4. Zur Tensorgeometrie in der allgemeinen Relativitätstheorie¹⁾; von H. Lang.

Inhaltsverzeichnis: Einleitung. — § 1. Allgemeine Maßbestimmung in einem geradlinigen Koordinatensystem. Kontravariante und kovariante Koordinaten und Vektorkomponenten. — § 2. Der aus einem Vierervektor gebildete spezielle symmetrische Tensor 2. Ranges und seine geometrische Darstellung. — § 3. Geometrische Darstellung des allgemeinen symmetrischen Tensors 2. Ranges. — § 4. Die Invarianten des symmetrischen Tensors 2. Ranges. — § 5. Geometrische Definition der Komponente des symmetrischen Tensors 2. Ranges. — § 6. Geometrische Definition der Divergenz des symmetrischen Tensors 2. Ranges. — § 7. Ein Integralsatz über den symmetrischen Tensor 2. Ranges und die Integralform der Impuls-Energiegleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie. — § 8. Geometrische Darstellung und Divergenz des nichtsymmetrischen Tensors 2. Ranges. — § 9. Definition der Divergenz des Tensors n ten Ranges.

Einleitung.

Eine geometrische Darstellung von *Vektoren* durch gerichtete Strecken im *Riemannschen Raum* von vier Dimensionen, das heißt in einem Raum mit der Maßbestimmung

$$(1) \quad ds^2 = \sum_{i,k}^{1-4} g_{ik} dx^i dx^k,$$

scheint zunächst nicht statthaft zu sein, da der Riemannsche Raum keine Geraden im euklidischen Sinne enthält, also auch nicht Strecken als Teile einer Geraden in ihm abgetragen werden können. Wie aber in der Mechanik Geschwindigkeit und Beschleunigung eines auf einer krummen Fläche bewegten Punktes durch gerichtete Strecken dargestellt werden, die nur nicht mehr in dieser Fläche selbst liegen, so wird es auch für den Riemannschen Raum zulässig sein, Vektoren durch Strecken darzustellen, die von Punkten des Riemannschen Raumes ausgehen, aber mit allen ihren anderen Punkten nicht mehr

1) Kürzung der unter dem gleichen Titel an der Universität München erschienenen Dissertation des Verfassers.

in ihm liegen. Dazu muß freilich angenommen werden, daß der Riemannsche Raum von vier Dimensionen in einem höherdimensionalen euklidischen Raum gelegen ist, ebenso wie die krumme Fläche von zwei Dimensionen in einem euklidischen Raum von drei Dimensionen liegt. Diese Annahme kann, wie kurz angedeutet werden soll, gemacht werden, wenn nur die Dimension des euklidischen Raumes hoch genug gewählt wird. Es ist nämlich ein Riemannscher Raum von vier Dimensionen als in einem euklidischen Raum von m Dimensionen gelegen zu betrachten, wenn die Maßbestimmung (1) übergeführt werden kann in die Maßbestimmung

$$ds^2 = \sum_r^{1-m} dz_r^2$$

durch die Transformation

$$z_r = z_r(x^1, x^2, x^3, x^4) \quad r = 1, 2 \dots m.$$

Dann ist nämlich

$$dz_r = \sum_i^{1-4} \frac{\partial x_r}{\partial x^i} dx^i,$$

$$dz_r^2 = \sum_{ik}^{1-4} \frac{\partial x_r}{\partial x^i} \frac{\partial x_r}{\partial x^k} dx^i dx^k$$

und

$$ds^2 = \sum_r^{1-m} \sum_{ik}^{1-4} \frac{\partial x_r}{\partial x^i} \frac{\partial x_r}{\partial x^k} dx^i dx^k.$$

Soll dies aber die im Riemannschen Raum gegebene Maßbestimmung sein, so müssen die Gleichungen

$$g_{ik} = \sum_r^{1-m} \frac{\partial x_r}{\partial x^i} \frac{\partial x_r}{\partial x^k}$$

erfüllt sein. Dies wird im allgemeinen nur möglich sein, wenn $m = 10$ ist, da bei allgemeiner Maßbestimmung 10 Funktionen g_{ik} vorhanden sind. Lassen sich also m Funktionen $z_r = z_r(x^1, x^2, x^3, x^4)$ angeben, die diesen Differentialgleichungen genügen, so ist es berechtigt zu sagen, daß der Riemannsche Raum von vier Dimensionen in einem euklidischen Raum von m Dimensionen liegt. Es können also von einem Punkt des Riemannschen Raumes aus Gerade gezogen werden, die dann

in ihrem weiteren Verlauf in eben diesem euklidischen Raum liegen. Sämtliche Strecken aber, die von einem Punkt des Riemannschen Raumes in den ∞^3 möglichen Richtungen ausgehen, erfüllen einen ebenen Raum von vier Dimensionen, den *Tangentialraum* in dem betreffenden Punkt des Riemannschen Raumes.

Entsprechend werden auch die in der allgemeinen Relativitätstheorie besonders wichtigen *Tensoren* nicht im Riemannschen Raum selbst, sondern in seinen Tangentialräumen geometrisch darzustellen sein. Eine geometrische Darstellung von Tensoren wurde jedoch bisher in der allgemeinen Relativitätstheorie nicht angewandt. Zur besseren Veranschaulichung der physikalischen Vorgänge erscheint eine solche aber als erwünscht. Der Zweck der vorliegenden Betrachtung ist daher, *für den symmetrischen Tensor 2. Ranges eine geometrische Darstellung zu geben und zu zeigen, wie mit Hilfe dieser Darstellung eine physikalisch wichtige Größe, die Divergenz des symmetrischen Tensors 2. Ranges geometrisch abgeleitet werden kann.* Der Prozeß aber, durch den die Divergenz aus dem Tensor gewonnen wird, läßt sich auch auf den Tensor n ten Ranges übertragen, so daß auch die *Divergenz des Tensors n ten Ranges* unabhängig von einem Koordinatensystem definiert werden kann.

Der symmetrische Tensor 2. Ranges im *euklidischen Raum von drei Dimensionen*, für den der Deformationstensor oder der Spannungstensor einfache Beispiele aus der Mechanik der Kontinua sind, läßt sich bekanntlich geometrisch darstellen durch eine Mittelpunktsfläche 2. Ordnung, deren Mittelpunkt in eben jenem Punkt liegt, für den der Tensor gegeben ist. Entsprechend wird sich dem symmetrischen *Tensor 2. Ranges im euklidischen Raum von vier Dimensionen* ein dreidimensionaler Mittelpunktsraum 2. Ordnung zuordnen lassen, so daß die gegebenen Tensorkomponenten die Koeffizienten in der Gleichung dieses Mittelpunktsraumes bilden. Dieser Mittelpunktsraum 2. Ordnung gibt dann eine geometrische Darstellung des Tensors, ebenso wie eine gerichtete Strecke die eines Vierervektors, zwei zueinander senkrechte Ebenenstücke von bestimmtem Inhalt und bestimmter Lage die des Sechservektors.¹⁾

1) A. Sommerfeld, Zur Relativitätstheorie. I. Vierdimensionale Vektoralgebra. Ann. d. Phys. 82. S. 749. 1910.

In einer Beziehung aber unterscheidet sich die geometrische Darstellung des Tensors durch einen Mittelpunktstraum zweiter Ordnung von der oben erwähnten geometrischen Darstellung der Vektoren und leistet weniger: Sie gibt nicht unmittelbar die Möglichkeit einer geometrischen Deutung der einzelnen Tensorkomponenten, wie dies bei der geometrischen Darstellung des Vierer- und Sechservektors der Fall ist. Für den Vierervektor ist nämlich die Komponente nach einer Koordinatenachse geometrisch bestimmt durch die Orthogonalprojektion des Vierervektors auf diese Achse; für den Sechservektor ist die Komponente nach einer Koordinatenebene bestimmt durch die Orthogonalprojektion der beiden Ebenenstücke auf diese Ebene. Um eine geometrische Deutung der einzelnen Tensorkomponenten in ähnlicher Art zu ermöglichen, ist es nötig, den Tensor durch ein anderes Gebilde, einen „Doppelvektor“ bzw. ein Quaderpel von Doppelvektoren darzustellen, das dann in dieser Beziehung der geometrischen Darstellung der Vierer- und Sechservektoren gleichwertig ist. Wie dieses Gebilde mit dem Mittelpunktstraum 2. Ordnung zusammenhängt, wird sich bei seiner Ableitung ergeben.

§ 1. Allgemeine Maßbestimmung in einem geradlinigen Koordinatensystem. Kontravariante und kovariante Koordinaten und Vektorkomponenten.

In dem Riemannschen Raum von vier Dimensionen wird die Länge eines Linienelementes, das von einem Punkt 0 mit den Koordinaten x^1, x^2, x^3, x^4 ¹⁾ ausgeht, berechnet durch

$$(1) \quad ds^2 = \sum_{i,k}^{1-4} g_{ik} dx^i dx^k,$$

wobei die g_{ik} Funktionen der Koordinaten sind.

Soll in dem Tangentialraum an den Riemannschen Raum im Punkt 0 die euklidische Geometrie gelten, so muß sich die Länge s einer vom Punkt 0 ausgehenden Strecke OP berechnen lassen durch

1) Die Bezeichnung der kontravarianten Koordinaten durch obere Indizes ist gewählt im Anschluß an Hessenberg. „Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie.“ Mathem. Ann. 78. 1917. Sie ist notwendig, wenn neben den kontravarianten auch kovariante Koordinaten benutzt werden, was im folgenden geschehen soll.

$$(2) \quad s^2 = \sum_{ik} g_{ik} x^i x^k,$$

wobei die g_{ik} jetzt Konstante sind und die Werte haben, die ihnen im Punkt 0 zukommen. Dabei ist ferner angenommen, daß die Tangenten an die Kurven der wachsenden kontravarianten Koordinaten zu Koordinatenachsen gewählt sind. Denn da dann für die unendlich kleine Strecke, die in dem gemeinsamen Volumelement des Riemannschen Raumes und des Tangentialraumes liegt, die Maßbestimmung (1) gilt, so muß sich auch die endliche Strecke durch die gleiche quadratische Form der Koordinaten berechnen lassen.

Diese Form der Maßbestimmung im euklidischen Raum geht aus der gewöhnlichen Form der Maßbestimmung im schiefwinkligen, geradlinigen Koordinatensystem hervor, wenn die Koordinaten, die geometrisch ja die Längen der *Parallelprojektionen* der Strecke OP auf die Achsen sind, nicht in dem *Einheitsmaßstab*, sondern auf jeder Achse mit besonderem Maßstab gemessen werden. Nach dem pythagoreischen Lehrsatz für das schiefwinklige Achsensystem ist nämlich die Länge s gegeben durch

$$(2a) \quad s^2 = \sum_{ik} X^i X^k \cos(i k),$$

wo (ik) den Winkel zwischen der i - und der k -Achse bezeichnet. Durch die Transformation

$$X^i = \sqrt{g_{ii}} x^i,$$

die der Einführung eines besonderen Maßstabes auf jede Achse entspricht, geht (2a) über in

$$s^2 = \sum_{ik} g_{ik} x^i x^k,$$

wenn noch festgesetzt wird, daß

$$g_{ik} = \sqrt{g_{ii} g_{kk}} \cos(i k)$$

sein soll.

Daraus folgt umgekehrt für die Maßbestimmung (1), daß die Winkel zwischen den Kurven der wachsenden x^i Koordinaten im Riemannschen Raum gegeben sind durch

$$\cos(i k) = \frac{g_{ik}}{\sqrt{g_{ii} g_{kk}}}.$$

Der Punkt 0 kann aber statt durch die Parallelprojektionen auch durch die *Orthogonalprojektionen* auf die Achsen im schief-

winkligen System bestimmt werden. Die im Einheitsmaßstab gemessene Orthogonalprojektion X_m der Strecke OP auf die m -Achse wird aus den im Einheitsmaßstab gemessenen Parallelprojektionen X^i berechnet durch

$$X_m = \sum_i X^i \cos(mi)$$

in Erweiterung einer einfachen Formel der dreidimensionalen Geometrie. Werden hierin rechts die X^i durch die x^i ausgedrückt und noch festgesetzt, daß die Orthogonalprojektionen nicht im Einheitsmaßstab gemessen werden sollen, sondern so, daß

$$x_m = \sqrt{g_{mm}} X_m,$$

wenn x_m die im veränderten Maßstab gemessenen Längen sind, so ergibt sich die Beziehung zwischen kontravarianten und kovarianten Koordinaten

$$(3) \quad x_m = \sum_i g_{mi} x^i$$

und ihre Umkehrung

$$(3a) \quad x^i = \sum_m g^{mi} x_m,$$

wobei g^{mi} gleich ist der Unterdeterminante von g_{mi} in der Determinante der g_{ik} , geteilt durch den Wert g dieser Determinante.

Die Strecke OP kann aber aufgefaßt werden als ein vom Punkt 0 ausgehender Vektor $\mathfrak{s}$. Dieser Vierervektor hat in dem rechtwinkligen Koordinatensystem die Komponenten X_1, X_2, X_3, X_4 , in dem schiefwinkligen mit allgemeiner Maßbestimmung aber wird er bestimmt sein ebensowohl durch die kontravarianten Komponenten x^1, x^2, x^3, x^4 , wie durch die kovarianten Komponenten x_1, x_2, x_3, x_4 . Der Zusammenhang zwischen den kontravarianten und kovarianten Komponenten des Vektors $\mathfrak{s}$ wird durch die Gleichungen (3) und (3a) gegeben. Diese Gleichungen, hier aus der geometrischen Darstellung des Vektors abgeleitet, gelten nicht nur für den euklidischen, sondern auch für den Riemannschen Raum und können rein analytisch gefunden bzw. definiert werden.¹⁾ Dann zeigt sich umgekehrt die Berechtigung der Darstellung eines Vektors durch eine

1) So bei H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie. § 5. Berlin 1918.

Strecke darin, daß durch diese geometrische Darstellung eben jener Zusammenhang zwischen kontravarianten und kovarianten Komponenten wieder gegeben wird.

Daß ein Vierervektor, für den drei der kontravarianten Komponenten den Wert Null haben, in die Richtung derjenigen Achse fällt, nach der die nicht verschwindende Komponente auftritt, folgt sofort aus dem Umstand, daß die kontravarianten Komponenten des Vektors gegeben sind durch die Parallelprojektionen auf die Achsen. Wie liegt aber ein Vierervektor, für den drei der kovarianten Komponenten den Wert Null haben? Wenn die kovariante Komponente bezüglich einer Achse verschwindet, so heißt das, die Orthogonalprojektion des Vektors auf die betreffende Achse verschwindet, der Vektor muß also senkrecht auf dieser Achse stehen. Wenn drei der kovarianten Komponenten den Wert Null haben, so steht der Vektor also senkrecht auf drei Achsen des Koordinatensystems oder senkrecht auf dem durch diese drei Achsen bestimmten dreidimensionalen Raum.

Mit Rücksicht auf die Anwendung in den folgenden Paragraphen möge nun noch auf einige Beziehungen zwischen Vektorkomponenten in verschiedenen Koordinatensystemen hingewiesen werden.

Der Übergang von einem rechtwinkligen Koordinatensystem (X_i) mit gewöhnlicher Maßbestimmung zu einem schiefwinkligen System (x^i) mit allgemeiner Maßbestimmung wird vermittelt durch Transformationsformeln

$$(4) \quad X_m = \sum_i \alpha_{mi} x^i.$$

Auch die kontravarianten Komponenten eines beliebigen Vierervektors a im System der x^i drücken sich durch die Komponenten im System der X_i aus durch

$$(4a) \quad A_m = \sum_i \alpha_{mi} a^i.$$

Daraus ergibt sich die Beziehung zwischen den kovarianten Komponenten a_i und den A_i durch einfache Rechnung unter Benutzung der Gleichungen (3) zu

$$(5) \quad a_k = \sum_m \alpha_{mk} A_m$$

Ihre Umkehrung ist

$$(5a) \quad A_m = \sum_k \alpha^{mk} a_k.$$

Die Gleichungen (4a) und (5a) können noch etwas anders gedeutet werden. In dem System (x^i) wird die Koordinatenachse X_m eine bestimmte, aber beliebige Richtung haben. A_m ist die Orthogonalprojektion des Vektors α auf diese Richtung. Nun wird die Orthogonalprojektion eines Vektors α auf eine beliebige Richtung nach den Regeln der Vektorrechnung gefunden, indem das skalare Produkt aus dem Vektor α und dem *Einheitsvektor* η in der betreffenden Richtung gebildet wird. Da dies auch für Koordinatensysteme mit allgemeiner Maßbestimmung gelten muß wegen der invarianten Bedeutung der Orthogonalprojektion und des skalaren Produkts, so muß also A_m auch bestimmt sein durch

$$(4b) \quad A_m = \sum_k \eta_k \alpha^k$$

oder

$$(5b) \quad A_m = \sum_k \eta^k a_k,$$

wo η_k bzw. η^k die Komponenten des Einheitsvektors η sind. Das sind aber gerade die Gleichungen (4a) und (5a), wenn nur $\alpha^{mk} = \eta^k$ und $\alpha_{mk} = \eta_k$ gesetzt wird. Sie erlauben also die Orthogonalprojektion eines Vektors auf eine beliebige Richtung zu berechnen aus den Komponenten des Vektors α und des Einheitsvektors η in dem jeweiligen Koordinatensystem.

§ 2. Der aus einem Vierervektor gebildete spezielle symmetrische Tensor 2. Ranges und seine geometrische Darstellung.

Aus einem Vierervektor α , der durch eine vom Punkt 0 des Riemannschen Raumes ausgehende Strecke geometrisch dargestellt wird und durch seine Komponenten A_1, A_2, A_3, A_4 oder a^1, a^2, a^3, a^4 oder a_1, a_2, a_3, a_4 gegeben sein kann, läßt sich in einfacher Weise ein symmetrischer Tensor 2. Ranges bilden dadurch, daß jede der Komponenten von α mit jeder anderen und mit sich selbst multipliziert wird. Die Komponenten dieses Tensors lauten dann

$$T_{ik} = A_i A_k \quad \text{oder} \quad t^{ik} = a^i a^k \quad \text{oder} \quad t_{ik} = a_i a_k.$$

Im ersten Fall sind es die auf ein rechtwinklig geradliniges System bezogenen Komponenten des Tensors, im zweiten Fall die

kontravarianten, im dritten Fall die kovarianten Komponenten des auf ein schiefwinkliges System mit allgemeiner Maßbestimmung bezogenen Tensors. Dazu treten als vierte Möglichkeit der Bestimmung dieses Tensors die gemischten Komponenten

$$t_i^k = a_i a^k.$$

Letztere erfüllen jedoch nicht mehr die Symmetriebedingungen.

Es ist offenbar, daß der so gebildete Tensor ein *spezieller* ist; denn zwischen seinen Komponenten bestehen noch gewisse Gleichungen, so z. B.

$$t^{ii} t^{kk} = t^{ik2}.$$

Dieser spezielle Tensor möge im folgenden kurz mit $[[a^2]]$ bezeichnet werden, wobei das Zeichen $[[\]]$ die äußere Multiplikation der Vektorkomponenten andeuten soll.¹⁾

Welches ist nun die Gleichung des *Tensorraumes* des Tensors $[[a^2]]$? Wenn das rechtwinklige Koordinatensystem zugrunde gelegt wird, so lautet sie

$$A_1^2 X_1^2 + A_2^2 X_2^2 + A_3^2 X_3^2 + A_4^2 X_4^2 + 2 A_1 A_2 X_1 X_2 + 2 A_1 A_3 X_1 X_3 + \dots = \text{const},$$

wobei die Konstante willkürlich ist und gleich 1 angenommen werden kann. Die linke Seite dieser Gleichung ist aber das Quadrat eines linearen Ausdrucks, so daß auch geschrieben werden kann:

$$(6) \quad (A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + A_4 X_4)^2 - 1 = 0.$$

Der Tensorraum von $[[a^2]]$ zerfällt also in die beiden ebenen Räume

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + A_4 X_4 + 1 = 0$$

und

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + A_4 X_4 - 1 = 0.$$

Dies sind zwei parallele ebene Räume im Abstand

$$r = \frac{1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2}}$$

1) Die Bezeichnung „Äußere Multiplikation“ im Anschluß an A. Einstein, „Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie“. § 7. Ann. d. Phys. 49. S. 784. 1916.

beiderseits des Nullpunkts. Auch liegt der Vektor a in der Richtung des Lotes vom Nullpunkt auf die ebenen Räume, denn die Neigungswinkel des Vektors a gegen die Achsen, wie die des Lotes r sind bestimmt durch

$$\cos \alpha_1 = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2}}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{A_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2}} \text{ usw.}$$

Der Vektor a steht also senkrecht auf den beiden parallelen ebenen Räumen. Beide sind durch ihn eindeutig bestimmt, da ja die Komponenten des Vektors a eben die Koeffizienten in der Gleichung des Tensorraumes sind. Es liegt daher nahe, nicht die beiden parallelen ebenen Räume als Darstellung des Tensors $[[a^2]]$ zu betrachten, sondern vielmehr die beiden entgegengesetzt gerichteten Vektoren von der Länge

$$\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2},$$

die auf je einen der beiden parallelen ebenen Räume hinweisen und auf ihnen senkrecht stehen und die dann als geometrische Darstellung des Tensors $[[a^2]]$ zu einem *Doppelvektor* verschmelzen und sich nicht, wie sie es als gewöhnliche Vektoren tun würden, als gleich und entgegengesetzt gerichtet, gegenseitig aufheben.

Dieser Doppelvektor, gebildet aus den Vektoren $+a$ und $-a$, werde im folgenden einfach als der Doppelvektor a bezeichnet. Nebenstehend ist die Schnittfigur gezeichnet, die entsteht, wenn die beiden parallelen ebenen Räume durch einen ebenen Raum E , der den Doppelvektor a enthält, geschnitten werden. Die Schnittflächen des Raumes E mit den parallelen, ebenen Räumen sind zwei parallele Ebenen; der Doppelvektor a steht auf diesen Ebenen senkrecht.

Fig. 1.

Diese geometrische Darstellung des Tensors $[[a^2]]$ ist selbstverständlich unabhängig vom Koordinatensystem; denn der Doppelvektor, abgeleitet aus dem Raumpaار, ist wie dieses in jedem Koordinatensystem derselbe. Im rechtwinkligen System der X_i kam die Beziehung zwischen Raumpaار und Doppelvektor analytisch dadurch zum Ausdruck, daß die Komponenten

von a als Koeffizienten in den Gleichungen der ebenen Räume auftraten. Auch für ein beliebiges Koordinatensystem gilt Entsprechendes. Denn die Gleichung des Tensorraumes

$$(A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + A_4 X_4)^2 - 1 = 0$$

geht durch die Transformation (4) über in

$$(6a) \quad (a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4)^2 - 1 = 0,$$

oder, wenn statt kontravarianter Koordinaten kovariante eingeführt werden, in

$$(6b) \quad (a^1 x_1 + a^2 x_2 + a^3 x_3 + a^4 x_4)^2 - 1 = 0.$$

Es ergibt sich also: Ist der Tensor $[[a^2]]$ — und wie sich später zeigen wird ein beliebiger Tensor 2. Ranges — gegeben durch die *kontravarianten Komponenten* $t^{ik} = a^i a^k$, so läßt sich die Gleichung des Tensorraumes unter Benützung dieser Komponenten als Koeffizienten in *kovarianten Koordinaten* x_i anschreiben und umgekehrt, wenn der Tensor in *kovarianten Komponenten* gegeben ist, erscheint die Gleichung des Tensorraumes in *kontravarianten Koordinaten*.

Damit ist die geometrisch invariante Beziehung zwischen dem Paar paralleler ebener Räume und dem Doppelvektor a auch für ein beliebiges Koordinatensystem analytisch zum Ausdruck gebracht.

Die geometrische Darstellung des Tensors $[[a^2]]$ durch den Doppelvektor a läßt sich nun auch noch dadurch physikalisch deuten, daß gezeigt wird, wie der Tensor $[[a^2]]$ zusammen mit einem Ortsvektor $r = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ einen Vektor p bestimmt, so daß für alle möglichen r die p das Vektorfeld einer einfachen *Dehnung in Richtung des Doppelvektors* a liefern. Denn wird in üblicher Weise p als lineare Vektorfunktion von r mit Hilfe der Tensorkomponenten angeschrieben, also

$$p_i = a_i a_1 x^1 + a_i a_2 x^2 + a_i a_3 x^3 + a_i a_4 x^4,$$

so wird daraus einfach

$$(7) \quad p_i = a_i (a r),$$

wo $(a r)$ das skalare Produkt von a und r bezeichnet. p ist also ein Vektor in der Richtung von a , weil seine Komponenten denen von a proportional sind. Für alle Punkte des ebenen

Raumes, der bestimmt ist durch $(\alpha r) = 0$, verschwindet p , während er, wie sich leicht zeigen läßt, in allen zu diesem Raum parallelen ebenen Räumen einen konstanten Wert hat; für solche, die im gleichen Abstand auf beiden Seiten von $(\alpha r) = 0$ liegen, hat p entgegengesetzt gleiche Werte. Das gleiche Verhalten nach Richtung und Größe zeigt aber die bei einer vierdimensionalen Dehnung des Raumes entstehende Verschiebung jedes Raumpunktes.

Der Doppelvektor α kann also auch aufgefaßt werden als geometrischer Ausdruck für eine Dehnung des Raumes, ebenso wie der einfache Vierervektor eine Parallelverschiebung, der spezielle Sechservektor eine Drehung des Raumes festlegt.

Die Darstellung einer Dehnung durch einen Doppelvektor findet sich für den dreidimensionalen Fall bei W. Voigt, „Kristallphysik“¹⁾ und „Über die Parameter der Kristallphysik und über gerichtete Größen höherer Ordnung“, Ann. d. Phys. 5. S. 241. 1901. Jedoch scheint diese Darstellung bisher nicht im Zusammenhang mit dem Tensor $[[\alpha^2]]$ betrachtet worden zu sein. So erwähnt Budde in „Tensoren und Dyaden“ Braunschweig 1914, beide an getrennter Stelle.²⁾

§ 3. Geometrische Darstellung des allgemeinen symmetrischen Tensors 2. Ranges.

Wie oben erwähnt, ist der Tensor $[[\alpha^2]]$ ein spezieller symmetrischer Tensor, zwischen dessen Komponenten noch gewisse Gleichungen bestehen. Der allgemeine symmetrische Tensor im Riemannschen Raum aber ist bestimmt durch 10 von einander unabhängige Komponenten t^{ik} oder t_{ik} . Es gilt nun, wie im folgenden gezeigt werden soll, der Satz:

Der allgemeine symmetrische Tensor 2. Ranges läßt sich aus vier speziellen Tensoren von der Art des Tensors $[[\alpha^2]]$ zusammensetzen.

Oder genauer geometrisch ausgedrückt:

Der allgemeine symmetrische Tensor 2. Ranges läßt sich geometrisch darstellen durch vier Doppelvektoren, wobei diese Doppel-

1) W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik. Berlin-Leipzig 1910. II. Kapitel. § 70.

2) A. a. O., S. 25 und S. 216.

vektoren so gewählt werden können, daß sie auf einander senkrecht stehen.

Der eben angeführte Satz behauptet also, daß immer vier spezielle Tensoren $[[a^2]]$, $[[b^2]]$, $[[c^2]]$, $[[d^2]]$ gefunden werden können, so daß die Summen ihrer Komponenten gleich sind den Komponenten des allgemeinen symmetrischen Tensors. Also

$$(8) \quad t^{ik} = a^i a^k + b^i b^k + c^i c^k + d^i d^k,$$

oder

$$t_{ik} = a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k + d_i d_k.$$

Der Beweis hierfür läßt sich mittels Transformation des Tensorraumes auf Hauptachsen erbringen. Daß eine Transformation des Tensorraumes auf Hauptachsen immer möglich ist, wird für den Tensor in vier Dimensionen ebenso bewiesen, wie in drei Dimensionen für die Transformation der Fläche 2. Ordnung auf Hauptachsen. (Satz von Laplace.)

Die Gleichung des Tensorraumes im System der Hauptachsen lautet

$$T_I X_1^2 + T_{II} X_2^2 + T_{III} X_3^2 + T_{IV} X_4^2 = \text{const.}$$

Diese Gleichung kann aber aufgefaßt werden als die Summe der vier Gleichungen

$$T_I X_1^2 = \lambda, \quad T_{II} X_2^2 = \mu, \quad T_{III} X_3^2 = \nu, \quad T_{IV} X_4^2 = \tau,$$

wobei $\lambda + \mu + \nu + \tau$ dem Wert der willkürlichen Konstanten in der Gleichung des Tensorraumes gleich ist. Es wird daher im allgemeinen erlaubt sein, $(\lambda, \mu, \nu, \tau) = \pm 1$ anzunehmen.

Jede der vier Gleichungen stellt aber ein Paar paralleler, ebener Räume im Abstand

$$\pm \sqrt{\frac{\lambda}{T_I}}, \quad \pm \sqrt{\frac{\mu}{T_{II}}}, \quad \pm \sqrt{\frac{\nu}{T_{III}}}, \quad \pm \sqrt{\frac{\tau}{T_{IV}}}$$

vom Nullpunkt dar, jedoch nur dann ein reelles Raumpaars, wenn λ, μ, ν, τ gleiches Vorzeichen haben wie $T_I, T_{II}, T_{III}, T_{IV}$. Dementsprechend soll die Vorzeichenwahl für λ, μ, ν, τ getroffen werden. Jedes dieser Raumpaare ist nun nach den Betrachtungen des § 2 bestimmt durch einen Doppelvektor, gebildet aus den Vektoren a, b, c, d , deren Komponenten hier die Werte haben

$$(9) \quad \begin{cases} A_1 = \sqrt{\frac{T_I}{\lambda}}, & A_2 = 0, & A_3 = 0, & A_4 = 0, \\ B_1 = 0, & B_2 = \sqrt{\frac{T_{II}}{\mu}}, & B_3 = 0, & B_4 = 0, \\ C_1 = 0, & C_2 = 0, & C_3 = \sqrt{\frac{T_{III}}{\nu}}, & C_4 = 0, \\ D_1 = 0, & D_2 = 0, & D_3 = 0, & D_4 = \sqrt{\frac{T_{IV}}{\tau}}. \end{cases}$$

Dabei stehen die vier Doppelvektoren auf einander senkrecht, weil a , b , c , d auf einander senkrecht stehen.

Damit ist die Möglichkeit einer Zusammensetzung des allgemeinen symmetrischen Tensors aus vier speziellen Tensoren oder die Möglichkeit einer Darstellung durch vier Doppelvektoren bewiesen.

Wird zu einem beliebigen Bezugssystem mit allgemeiner Maßbestimmung auf den Achsen übergegangen durch die Transformationsgleichungen (4), so wird die Gleichung des Tensorraumes

$$\lambda A_1^2 X_1^2 + \mu B_2^2 X_2^2 + \nu C_3^2 X_3^2 + \tau D_4^2 X_4^2 = \text{const}$$

übergehen in

$$\begin{aligned} \lambda (A_1 \sum_i \alpha_{1i} x^i)^2 + \mu (B_2 \sum_i \alpha_{2i} x^i)^2 + \nu (C_3 \sum_i \alpha_{3i} x^i)^2 \\ + \tau (D_4 \sum_i \alpha_{4i} x^i)^2 = \text{const}. \end{aligned}$$

Nun sind aber $a_m = \sum_k \alpha_{mk} A_k$ die kovarianten Komponenten des Vektors a ; das gleiche gilt für die kovarianten Komponenten von b , c und d . Also lautet die Gleichung des Tensorraumes mit Rücksicht auf das Verschwinden je dreier Komponenten im System der Hauptachsen auch

$$\lambda (\sum_i a_i x^i)^2 + \mu (\sum_i b_i x^i)^2 + \nu (\sum_i c_i x^i)^2 + \tau (\sum_i d_i x^i)^2 = \text{const},$$

oder

$$\sum_{ik} (\lambda a_i a_k + \mu b_i b_k + \nu c_i c_k + \tau d_i d_k) x^i x^k = \text{const},$$

womit die Zerlegung des allgemeinen symmetrischen Tensors in die speziellen Tensoren $[[a^2]]$, $[[b^2]]$, $[[c^2]]$, $[[d^2]]$ gegeben ist.

Daher läßt sich allgemein sagen:

Die 16 Gleichungen

$$(10) \quad \begin{cases} t_{ik} = \lambda a_i a_k + \mu b_i b_k + \nu c_i c_k + \tau d_i d_k, \\ (a b) = 0 & (a c) = 0 & (a d) = 0 \\ (b c) = 0 & (b d) = 0 & (c d) = 0 \end{cases}$$

für die 16 unbekannten Komponenten der Vektoren a, b, c, d haben immer ein reelles Lösungssystem, weil die Parameter λ, μ, ν, τ immer so als $+1$ oder -1 gewählt werden können, daß imaginäre Lösungen vermieden werden. Es läßt sich also allgemein der eingangs erwähnte Satz aussprechen, daß ein beliebiger symmetrischer Tensor durch vier aufeinander senkrechte Doppelvektoren geometrisch dargestellt werden kann.

Werden aber statt der Doppelvektoren die Paare paralleler ebener Räume als geometrische Darstellung der speziellen Tensoren betrachtet, so nimmt dieser Satz die selbstverständlich erscheinende Form an:

Dem Mittelpunktstraum 2. Ordnung kann immer ein rechtwinkliges, vierdimensionales Parallelepiped eingeschrieben werden. (Eingeschrieben deshalb, weil der Tensorraum durch die Schnittpunkte der ebenen Raumpaare hindurchgehen muß.)

Die vier Paare paralleler ebener Räume bilden dabei die dreidimensionalen Begrenzungen des Parallelepipeds.

Endlich läßt sich der Satz auch in der Form aussprechen:

Die durch einen beliebigen symmetrischen Tensor 2. Ranges bestimmte Deformation des Raumes läßt sich durch vier aufeinander senkrechte Dehnungen hervorbringen.

Es ist dieser Satz das vierdimensionale Analogon zu dem von Helmholtz für drei Dimensionen aufgestellten Satz, daß sich eine beliebige Deformation aus drei Dehnungen in zueinander senkrechten Richtungen zusammensetzen läßt.

§ 4. Die Invarianten des symmetrischen Tensors 2. Ranges.

An das eben gewonnene Ergebnis, daß der allgemeine symmetrische Tensor 2. Ranges sich geometrisch darstellen läßt durch vier aufeinander senkrechte Doppelvektoren, schließen sich sogleich folgende Fragen an:

Was für Arten von Tensoren entstehen, wenn die Doppelvektoren, aus denen die fraglichen Tensoren zusammengesetzt werden, nicht aufeinander senkrecht stehen?

Welche Arten von Tensoren entstehen durch Zusammensetzung von weniger als vier, also von zwei oder drei Doppelvektoren?

Daß alle diese so gebildeten Tensoren selbst wieder symmetrische Tensoren sind, folgt aus dem Additionsgesetz der Tensoren. Um aber die verschiedenen Arten von Tensoren zu untersuchen, die entsprechend den verschiedenen möglichen Zusammensetzungen aus speziellen Tensoren gebildet werden können, ist es nötig, die Invarianten des symmetrischen Tensors 2. Ranges näher zu betrachten.

Invarianten des symmetrischen Tensors werden gewisse algebraische Verbindungen der Tensorkomponenten t_{ik} und der g_{ik} — der Komponenten des metrischen Fundamentaltensors — sein, die beim Übergang von einem Koordinatensystem zu einem andern ihren Wert nicht ändern.

Nehmen nun für einen bestimmten Tensor eine oder mehrere der Invarianten den Wert Null an, so sind dadurch eine oder mehrere Gleichungen zwischen den Komponenten des Tensors gegeben. Die Komponenten dieses Tensors sind nicht mehr voneinander unabhängig, der Tensor also ein spezieller Tensor. Durch die Anzahl der Invarianten des symmetrischen Tensors sind also die möglichen Arten von speziellen Tensoren festgelegt.

Die Invarianten des symmetrischen Tensors können aber nach einer wohl auf Salmon zurückgehenden Methode auf folgende Art gefunden werden.

Die Gleichung des Tensorraumes

$$\sum_{ik} t_{ik} x^i x^k = \text{const}$$

wird bei einer beliebigen Koordinatentransformation übergehen in die Gleichung

$$\sum_{ik} t'_{ik} x'^i x'^k = \text{const},$$

wobei der Wert der Konstanten rechts derselbe bleibt. Die Komponenten des Tensors bilden also zusammen mit den kovarianten Koordinaten des Tangentialraumes eine invariante Bilinearform.

Andererseits sind alle möglichen Koordinatentransformationen dadurch charakterisiert, daß sie die Bilinearform

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx^i dx^k$$

ungeändert lassen; denn diese gibt die invariante Länge des Linienelementes. Aber auch die Länge s einer von einem Punkt des Riemannschen Raumes ausgehenden Strecke im Tangentialraum, gegeben durch

$$s^2 = \sum_{ik} g_{ik} x^i x^k,$$

muß invariant sein gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen.

Dann wird auch die Summe beider Bilinearformen

$$\sum_{ik} (t_{ik} + \lambda g_{ik}) x^i x^k$$

eine Invariante sein, wobei der Parameter λ noch ganz willkürlich gewählt werden kann.

Nach einem allgemeinen Satz der Invariantentheorie ist auch die Determinante dieser Bilinearform eine Invariante. Diese Determinante

$$(11) \quad |t_{ik} + \lambda g_{ik}| = \Delta(\lambda)$$

werde als Funktion des Parameters λ betrachtet und nach ihm entwickelt. So wird

$$(11a) \quad \Delta(\lambda) = S_0 \lambda^4 + S_1 \lambda^3 + S_2 \lambda^2 + S_3 \lambda + S_4$$

und es müssen wegen der freien Wählbarkeit von λ auch die Koeffizienten der Potenzen von λ einzeln Invarianten sein. Diese Invarianten S_1, S_2, S_3, S_4 enthalten nur die Komponenten des Tensors und die g_{ik} . Die Invariante S_0 aber hängt nur von den g_{ik} ab; sie ist, wie aus der Determinante $\Delta(\lambda)$ zu ersehen, gleich der Determinante g der g_{ik} , gehört also nicht mit zu den Invarianten des Tensors.

Über den Zahlenwert der Invarianten S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 läßt sich folgendes sagen:

Wird auf die Hauptachsen des Tensorraumes transformiert, so nimmt die Determinante $\Delta(\lambda)$ die Form an

$$\begin{vmatrix} T_I + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{II} + \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{III} + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{IV} + \lambda \end{vmatrix}.$$

Dabei ist angenommen, daß die g_{ik} so bestimmt sind, daß die Strecke s in rechtwinkligen Koordinaten zu berechnen ist durch

$$s^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2.$$

Es hat also die Determinante der g_{ik} und damit die mit ihr identische Invariante S_0 den Wert 1. Die Invarianten S_1, S_2, S_3, S_4 sind dann, wie aus der Gleichung (11a) hervorgeht, die symmetrischen Funktionen der Wurzeln dieser Gleichung. Nach der Transformation auf Hauptachsen ergeben sie sich speziell als die symmetrischen Elementarfunktionen gebildet aus den Komponenten des auf Hauptachsen transformierten Tensors.

Diese Invarianten des Tensors wurden rein analytisch gefunden. Aber auch auf geometrischem Wege lassen sich Invarianten des Tensors aufweisen. Denn allen geometrisch invarianten Eigenschaften des den Tensor darstellenden Gebildes — als solches werde zu diesem Zweck nochmals der Mittelpunktstraum 2. Ordnung betrachtet — müssen analytisch Invarianten des Tensors entsprechen. Der Mittelpunktstraum 2. Ordnung ist geometrisch bestimmt, wenn seine Hauptachsen gegeben sind. Die Längen der Hauptachsen, gemessen im Einheitsmaßstab, ändern ihre Werte nicht beim Übergang von einem Koordinatensystem zu einem andern. Sie, oder was das gleiche bedeutet, die Werte $T_I, T_{II}, T_{III}, T_{IV}$ der Komponenten des auf Hauptachsen transformierten Tensorraumes sind also auch Invarianten des Tensors. Denn es lassen sich ja in jedem Koordinatensystem die Längen der Hauptachsen in bestimmter Weise aus den gegebenen Komponenten des Tensors berechnen. Nur sind sie zum Unterschied von den oben gefundenen Invarianten des Tensors keine rationalen, sondern irrationale Verbindungen der t_{ik} und g_{ik} . Wie bereits gezeigt, sind die S_1, S_2, S_3, S_4 die symmetrischen Funktionen der $T_I, T_{II}, T_{III}, T_{IV}$. Es können entweder die ersteren oder die letzteren als unabhängige Invarianten betrachtet werden.

Nachdem so die Invarianten des symmetrischen Tensors 2. Ranges bekannt sind, lassen sich die verschiedenen möglichen Arten spezieller Tensoren folgendermaßen bestimmen:

1. Eine der Invarianten $T_i = 0$. Dann ist auch

$$S_4 = T_I T_{II} T_{III} T_{IV} = 0.$$

Geometrisch heißt das, daß eine der Hauptachsen des Mittelpunktraumes 2. Ordnung unendlich groß wird; der Mittelpunktraumartet aus in einen Zylinderraum 1. Art, dessen Gleichung auf Hauptachsen bezogen, lautet

$$T_I X_1^2 + T_{II} X_2^2 + T_{III} X_3^2 = \text{const}, \quad \text{wenn} \quad T_i = T_{IV}.$$

Ein spezieller Tensor dieser Art ist darstellbar durch drei Doppelvektoren.

2. Zwei Invarianten verschwinden; $T_i = 0$ und $T_k = 0$. Dann ist auch $S_4 = 0$ und $S_3 = 0$. Der Mittelpunktraumartet in einen Zylinderraum 2. Art aus, indem zwei der Hauptachsen unendlich groß werden. Seine Gleichung lautet

$$T_I X_1^2 + T_{II} X_2^2 = \text{const}, \quad \text{wenn} \quad T_i = T_{IV}; \quad T_k = T_{III}.$$

Der entsprechende spezielle Tensor wird durch zwei Doppelvektoren geometrisch dargestellt.

3. Drei der Invarianten verschwinden; $T_i = 0$, $T_k = 0$, $T_l = 0$. Dann ist auch $S_4 = 0$, $S_3 = 0$, $S_2 = 0$. Drei der Hauptachsen werden unendlich groß; der Mittelpunktraum 2. Ordnungartet in ein Paar paralleler ebener Räume aus, deren Abstand vom Nullpunkt gleich ist der vierten, nicht verschwindenden Hauptachse. Seine Gleichung lautet

$$T_I X_1^2 = \text{const}, \quad \text{wenn} \quad T_i = T_{IV}, \quad T_k = T_{III}, \quad T_l = T_{II}.$$

Der spezielle Tensor dieser Art ist der durch einen Doppelvektor geometrisch darstellbare Tensor, der Tensor von der Form $[[a^2]]$.

Nun lassen sich auch die am Anfang dieses Paragraphen gestellten Fragen beantworten.

Durch Addition von drei speziellen Tensoren von der Form $[[a^2]]$ entsteht ein Tensor, für den $S_4 = 0$ ist.

Durch Addition von zwei speziellen Tensoren von der Form $[[a^2]]$ entsteht ein spezieller Tensor, für den $S_3 = 0$ und $S_4 = 0$ ist.

Dabei, sowie bei der Zusammensetzung des allgemeinen symmetrischen Tensors aus vier Tensoren $[[a^2]]$, $[[b^2]]$, $[[c^2]]$, $[[d^2]]$ ist es gleichgültig, ob die betreffenden Doppelvektoren aufeinander senkrecht stehen oder nicht.

Denn wenn auch zwei Doppelvektoren a und b nicht aufeinander senkrecht stehen, kann der durch die Komponenten

$t_{ik} = a_i a_k + b_i b_k$ bestimmte Mittelpunktsraum 2. Ordnung nur ein Zylinderraum 2. Art sein, da er durch die vier Schnittebenen der beiden Paare von parallelen, ebenen Räumen, den Tensorräumen von $[[a^2]]$ und $[[b^2]]$, gehen muß.

Ebenso kann der durch drei beliebige Doppelvektoren bestimmte Tensor mit den Komponenten $t_{ik} = a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k$ nur einen Zylinderraum 1. Art als Tensorraum haben; denn dieser Tensorraum muß die acht parallelen Geraden enthalten, in denen sich die drei Paare paralleler ebener Räume schneiden.

Der Tensorraum des aus vier beliebigen Doppelvektoren gebildeten Tensors mit den Komponenten $t_{ik} = a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k + d_i d_k$ wird ein durch die 16 Schnittpunkte der vier Paare ebener Räume gehender und durch sie bestimmter Mittelpunktsraum 2. Ordnung sein.

Dabei sind die Paare ebener Räume einem Quadrupel konjugierter Durchmesserräume des Mittelpunktsraumes 2. Ordnung parallel. Sie bilden die Begrenzungen eines dem Mittelpunktsraum 2. Ordnung eingeschriebenen vierdimensionalen Parallelepipeds. Die vier Doppelvektoren a, b, c, d stehen senkrecht auf den ebenen Begrenzungen des Parallelepipeds.

Die Darstellung des symmetrischen Tensors 2. Ranges durch vier aufeinander senkrechte Doppelvektoren ist also nicht die einzig mögliche Art der Darstellung des symmetrischen Tensors durch vier Doppelvektoren, sondern nur ein besonderer Fall der allgemeinen Darstellung durch vier beliebig zueinander geneigte Doppelvektoren, deren Richtungen bestimmt sind durch die Lote auf ein dem Mittelpunktsraum 2. Ordnung eingeschriebenes Parallelepiped.

§ 5. Geometrische Definition der Komponente des symmetrischen Tensors.

Mit der durch die Betrachtungen des § 3 gewonnenen geometrischen Darstellung des symmetrischen Tensors 2. Ranges ist nun auch die geometrische Deutung der einzelnen Komponente des Tensors möglich geworden.

Bei dem speziellen Tensor $[[a^2]]$ ist nämlich die kovariante Komponente $t_{ik} = a_i a_k$ das Produkt der Orthogonalprojektionen des Vektors a auf i - und k -Achse. Die kontravariante Komponente $t^{ik} = a^i a^k$ ist das Produkt aus den Parallelprojektionen

des Vektors α auf die i - und die k -Achse. Werden Orthogonalprojektion und Parallelprojektion im Einheitsmaßstab gemessen, so ist

$$a_i = A_i \sqrt{g_{ii}} \quad \text{und} \quad a^i = \frac{A^i}{\sqrt{g_{ii}}},$$

also

$$t_{ik} = A_i A_k \sqrt{g_{ii} g_{kk}} \quad \text{und} \quad t^{ik} = \frac{A^i A^k}{\sqrt{g_{ii} g_{kk}}}.$$

$T_{ik} = A_i A_k$ und $T^{ik} = A^i A^k$ sind die kovarianten bzw. die kontravarianten Komponenten des Tensors, wenn die Koordinatenbestimmung mit dem Einheitsmaßstab erfolgt.

Für $i = k$ ergeben sich die Komponenten t_{ii} oder t^{ii} als die Quadrate der Orthogonalprojektionen oder Parallelprojektionen auf die i -Achse.

Für den allgemeinen symmetrischen Tensor 2. Ranges, der durch vier Doppelvektoren $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ geometrisch dargestellt wird, ist dann die Komponente t_{ik} die Summe der Produkte aus den Orthogonalprojektionen der Vektoren $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ auf die i - und k -Achse. Die Komponente t^{ik} ist die Summe der Produkte aus den Parallelprojektionen der Vektoren $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ auf die i - und k -Achse.

Daraus ist zu ersehen, daß die Komponenten des symmetrischen Tensors 2. Ranges nicht nach einer Geraden, wie beim Vierervektor, auch nicht nach einer Ebene, wie beim Sechservektor, sondern nach einem *Geradenpaar* zu bilden sind, wobei diese beiden Geraden einen beliebigen Winkel miteinander einschließen können, weil ja beim schiefwinkligen Koordinatensystem die Achsen beliebig zueinander geneigt sein können.

Dies führt dazu, die Komponente des symmetrischen Tensors 2. Ranges nach einem beliebigen Geradenpaar, das nicht mit einem Achsenpaar des Koordinatensystems zusammenfällt, geometrisch und unabhängig vom Koordinatensystem folgendermaßen zu definieren:

Es soll die Komponente $T_{s,r}$ des symmetrischen Tensors nach einem beliebigen Geradenpaar mit den Richtungen s und r gleich sein der Summe der Produkte aus den Orthogonalprojektionen der Vektoren $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ auf die Richtungen s und r . Also

$$(12) \quad T_{s,r} = A_s A_r + B_s B_r + C_s C_r + D_s D_r.$$

Dabei sind A_s, A_r, B_s, B_r usw. die im Einheitsmaßstab gemessenen Orthogonalprojektionen. Da diese unabhängig vom Koordinatensystem sind, so ist auch T_{sr} unabhängig definiert.

Wird das Koordinatensystem so gewählt, daß zwei der Achsen in die Richtungen s und r fallen und werden in diesem Koordinatensystem die Längen mit dem Einheitsmaßstab gemessen, so tritt tatsächlich T_{sr} als eine der Komponenten des symmetrischen Tensors in diesem Koordinatensystem auf.

Wie drückt sich nun die durch die Gleichung (12) definierte Tensorkomponente nach zwei beliebigen Richtungen s und r durch die jeweils gegebenen Tensorkomponenten t_{ik} oder t^{ik} oder $t_i{}^k$ aus?

Entsprechend der Darstellung des symmetrischen Tensors durch vier Doppelvektoren ist

$$t_{ik} = a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k + d_i d_k$$

oder

$$t^{ik} = a^i a^k + b^i b^k + c^i c^k + d^i d^k$$

oder

$$t_i{}^k = a_i a^k + b_i b^k + c_i c^k + d_i d^k.$$

Es sei ferner η der Einheitsvektor in der Richtung s , ζ der Einheitsvektor in der Richtung r . Nun ist nach Gleichung (5b) des § 1

$$A_s = \sum_i a_i \eta^i.$$

Entsprechend wird

$$A_r = \sum_k a_k \zeta^k,$$

also

$$A_s A_r = \sum_{ik} a_i a_k \eta^i \zeta^k.$$

Ebenso findet sich

$$B_s B_r = \sum_{ik} b_i b_k \eta^i \zeta^k, \quad C_s C_r = \sum_{ik} c_i c_k \eta^i \zeta^k, \quad D_s D_r = \sum_{ik} d_i d_k \eta^i \zeta^k$$

Daher wird

$$T_{sr} = \sum_{ik} (a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k + d_i d_k) \eta^i \zeta^k$$

(12a)

$$T_{sr} = \sum_{ik} t_{ik} \eta^i \zeta^k.$$

Damit ist die Komponente des Tensors nach den Richtungen s und r ausgedrückt durch die kovarianten Komponenten t_{ik} .

Falls aber der Tensor nicht durch die kovarianten, sondern durch die kontravarianten Komponenten t^{ik} in dem betreffenden

Koordinatensystem gegeben ist, kann nach Gleichung (4b) des § 1 geschrieben werden

$$A_s = \sum_i a^i \eta_i,$$

entsprechend

$$A_r = \sum_k a^k \zeta_k,$$

also ist

$$A_s A_r = \sum_{ik} a^i a^k \eta_i \zeta_k.$$

Die Ausdrücke für $B_s B_r$, $C_s C_r$ und $D_s D_r$ sind ebenso gebaut, so daß sich ergibt

$$(12b) \quad T_{sr} = \sum_{ik} t^{ik} \eta_i \zeta_k.$$

Damit ist T_{sr} durch die kontravarianten Komponenten ausgedrückt.

Endlich, wenn der Tensor durch seine gemischten Komponenten gegeben ist, kann geschrieben werden

$$\begin{aligned} A_s A_r &= \sum_i a_i \eta^i \sum_k a^k \zeta_k \\ &= \sum_{ik} a_i a^k \eta^i \zeta_k \end{aligned}$$

und es wird

$$(12c) \quad T_{sr} = \sum_{ik} t_i^k \eta^i \zeta_k.$$

Diese Bildungsweise der Tensorkomponente T_{sr} nach den Richtungen s und r aus den im jeweiligen Koordinatensystem gegebenen Tensorkomponenten stimmt überein mit der im dreidimensionalen Fall angewendeten Bildung der Tensorkomponente nach zwei Richtungen. So wird z. B. in der Mechanik der Kontinua gezeigt, daß die Spannung oder der Druck, der auf ein Flächenstück mit der Normalrichtung r wirkt, in der Richtung s die Größe hat

$$\sigma_{sr} = \sum_{ik} \sigma_{ik} \cos \alpha_i \cos \beta_k,$$

wobei σ_{ik} die Komponenten des Drucktensors in dem der Betrachtung zugrunde gelegten Koordinatensystem sind, $\cos \alpha_i$ die Richtungskosinus von s , $\cos \beta_k$ die von r . Wird insbesondere nach der Größe des Normaldruckes gefragt, so fällt s mit r zusammen und es ist

$$\sigma_{rr} = \sum_{ik} \sigma_{ik} \cos \alpha_i \cos \alpha_k.$$

Dabei tritt in der klassischen Mechanik und Elastizitätstheorie nur eine Art von Tensorkomponenten auf, da für die dort angewendeten orthogonalen Koordinatensysteme kontravariante und kovariante Komponenten zusammenfallen. Werden aber auch dort schiefwinklige Koordinatensysteme benützt, so muß selbstverständlich auch in der klassischen Mechanik zwischen kontravarianten und kovarianten Vektor- und Tensorkomponenten unterschieden werden. Die bisher durchgeführten Betrachtungen über den symmetrischen Tensor sind aber auf diesen Fall unmittelbar anzuwenden, wenn nur statt der Dimensionszahl 4 die Dimensionszahl 3 gewählt wird.

§ 6. Geometrische Definition der Divergenz des symmetrischen Tensors 2. Ranges.

Bisher wurde ein symmetrischer Tensor 2. Ranges betrachtet, der nur für einen Punkt des Riemannschen Raumes als gegeben angenommen wurde. Im folgenden soll nun der Betrachtung ein *Tensorfeld* zugrunde gelegt werden. Die Tensorkomponenten sind also Funktionen der Koordinaten x^1, x^2, x^3, x^4 im Riemannschen Raum. Für jeden Punkt des Riemannschen Raumes ist damit ein bestimmter Tensor gegeben. Jeder dieser Tensoren kann geometrisch dargestellt werden durch vier aufeinander senkrechte Doppelvektoren, die im Tangentialraum des betreffenden Punktes liegen. Durch diese vier Doppelvektoren sind dann vier Vektorfelder a, b, c, d im Riemannschen Raum bestimmt. Diese vier Vektorfelder ersetzen gleichsam das Tensorfeld.

Es ist somit auch für jeden Punkt des Riemannschen Raumes eine Tensorkomponente T_{sr} nach zwei Richtungen s und r eindeutig bestimmt durch

$$T_{sr} = A_s A_r + B_s B_r + C_s C_r + D_s D_r.$$

Dadurch ist es möglich, einen aus dem Tensorfeld abzuleitenden Vierervektor, die Divergenz des symmetrischen Tensors — geschrieben $\text{Div } T$ — geometrisch und unabhängig vom Bezugssystem zu definieren in analoger Weise wie A. Sommerfeld die Divergenz des Vierervektors und Sechservektors definiert hat.¹⁾

1) A. Sommerfeld, Zur Relativitätstheorie. II. Vierdimensionale Vektoranalysis. Ann. d. Phys. 33. S. 649. 1910.

Ein Vierervektor a ist unabhängig vom Bezugssystem bestimmt, wenn seine Komponente A_s in einer beliebigen Richtung s angegeben werden kann. Dabei muß unter der Komponente A_s die Orthogonalprojektion von a auf die Richtung s , gemessen im Einheitsmaßstab verstanden werden; denn nur die im Einheitsmaßstab gemessene Orthogonalprojektion, nicht etwa die Parallelprojektion ist unabhängig vom jeweiligen Bezugssystem bestimmbar.

Es sei nun s diejenige Richtung, nach der die Komponente des Vierervektors $\text{Div } T$ bestimmt werden soll. Ist $\Delta \Sigma$ ein beliebig gestaltetes vierdimensionales Volumen in der Umgebung des betrachteten Punktes, ΔS seine dreidimensionale Begrenzung n die Normale auf ΔS , so ist zu definieren:

$$(13) \quad \text{Div}_s T = \lim_{\Delta \Sigma \rightarrow 0} \frac{\int T_{sn} dS}{\Delta \Sigma}.$$

Da die Komponente T_{sn} nach den Richtungen s und n unabhängig vom Bezugssystem und eindeutig definiert ist, so ist auch $\text{Div } T$ unabhängig vom Bezugssystem definiert.

Um nun zu erkennen, daß diese Definition der Divergenz des symmetrischen Tensors mit der üblichen übereinstimmt, soll im folgenden gezeigt werden, wie sich durch spezielle Wahl des Volumelementes $\Delta \Sigma$ und der Richtung s aus dieser Definition die von Einstein-Großmann angegebene und rein analytisch abgeleitete Formel für die Divergenz des symmetrischen Tensors ergibt.

Das Volumelement $\Delta \Sigma$ werde zu diesem Zweck als Parallelepiped gewählt, dessen Kanten in die Richtungen der wachsenden kontravarianten Koordinaten fallen. Sie sind also dx^1, dx^2, dx^3, dx^4 und es ist

$$\Delta \Sigma = dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 \sqrt{g},$$

wo g der Wert der Determinante der g_{ik} ist.

Die Begrenzungen von $\Delta \Sigma$ sind dann die dreidimensionalen Parallelepipede $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3, \Delta S_4$ mit den Kanten dx^1, dx^2, dx^3 ; dx^1, dx^2, dx^4 ; dx^1, dx^3, dx^4 ; dx^2, dx^3, dx^4 , sowie die ihnen gegenüberliegenden und es ist

$$\Delta S_1 = dx^2 dx^3 dx^4 \sqrt{g^{11}} g;$$

denn g^{11} g ist die Unterdeterminante von g_{11} .

Oder

$$\Delta S_1 = \frac{\Delta \sum \sqrt{g^{11}}}{dx^1},$$

allgemein

$$\Delta S_i = \frac{\Delta \sum \sqrt{g^{ii}}}{dx^i}.$$

Die Integration ist zu erstrecken über die 8 dreidimensionalen Parallelepipede und zwar bei festgehaltener Richtung s . Dann muß in Anbetracht der Maßbestimmung

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx^i dx^k$$

der Einheitsvektor η in dieser Richtung beim Übergang vom Punkt P zum Punkt P' , der unendlich benachbart sein soll, gewisse Zuwächse erfahren, die gegeben sind durch

$$(14) \quad \delta \eta^i = - \sum_{r,s} \left\{ \begin{matrix} r & s \\ i \end{matrix} \right\} \eta^r \delta x^s,$$

wobei die δx^s die kontravarianten Komponenten des Vektors PP' sind.

Ferner soll nach der Definition von $\text{Div}_n T$ die Richtung n die der Normalen auf der Begrenzung von $\Delta \Sigma$ sein. Ist wieder ζ der in die n -Richtung fallende Einheitsvektor, so muß ζ also auf den Parallelepipeden ΔS_1 , ΔS_2 , ΔS_3 und ΔS_4 , bzw. auf den diesen gegenüberliegenden, jeweils senkrecht stehen. Der Vektor ζ , der auf den Achsenrichtungen 2, 3, 4 senkrecht steht, hat aber die kovarianten Komponenten $\zeta_1, 0, 0, 0$. Da er Einheitsvektor sein soll, so ist $\zeta_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}$. Entsprechendes gilt für ζ , wenn er auf den anderen Parallelepipeden senkrecht steht.

Wird nun $T_{..n}$ ausgedrückt durch die gemischten Komponenten des symmetrischen Tensors, also $T_{..n} = \sum_{ik} t_i^k \eta^i \zeta_k$ gesetzt und wird ferner die s -Richtung in eine der Achsenrichtungen, z. B. die Richtung 1 gelegt, so ergibt sich als Wert der Komponente $T_{..n}$ für das Parallelepiped ΔS_1 , das vom Punkt P ausgeht

$$T_{11} = t_1^1 \eta^1 \zeta_1 = t_1^1 \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{1}{\sqrt{g^{11}}},$$

1) H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, § 14. S. 100

und als Wert von T_{11} für das Parallelepipet ΔS_1 , das vom Punkt P' ausgeht,

$$\bar{T}_{11} = \sum_i \bar{t}_i^1 \bar{\eta}^i \bar{\xi}_1 = \sum_i \bar{t}_i^1 (\eta^i + \delta \eta^i) \bar{\xi}_1,$$

wobei durch die Striche angedeutet werden soll, daß die Werte für den Punkt $(x^1 + dx^1, x^2, x^3, x^4)$ statt für den Punkt (x^1, x^2, x^3, x^4) zu nehmen sind.

Wird also der zu berechnende Grenzwert für das Parallelepipet (dx^1, dx^2, dx^3) und das ihm gegenüberliegende gebildet, wobei bei diesem Übergang zu setzen ist: $\delta x^1 = dx^1$, $\delta x^2 = \delta x^3 = \delta x^4 = 0$, so ergibt sich daraus zur Berechnung von $\text{Div}_1 T$ der Anteil

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta \Sigma \rightarrow 0} \left(T_{11} \frac{\Delta S_1}{\Delta \Sigma} + \bar{T}_{11} \frac{\Delta \bar{S}_1}{\Delta \bar{\Sigma}} \right) \\ &= -t_1^1 \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{1}{\sqrt{g^{11}}} \frac{\sqrt{g^{11}} \bar{g}}{dx^1 \sqrt{g}} + \bar{t}_1^1 \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{1}{\sqrt{\bar{g}^{11}}} \frac{\sqrt{\bar{g}^{11}} \bar{g}}{dx^1 \sqrt{\bar{g}}} \\ & \quad - \sum_i \bar{t}_i^1 \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ i \end{smallmatrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{dx^1}{\sqrt{\bar{g}^{11}}} \frac{\sqrt{\bar{g}^{11}} \bar{g}}{dx^1 \sqrt{g}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} (t_1^1 \sqrt{g}) - \sum_i t_i^1 \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ i \end{smallmatrix} \right\} \sqrt{g} \right). \end{aligned}$$

Allgemein berechnet sich für ein Parallelepipet ΔS_m und das ihm gegenüberliegende der Anteil

$$\frac{1}{\sqrt{g} g_{11}} \left(\frac{\partial}{\partial x^m} (t_1^m \sqrt{g}) - \sum_i \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & m \\ i \end{smallmatrix} \right\} t_i^m \sqrt{g} \right).$$

Also ist

$$\text{Div}_1 T = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \left(\sum_m \frac{\partial}{\partial x^m} (t_1^m \sqrt{g}) - \sum_{i,m} \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & m \\ i \end{smallmatrix} \right\} t_i^m \sqrt{g} \right).$$

und die Komponente von $\text{Div} T$ nach einer beliebigen Achse

$$(13a) \quad \text{Div}_k T = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_m \frac{\partial}{\partial x^m} (t_k^m \sqrt{g}) - \sum_{i,m} \left\{ \begin{smallmatrix} k & m \\ i \end{smallmatrix} \right\} t_i^m \sqrt{g} \right),$$

wenn dabei noch die Maßbestimmung $ds_k = \sqrt{g_{kk}} dx^k$ auf der k -Achse berücksichtigt wird, also die Orthogonalprojektion von $\text{Div} T$ auf die k -Achse nicht im Einheitsmaßstab gemessen wird, sondern so, wie es die allgemeine Maßbestimmung in dem betreffenden Koordinatensystem verlangt.

Durch diese Formel ist die Komponente von $\text{Div } T$ nach der k -Achse ausgedrückt durch die gemischten Komponenten des symmetrischen Tensors in dem jeweiligen Koordinatensystem.

Soll aber die k -Komponente von $\text{Div } T$ durch die kontravarianten Komponenten t^{ik} oder durch die kovarianten Komponenten t_{ik} ausgedrückt werden, so sind bei gleicher Wahl des Parallelepipedes

$$T_{,n} = \sum_{ik} t^{ik} \eta_i \zeta_k,$$

bzw.

$$T_{,n} = \sum_{ik} t_{ik} \eta^i \zeta^k$$

bei der Berechnung des Grenzwertes einzuführen. Dabei unterscheidet sich die Rechnung von der obigen im ersten Fall dadurch, daß statt der kontravarianten Komponenten η^i und $\delta \eta^i$ die kovarianten Komponenten η_i und $\delta \eta_i$ zu benutzen sind, im zweiten Fall statt der Komponenten ξ_i die Komponenten ξ^i . Die Rechnung ergibt:

$$(13b) \quad \text{Div}_k T = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_{im} \frac{\partial}{\partial x^m} (t^{im} \sqrt{g}) g_{ki} - \sum_{im} t^{mi} \sqrt{g} \left[\begin{matrix} km \\ i \end{matrix} \right] \right)$$

bzw.

$$(13c) \quad \text{Div}_k T = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_{im} \frac{\partial}{\partial x^m} (t_{ki} g^{mi} \sqrt{g}) - \sum_{im} t_{il} g^{ml} \sqrt{g} \left\{ \begin{matrix} km \\ i \end{matrix} \right\} \right).$$

Dies sind aber die Formeln, die A. Einstein in „Die formale Grundlage der Relativitätstheorie“, Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften 1914, XLI angegeben hat. Und zwar erhält Einstein diese Formeln, indem er aus dem Tensor 2. Ranges durch Differentiation erst die „Erweiterung“ des symmetrischen Tensors, also einen Tensor 3. Ranges bildet und an diesem Tensor 3. Ranges zusammen mit dem Fundamentaltensor δ_μ^ν die innere Multiplikation durchführt. Diese Bildungsweise läßt aber den eigentlichen Zusammenhang zwischen dem symmetrischen Tensor 2. Ranges und seiner Divergenz nicht erkennen, während durch die hier gegebene Ableitung der Divergenz dieser Zusammenhang klar hervortritt. Es zeigt sich also, daß auch im Riemannschen Raum eine geometrische Darstellung von Vektoren und Tensoren dazu

führen kann, besseren Einblick in die Eigenschaften dieser Gebilde zu erhalten, wie die rein analytische Betrachtungsweise.

Allgemein hat schon F. Jung gezeigt¹⁾, wie mittels Integration über die $(n - 1)$ dimensionale Begrenzung eines n -dimensionalen Volumens im Raum von n -Dimensionen auf Tensoren anwendbare Differentialoperationen abgeleitet werden können. Dieser von Jung „Feldableitung“ genannte, allgemein definierte Grenzübergang umfaßt als Spezialfall auch die hier gegebene Ableitung der Divergenz des symmetrischen Tensors 2. Ranges. Jedoch bietet die hier gegebene Ableitung insofern Neues, als sie auf einer geometrischen Darstellung des Tensors selbst beruht, während bei Jung von einer Darstellung der Tensoren durch geometrische Gebilde nicht die Rede ist. Deshalb ist auch sein Grenzübergang nicht eigentlich geometrisch definiert, da er den Tensor, dessen Feldableitung gebildet werden soll, in keine geometrische Beziehung setzt zu der $(n - 1)$ dimensional Oberfläche, über die integriert wird, sondern nur rein analytisch angibt, daß der Tensor auf irgendeine Art multipliziert werden soll mit dem vektoriell gedachten Oberflächenelement. Dabei benützt Jung ein weitläufiges Schema des Vektorkalküls im Anschluß an die Grassmannsche Ausdehnungslehre für n -Dimensionen. In der vorliegenden Arbeit dagegen wird versucht, das Rechnen mit Vektoren und Tensoren vom euklidischen Raum in einfacher Weise auf den Riemannschen Raum zu übertragen und dabei die Tensoren auch nach der Seite ihrer Anschaulichkeit den Vektoren möglichst anzupassen.

§ 7. Ein Integralsatz über den symmetrischen Tensor 2. Ranges und die Integralform der Impuls-Energiegleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie.

Aus der im § 6 gegebenen Definition der Divergenz des symmetrischen Tensors 2. Ranges entspringt ein Integralsatz ähnlich dem Gausschen Satz in drei Dimensionen. Er lautet:

$$(15) \quad \int \text{Div}_k T d\Sigma = \int T_{kn} dS$$

1) F. Jung, „Die Feldableitungen bei allgemeinen Koordinaten“. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Klasse, Abteilung IIa. 126. Heft 10.

und gestattet ein über die dreidimensionale Begrenzung eines beliebig gestalteten vierdimensionalen Volumens erstrecktes Tensorintegral überzuführen in ein Vektorintegral über dieses Volumen. Umgekehrt kann mit Hilfe dieses Satzes ein Vektorintegral über ein vierdimensionales Volumen ersetzt werden durch ein Tensorintegral über die Begrenzung dieses Volumens, jedoch nur dann, wenn bekannt ist, daß das betreffende Vektorfeld durch die Operation Div aus einem Tensorfeld entstanden ist.

Der Beweis dieses Integralsatzes ergibt sich in bekannter Weise: Wird das Volumen Σ in die Volumelemente $d\Sigma$ geteilt, so gilt für jedes einzelne Volumelement die Gleichung (13), die auch geschrieben werden kann

$$\text{Div}_k T d\Sigma = \int T_{k,n} dS.$$

Durch Summation all dieser für die einzelnen Volumelemente geltenden Gleichungen ergibt sich links $\int \text{Div}_k T d\Sigma$, rechts heben sich die Anteile der gemeinsamen Begrenzung je zweier benachbarter Volumelemente $d\Sigma$ auf, weil die Normalen für beide entgegengesetzte Richtung haben, und es bleiben bei der Summation nur die Anteile der äußeren Begrenzung S von Σ stehen, so daß sich das $\int T_{k,n} dS$ über die Begrenzung S erstreckt.

Dieser Integralsatz kann dazu benützt werden, die *Impuls-Energiegleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie in Integralform* zu schreiben.

Im *elektromagnetischen Feld* läßt sich die Viererkraft p , die an einem mit Elektrizität geladenen Punkte angreift, aus einem symmetrischen Tensor 2. Ranges ableiten. Es ist nämlich

$$p_i = -\text{Div}_i F.$$

Dabei baut sich der Energietensor F in bekannter Weise aus den Feldvektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ auf.

Obiger Integralsatz auf diese Gleichungen angewendet, ergibt

$$(16) \quad \int p_i d\Sigma = - \int F_{i,n} dS.$$

Nun ist aber $\int p_i d\Sigma = P_i$ die i -Komponente der Gesamtviererkraft, die auf das betrachtete vierdimensionale Volumen Σ wirkt. Die Gleichungen (16) zeigen also, daß sich diese

Gesamtviererkraft berechnen läßt durch ein über die „Oberfläche“ dieses Volumens erstrecktes Tensorintegral gemäß

$$(16a) \quad P_i = - \int F_{i,n} dS.$$

Diese Gleichungen sind ganz analog denjenigen, die im Falle konstanten elektromagnetischen Feldes die auf ein dreidimensionales Raumgebiet wirkende ponderomotorische Kraft zu berechnen gestatten aus dem für die Oberfläche dieses Gebietes gegebenen Maxwellschen Spannungstensor. Sie sind deren vierdimensionale Erweiterung für den Fall zeitlich veränderlicher Felder. Die Viererkraft $\mathfrak{P}$ gibt dabei durch ihre räumlichen Komponenten eben die gesamte ponderomotorische Kraft auf ein dreidimensionales Raumgebiet S' , das bei der Bewegung (oder Ruhe) das vierdimensionale Volumen Σ beschreibt.

Ebenso lassen sich bekanntlich die Impuls-Energiegleichungen der *Mechanik und Hydrodynamik* nach der allgemeinen Relativitätstheorie in der Form schreiben

$$(17) \quad p_i = \text{Div}_i R,$$

wobei R der *kinetische* Energie-Impulstensor ist. Es gilt also auch hier

$$\int p_i d\Sigma = \int R_{i,n} dS$$

oder

$$(17a) \quad P_i = \int R_{i,n} dS.$$

Im *Gravitationsfeld* beschreibt ein Punkt mit der Ruhmasse μ_0 , auf den keine äußere Kraft außer der Gravitationskraft selbst wirkt, nach Einstein eine geodätische Bahn. Die Viererkraft p verschwindet für ihn und seine Bewegungsgleichung lautet

$$(18) \quad \text{Div}_i R = 0,$$

wo $R_{ik} = \mu_0 u_i u_k$ (μ_0 Ruhmassendichte, u_i, u_k Komponenten der Vierergeschwindigkeit). R ist also in diesem Fall ein durch einen Doppelvektor darstellbarer Tensor zweiten Ranges.

Sollen nun für die *Gesamtheit der physikalischen Erscheinungen* die *Impuls-Energiegleichungen* aufgestellt werden, so müssen der elektromagnetische und der kinetische Energie-Impulstensor

zu einem Energie-Impulstensor, dem *Welttensor* T vereinigt werden. Das *Prinzip von der Erhaltung der Energie* verlangt aber dann, daß die aus dem Welttensor T abzuleitende Viererkraft verschwindet, also

$$\text{Div}_i T = 0,$$

wofür jetzt auch geschrieben werden kann

$$(19) \quad \int T_{in} dS = 0.$$

Wird nun der Welttensor T als vierdimensionaler Spannungstensor betrachtet, so läßt sich der *Satz von der Erhaltung der Energie* in folgender, *geometrischer Form* aussprechen:

Die metrischen Eigenschaften des vierdimensionalen Raumes werden durch die Materie derart bestimmt, daß die Gesamtviererkraft verschwindet, die auf ein vierdimensionales Volumen Σ durch die auf dessen Oberfläche wirkenden, dem Welttensor T entsprechenden Spannungen ausgeübt wird.

§ 8. Geometrische Darstellung und Divergenz des nicht-symmetrischen Tensor 2. Ranges.

Die Komponente des symmetrischen Tensors 2. Ranges nach einem Richtungs paar r und s war unabhängig vom Koordinatensystem definiert als Summe der Produkte der Orthogonalprojektionen der den Tensor darstellenden Doppelvektoren auf die Richtungen r und s . $T_{rs} = A_r A_s + B_r B_s + C_r C_s + D_r D_s$. Es zeigte sich, daß die so definierte Komponente durch die Tensorkomponenten in dem jeweils der Betrachtung zugrunde gelegten Koordinatensystem sich ausdrückte in den Form

$$T_{rs} = \sum_{ik} t_{ik} \eta^i \zeta^k \quad \text{oder} \quad T_{rs} = \sum_{ik} t^{ik} \eta_i \zeta_k \quad \text{oder} \quad T_{rs} = \sum_{ik} t_i^k \eta^i \zeta_k.$$

Daraus kann auch analytisch erkannt werden, daß T_{rs} eine invariante Bildung ist; denn wie oben erwähnt, haben die Tensorkomponenten die Eigenschaft, mit den Komponenten zweier Vierervektoren zur Bilinearform vereinigt, eine Invariante zu ergeben. Dies gilt nicht nur für den symmetrischen Tensor, sondern auch für den nichtsymmetrischen Tensor, also insbesondere auch für den antisymmetrischen. Daraus kann der Schluß gezogen werden, daß unabhängig von einer geometrischen

Darstellung für einen *beliebigen Tensor 2. Ranges* die Komponente nach zwei Richtungen s und r zu definieren ist durch

$$T_{s,r} = \sum_{ik} t^{ik} \eta_i \zeta_k$$

und entsprechend für die kovarianten und gemischten Komponenten, wobei also η und ζ die Einheitsvektoren in diesen Richtungen sind. Dann kann aber auch für einen beliebigen Tensor 2. Ranges die Divergenz durch denselben Grenzprozeß definiert werden, wie für den symmetrischen Tensor, also durch

$$\text{Div}_k T = \lim_{\Delta \Sigma \rightarrow 0} \frac{\int T_{kn} dS}{\Delta \Sigma}$$

und die aus dieser Definition für ein bestimmtes Koordinatensystem abgeleiteten Gleichungen (13a), (13b), (13c) gelten ebenso für den symmetrischen, wie für den nichtsymmetrischen Tensor. In der Tat sind sie diejenigen Formeln, die Einstein auch für den nichtsymmetrischen Tensor angibt. Der Weg aber, der zu der Erkenntnis führt, daß die Invariante $\sum_{ik} t^{ik} \eta_i \zeta_k$ als Komponente des Tensors auch den Richtungen der Vektoren η und ζ zu betrachten sei, ist der der geometrischen Darstellung.

Insbesondere wird für den *antisymmetrischen* Tensor wegen $t^{ik} = -t^{ki}$ die Komponente nach den Richtungen s und r

$$T_{s,r} = \sum_{ik} t^{ik} (\eta_i \zeta_k - \eta_k \zeta_i).$$

$p_{ik} = \eta_i \zeta_k - \eta_k \zeta_i$ sind aber die Komponenten des speziellen Sechservektors, der geometrisch durch das von den beiden Vektoren η und ζ bestimmte Parallelogramm dargestellt wird. Nun bleiben aber die p_{ik} ungeändert, wenn η und ζ sich in derselben Ebene irgendwie ändern, wobei nur der Flächeninhalt des durch sie bestimmten Parallelogramms derselbe bleiben muß. Es bleibt dann also auch die Komponente $T_{s,r}$ ungeändert. Aus diesem Grunde läßt sich für den antisymmetrischen Tensor 2. Ranges die Komponente nach einer Ebene bilden, die bestimmt sein kann durch ein *beliebiges* Richtungs-paar in ihr, statt wie beim symmetrischen Tensor die Komponenten nach einem *festen* Richtungs-paar. Dies ergibt sich unabhängig von der geometrischen Darstellung des antisymmetrischen Tensors. Nun läßt sich aber der antisymmetrische

Tensor oder allgemeine Sechservektor geometrisch darstellen durch zwei aufeinander senkrechte Flächenstücke von bestimmtem Inhalt und bestimmter Orientierung im Raum. Die Komponente des antisymmetrischen Tensors nach einer beliebigen Ebene ist dann geometrisch definiert durch die Summe der Orthogonalprojektionen der beiden Flächenstücke auf die betreffende Ebene.¹⁾ Es ist leicht einzusehen, daß diese geometrische Definition der Komponente des antisymmetrischen Tensors analytisch sich ausdrückt durch eben die Bildung

$$\sum_{ik} \epsilon^{ik} (\eta_i \zeta_k - \eta_k \zeta_i).$$

Da der nichtsymmetrische Tensor 2. Ranges immer in einen symmetrischen und in einen antisymmetrischen Tensor zerlegt werden kann, so kann der nichtsymmetrische Tensor 2. Ranges dargestellt werden durch vier Doppelvektoren zusammen mit zwei aufeinander senkrechten Flächenstücken von bestimmtem Inhalt. Die Komponente des nichtsymmetrischen Tensors nach einem beliebigen Richtungs paar ist also geometrisch definiert als Summe aus den Produkten der Orthogonalprojektionen der Doppelvektoren auf die beiden Richtungen und aus den Orthogonalprojektionen der beiden Ebenenstücke auf die durch die zwei Richtungen bestimmte Ebene.

A. Sommerfeld hat für den Fall der pseudoeuklidischen Geometrie in vier Dimensionen die Divergenz des allgemeinen Sechservektors f definiert²⁾ durch den Grenzübergang

$$\text{Div}_s f = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint f_{\cdot n} d\sigma}{\Delta S},$$

dabei ist ΔS ein beliebig gestaltetes dreidimensionales Volumen in dem ebenen Raum S senkrecht zur Richtung s , $d\sigma$ ist das Element der zweidimensionalen Begrenzung von ΔS , n die Richtung der Normalen auf $d\sigma$ im Raum S .

Es wäre für den Fall der pseudoeuklidischen Geometrie ebenso gut möglich, die Divergenz des Sechservektors durch den Grenzübergang zu definieren, der oben für die Definition

1) A. Sommerfeld, Zur Relativitätstheorie. I. Vierdimensionale Vektoralgebra. Ann. d. Phys. **32**. S. 749. 1910.

2) A. Sommerfeld, Zur Relativitätstheorie. II. Vierdimensionale Vektoranalysis. § 5. Ann. d. Phys. **33**. S. 649. 1910.

der Divergenz des symmetrischen Tensors verwendet wurde, also durch

$$\text{Div}_s f = \lim_{\Delta \Sigma \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Delta \Sigma} f_{,n} dS}{\Delta \Sigma}.$$

Eine nähere Betrachtung, die hier jedoch nicht durchgeführt werden soll, zeigt nämlich, daß die durch die zweite Art des Grenzüberganges definierte Divergenz des Sechservektors mit der durch den ersten Grenzübergang definierten identisch ist, nicht nur für den Fall der pseudo-euklidischen Geometrie, sondern überhaupt im Riemannschen Raum von vier Dimensionen.¹⁾ Es ist dies jedoch nur für den antisymmetrischen Tensor der Fall. Für den symmetrischen Tensor 2. Ranges wäre durch die zweite Art des Grenzüberganges ein anderer Vierervektor definiert wie durch die erste Art. Oder die beiden Grenzübergänge würden angewandt auf den symmetrischen Tensor zwei verschiedene Differentialoperationen bedeuten.

Es gelten, wie schon erwähnt, die Formeln (13a, b, c) auch für den antisymmetrischen Tensor. Denn bei ihrer Ableitung für den symmetrischen Tensor wurde die Symmetrieeigenschaft der Komponenten $t^{ik} = t^{ki}$ nicht benützt. Wird nun andererseits berücksichtigt, daß für den antisymmetrischen Tensor $t^{ik} = -t^{ki}$, so führt dies in den Formeln (13a, b, c) zunächst zwar zu keiner Vereinfachung. Wird aber von den kovarianten Komponenten von $\text{Div } T$ zu den kontravarianten Komponenten übergegangen, so ergibt die Umformung allgemein

$$(13d) \quad \text{Div}^i T = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sum_{lm} \frac{\partial}{\partial x^m} (\sqrt{g} t^{lm}) + \sum_k \left\{ \begin{smallmatrix} ik \\ l \end{smallmatrix} \right\} t^{lk} \sqrt{g} \right),$$

und hier fällt für den antisymmetrischen Tensor wegen der Symmetrie der Ausdrücke $\left\{ \begin{smallmatrix} ik \\ l \end{smallmatrix} \right\}$ bezüglich der Indizes i und k das zweite Glied der Gleichung weg, so daß allein bleibt

$$\text{Div}^i f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{lm} \frac{\partial (\sqrt{g} f^{lm})}{\partial x^m}.$$

1) Diese, sowie einige andere an das Thema dieser Abhandlung sich anschließenden Betrachtungen sind durchgeführt in der oben zitierten Dissertation des Verfassers.

§ 9. Definition der Divergenz des Tensors n ten Ranges.

Die bisherigen Betrachtungen haben gezeigt, daß für den Tensor 2. Ranges die Invariante

$$\sum_{ik} t^{ik} \eta_i \zeta_k$$

als Komponente des Tensors nach den Richtungen der Einheitsvektoren η und ζ zu betrachten ist.

Nun bilden die Komponenten des Tensors n ten Ranges zusammen mit den Produkten aus n Vektorkomponenten zur Form n ten Grades vereinigt eine Invariante:

$$\sum_{i_1 i_2 \dots i_n} t^{i_1 i_2 \dots i_n} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} \dots x_{i_n}.$$

Denn die Tatsache, daß diese Form eine Invariante ist, ist gleichbedeutend mit dem für die Komponenten des Tensors n ten Ranges geltenden Transformationsgesetz, wonach sich nämlich die Komponenten des Tensors n ten Ranges transformieren wie die Produkte aus n Vektorkomponenten.

Die für den Tensor 2. Ranges gewonnenen Ergebnisse legen es daher nahe, auch für den Tensor n ten Ranges die invariante Bildung

$$(20) \quad T_{i_1 i_2 \dots i_n} = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} t^{i_1 i_2 \dots i_n} \eta_{i_1} \eta_{i_2} \dots \eta_{i_n}$$

als Komponente des Tensors nach den Richtungen der Einheitsvektoren $\eta_{i_1}, \eta_{i_2}, \dots$ bis η_{i_n} zu betrachten. Denn der Tensor n ten Ranges muß die Eigenschaft haben, daß sich für ihn eine Komponente nach n beliebigen Richtungen bestimmen läßt. Damit ist die Bedeutung der Komponentenbildung für sämtliche Tensoren, zu denen auch der Tensor 1. Ranges, der Vierervektor gehört, einheitlich festgelegt.

Hiernach kann aus dem Tensor n ten Ranges durch denselben Grenzübergang wie beim Tensor 2. Ranges ein Tensor $n-1$ ten Ranges, die Divergenz des Tensors n ten Ranges abgeleitet werden. Sie ist zu definieren durch

$$(21) \quad \text{Div}_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} T = \lim_{\Delta \Sigma \rightarrow 0} \frac{\int T_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} N d\Sigma}{\Delta \Sigma}.$$

Dabei haben $\Delta \Sigma$ und $d\Sigma$ die gleiche Bedeutung wie oben, N ist die Richtung der Normalen auf $d\Sigma$. $s_1, s_2 \dots$ bis s_{n-1}

sind die $n-1$ -Richtungen, die bei der Integration festzuhalten sind und nach denen die Komponente des Tensors $(n-1)$ ten Ranges gebildet wird.

Auf den so entstandenen Tensor $(n-1)$ ten Ranges läßt sich selbstverständlich wieder die Operation Div anwenden. Durch wiederholte Anwendung desselben Grenzüberganges läßt sich also aus einem Tensor n ten Ranges ein Tensor von entsprechend niedrigerem Range ableiten. Durch n -malige Anwendung der Operation Div kann insbesondere aus dem Tensor n ten Ranges ein Skalar gewonnen werden.

(Eingegangen 7. August 1919.)