}(N - \varepsilon_1)$ Doppelfactoren von $\varphi(\tau) - \psi(\tau)$. Bezeichnet man also die Producte der einfachen Factoren von $\varphi(\tau)$ bez. $\varphi(\tau) - \psi(\tau)$ mit $e_0(\tau)$ und $e_1(\tau)$ und setzt $\psi(\tau) = \Pi(\tau - \alpha)^x$, so hat man

$$(5) \quad \frac{dJ}{d\tau} = \text{Const.} \left(\frac{J\psi(\tau)}{e_0(\tau)} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{(J-1) \cdot \psi(\tau)}{e_1(\tau)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \psi(\tau)^{-2} \cdot \Pi(\tau - \alpha)^{x-1} \\ = C \cdot \frac{J^{\frac{2}{3}}(J-1)^{\frac{1}{2}} \cdot \psi(\tau)^{\frac{1}{6}}}{e_0(\tau)^{\frac{2}{3}} e_1(\tau)^{\frac{1}{2}} \Pi(\tau - \alpha)}.$$

Ferner hat man

$$\frac{dJ'}{d\tau'} = C \cdot \frac{J'^{\frac{2}{3}}(J'-1)^{\frac{1}{2}} \psi(\tau')^{\frac{1}{6}}}{e_0(\tau')^{\frac{2}{3}} e_1(\tau')^{\frac{1}{2}} \Pi(\tau' - \alpha)}; \quad \frac{d\tau'}{d\tau} = - \frac{c}{\tau^2}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung

$$(6) \quad M^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{dJ'}{dJ} \cdot \frac{J^{\frac{2}{3}}(J-1)^{\frac{1}{2}}}{J'^{\frac{2}{3}}(J'-1)^{\frac{1}{2}}}$$

ein und berücksichtigt die Relationen*) (pag. 538)

$$(7) \quad \Pi(\tau' - \alpha) = \text{Const.} \tau^{-\sum \varphi(t)} \Pi(\tau - \alpha); \quad e_0(\tau') = \text{Const.} \tau^{-\varepsilon_0} e_0(\tau);$$

$$e_1(\tau') = \text{Const.} \tau^{-\varepsilon_1} e_1(\tau), \quad \frac{2\varepsilon_0}{3} + \frac{\varepsilon_1}{2} - 2 + \sum \varphi(t) = \frac{N}{6},$$

so erhält man

$$(8) \quad M^{12} = C \cdot \tau^N \cdot \frac{\psi(\tau')}{\psi(\tau)}.$$

*) Denn es ist für $J = \infty$ auch $J' = \infty$ und umgekehrt, und für die Wurzeln von $e_0(\tau)$ bez. $e_1(\tau)$ ist $J = J' = 0$ bez. $J = J' = 1$.

Für Primzahlen und Primzahlquadrate gilt Gl. (3) und damit auch (4). Für die übrigen zusammengesetzten Transformationsgrade hat man

$$\psi(\tau) = \tau \Pi'(\tau - \alpha)^{\frac{d}{t}}; \quad \psi(\tau') = \text{Const.} \tau^{-N+n} \Pi'(\tau - \alpha)^{\frac{a}{t}},$$

wenn $ad = n$ und t der grösste Theiler von a und d ist. Daher kommt dann

$$(9) \quad CM^{12} = \tau^{n-1} \Pi'(\tau - \alpha)^{\frac{a-d}{t}} = \Pi(\tau - \alpha)^{\frac{a-d}{t}}.$$

Der Accent bedeutet hiebei, dass in dem betreffenden Producte der Factor τ , der zur Zerlegung $n = n \cdot 1$ gehört, auszuschliessen ist.

Die Constanten C bestimmen sich für jeden gegebenen Fall aus (2) in Verbindung mit

$$(10) \quad MM' = \frac{1}{n},$$

wo M' sich ebenso durch τ' ausdrückt, wie M durch τ . Man erhält dann die nachstehenden Formeln. Ich habe dieselben schon früher aufgestellt und an Herrn Professor Klein mitgetheilt.

$$n = 6, \tau = \tau_6, \tau^5 \cdot \frac{2\tau + 9}{\tau + 4} = 2^8 \cdot 3^{12} M^{12};$$

$$n = 8, \tau = \tau_8, \tau^7 \cdot \frac{\tau - 4}{\tau - 2} = 2^{29} M^{12};$$

$$n = 10, \tau = \tau_{10}, \tau^3 \cdot \frac{2\tau - 5}{\tau - 2} = 2^2 \cdot 5^4 M^4;$$

$$n = 12, \tau = \tau_{12}, \tau^{11} \cdot \left(\frac{\tau - 6}{\tau - 2}\right)^2 \cdot \frac{\tau - 4}{\tau - 3} = 2^{24} \cdot 3^{12} M^{12};$$

$$n = 16, \tau = \tau_{16}, \tau^5 \cdot \frac{\tau - 4}{\tau - 2} = 2^{16} M^4;$$

$$n = 18, \tau = \tau_{18}, \tau^{17} \cdot \left(\frac{\tau + 3}{\tau + 2}\right)^7 \cdot \frac{\tau^2 + 6\tau + 12}{\tau^2 + 3\tau + 3} = 2^{12} \cdot 3^{24} M^{12}.$$

Bamberg, am 28. Dezember 1885.