

23.

Fortsetzung des Vorigen.

Aufstufungen der einfachen Functionen.

I. Darstellung der positiven und negativen Aufstufungen der Functionen, wenn die Entwicklungsweise auf eine endliche Zunahme gegründet ist.

§. 55.

Man kann bei der Darstellung der Aufstufungen der aus zwei oder mehreren einfachen Functionen zusammengesetzten Functionen davon ausgehen, daß man eine zusammengesetzte Function als ein Ganzes betrachtet, und sofort als eine einfache behandelt und entwickelt. Diese Art der Darstellung führt uns aber zu keinen neuen Resultaten, sondern besteht nur in der Anwendung schon bekannter Gesetze auf specielle Fälle. Wir stellen die Resultate, worauf diese Betrachtungsweise führt, hier kurz zusammen, ohne sie weiter zu benutzen.

Die Aufstufungen einer aus zwei und mehr Factoren zusammengesetzten Function lassen sich nach (10.) auf folgende Weise vorstellen:

$$265. \begin{cases} \zeta^m(XY) = (1 + \ominus)^m XY = X_m Y_m + \frac{m}{1} X_{m-1} Y_{m-1} + \dots + X_0 Y_0, \\ \zeta^m(XYZ) = (1 + \ominus)^m XYZ \\ \quad = X_m Y_m Z_m + \frac{m}{1} X_{m-1} Y_{m-1} Z_{m-1} + \dots + XYZ \end{cases}$$

u. s. w.

Nach der Gleichung (19.):

$$266. \begin{cases} \zeta^{-m}(XY) = (\ominus + 1)^{-m} \\ \quad = X_{-m} Y_{-m} - \frac{m}{1} X_{-m-1} Y_{-m-1} + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} X_{-m-2} Y_{-m-2} \\ \zeta^{-m}(XYZ) = (\ominus + 1)^{-m} \\ \quad = X_{-m} Y_{-m} Z_{-m} - \frac{m}{1} X_{-m-1} Y_{-m-1} Z_{-m-1} + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} X_{-m-2} Y_{-m-2} Z_{-m-2}, \end{cases}$$

u. s. w.

Nach der Gleichung (30.):

$$267. \begin{cases} (XY)_m = (\zeta - 1)^m XY = \zeta^m (XY) - \frac{m}{1} \zeta^{m-1} (XY) + \dots (-)^m XY, \\ (XYZ)_m = (\zeta - 1)^m XYZ \\ \quad = \zeta^m (XYZ) - \frac{m}{1} \zeta^{m-1} (XYZ) + \dots (-)^m XYZ \end{cases}$$

u. s. w.

Nach (32.):

$$268. \begin{cases} (XY)_{-m} = (\zeta - 1)^{-m} XY \\ \quad = \zeta^{-m} (XY) + \frac{m}{1} \zeta^{-m-1} (XY) + \frac{m(m+1)}{1.2} \zeta^{-m-2} (XY) + \dots \\ (XYZ)_{-m} = (\zeta - 1)^{-m} XYZ \\ \quad = \zeta^{-m} (XYZ) + \frac{m}{1} \zeta^{-m-1} (XYZ) + \frac{m(m+1)}{1.2} \zeta^{-m-2} (XYZ) + \dots \end{cases}$$

u. s. w.

§. 56.

Da uns aber diese Darstellungsweise nichts Neues und Brauchbares bietet, so suchen wir eine andere auf. Zu dem Ende gehen wir von der Grundidee der Aufstufungen aus. Sie ist

$$\zeta XY = X_1 Y_1 + X_0 Y_0.$$

Zählen wir auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens die Function $X_1 Y_0$ zu und ab, so bleibt der Werth der Gleichung unverändert, und wir erhalten

$$\zeta XY = X_1 Y_1 + X_1 Y_0 - X_1 Y_0 + X_0 Y_0.$$

Hierdurch haben wir den Vorthail gewonnen, daß wir die Glieder auf der rechten Seite beliebig zusammen stellen, um kürzere Darstellungen gewinnen können. Ordnen wir sie so, wie die Glieder stehen: so wird

$$\zeta XY = X_1 (Y_1 + Y_0) - Y_1 (X_1 - X_0),$$

und hieraus, da $Y_1 + Y_0 = \zeta Y_0$ und $X_1 - X_0 = \Delta X$ ist, gewinnen wir für die Darstellung der ersten Aufstufung

$$269. \quad \zeta XY = X_1 \zeta Y_0 - \Delta X Y_0.$$

Ordnen wir sie aber auf folgende Art:

$$\zeta XY = X_1 (Y_1 - Y_0) + Y_0 (X_1 + X_0),$$

so wird, da $Y_1 - Y_0 = \Delta Y_0$ und $X_1 + X_0 = \zeta X_0$ ist,

$$270. \quad \zeta XY = X_1 \Delta Y_0 + \zeta X Y_0.$$

Zählen wir aber $X_0 Y_1$ zu und ab, so erhalten wir, wenn wir die nämlichen Veränderungen, wie vorhin, mit den genannten Gleichungen vornehmen:

$$\zeta XY = X_1 Y_1 + X_0 Y_1 - X_0 Y_1 + X_0 Y_0 = Y_1 (X_1 + X_0) - X_0 (Y_1 - Y_0),$$

und hieraus

$$271. \quad \zeta XY = \zeta X_0 Y_1 - X_0 \Delta Y_0.$$

Ordnen wir anders und so:

$\zeta XY = Y_1(X_1 - X_0) + X_0(Y_1 + Y_0) = X(Y_1 + Y_0) + (X_1 - X_0)Y_1$,
so erhalten wir

$$272. \quad \zeta XY = Y_1 \Delta X_0 + X_0 \zeta Y_0 = X_0 \zeta Y_0 + \Delta X_0 Y_1.$$

Würde man $X_1 Y_1$ zu- und abzählen, so würden zwei andere, jedoch nur der Form nach von den vorstehenden verschiedene Darstellungen gewonnen werden. Die Gleichungen 270. und 272., 269. und 271. sind nur der Form, nicht aber der Realität nach verschieden.

Wir halten zuerst die letzte Gleichung als Vorschrift fest. Sie enthält die Regel, wie die erste Aufstufung einer zusammengesetzten Function durch die einfachen Functionen, Unterschied und Aufstufung derselben gefunden werden kann. Die Regel ist folgende:

Die erste Aufstufung einer aus zwei Factoren bestehenden Function wird gefunden, wenn man den ersten Factor mit der Aufstufung des zweiten Factors vervielfacht, ferner den Unterschied des ersten Factors mit dem zweiten Factor, dessen Stellenzahl man um die Einheit erhöht hat, vervielfacht und beide Producte zusammenzählt.

Dieses Geschäft läßt sich, wenn man die einfachen Functionen ausschidet, und die Geschäfte, welche auf sie bezogen werden sollen, durch unten angehängte kleine Buchstaben bezeichnet, kurz, auf folgende Weise andeuten:

$$273. \quad \zeta XY = (\zeta_y + \Delta_x \Theta_y) XY,$$

wobei $\Theta Y = Y_1$ gesetzt ist. Diese Gleichung führt leicht zur zweiten Aufstufung, wenn mit ζ vervielfacht wird,

$$\begin{aligned} \zeta^2 XY &= (\zeta_y + \Delta_x \Theta_y) \zeta XY = (\zeta_y + \Delta_x \Theta_y) (\zeta_y + \Delta_x \Theta_y) XY \\ &= (\zeta_y + \Delta_x \Theta_y)^2 XY. \end{aligned}$$

Auf gleiche Weise erhält man die dritte Aufstufung, und es wird

$$\zeta^3 XY = (\zeta_y + \Delta_x \Theta_y)^3 XY$$

u. s. w. Hieraus allgemein

$$274. \quad \zeta^m XY = (\zeta_y + \Delta_x \Theta_y)^m XY,$$

oder in entwickelter Darstellung:

$$275. \quad \zeta^m XY = X \zeta^m Y + \frac{m}{1} \Delta X_0 \zeta^{m-1} Y_1 + \frac{m(m-1)}{1.2} \Delta^2 X_0 \zeta^{m-2} Y_2 + \dots + \Delta^m X_0 Y_m.$$

Dieselbe Darstellung hätte man auch bei allmäliger Entwicklung der zweiten Aufstufung aus den Gliedern der ersten erhalten, denn

$$\begin{aligned}\zeta^2 XY &= \zeta(X_0 \zeta Y_0) + \zeta(\Delta X_0 Y_1) = X_0 \zeta^2 Y_0 + \Delta X_0 \zeta Y_1 + \Delta X_0 \zeta Y_1 + \Delta^2 X_0 Y^2 \\ &= X_0 \zeta^2 Y + 2 \Delta X_0 \zeta Y_1 + \Delta^2 X_0 Y_2\end{aligned}$$

u. s. w.

§. 57.

Nachdem wir die positiven Aufstufungen einer aus zwei Factoren bestehenden Function gefunden haben, werden wir leicht im Stande sein, die Aufstufungen der aus drei und mehr Factoren bestehenden Functionen darzustellen, wenn wir von zwei einfachen Functionen auf drei, von drei auf vier u. s. w. übergehen. Setzen wird nämlich in (272.) statt der einfachen Function Y die zusammengesetzte YZ , so entsteht

$$\zeta(XYZ) = X_0 \zeta(YZ) + \Delta X_0 (YZ).$$

Wird $\zeta(YZ)$ nach der Gleichung (272.) behandelt, so ist:

$$\zeta(YZ) = Y \zeta Z + \Delta Y_0 Z_1.$$

Die Einführung dieses Werthes giebt:

$$\zeta XYZ = X_0 Y_0 \zeta Z + X_0 \Delta Y_0 Z_1 + \Delta X_0 Y_1 Z_1.$$

Werden die Functionen ausgeschieden und die an ihnen vorzunehmenden Geschäfte durch Anhängen kleiner Buchstaben angedeutet und deswegen das Zeichen \ominus zu Hülfe genommen, so hat man

$$276. \quad \zeta XYZ = (\zeta_z + \Delta_y \ominus_z + \Delta_x \ominus_y \ominus_z) XYZ.$$

Diese Gleichung führt leicht zur Darstellung der höheren Aufstufungen. Wird nämlich mit ζ vervielfacht, so entsteht

$$\begin{aligned}\zeta^2 XYZ &= (\zeta_z + \Delta_y \ominus_z + \Delta_x \ominus_y \ominus_z) \zeta XYZ \\ &= (\zeta_z + \Delta_y \ominus_z + \Delta_x \ominus_y \ominus_z) (\zeta_z + \Delta_y \ominus_z + \Delta_x \ominus_y \ominus_z) XYZ \\ &= (\zeta_z + \Delta_y \ominus_z + \Delta_x \ominus_y \ominus_z)^2 XYZ.\end{aligned}$$

Eben so findet man die dritte Aufstufung

$$\zeta^3 XYZ = (\zeta_z + \Delta_y \ominus_z + \Delta_x \ominus_y \ominus_z)^3 XYZ$$

und allgemein

$$277. \quad \zeta^m XYZ = (\zeta_z + \Delta_y \ominus_z + \Delta_x \ominus_y \ominus_z)^m XYZ.$$

Das nämliche Gesetz dehnt sich leicht auf eine Function aus, die aus vier und mehr Factoren besteht, und es ist allgemein für eine aus r einfachen Functionen bestehende Function:

$$\begin{aligned}278. \quad &\zeta^m X_1 X_2 X_3 \dots X_r \\ &= (\zeta_r + \Delta_{r-1} \ominus_r + \Delta_{r-2} \ominus_{r-1} \ominus_r + \dots + \Delta_1 \ominus_2 \ominus_3 \dots \ominus_r)^m X_1 X_2 \dots X_r,\end{aligned}$$

wo die Beziehungen, die zwischen Zeichen und Functionen herrschen, durch 1, 2, 3 r angedeutet sind.

§. 58.

Legen wir die Gleichung (269.) zu Grunde und gehen von ihr aus und zu den höhern Aufstufungen über, so werden wir andere Resultate erhalten. Wir scheiden zu dem Ende die einfachen Functionen aus, und deuten die Beziehungen der Geschäfte, die an ihnen ausgeführt werden sollen, durch angehängte kleine Buchstaben an. Dadurch wird

$$\zeta XY = (\ominus_x \zeta_y - \Delta_x) XY.$$

Wird diese Gleichung mit ζ vervielfacht und dann die zusammengesetzte Function selbst wieder nach der hier gegebenen Vorschrift behandelt, so entsteht:

$$\zeta^2 XY = (\ominus_x \zeta_y - \Delta_x) \zeta XY = (\ominus_x \zeta_y - \Delta_x) (\ominus_x \zeta_y - \Delta_x) XY = (\ominus_x \zeta_y - \Delta_x)^2 XY.$$

Eben so gewinnen wir für die dritte Aufstufung:

$$\zeta^3 XY = (\ominus_x \zeta_y - \Delta_x)^3 XY,$$

und allgemein für die m te:

$$279. \quad \zeta^m XY = (\ominus_x \zeta_y - \Delta_x)^m XY.$$

Die entwickelte Darstellung ist folgende:

$$288. \quad \zeta^m XY \\ = X_m \zeta^m Y_0 - \frac{m}{1} \Delta X_{m-1} \zeta^{m-1} Y_0 + \frac{m(m-1)}{1.2} \Delta^2 X_{m-2} \zeta^{m-2} Y_0 - \dots (-)^m \Delta^m X_0 Y_0.$$

Das nämliche Resultat würde durch eine andere Anordnung der einfachen Functionen herbeigeführt werden. Jedoch könnte immer nur eine Verschiedenheit in der Form Statt finden.

Sehr leicht läßt sich von einer Function, die aus zwei Factoren besteht, auf Functionen, die aus drei und mehr bestehen, übergehen. Setzen wir nämlich YZ statt Y , so wird aus (269.):

$$\zeta XYZ = X_1 \zeta(YZ) - \Delta X \cdot YZ.$$

Wird ζYZ nach (269.) behandelt, so entsteht

$$\zeta XYZ = X_1 Y_1 \zeta Z_1 - X_1 \Delta Y_0 Z_0 - \Delta X_0 Y_0 Z_0.$$

Werden die einfachen Functionen ausgeschieden, und die öfters gewählte Bezeichnung eingeführt: so wird

$$\zeta XYZ = (\ominus_x \ominus_y \zeta_z - \ominus_x \Delta_y - \Delta_x) XYZ.$$

Das Vervielfachen mit ζ und Anwenden der vorliegenden Vorschrift auf die gefundene Darstellung giebt:

$$\begin{aligned}
\zeta^2 XYZ &= (\Theta_x \Theta_y \zeta_z - \Theta_x \Delta_y - \Delta_x) \zeta XYZ \\
&= (\Theta_x \Theta_y \zeta_z - \Theta_x \Delta_y - \Delta_x) (\Theta_x \Theta_y \zeta_z - \Theta_x \Delta_y - \Delta_x) XYZ \\
&= (\Theta_x \Theta_y \zeta_z - \Theta_x \Delta_y - \Delta_x)^2 XYZ.
\end{aligned}$$

Eben so die dritte

$$\zeta^3 (XYZ) = (\Theta_x \Theta_y \zeta_z - \Theta_x \Delta_y - \Delta_x)^3 XYZ,$$

und allgemein

$$\zeta^m XYZ = (\Theta_x \Theta_y \zeta_z - \Theta_x \Delta_y - \Delta_x)^m XYZ.$$

Das gefundene Gesetz dehnt sich leicht auf jede Anzahl von Functionen aus und es ist

$$281. \quad \zeta^m X_1 X_2 \dots X_r = (\Theta_1 \Theta_2 \dots \zeta_r - \Theta_1 \Theta_2 \dots \Delta_{r-1} - \Theta_1 \Theta_2 \dots \Delta_{r-2} \dots \Delta_1) X_1 X_2 X_3 \dots X_r.$$

Anmerkung. Bei allen den gefundenen Gleichungen ist zu bemerken, daß sie noch immer in ihrer Allgemeinheit gelten, wenn auch Stellenzahlen der Functionen um eine GröÙe vermehrt oder vermindert werden.

§. 50.

In den bisherigen Gleichungen wurden die Aufstufungen der zusammengesetzten Functionen, durch die Aufstufungen und die Unterschiede der einfachen dargestellt. Keine Gleichung führte auf Aufstufungen allein. Man kann jedoch auch eine Darstellung finden, die nur auf den Aufstufungen der einfachen beruht. Sie hat das Merkwürdige, daß sie nur für Functionen gilt, die aus einer ungeraden Anzahl von einfachen bestehen. Um dies zu zeigen, betrachten wir die Aufstufungen der 3 und 4theiligen Functionen, und gehen auf die Grundidee der Aufstufungen zurück. Es ist

$$\zeta XYZ = X_1 Y_1 Z_1 + X_0 Y_0 Z_0.$$

Zählt man auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens die Ausdrücke $X_0 Y_1 Z_1$, $X_0 Y_0 Z_1$ in der angegebenen Ordnung zu und ab, so hat man

$$\zeta XYZ = X_1 Y_1 Z_1 + X_0 Y_1 Z_1 - X_0 Y_1 Z_1 - X_0 Y_0 Z_1 + X_0 Y_0 Z_1 + X_0 Y_0 Z_0.$$

Die Darstellung ist dem Werthe nach unverändert geblieben, und wir haben

$$\zeta XYZ = (X_1 + X_0) Y_1 Z_1 - X_0 (Y_1 + Y_0) Z_1 + X_0 Y_0 (Z_1 + Z_0),$$

und hieraus, da $X_1 + X_0 = \zeta X_0$, $Y_1 + Y_0 = \zeta Y_1$, $Z_1 + Z_0 = \zeta Z_0$ ist, entsteht

$$\zeta(XYZ) = \zeta X_1 Y_1 Z_1 - X_0 \zeta Y_0 Z_1 + \zeta X_0 Y_0 Z_0.$$

Scheidet man die Function XYZ aus, und führt die Bezeichnungen ein, so ist

$$282. \quad \zeta XYZ = (\zeta_x - \zeta_y \Theta_x + \zeta_x \Theta_y \Theta_x) XYZ.$$

Vervielfacht man mit ζ_1 und behandelt den Ausdruck auf der rechten Seite nach der vorstehenden Gleichung selbst, so hat man

$$\zeta^2 XYZ = (\zeta_z - \zeta_y \ominus_z + \zeta_x \ominus_y \ominus_z)^2 XYZ,$$

und allgemein

$$283. \quad \zeta^m XYZ = (\zeta_z - \zeta_y \ominus_z + \zeta_x \ominus_y \ominus_z)^m XYZ.$$

Eben so erhält man für eine aus 5 Factoren bestehende Function:

$$284. \quad \zeta^m XYZUV \\ = (\zeta_v - \zeta_u \ominus_v + \zeta_z \ominus_v \ominus_u - \zeta_y \ominus_z \ominus_v \ominus_u + \zeta_x \ominus_y \ominus_z \ominus_v \ominus_u)^m XYZVU$$

u. s. w., für alle Functionen, die aus einer ungeraden Anzahl einfacher Functionen bestehen. Diese Darstellungsweise aber läßt sich deswegen von einer ungeraden Anzahl Factoren gebrauchen, weil die Zahl der eingeschobenen Functionen gerade ist.

Eine ähnliche Darstellung läßt sich auch für die Functionen finden, die aus einer geraden Anzahl einfacher Functionen bestehen, wobei jedoch zu bemerken ist, daß in diesem Falle bei einer Function der Unterschied genommen werden muß.

Wählen wir zu dem Ende eine viertheilige Function, so ist ihre Aufstufung

$$\zeta(ZYZU) = X_1 Y_1 Z_1 U_1 + X_0 Y_0 Z_0 U_0.$$

Wird auf der rechten Seite $X_0 Y_1 Z_1 U_1$, $X_0 Y_0 Z_1 U_1$, $X_0 Y_0 Z_0 U_1$ in der vorstehenden Ordnung zu und ab gezählt, so ist

$$\begin{aligned} \zeta(XYZU) &= X_1 Y_1 Z_1 U_1 + X_0 Y_1 Z_1 U_1 - X_0 Y_1 Z_1 U_1 - X_0 Y_0 Z_1 U_1 + X_0 Y_0 Z_1 U_1 \\ &\quad + X_0 Y_0 Z_0 U_1 - X_0 Y_0 Z_0 U_1 + X_0 Y_0 Z_0 U_0 \\ &= (X_1 + X_0) Y_1 Z_1 U_1 - X_0 (Y_1 + Y_0) Z_1 U_1 + X_0 Y_0 (Z_1 + Z_0) U_1 \\ &\quad - X_0 Y_0 Z_0 (U_1 - U_0), \end{aligned}$$

und hieraus

$$\zeta(XYZU) = \zeta XYZ_1 U_1 - X_0 \zeta Y_0 Z_1 U_1 + X_0 Y_0 \zeta Z: U_1 - X_0 Y_0 Z_1 \Delta U_0,$$

oder

$$\zeta XYZU = (\zeta_z \ominus_y \ominus_z \ominus_u - \zeta_y \ominus_z \ominus_u + \zeta_x \ominus_u - \Delta_u) XYZU.$$

Dies führt zu folgender allgemeinen Darstellung:

$$285. \quad \zeta^m XYZU = \zeta_x \ominus_{y,z,u} - \zeta_y \ominus_{z,u} + \zeta_z \ominus_u - \Delta_u)^m XYZU.$$

Diese Darstellung läßt sich leicht auf jede Function, die aus einer geraden Anzahl Factoren besteht, ausdehnen. Sie führt den Unterschied der letzten Function mit sich, könnte jedoch bei einer andern Anordnung auch mit dem einer andern Function sich verbinden.

§. 60.

Da diese Darstellungen sämmtlich aus der Grundidee der Aufstufungen für einfache Functionen abgeleitet wurden, so müssen auch von ihnen alle Folgerungen gelten, die von jenen gelten. Wir haben bei den Aufstufungen der einfachen Functionen gefunden, daß im Allgemeinen die nämlichen Gesetze für die positiven Aufstufungen, wie für die negativen gelten; demnach gelten auch die so eben gefundenen Gesetze nicht nur von den positiven, sondern auch von den negativen Aufstufungen. Aus §. 56. ergeben sich also die nachstehenden Gleichungen, und zwar aus (274.):

$$286. \quad \zeta^m XY = (\zeta_y + \Delta_x \ominus_y)^{-m} XY,$$

oder bei anderer Stellung:

$$\begin{aligned} \zeta^{-m} XY &= (\Delta_x \ominus_y + \zeta_y)^{-m} XY, \\ \zeta^{-m} XYZ &= (\zeta_z + \Delta_y \ominus_z + \Delta_x \ominus_y \ominus_z)^{-m} XYZ \end{aligned}$$

u. s. w., aus (278.):

$$287. \quad \zeta^{-m} X_1 X_2 \dots X_r$$

$$= (\zeta_r + \Delta_{r-1} \ominus_r + \Delta_{r-2} \ominus_{r-1} \ominus_r + \dots + \Delta_1 \ominus_2 \ominus_3 \dots \ominus_r)^{-m} X_1 X_2 \dots X_r.$$

Auch die §. 58. gefundenen Gleichungen gelten für negative Aufstufungen, und man gewinnt aus No. 279.:

$$288. \quad \begin{cases} \zeta^m XY = (\ominus_x \zeta_y - \Delta_x)^{-m} XY, \\ \zeta^m XYZ = (\ominus_x \ominus_y \zeta_z - \ominus_x \Delta_y - \Delta_x)^{-m} XYZ \end{cases}$$

u. s. w.

Auch die §. 59. aufgefundenen Gleichungen gelten für negative Aufstufungen. Stellen wir die entwickelten Darstellungen der negativen Aufstufungen für zweitheilige Functionen zusammen, so erhalten wir aus (286.):

$$289. \quad \begin{cases} \zeta^{-1}(XY) = X_0 \zeta^{-1} Y_0 - \Delta X_0 \zeta^{-2} Y_1 + \Delta^2 X_0 \zeta^{-3} Y_2 - \dots \\ \zeta^{-2}(XY) = X_0 \zeta^{-2} Y_0 - 2 \Delta X_0 \zeta^{-3} Y_1 + 3 \Delta^2 X_0 \zeta^{-4} Y_2 - \dots \\ \zeta^{-3}(XY) = X_0 \zeta^{-3} Y_0 - 3 \Delta X_0 \zeta^{-4} Y_1 + 6 \Delta^2 X_0 \zeta^{-5} Y_2 - \dots \end{cases}$$

u. s. w.

Diese Gleichungen gelten für jede zusammengesetzte Function, wie auch die Stellenzahlen der zusammengesetzten Function beschaffen sein mögen. Erhöhen wir sie daher um p , so erhalten wir:

$$290. \quad \begin{cases} \zeta^{-1} X_p Y_p = X_p \zeta^{-1} Y_p - \Delta X_p \zeta^{-2} Y_{p+1} + \Delta^2 X_p \zeta^{-3} Y_{p+2} - \dots \\ \zeta^{-2} X_p Y_p = X_p \zeta^{-2} Y_p - 2 \Delta X_p \zeta^{-3} Y_{p+1} + 3 \Delta^2 X_p \zeta^{-4} Y_{p+2} - \dots \\ \zeta^{-3} X_p Y_p = X_p \zeta^{-3} Y_p - 3 \Delta X_p \zeta^{-4} Y_{p+1} + 6 \Delta^2 X_p \zeta^{-5} Y_{p+2} - \dots \end{cases}$$

u. s. w.

Aus (288.) aber erhalten wir folgende Darstellungen:

$$291. \quad \begin{cases} \zeta^{-1} XY = X_{-1} \zeta^{-1} Y_0 + \Delta X_{-2} \zeta^{-2} Y_0 + \Delta^2 X_{-3} \zeta^{-3} Y_0 + \dots \\ \zeta^{-2} XY = X_{-2} \zeta^{-2} Y_0 + 2 \Delta X_{-3} \zeta^{-3} Y_0 + 3 \Delta^2 X_{-4} \zeta^{-4} Y_0 + \dots \\ \zeta^{-3} XY = X_{-3} \zeta^{-3} Y_0 + 3 \Delta X_{-4} \zeta^{-4} Y_0 + 6 \Delta^2 X_{-5} \zeta^{-5} Y_0 + \dots \\ \dots \end{cases}$$

Werden die Stellenzahlen in p erhöht, so wird

$$292. \quad \begin{cases} \zeta^{-1} X_p Y_p = X_{p-1} \zeta^{-1} Y_p + \Delta X_{p-2} \zeta^{-2} Y_p + \Delta^2 X_{p-3} \zeta^{-3} Y_p + \dots \\ \zeta^{-2} X_p Y_p = X_{p-2} \zeta^{-2} Y_p + 2 \Delta X_{p-3} \zeta^{-3} Y_p + 3 \Delta^2 X_{p-4} \zeta^{-4} Y_p + \dots \\ \zeta^{-3} X_p Y_p = X_{p-3} \zeta^{-3} Y_p + 3 \Delta X_{p-4} \zeta^{-4} Y_p + 6 \Delta^2 X_{p-5} \zeta^{-5} Y_p + \dots \end{cases}$$

u. s. w.

§. 61.

Eine andere, sehr einfache Methode, die Aufstufungen der zusammengesetzten Functionen zu gewinnen, ergibt sich durch die Darstellung mittels der Unterschiede. Gehen wir von der Grundidee der Aufstufungen aus, so ist die erste Aufstufung einer zweitheiligen Function:

$$\zeta XY = X_1 Y_1 + XY = (X + \Delta X)(Y + \Delta Y) + XY.$$

Die in Klammern eingeschlossenen Ausdrücke lassen sich so darstellen:

$$\begin{aligned} X_1 &= (X + \Delta X) = (1 + \Delta_x) X, \\ Y_1 &= (Y + \Delta Y) = (1 + \Delta_y) Y, \end{aligned}$$

wo Δ_x, Δ_y wie oben, die Beziehung der Zunahme auf ihre ursprüngliche Function bezeichnen. Die Einführung dieser Darstellungen erzeugt die Gleichung

$$293. \quad \zeta XY = (1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y) XY + XY = [(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y) + 1] XY.$$

Wird diese Gleichung durch ζ vervielfacht, so entsteht

$$\zeta^2 XY = [(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y) + 1] \zeta XY.$$

Wird hierin ζXY nach (293.) behandelt, so hat man

$$\begin{aligned} \zeta^2 XY &= [(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y) + 1][(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y) + 1] XY \\ &= [1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y) + 1]^2 XY. \end{aligned}$$

Eben so gewinnt man für die dritte Aufstufung

$$\zeta^3 XY = [(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y) + 1]^2 \zeta XY = [(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y) + 1]^3 XY.$$

Dieser Entwicklungsgang bleibt unverändert derselbe, und es ist allgemein:

$$294. \quad \zeta^m XY = [(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y) + 1]^m XY.$$

Die Schlüsse, die von zweitheiligen Functionen gemacht wurden, lassen sich leicht auf dreitheilige ausdehnen. Es ist

$$\zeta XYZ = X_1 Y_1 Z_1 + X_0 Y_0 Z_0.$$

Da nun

$$X_1 = X + \Delta X = (1 + \Delta_x) X,$$

$$Y_1 = Y + \Delta Y = (1 + \Delta_y) Y,$$

$$Z_1 = Z + \Delta Z = (1 + \Delta_z) Z$$

gesetzt werden kann, so ist

$$\begin{aligned} \zeta XYZ &= (1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y)(1 + \Delta_z) XYZ + XYZ \\ &= [(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y)(1 + \Delta_z) + 1] XYZ. \end{aligned}$$

Wendet man die gleiche Ableitungs-Methode wie vorhin an, so findet man allgemein:

$$\zeta^m XYZ = [(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y)(1 + \Delta_z) + 1]^m XYZ.$$

u. s. w. für eine Function, die aus r einfachen Functionen zusammengesetzt ist:

$$295. \quad \zeta^m (X_1 X_2 \dots X_r) = [(1 + \Delta_1)(1 + \Delta_2) \dots (1 + \Delta_r) + 1] X_1 X_2 X_3 \dots X_r.$$

II. Darstellung der positiven und negativen Aufstufungen der zusammengesetzten Functionen, mit Hülfe der Differenziale.

§. 62.

Wie die Aufstufungen der einfachen Functionen, so auch lassen sich die der zusammengesetzten Differenziale darstellen. Der Taylorsche Lehrsatz giebt hierzu die bekannten Reihen:

$$\begin{aligned} X + \Delta X &= X + \frac{\Delta x \cdot \partial X}{1 \cdot \partial x} + \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X}{1 \cdot 2 \cdot (\partial x)^2} + \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (\partial x)^3} + \dots \\ &= (1 + \Delta x) X = e^{\frac{\Delta x \cdot \partial}{\partial x}} X, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y + \Delta Y &= Y + \frac{\Delta y \cdot \partial Y}{1 \cdot \partial y} + \frac{(\Delta y)^2 \partial^2 Y}{1 \cdot 2 \cdot (\partial y)^2} + \frac{(\Delta y)^3 \partial^3 Y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (\partial y)^3} + \dots \\ &= (1 + \Delta y) Y = e^{\frac{\Delta y \cdot \partial}{\partial y}} Y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z + \Delta Z &= Z + \frac{\Delta z \cdot \partial Z}{1 \cdot \partial z} + \frac{(\Delta z)^2 \partial^2 Z}{1 \cdot 2 \cdot (\partial z)^2} + \frac{(\Delta z)^3 \partial^3 Z}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (\partial z)^3} + \dots \\ &= (1 + \Delta z) Z = e^{\frac{\Delta z \cdot \partial}{\partial z}} Z, \end{aligned}$$

wenn

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

ist. Legen wir nun die im vorhergehenden §. gewonnenen Gleichungen zu Grunde, so gewinnen wir aus der Gleichung (293.), durch Einführung

der schicklichen Werthe, für die Darstellung der ersten Aufstufung einer zweitheiligen Function durch Differenziale:

$$296. \quad \zeta_{XY} = \left(e^{\frac{\Delta x \cdot \partial}{\partial x}} \cdot e^{\frac{\Delta y \cdot \partial}{\partial y}} + 1 \right) XY = \left(e^{\frac{\Delta x \cdot \partial}{\partial x} + \frac{\Delta y \cdot \partial}{\partial y}} + 1 \right) XY.$$

Die zweite Aufstufung wird durch Vervielfachen mit ζ gefunden, und es ist

$$\begin{aligned} \zeta^2 XY &= \left(e^{\frac{\Delta x \cdot \partial}{\partial x}} \cdot e^{\frac{\Delta y \cdot \partial}{\partial y}} + 1 \right) \zeta XY = \left(e^{\frac{\Delta x \cdot \partial}{\partial x}} \cdot e^{\frac{\Delta y \cdot \partial}{\partial y}} + 1 \right) \left(e^{\frac{\Delta x \cdot \partial}{\partial x}} \cdot e^{\frac{\Delta y \cdot \partial}{\partial y}} + 1 \right) XY \\ &= \left(e^{\frac{\Delta x \cdot \partial}{\partial x}} \cdot e^{\frac{\Delta y \cdot \partial}{\partial y}} + 1 \right)^2 XY. \end{aligned}$$

Für die dritte Aufstufung erhalten wir

$$\zeta^3 XY = \left(e^{\frac{\Delta x \cdot \partial}{\partial x}} \cdot e^{\frac{\Delta y \cdot \partial}{\partial y}} + 1 \right)^3 XY,$$

und allgemein für die m te Aufstufung einer zweitheiligen Function:

$$297. \quad \zeta^m XY = \left(e^{\frac{\Delta x \cdot \partial}{\partial x}} \cdot e^{\frac{\Delta y \cdot \partial}{\partial y}} + 1 \right)^m XY.$$

Der Übergang von einer zweitheiligen Function zu einer dreitheiligen ist leicht. Aus §. 61. erhalten wir

$$\zeta_{XYZ} = \left(e^{\frac{\Delta x \cdot \partial}{\partial x}} \cdot e^{\frac{\Delta y \cdot \partial}{\partial y}} \cdot e^{\frac{\Delta z \cdot \partial}{\partial z}} + 1 \right) XYZ,$$

und

$$\zeta^m XYZ = \left(e^{\frac{\Delta x \cdot \partial}{\partial x}} \cdot e^{\frac{\Delta y \cdot \partial}{\partial y}} \cdot e^{\frac{\Delta z \cdot \partial}{\partial z}} + 1 \right)^m XYZ;$$

für eine viertheilige ist

$$\zeta^m XYZU = \left(e^{\frac{\Delta x \cdot \partial}{\partial x}} \cdot e^{\frac{\Delta y \cdot \partial}{\partial y}} \cdot e^{\frac{\Delta z \cdot \partial}{\partial z}} \cdot e^{\frac{\Delta u \cdot \partial}{\partial u}} + 1 \right)^m XYZU$$

u. s. w. Die vorstehenden Darstellungen lassen sehr leicht den Schluß auf Functionen zu, die eine beliebige Zahl von Factoren haben.

§. 63.

Die im vorhergehenden §. gegebenen Formeln für die Darstellung der verschiedenen Aufstufungen mittelst der Differenziale gelten nicht nur für ein positives, sondern auch für ein negatives m , und sind allgemein. Ihre Darstellung ist jedoch nur formell. Um auch brauchbare Darstellungen für negative Aufstufungen, ins besondere zum Behufe weiterer Entwicklungen, zu gewinnen, suchen wir auf einem andern Wege entwickelte Reihen, betrachten aber nur die Entwicklungen zweitheiliger Functionen, und legen zu dem Ende folgende aus (275.) entlehnte allgemeine Reihe zu Grunde:

$$\zeta^{-m} X_p Y_p = X_p \zeta^{-m} Y_p - m \Delta X_p \zeta^{-m-1} X_p + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 X_p \zeta^{-m+2} X_{p+2} \dots$$

worin die negativen Aufstufungen einer zusammengesetzten Function auf

die negativen Aufstufungen und positiven Unterschiede der einfachen Functionen zurückgeführt sind. Die negativen Aufstufungen behalten wir bei. Die positiven Unterschiede stellen wir aber mittels der Gleichungen des §. 42. dar, und wählen zu dem Ende statt der Gleichung (212.), der Kürze wegen, folgende Darstellung:

$$\Delta^m X_p = 1.2.3 \dots m C_1^m \frac{(\Delta x)^m \partial^m X_p}{1.2 \dots m (\partial x)^m} + 1.2 \dots m C_2^m \frac{(\Delta x)^{m+1} \partial^{m+1} X_p}{1.2 \dots (m+1) (\partial x)^{m+1}} \\ + 1.2.3 \dots m C_3^m \frac{(\Delta x)^{m+2} \partial^{m+2} X_p}{1.2 \dots (m+1) (\partial x)^{m+2}} + \dots$$

Dies führt zu folgender Darstellung:

$$\begin{aligned} 298. \quad \zeta^{-m} X_p Y_p &= \zeta^{-m} Y_p X_p \\ &- m \zeta^{-m-1} Y_{p+1} \left[\frac{\Delta x \cdot \partial X_p}{1. \partial x} + \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X_p}{1.2. (\partial x)^2} + \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X_p}{1.2.3. (\partial x)^3} + \dots \right] \\ &+ \frac{m(m+1)}{1.2} \zeta^{-m-2} Y_{p+2} \left[1.2. \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X_p}{1.2. (\partial x)^2} + 1.2. \frac{C_2^2 (\Delta x)^3 \partial^3 X_p}{1.2.3. (\partial x)^3} + 1.2. \frac{C_2^2 (\Delta x)^4 \partial^4 X_p}{1.2.3.4. (\partial x)^4} + \dots \right] \\ &- \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} \zeta^{-m-3} Y_{p+3} \left[1.2.3. \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X_p}{1.2.3. (\partial x)^3} + 1.2.3. \frac{C_2^3 (\Delta x)^4 \partial^4 X_p}{1.2.3.4. (\partial x)^4} \right. \\ &\quad \left. + 1.2.3. \frac{C_3^3 (\Delta x)^5 \partial^5 X_p}{1.2.3.4.5. (\partial x)^5} + \dots \right] \\ &+ \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3.4} \zeta^{-m-4} Y_{p+4} \left[1.2.3.4. \frac{(\Delta x)^4 \partial^4 X_p}{1.2.3.4. (\partial x)^4} + 1.2.3.4. \frac{C_2^4 (\Delta x)^5 \partial^5 X_p}{1.2 \dots 6. (\partial x)^5} \right. \\ &\quad \left. + 1.2.3.4. \frac{C_3^4 (\Delta x)^6 \partial^6 X_p}{1.2 \dots 5. (\partial x)^6} + \dots \right] \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist nach den negativen Aufstufungen der Function Y_p geordnet. Ordnen sie wir nach den Differenzialen der Function X_p , so erhalten wir

$$\begin{aligned} 299. \quad \zeta^{-m} X_p Y_p &= X_p \zeta^{-m} Y_p \\ &- \frac{\Delta x \cdot \partial X_p}{1. \partial x} \cdot \frac{m}{1} \zeta^{-m-1} Y_{p+1} \\ &+ \frac{(\Delta x)^2 \cdot \partial^2 X_p}{1.2. (\partial x)^2} \left[-C_2^1 \frac{m}{1} \zeta^{-m-1} Y_{p+1} + 1.2. C_1^2 \frac{m(m+1)}{1.2} \zeta^{-m-2} Y_{p+2} \right] \\ &+ \frac{(\Delta x)^3 \cdot \partial^3 X_p}{1.2.3. (\partial x)^3} \left[-C_3^1 \frac{m}{1} \zeta^{-m-1} Y_{p+1} + 1.2. C_2^2 \frac{m(m+1)}{1.2} \zeta^{-m-2} Y_{p+2} \right. \\ &\quad \left. - 1.2.3. C_1^3 \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} \zeta^{-m-3} Y_{p+3} \right] \\ &+ \frac{(\Delta x)^4 \partial^4 X_p}{1.2.3.4. (\partial x)^4} \left[-C_4^1 \frac{m}{1} \zeta^{-m-1} Y_{p+1} + 1.2. C_3^2 \frac{m(m+1)}{1.2.3} \zeta^{-m-2} Y_{p+2} \right. \\ &\quad \left. - 1.2.3. C_2^3 \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} \zeta^{-m-3} Y_{p+3} + 1.2.3.4. C_1^4 \frac{m \dots (m+3)}{1.2.3.4} \zeta^{-m-4} Y_{p+4} \right], \end{aligned}$$

u. s. w.

Man erkennt leicht, daß die in Klammern eingeschlossenen Ausdrücke der Reihe nach mit abwechselnden Zeichen, mit $\frac{m}{1}$, $\frac{m(m+1)}{1.2}$, $\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}$..., mit den Facultäten 1, 1.2, 1.2.3, 1.2.3.4, und mit C verbunden sind. Die obern Zahlen von C fallen, die obern steigen. Die Summen dieser Zahlen übertreffen die Exponenten des Differenzials um die Einheit. Das allgemeine Gesetz liegt in folgender Reihe:

$$\frac{(\Delta x)^r \partial^r X_p}{1.2 \dots r (\partial x)^r} \left[-\frac{m}{1} C_r \zeta^{-m-1} Y_{p+1} + 1.2 C_{r-1} \frac{m(m+1)}{1.2} \zeta^{-m-2} Y_{p+2} \dots \right. \\ \left. (-)^r 1.2 \dots r C_1 \frac{m(m+2) \dots (m+r-1)}{1.2 \dots r} \zeta^{-m-r} Y_{p+r} \right].$$

Aus dieser allgemeinen Bildungsweise (299.) leiten sich leicht folgende specielle Fälle ab. Wird $m=1$ gesetzt, so ist

$$\begin{aligned} 300. \quad & \zeta^{-1} X_p Y_p \\ = & X_p \zeta^{-1} Y_p - \frac{\Delta x \cdot \partial X_p}{\partial x} \zeta^{-2} Y_{p+1} \\ & + \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X_p}{1.2 (\partial x)^2} [-\zeta^{-2} Y_{p+1} + 2 \zeta^{-3} Y_{p+2}] \\ & + \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X_p}{1.2.3 (\partial x)^3} [-\zeta^{-2} Y_{p+1} + 6 \zeta^{-3} Y_{p+2} - 6 \zeta^{-4} Y_{p+3}] \\ & + \frac{(\Delta x)^4 \partial^4 X_p}{1.2.3.4 (\partial x)^4} [-\zeta^{-2} Y_{p+1} + 14 \zeta^{-3} Y_{p+2} - 36 \zeta^{-4} Y_{p+3} + 24 \zeta^{-5} Y_{p+4}]. \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Wird $m=2$ gesetzt, so entsteht

$$\begin{aligned} & \zeta^{-2} X_p Y_p \\ = & X_p \zeta^{-2} Y_p - 2 \frac{(\Delta x) \partial X_p}{\partial x} \zeta^{-3} Y_{p+1} \\ & + \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X_p}{1.2 (\partial x)^2} [-2 \zeta^{-3} Y_{p+1} + 6 \zeta^{-4} Y_{p+2}] \\ & + \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X_p}{1.2.3 (\partial x)^3} [-2 \zeta^{-3} Y_{p+1} + 15 \zeta^{-4} Y_{p+2} - 24 \zeta^{-5} Y_{p+3}] \\ & + \frac{(\Delta x)^4 \partial^4 X_p}{1.2.3.4 (\partial x)^4} [-2 \zeta^{-4} Y_{p+1} + 42 \zeta^{-4} Y_{p+2} - 144 \zeta^{-5} Y_{p+3} + 120 \zeta^{-6} Y_{p+4}]. \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

§. 64.

Legen wir die aus (288.) entnommene Gleichung

$$\zeta^{-m} X_p Y_p = X_{p-m} \zeta^{-m} Y_p + \frac{m}{1} \Delta X_{p-m-1} \zeta^{-m-1} Y_p + \frac{m(m+1)}{1.2} \Delta^2 X_{p-m-2} \zeta^{-m-2} Y_p + \dots$$

zu Grunde, und stellen die Unterschiede durch Differenziale dar, während wir die negativen Aufstufungen der andern Function beibehalten, so erhal-

ten wir folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}
 & 301. \quad \zeta^{-m} X_p Y_p \\
 = & X_{p-m} \zeta^{-m} Y_p \\
 & + m \zeta^{-m-1} Y_p \left[\frac{\Delta x \cdot \partial X_{p-m-1}}{1 \cdot \partial x} + \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X_{p-m-1}}{1.2.(\partial x)^2} + \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X_{p-m-1}}{1.2.3.(\partial x)^3} + \dots \right] \\
 & + \frac{m(m+1)}{1.2} \zeta^{-m-1} Y_p \left[1.2. \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X_{p-m-1}}{1.2(\partial x)^2} + 1.2. \frac{C_2^2 (\Delta x)^3 \partial^3 X_{p-m-2}}{1.2.3(\partial x)^3} \right. \\
 & \quad \left. + 1.2. \frac{C_2^2 (\Delta x)^4 \partial^4 X_{p-m-2}}{1.2.3.4.(\partial x)^4} + \dots \right] \\
 & + \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} \zeta^{-m-3} Y_p \left[1.2.3. \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X_{p-m-3}}{1.2.3(\partial x)^3} + 1.2.3. \frac{C_2^2 (\Delta x)^4 \partial^4 X_{p-m-3}}{1.2.3.4(\partial x)^4} \right. \\
 & \quad \left. + 1.2.3. \frac{C_2^3 (\Delta x)^5 \partial^5 X_{p-m-3}}{1.2.3.4.5(\partial x)^5} + \dots \right] \\
 & + \frac{m \dots (m+3)}{1.2.3.4} \zeta^{-m-4} Y_p \left[1.2.3.4. \frac{(\Delta x)^4 \partial^4 X_{p-m-4}}{1.2.3.4(\partial x)^4} + 1.2.3.4. \frac{C_2^2 (\Delta x)^5 \partial^5 X_{p-m-4}}{1.2 \dots 5(\partial x)^5} \right. \\
 & \quad \left. + 1.2.3.4. \frac{C_2^4 (\Delta x)^6 \partial^6 X_{p-m-4}}{1.2 \dots 6(\partial x)^6} + \dots \right]
 \end{aligned}$$

u. s. w.

Diese Reihe ist keiner Umformung, wie die Gleichung (298.), fähig, weil die Stellenzahlen der Functionen, welche mit den Differenzialen verbunden sind, nicht unter einander harmoniren.

Die in diesem §. mitgetheilten Reihen sind ihrer Natur nach unendlich; sie brechen ab, wenn die Differenziale der Functionen, die in der Darstellung vorkommen, in 0 übergehen.