Ueber eine besondere Classe discontinuirlicher Gruppen reeller linearer Substitutionen.

(Mit einer Figurentafel).

Von

ROBERT FRICKE in Berlin.

Herr Poincaré hat in seiner Abhandlung*) „*Les fonctions fuchsienues et l'Arithmétique*“ ein sehr merkwürdiges Princip entwickelt, von den indefiniten ternären quadratischen Formen aus unendliche Gruppen linearer Substitutionen einer Variabeln zu definiren; und zwar gehören die so auf arithmetischem Wege zu gewinnenden Gruppen zu denen, die einen endlichen Fundamentalbereich besitzen**). Bei dem grossen Werthe, welchen die gedachten Entwicklungen Poincaré's sowohl für die Gruppentheorie wie Arithmetik besitzen, sind vielleicht die folgenden Specialentwicklungen über den in Rede stehenden Gegenstand von einigem Interesse. Wir ziehen etwa nur Formen der Gestalt $(ax^2 + by^2 + cz^2)$ heran und unter ihnen nur solche von Primzahldeterminante q . Es soll sich also um die Formen der Gestalt $(\pm qx^2 \mp y^2 - z^2)$ handeln, q dabei als positive Primzahl gedacht, und wenn wir wiederum hierbei nur die Formen $(qx^2 - y^2 - z^2)$ berücksichtigen, so geschieht dies im wesentlichen deshalb, weil die Formen $(-qx^2 + y^2 - z^2)$ durchgehends die Null darzustellen vermögen und dieserhalb, wie wir noch sehen werden, auf bekannte Gegenstände zurückführen. Es soll also gelten, für die Formen $(qx^2 - y^2 - z^2)$ den Ansatz Poincaré's zu illustriren bez. zur Durchbildung zu bringen.

*) Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4^{te} Folge, Bd. 3 (1887).

**) Bezüglich der hier zu brauchenden Begriffsbestimmungen und Benennungen muss ich der Kürze halber auf meine Bearbeitung der Vorlesungen F. Klein's über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen (Bd. 1, Leipzig, 1890) verweisen.

Erster Theil. *)

Aufstellung aller ganzzahligen Substitutionen der Form

$$(qx^2 - y^2 - z^2)$$

in sich, sowie der entsprechenden Substitutionen der einzelnen Veränderlichen ω .

§ 1.

Allgemeine Sätze über die Transformation einer ternären quadratischen Form in sich.

Es sei $f(x, y, z)$ eine noch nicht näher specificirte, indefinite ternäre quadratische Form, die also beliebige reelle Coefficienten besitzt und, mit Null identisch gesetzt, einen reellen Kegelschnitt darstellt. Es möge ferner in

$$(1) \quad S: \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{cases}$$

eine Substitution mit irgend welchen reellen Coefficienten vorliegen, welche der Bedingung

$$(2) \quad f(x', y', z') = f(x, y, z)$$

genügt und also f in sich transformirt. Diese Substitution S hat alsdann mehrere wichtige Eigenschaften, die wir durch die folgende Entwicklung in Erfahrung bringen.

Man führe an Stelle der bisherigen Variablen die neuen ξ, η, ζ durch die Substitution

$$(3) \quad T: \begin{cases} \xi = c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z, \\ \eta = c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z, \\ \zeta = c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z \end{cases}$$

ein, und zwar bestimmen wir die Coefficienten c derart, dass $\xi = 0$ und $\zeta = 0$ zwei Tangenten von $f = 0$ mit willkürlich zu wählenden Berührungspunkten sind, während $\eta = 0$ die Verbindungslinie dieser Berührungspunkte darstellt. Es sind nach Wahl der Berührungspunkte die ξ, η, ζ je nur erst bis auf numerische Factoren bestimmt, und über die letzteren verfügen wir derart, dass einerseits die Form f in

*) Für die erste Hälfte dieses Theils kommen ausser Poincaré's gen. Arbeit ältere Entwicklungen von Hermite, Cayley u. a. in Betracht; inzwischen ist die Gestalt derselben für die vorliegenden Zwecke nicht ohne weiteres brauchbar. Die Beziehungen auf Aequivalenz und Reduction der ternären Formen bleiben im Texte ausserhalb der Entwicklung.

die neue Gestalt $f = \text{const.} (\xi\xi - \eta^2)$ übergeht, und dass andererseits die Determinante von T gleich 1 ist.

Jetzt entspricht jeder Substitution S , welche f in sich transformirt, eine Substitution $U = TST^{-1}$, welche dasselbe für $(\xi\xi - \eta^2)$ leistet, und umgekehrt correspondirt jeder Substitution U eine $S = T^{-1}UT$. Die Gesamtheit der Substitutionen U aber, die eine ∞^3 -fache Mannigfaltigkeit darstellt, lässt sich leicht charakterisiren. Durch eine Substitution U werden nämlich $\xi = 0$ und $\eta = 0$ wieder in Tangenten $\xi' = 0$, $\eta' = 0$ von $\xi\eta - \zeta^2 = 0$ transformirt, während $\eta' = 0$ die Verbindungslinie der neuen Berührungspunkte ist. Dieserhalb dürfen wir, wie man leicht ins einzelne nachweist, für U die allgemeine Gestalt in Ansatz bringen:

$$(4) \quad U: \begin{cases} \xi' = \xi\alpha^2 + 2\eta\alpha\gamma + \zeta\gamma^2, \\ \eta' = \xi\alpha\beta + \eta(\alpha\delta + \beta\gamma) + \zeta\gamma\delta, \\ \zeta' = \xi\beta^2 + 2\eta\beta\delta + \zeta\delta^2, \end{cases}$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gewisse reelle Zahlen sind. Eine einfache Rechnung liefert hier

$$\xi'\zeta' - \eta'^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 (\xi\xi - \eta^2),$$

so dass die übrigen willkürlichen reellen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der einen Bedingung zu unterworfen sind

$$(5) \quad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1.$$

Je nachdem hier das obere oder untere Zeichen stattfindet, nennen wir U eine *Substitution oder Operation der ersten bez. der zweiten Art*. Diese Fallunterscheidung behält ihre Bedeutung beim Rückgang zu den Substitutionen S . Um also bei einer Substitution S zu unterscheiden, ob sie von der ersten oder zweiten Art ist, haben wir S in das entsprechende U überzuführen, alsdann vorkommenden Falls einen (für die Transformation von f in sich gleichgültigen) Zeichenwechsel der neun Coefficienten auszuführen, um direct die Gestalt (4) mit reellen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu erreichen. Diese letzteren Zahlen sind dann, wie man sieht, bis aufs Zeichen bestimmt und also ist $(\alpha\delta - \beta\gamma)$ absolut fixirt. — Man bemerke übrigens noch, dass die Determinante der Substitution (4) ± 1 oder -1 ist, je nachdem U zur ersten oder zweiten Art gehört.

Ist U von der ersten Art, so besitzt diese Substitution den Punkt mit den Coordinaten $\xi = 2\gamma, \eta = \delta - \alpha, \zeta = -2\beta$ zum Fixpunkte, und entsprechend wird durch dieselbe die lineare Form

$$-\beta\xi + (\alpha - \delta)\eta + \gamma\zeta$$

in sich übergeführt. Die Coordinaten des Fixpunktes werden gefunden, indem man in (4) $\xi' = \xi, \eta' = \eta, \zeta' = \zeta$ substituirt und alsdann nach ξ, η, ζ auflöst; die angegebene lineare Form giebt, gleich Null gesetzt,

die Polare des Fixpunktes in Bezug auf den Kegelschnitt $\xi\xi - \eta^2 = 0$. Für eine Operation zweiter Art U findet man durch die Substitution $\xi' = -\xi$, $\eta' = -\eta$, $\zeta' = -\zeta$ wiederum den Punkt $(2\gamma, \delta - \alpha, -2\beta)$ als Fixpunkt, aber jetzt wechselt $(-\beta\xi + (\alpha - \delta)\eta + \gamma\zeta)$ bei Ausübung von U das Zeichen.

Indem wir bei Rückgang zu S einen Zeichenwechsel der neun Coefficienten vermeiden, haben wir ohne weiteres die Sätze: Ist S von der ersten Art und also von der Determinante $+1$, so findet man einen Fixpunkt von S durch die Substitution $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$; sind dessen Coordinaten x_0, y_0, z_0 , so wird die lineare Form

$$(6) \quad x_0 \frac{\partial f}{\partial x} + y_0 \frac{\partial f}{\partial y} + z_0 \frac{\partial f}{\partial z}$$

unverändert durch S in sich übergeführt. Gehört S zur zweiten Art (wo sie also die Determinante -1 hat), so giebt die Substitution $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = -z$ einen Fixpunkt (x_0, y_0, z_0) , und die zugehörige lineare Form (6) wechselt bei Ausübung von S das Zeichen.

Nun aber möge man im letzteren Falle einer Operation zweiter Art zugleich das Zeichen der neun Coefficienten der Operation S ändern, wodurch S die Determinante $+1$ erhält; alsdann gewinnt man durch die Substitution $x' = +x$, $y' = +y$, $z' = +z$ den gerade genannten Fixpunkt (x_0, y_0, z_0) , und (6) geht nun ohne Zeichenwechsel in sich über, während doch auf der anderen Seite die geometrische Bedeutung und damit auch die Art von S eine Veränderung nicht erlitten hat. Man wolle also für später festhalten, dass in Anbetracht der gerade entwickelten Sätze die Vorzeichenwahl der neun Substitutionscoefficienten von Belang ist.

§ 2.

Allgemeine Gestalt der ternären Substitutionen, welche die Form

$$f = qx^2 - y^2 - z^2 \text{ in sich transformiren.}$$

Indem wir jetzt f mit unserer speciellen Form $f = qx^2 - y^2 - z^2$ identificiren, wollen wir die allgemeine Gestalt der zugehörigen Substitutionen S ausrechnen. Wir gehen davon aus, dass S im Sinne des vorigen Paragraphen den Fixpunkt (x_0, y_0, z_0) besitzt, welch' letzteren wir willkürlich auswählen; nur soll vorerst der Fall, dass (x_0, y_0, z_0) auf dem Kegelschnitt $f = 0$ liegt, sowie auch der Punkt $y_0 = z_0 = 0$ ausgeschlossen sein; ersteren Fall müssen wir hernach besonders betrachten, der letztere wird sich von selbst mit erledigen. Indem wir aber nach allen Substitutionen S mit dem Fixpunkt (x_0, y_0, z_0) und der Determinante 1 suchen, werden wir, wie wir vorhin sahen, sogleich die Gesammtheit der für f in Betracht kommenden Operationen erster und zweiter Art gewinnen.

Die gesuchte Substitution S wird mit (x_0, y_0, z_0) zugleich die lineare Form $(qx_0 - yy_0 - zz_0)$ in sich überführen. Um demgemäss S zu berechnen, wolle man folgende Transformation des Coordinatensystems ausführen:

$$(1) \quad \begin{cases} X = x \cdot (y_0^2 + z_0^2) - y \cdot x_0 y_0 - z \cdot x_0 z_0, \\ Y = y \cdot z_0 - z \cdot y_0, \\ Z = x \cdot qx_0 - y \cdot y_0 - z \cdot z_0, \end{cases}$$

wobei die Determinante von (1) die von Null verschiedene Zahl ist:

$$(2) \quad D = (y_0^2 + z_0^2) (qx_0^2 - y_0^2 - z_0^2) = (y_0^2 + z_0^2) \cdot f_0.$$

Das neue Coordinatendreieck der X, Y, Z ist so gewählt, dass jede Ecke der Pol der gegenüber liegenden Seite in Bezug auf $f = 0$ ist. Das spricht sich zugleich in der transformirten Gestalt von f aus, für welche wir erhalten:

$$(3) \quad -Df = qX^2 + f_0 Y^2 - (y_0^2 + z_0^2) Z^2.$$

Durch (1) wird S in eine Substitution der Gestalt

$$(4) \quad S' : \begin{cases} X' = aX + bY, \\ Y' = cX + dY, \\ Z' = Z \end{cases}$$

übergeführt, welche die Determinante 1 besitzt und (3) in sich transformirt. Indem wir hier noch für a, b, c, d

$$a = \frac{r}{D}, \quad b = \frac{s}{D}, \quad c = \frac{t}{D}, \quad d = \frac{u}{D}$$

schreiben, sind r, s, t, u vier reelle Zahlen der Determinante

$$(5) \quad ru - st = D^2.$$

Diese vier Zahlen sind nun so zu bestimmen, dass die Gleichung

$$q\left(\frac{r}{D}X + \frac{s}{D}Y\right)^2 + f_0\left(\frac{t}{D}X + \frac{u}{D}Y\right)^2 = qX^2 + f_0Y^2$$

identisch besteht, was explicite die drei Bedingungen giebt:

$$\begin{aligned} qr^2 + f_0 t^2 &= qD^2, \\ qs^2 + f_0 u^2 &= f_0 D^2, \\ qrs + f_0 tu &= 0. \end{aligned}$$

Wir genügen denselben und zugleich (5) in allgemeinsten Weise dadurch, dass wir $r = u, s = -f_0 v, t = qv$ schreiben und die zwei reellen Zahlen u, v der Bedingung

$$(6) \quad u^2 + qf_0 \cdot v^2 = D^2$$

unterwerfen. Die Substitution S' nimmt daraufhin die Gestalt an:

$$(7) \quad X' = \frac{u}{D} \cdot X - \frac{f_0 v}{D} \cdot Y, \quad Y' = \frac{qv}{D} \cdot X + \frac{u}{D} \cdot Y, \quad Z' = Z,$$

während wir für die ursprüngliche Substitution S die neun Coefficienten berechnen:

$$\begin{vmatrix} 1 + (-y_0^2 - z_0^2) \cdot \frac{u-D}{Df_0}, & x_0 y_0 \cdot \frac{u-D}{Df_0} + \frac{z_0 v}{D}, & x_0 z_0 \cdot \frac{u-D}{Df_0} - \frac{y_0 v}{D} \\ -q x_0 y_0 \cdot \frac{u-D}{Df_0} + \frac{q z_0 v}{D}, & 1 + (q x_0^2 - z_0^2) \cdot \frac{u-D}{Df_0}, & y_0 z_0 \cdot \frac{u-D}{Df_0} - \frac{q x_0 v}{D} \\ -q x_0 z_0 \cdot \frac{u-D}{Df_0} - \frac{q y_0 v}{D}, & y_0 z_0 \cdot \frac{u-D}{Df_0} + \frac{q x_0 v}{D}, & 1 + (q x_0^2 - y_0^2) \cdot \frac{u-D}{Df_0} \end{vmatrix}.$$

Ist jetzt der Punkt (x_0, y_0, z_0) auf dem Kegelschnitt $f = 0$ gelegen, d. h. haben wir $f_0 = 0$, so führe man folgende neue Variablen ein:

$$\begin{aligned} X &= q x_0 x + y_0 y + z_0 z, \\ Y &= z_0 y - y_0 z, \\ Z &= q x_0 x - y_0 y - z_0 z, \end{aligned}$$

wodurch f in

$$q x_0^2 \cdot f = XZ - Y^2$$

transformirt wird. Die Substitution S geht über in

$$\begin{aligned} X' &= X + 2\gamma Y + \gamma^2 Z, \\ Y' &= \pm (Y + \gamma Z), \\ Z' &= Z, \end{aligned}$$

wobei γ beliebig bleibt und das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem wir mit einer Operation erster oder zweiter Art zu thun haben. Für die in Betracht kommenden Operationen erster Art S finden wir von hier aus rückwärts sehr leicht die Gestalt:

$$(9) \quad \begin{vmatrix} \frac{\gamma^2 + 2}{2}, & \frac{\gamma(2z_0 - \gamma y_0)}{2q x_0}, & -\frac{\gamma(2y_0 + \gamma z_0)}{2q x_0} \\ \frac{\gamma(2z_0 + \gamma y_0)}{2x_0}, & -\frac{\gamma^2 y_0^2}{2q x_0^2} + 1, & -\frac{\gamma(2q x_0^2 + \gamma y_0 z_0)}{2q x_0^2} \\ -\frac{\gamma(2y_0 - \gamma z_0)}{2x_0}, & \frac{\gamma(2q x_0^2 - \gamma y_0 z_0)}{2q x_0^2}, & -\frac{\gamma^2 z_0^2}{2q x_0^2} + 1 \end{vmatrix}.$$

Die hierher gehörigen Operationen zweiter Art brauchen wir nicht noch explicite auszurechnen.

Wechseln wir das Vorzeichen von v bez. γ ohne Aenderung der übrigen Bestandtheile der Formeln (8) und (9), so gelangen wir in beiden Fällen zu der zur gerade betrachteten Operation S inversen S^{-1} , wie man am leichtesten unter Gebrauch der entsprechend für die X, Y, Z bestehenden Substitutionen beweist. Bezeichnen wir übrigens die zum Gliede a_{ik} von S gehörende erste Unterdeterminante durch A_{ik} , so kleidet sich der gerade gefundene Satz in die neun Formeln

$$(10) \quad \begin{cases} A_{11} = a_{11}, & A_{12} = -q a_{12}, & A_{13} = -q a_{13}, \\ A_{21} = -\frac{1}{q} a_{21}, & A_{22} = a_{22}, & A_{23} = a_{23}, \\ A_{31} = -\frac{1}{q} a_{31}, & A_{32} = a_{32}, & A_{33} = a_{33}, \end{cases}$$

wie man mit Rücksicht auf die Gestalt der Substitutionen (8) und (9) leicht erhärtet.

§ 3.

Arteintheilung der Substitutionen S .

Für die Substitutionen, deren Fixpunkt auf dem Kegelschnitt $f = 0$ gelegen ist, haben wir nur die erste Art unter (9) § 2 berücksichtigt; bei der Operation (8) § 2 hingegen müssen wir jetzt noch nachträglich entscheiden, ob dieselbe zur ersten oder zweiten Art gehört. Sei erstlich $f_0 > 0$, so knüpfen wir an die Gestalt (7) unserer Substitution und schreiben statt X, Y, Z die neuen Veränderlichen

$$\xi = X\sqrt{q} + Z\sqrt{y_0^2 + z_0^2}, \quad \eta = Y\sqrt{f_0}, \quad \zeta = -X\sqrt{q} + Z\sqrt{y_0^2 + z_0^2}.$$

Dadurch geht f , von einem constanten Factor abgesehen, in $(\xi\xi - \eta^2)$ über, und die Substitution (7) nimmt die Gestalt an:

$$\xi' = \frac{u+D}{2D} \cdot \xi - \frac{v\sqrt{qf_0}}{D} \cdot \eta + \frac{D-u}{2D} \cdot \xi,$$

$$\eta' = \frac{v\sqrt{qf_0}}{2D} \cdot \xi + \frac{u}{D} \cdot \eta - \frac{v\sqrt{qf_0}}{2D} \cdot \xi,$$

$$\zeta' = \frac{D-u}{2D} \cdot \xi + \frac{v\sqrt{qf_0}}{D} \cdot \eta + \frac{u+D}{2D} \cdot \xi,$$

welche sich unter (4) § 1 (möglicherweise nach Zeichenwechsel der Coefficienten) subsumiren muss. Da indessen im gegenwärtigen Falle $D > 0$ und der absolute Werth von u nie grösser als D sein kann, so folgt nach früheren Regeln: Für $f_0 > 0$ ist die angegebene Substitution S stets von der ersten Art.

Ist demgegenüber $f_0 < 0$, so führe man die Transformation aus:

$$\xi = X\sqrt{q} + Y\sqrt{-f_0}, \quad \eta = Z\sqrt{y_0^2 + z_0^2}, \quad \zeta = X\sqrt{q} - Y\sqrt{-f_0},$$

wodurch f von einem constanten Factor abgesehen wieder in $(\xi\xi - \eta^2)$, S aber in:

$$\xi' = \frac{u+v\sqrt{-qf_0}}{D} \cdot \xi, \quad \eta' = \eta, \quad \zeta' = \frac{u-v\sqrt{-qf_0}}{D} \cdot \xi$$

übergeht. Hier haben die beiden Coefficienten in der ersten und dritten Formel das nämliche Vorzeichen, und zwar dasjenige von

$\frac{2u}{D} = u'$; daher mit Rücksicht auf § 1 zugleich das Resultat: *Im Falle $f_0 < 0$ liefern die positiven u' die Operationen erster Art, die negativen u' aber diejenigen der zweiten Art.*

§ 4.

Aussonderung aller ganzzahligen Substitutionen S im Falle einer Primzahl der Form $q = 4h - 1$.

Die Gesamtheit aller Operationen S erster und zweiter Art, welche die Form $f = qx^2 - y^2 - z^2$ in sich überführen, bildet eine Gruppe; aber diese Gruppe kann, wie man sehr leicht erkennt, keinen endlichen Fundamentalbereich besitzen. Ziehen wir indes aus der Gesamtheit der Substitutionen S nur alle diejenigen heran, welche durchgehends *ganzzahlige* Coefficienten besitzen, so gewinnen wir die von Hrn. Poincaré allgemein für indefinite ternäre Formen eingeführte Gruppe, *und diese besitzt einen endlichen Fundamentalbereich*. Innerhalb dieser Gruppe bilden die ihr angehörenden Operationen *erster* Art für sich eine Untergruppe des Index zwei, die wir hinfort als $\Gamma^{(q)}$ bezeichnen wollen; demgegenüber möge die auch die Operationen *zweiter* Art umfassende Gruppe als erweiterte Gruppe $\Gamma^{(q)}$ benannt und durch $\bar{\Gamma}^{(q)}$ bezeichnet werden. Unsere ferneren Betrachtungen gelten den hierdurch definirten Gruppen, und es liegt uns demnach zuvörderst die Aufgabe ob, aus den Operationen S des vorigen Paragraphen die ganzzahligen auszusondern. In diesem Betracht verhalten sich die Primzahlen q der Gestalt $(4h - 1)$ sehr viel einfacher als diejenigen von der Gestalt $q = 4h + 1$; wir beginnen demgemäss mit den ersteren.

Hat S ausschliesslich ganzzahlige Coefficienten, so werden auch die Coordinaten x_0, y_0, z_0 des oft genannten Fixpunktes ganze Zahlen sein, die wir von gemeinsamen Factoren befreit denken. Es entspringt zugleich aus den Formeln (10) § 2 der Satz, dass die Zahlen a_{21} und a_{31} durch q theilbar sein müssen. Für den gegenwärtigen Fall $q = 4h - 1$ kann f die Null nicht darstellen, es kommen also nur Substitutionen der Gestalt (8) § 2 in Betracht, welche letztere wir demnach hier zu discutiren haben. Erstlich muss für dieselbe

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1 = \frac{2u}{D} = u'$$

eine ganze Zahl sein, und ein Gleiches muss von den drei Zahlen gelten:

$$a_{12} + \frac{1}{q} a_{21} = \frac{2z_0 v}{D}, \quad -a_{13} - \frac{1}{q} a_{31} = \frac{2y_0 v}{D}, \quad a_{32} - a_{23} = \frac{2qx_0 v}{D}.$$

Hier ist nun die Fallunterscheidung zu treffen, ob f_0 prim q ist oder q als Factor enthält, welches letztere nur dann eintritt, wenn y_0 und z_0

zugleich durch q theilbar sind. Im Falle I eines gegen q primen f_0 haben offenbar auch die drei Zahlen qx_0, y_0, z_0 keinen Theiler gemein, und es wird alsdann auch

$$\frac{2v}{D} = v'$$

eine ganze Zahl sein müssen, die im Verein mit u' der Pell'schen Gleichung genügt:

$$(1) \quad u'^2 + qf_0 \cdot v'^2 = 4.$$

Die Substitution S nimmt daraufhin die Gestalt an

$$(2) \quad \begin{vmatrix} 1 + (-y_0^2 - z_0^2) \cdot \frac{u'-2}{2f_0}, & x_0 y_0 \cdot \frac{u'-2}{2f_0} + \frac{z_0 v'}{2}, & x_0 z_0 \cdot \frac{u'-2}{2f_0} - \frac{y_0 v'}{2} \\ -q x_0 y_0 \cdot \frac{u'-2}{2f_0} + \frac{q z_0 v'}{2}, & 1 + (q x_0^2 - z_0^2) \cdot \frac{u'-2}{2f_0}, & y_0 z_0 \cdot \frac{u'-2}{2f_0} - \frac{q x_0 v'}{2} \\ -q x_0 z_0 \cdot \frac{u'-2}{2f_0} - \frac{q y_0 v'}{2}, & y_0 z_0 \cdot \frac{u'-2}{2f_0} + \frac{q x_0 v'}{2}, & 1 + (q x_0^2 - y_0^2) \cdot \frac{u'-2}{2f_0} \end{vmatrix}$$

Damit wir hier neun ganze Zahlen haben, müssen erstlich die drei Ausdrücke

$$(3) \quad \frac{u'}{2} - \frac{q x_0^2 (u'-2)}{2f_0}, \quad \frac{u'}{2} + \frac{y_0^2 (u'-2)}{2f_0}, \quad \frac{u'}{2} + \frac{z_0^2 (u'-2)}{2f_0}$$

ganze Zahlen sein, woraus man leicht folgert, dass $u' \equiv 2 \pmod{f_0}$ sein muss. Darüber hinaus müssen mod. 2 die Congruenzen bestehen:

$$(4) \quad y_0 z_0 \cdot \frac{u'-2}{f_0} \equiv x_0 v', \quad z_0 x_0 \cdot \frac{u'-2}{f_0} \equiv y_0 v', \quad x_0 y_0 \cdot \frac{u'-2}{f_0} \equiv z_0 v'.$$

Wir behaupten nun: Wenn wir unter allen Lösungen der Pell'schen Gleichung (1) nur diejenigen mit $u' \equiv 2 \pmod{f_0}$ heranziehen, bekommen wir gerade die Gesammtheit der nach I gehörenden Substitutionen S . Um diesen Satz zu belegen, müssen wir die drei Fälle unterscheiden, dass unter den drei Zahlen x_0, y_0, z_0 keine oder eine oder endlich zwei gerade sind. Sollen wir hier etwa den zweiten unter diesen Fällen ausführlich discutiren, so wird für denselben f_0 das Doppelte einer ungeraden Zahl und es muss nach (1) sowohl u' wie v' gerade sein. Da aber $f_0 v'^2$ durch 8 theilbar ist, so wird zufolge (1) auch u' das Doppelte einer ungeraden Zahl sein, und sonach haben wir in $\frac{u'-2}{2f_0}$ eine ganze Zahl. Den Bedingungen (3) und (4) geschieht demnach thatsächlich Genüge. In ähnlicher Weise überzeugt man sich auch in den beiden anderen Fällen von der Richtigkeit des aufgestellten Satzes.

Im Falle II eines durch q theilbaren f_0 können wir nur folgern, dass

$$\frac{2qv}{D} = v'$$

eine ganze Zahl ist, die im Verein mit der ganzen Zahl $\frac{2u}{D} = u'$ nunmehr der Pell'schen Gleichung genügt:

$$(5) \quad u'^2 + \frac{1}{q} f_0 \cdot v'^2 = 4.$$

Die Substitution S aber gewinnt die Gestalt:

$$i) \quad \begin{vmatrix} 1 + (-y_0^2 - z_0^2) \cdot \frac{u'-2}{2f_0}, & x_0 y_0 \cdot \frac{u'-2}{2f_0} + \frac{z_0 v'}{2q}, & x_0 z_0 \cdot \frac{u'-2}{2f_0} - \frac{y_0 v'}{2q} \\ -q x_0 y_0 \cdot \frac{u'-2}{2f_0} + \frac{z_0 v'}{2}, & 1 + (q x_0^2 - z_0^2) \cdot \frac{u'-2}{2f_0}, & y_0 z_0 \cdot \frac{u'-2}{2f_0} - \frac{x_0 v'}{2} \\ -q x_0 z_0 \cdot \frac{u'-2}{2f_0} - \frac{y_0 v'}{2}, & y_0 z_0 \cdot \frac{u'-2}{2f_0} + \frac{x_0 v'}{2}, & 1 + (q x_0^2 - y_0^2) \cdot \frac{u'-2}{2f_0} \end{vmatrix}.$$

Man führt die fernere Discussion wieder leicht zu Ende und findet, dass die *nothwendige und hinreichende Bedingung* für eine *ganzzahlige Substitution* S das *Bestehen der Congruenz* ist:

$$(7) \quad u' \equiv 2, \pmod{\frac{1}{q} f_0}.$$

Hiermit sind alle Operationen der erweiterten Gruppe $\bar{\Gamma}^{(q)}$ für den Fall $q = 4h - 1$ charakterisirt.

§ 5.

Aussonderung aller ganzzahligen Substitutionen S für den Fall einer Primzahl q der Gestalt $q = 4h + 1$.

Etwas complicirter gestaltet sich die Lösung der gleichen Aufgabe für den Fall, dass die Primzahl q die Gestalt $q = 4h + 1$ hat. Nehmen wir hier erstlich an, dass y_0 und z_0 nicht beide durch q theilbar sind (wobei aber f_0 selbst noch sehr wohl ein Vielfaches von q sein kann), so wird wiederum $\frac{2v}{D} = v'$ ganzzahlig und es kommen die Formeln (1) und (2) des vorigen Paragraphen zur Geltung. Indem wir dann weiter die ganzzahligen Ausdrücke (3) des vorigen Paragraphen, sowie die Congruenzen (4) heranziehen, gewinnen wir wieder *als nothwendige Bedingung* $u' \equiv 2 \pmod{f_0}$. Dieselbe ist auch im allgemeinen *hinreichend*, nur dass die beiden folgenden Ausnahmen bestehen: Ist eine der Zahlen y_0, z_0 gerade, die andere und x_0 aber ungerade, so dürfen wir nur die Lösungen der Pell'schen Gleichung (1) § 4 heranziehen, für welche $u' \equiv 2 \pmod{2f_0}$ und $v' \equiv 0 \pmod{2}$ ist; ist ferner eine der Zahlen y_0, z_0 ungerade, die andere und x_0 aber gerade, so haben wir in gleicher Weise $u' \equiv 2 \pmod{2f_0}$ zu verlangen.

Sind beide Zahlen y_0, z_0 durch q theilbar, so ist $\frac{2qv}{D} = v'$ eine ganze Zahl und es tritt die Pell'sche Gleichung (5), sowie die Gestalt (6) § 4 für die Substitution S in Kraft. Hier führt die Einzeldiscussion auf genau dieselben Bedingungen, wie in dem soeben behandelten Falle,

nur dass überall an Stelle der Zahlmoduln f_0 und $2f_0$ bez. $\frac{1}{q} f_0$ und $\frac{1}{q} 2f_0$ treten.

Endlich vermag für $q = 4h + 1$ die Form f stets die Null darzustellen, so dass wir hier auch noch die Substitution (9) § 2 zu berücksichtigen haben, deren Fixpunkt (x_0, y_0, z_0) auf dem Kegelschnitt selbst gelegen ist. Die Bedingungen für die Ganzzahligkeit dieser Substitution sind die folgenden: Ist wenigstens eine der Zahlen y_0, z_0 prim gegen q , so ist $\gamma \equiv 0, (\text{mod. } 2qx_0)$ die hinreichende und nothwendige Bedingung; ist aber $y_0 \equiv z_0 \equiv 0, (\text{mod. } q)$, so tritt an Stelle dieser Congruenz für die ganze Zahl γ die nachfolgende $\gamma \equiv 0, (\text{mod. } 2x_0)$. Uebrigens bringen wir in Erinnerung, dass die hiermit gemeinten Substitutionen durchgehends der ersten Art angehören.

§ 6.

Transformation der Substitutionen S in linear-gebrochene Substitutionen einer einzigen Variablen ω .

Von besonderer Wichtigkeit ist für die Folge ein gewisser mit der Coordinatenebene der x, y, z vorzunehmender Umformungsprocess, bei dem das Innere der durch $f = 0$ gegebenen Ellipse*) in eine einfach und vollständig bedeckte Halbebene (etwa die positive) einer complexen Variablen ω übergeht, während die geraden Secanten der Ellipse die zur reellen ω -Axe orthogonalen Halbkreise liefern**).

Um die analytische Beziehung des Ellipseninnern zur Halbebene festzulegen, führen wir die Coordinatentransformation aus:

$$\xi = x\sqrt{q} - y, \quad \eta = z, \quad \xi = x\sqrt{q} + y,$$

wodurch f in $(\xi\xi - \eta^2)$ übergeht. Sodann setzen wir zunächst für die Punkte der Ellipse selbst $\omega = \frac{\eta}{\xi}$, so dass das Geradenbüschel $\omega\xi - \eta = 0$ in das System der zur reellen ω -Axe senkrechten Geraden übergeht. Wenn wir hierauf für einen Punkt (ξ_0, η_0, ξ_0) im Innern der Ellipse den zugehörigen Werth $\omega_0 = X_0 + iY_0$ berechnen wollen, so ist erstlich zufolge unserer gerade geschehenen Festsetzung $X_0 = \frac{\eta_0}{\xi_0}$. Weiter ziehen wir in der Ebene der Ellipse die Gerade $\eta\xi_0 - \xi\eta_0 = 0$, der in der ω -Halbebene der Halbkreis durch $\omega = 0$ und $\omega = \frac{\xi_0}{\eta_0}$ zu-

*) Man denke das Coordinatendreieck der x, y, z derart fixiert, dass $f = 0$ thatsächlich eine Ellipse vorstellt.

**) Dieser Process ist für die Modulfunctionen l. c. pg. 239 u. f. ausführlich beschrieben; er kommt im Texte gerade in entgegengesetzter Folge in Anwendung.

geordnet sein wird. Aber der Schnittpunkt dieses Halbkreises mit der Geraden $X = \frac{\eta_0}{\xi_0}$ ist der gesuchte Punkt ω_0 . Indem wir also überall sogleich die unteren Indices fortlassen, kommt das Resultat: *Dem Punkte (ξ, η, ζ) im Innern der Ellipse oder auf dieser selbst ist der Punkt:*

$$(1) \quad \omega = \frac{\eta + i\sqrt{f}}{\xi}$$

im Innern bez. auf dem Rande der positiven ω -Halbebene zugeordnet.
Jetzt übe man auf ω die lineare Substitution

$$(2) \quad \omega' = \frac{\delta\omega + \beta}{\gamma\omega + \alpha}$$

aus, in welcher $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ irgend welche reelle Zahlen der Determinante 1 sind. Indem entsprechend ξ, η, ζ in ξ', η', ζ' übergehen mögen, finden wir nach kurzer Rechnung, dass letztere Grössen an ξ, η, ζ gerade durch die Substitution (4) § 1 geknüpft sind. *Der linearen Substitution (2) ist demgemäss die Operation erster Art U zugeordnet, welche unsere Form f in sich transformirt.*

Auf dieser Grundlage stellen wir uns die Aufgabe, die in den voraufgehenden Paragraphen ausgesonderten ganzzahligen Substitutionen erster Art S in die ihnen parallel gehenden Substitutionen (2) zu transformiren. Zu dem Ende rechnet man erstlich die Substitution (4) § 1 für die x, y, z um, wo sie die Gestalt annimmt:

$$3) \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2} (+\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2), & \frac{1}{2\sqrt{q}} (-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2), & \frac{1}{\sqrt{q}} (\alpha\gamma + \beta\delta) \\ \frac{1}{2}\sqrt{q} (-\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2), & \frac{1}{2} (+\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2), & (-\alpha\gamma + \beta\delta) \\ \sqrt{q} (\alpha\beta + \gamma\delta), & (-\alpha\beta + \gamma\delta), & (\alpha\delta + \beta\gamma) \end{vmatrix}.$$

Diese Substitution haben wir nun zuvörderst mit (2) bez. (6) § 4 zu identificiren, was nach kurzer Zwischenrechnung

$$(4) \quad \begin{aligned} \alpha + \delta &= \pm \sqrt{u' + 2}, & \beta + \gamma &= \pm y_0 \sqrt{\frac{u' - 2}{-f_0}} \\ \alpha - \delta &= \pm z_0 \sqrt{\frac{u' - 2}{-f_0}}, & \beta - \gamma &= \pm x_0 \sqrt{q} \cdot \sqrt{\frac{u' - 2}{-f_0}} \end{aligned}$$

liefert, und zwar gültig für beide Fälle. Da es sich hier einzig um Substitutionen erster Art handelt, so bemerke man zuvörderst, dass nach § 3 die unter den Quadratwurzeln der Ausdrücke (4) stehenden Zahlen jedenfalls niemals negativ werden. Wir entschliessen uns überdies, das Vorzeichen von $\sqrt{q}$ und $\sqrt{\frac{u' - 2}{-f_0}}$ stets positiv zu nehmen,

während wir das Zeichen von $\sqrt{u' + 2}$ im Einzelfall demjenigen von v' entgegengesetzt wählen. Letztere Bestimmung können wir auch durch die Formeln

$$(5) \quad \sqrt{u' + 2} \sqrt{\frac{u' - 2}{-f_0}} = -v' \sqrt{q}, \quad \sqrt{u' + 2} \sqrt{\frac{u' - 2}{-f_0}} = -\frac{v'}{\sqrt{q}}$$

zum Ausdruck bringen, von denen die erste oder zweite gilt, je nachdem wenigstens eine oder keine der Zahlen y_0, z_0 prim gegen q ist. Durch fernerem Vergleich der Substitution (3) mit (2) und (6) § 4 findet man, dass nach den geschehenen Verabredungen in (4) allenthalben die oberen Zeichen gelten müssen. Als die gesuchte ω -Substitution (2) entspringt demgemäss die nachfolgende:

$$(6) \quad \omega' = \frac{\frac{1}{2} \left(\sqrt{u' + 2} - z_0 \sqrt{\frac{u' - 2}{-f_0}} \right) \bar{\omega} + \frac{1}{2} (y_0 + x_0 \sqrt{q}) \sqrt{\frac{u' - 2}{-f_0}}}{\frac{1}{2} (y_0 - x_0 \sqrt{q}) \sqrt{\frac{u' - 2}{-f_0}} \cdot \omega + \frac{1}{2} \left(\sqrt{u' + 2} + z_0 \sqrt{\frac{u' - 2}{-f_0}} \right)},$$

wobei u' die für die einzelnen Fälle angegebene Bedeutung besitzt. Nur der eine Fall, dass $f_0 = 0$ ist, wird von der Formel (6) noch nicht mit umfasst. Hier erhalten wir

$$(7) \quad \omega' = \frac{\left(1 + \frac{az_0}{\sqrt{q}}\right) \omega - a \left(x_0 + \frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)}{a \left(x_0 - \frac{y_0}{\sqrt{q}}\right) \omega + \left(1 - \frac{az_0}{\sqrt{q}}\right)},$$

wobei a eine beliebige ganze Zahl ist, falls y_0 und z_0 beide durch q teilbar sind, während andernfalls a eine beliebige durch q teilbare ganze Zahl sein soll.

In (7) erkennt man in den Coefficienten ohne weiteres ganze Zahlen des aus der Basis $(1, \sqrt{q})$ zu bildenden Zahlkörpers, und man bemerkt nach kurzer Rechnung, dass sich auch die Coefficienten von (6) mit vier ganzen Zahlen dieser Art proportional setzen lassen. Wollten wir diese ganzzahligen Coefficienten jedoch in (6) einführen, so würde die Determinante dieser Substitution aufhören gleich 1 zu sein, was manche Unbequemlichkeit nach sich ziehen würde.

Aus (7) entsteht, den verschiedenen a entsprechend, eine cyklische Gruppe *parabolischer* Substitutionen mit dem Fixpunkte $\omega = \frac{z_0}{x_0 \sqrt{q} - y_0}$, deren Erzeugende die dem kleinsten in Betracht kommenden Werthe von a zugehörige Substitution ist. Demgegenüber haben wir in (6) eine *elliptische* Substitution, falls der Punkt (x_0, y_0, z_0) im Innern der Ellipse liegt und also $f_0 > 0$ ist, dagegen eine *hyperbolische* für $f_0 < 0$. Im ersten Falle haben wir die beiden complexen Fixpunkte

$$\omega = \frac{z_0 \pm i \sqrt{f_0}}{x_0 \sqrt{q} - y_0},$$

im anderen Falle zwei reelle, die den Schnittpunkten der zu (x_0, y_0, z_0) gehörenden Polare mit der Ellipse entsprechen. Immer bilden die zu demselben Zahlentripel x_0, y_0, z_0 gehörenden Substitutionen (6) eine cyklische Untergruppe innerhalb $\Gamma^{(q)}$.

Den Operationen zweiter Art der $\bar{\Gamma}^{(q)}$ brauchen wir jetzt nicht noch einmal eine directe Betrachtung zu widmen. Vielmehr genügt es zu bemerken, dass sich unter denselben stets die Operation $x' = x, y' = y, z' = -z$ findet, welche letztere für die complexe Ebene ω eine Spiegelung an deren reeller Axe bedeutet. Eben diese schreiben wir aber analytisch: $\omega' = -\bar{\omega}$, unter $\bar{\omega}$ den zu ω conjugirt complexen Werth verstanden. Durch Combination dieser Operation mit den Operationen (6) bez. (7) der $\Gamma^{(q)}$ entspringt nun sogleich die gesammte $\bar{\Gamma}^{(q)}$,

Zweiter Theil.

Die Fundamentalbereiche der Gruppen $\bar{\Gamma}^{(q)}$ und $\Gamma^{(q)}$ für die niedersten Zahlwerthe der Primzahl q .

§ 1.

Plan und Methode der nächstfolgenden Entwicklungen.

Für die nun gewonnenen Gruppen werden wir jetzt eine weitere Untersuchung dadurch anbahnen, dass wir bei einer Reihe niederer Werthe von q die Fundamentalbereiche in zweckmässiger Weise fixiren und ihre Gestalt in Betracht ziehen. Für die dabei zu Tage tretenden Verhältnisse geben die bekannten an analoger Stelle in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen eintretenden Sätze in jeder Beziehung das Vorbild ab. *) Inzwischen empfiehlt es sich hier, die Untersuchung nicht sogleich innerhalb der ω -Halbebene anzustellen, sondern vielmehr vorab, im Innern der Ellipse im Einzelfall einen Fundamentalbereich abzugrenzen, um letzteren hernach in die ω -Halbebene zu übertragen.

Wie bei der Modulgruppe, so ist es auch hier in allen Fällen angezeigt, mit der erweiterten Gruppe $\bar{\Gamma}^{(q)}$ die Betrachtung zu beginnen. In der letzteren finden sich nämlich stets Operationen der Periode zwei, welche sogenannte *harmonische Perspectivitäten* vorstellen. Für die ω -Halbebene bedeuten dieselben Spiegelungen an gewissen Symmetriekreisen und den letzteren entsprechen innerhalb der Ellipse *gerade Secanten* derselben, welche die Axen eben jener Perspectivitäten sind. *Diese das Innere der Ellipse durchsetzenden Geraden sind uns dann die natürlichen Grenzlinien für die gesuchten Fundamentalbereiche.*

*) Vergl. I. c. Abschn. II, Cap. 2.

Ueber die harmonischen Perspectivitäten hinaus werden wir immer wieder die *elliptischen*, sowie gelegentlich (für $q = 4h + 1$) auch die *parabolischen* Substitutionen der $\Gamma^{(q)}$ zu brauchen haben. Die Beziehung zwischen diesen Substitutionen und jenen Perspectivitäten ist dadurch begründet, dass allemal da, wo sich im Innern der Ellipse zwei Perspectivitätsaxen schneiden, der Fixpunkt für eine der $\Gamma^{(q)}$ angehörnde cyklische Untergruppe elliptischer Substitutionen sich findet. Schneiden sich in gleicher Weise zwei Perspectivitätsaxen auf der Ellipse selbst, so findet sich dort leicht ersichtlich der Fixpunkt für eine der $\Gamma^{(q)}$ angehörnde cyklische Untergruppe parabolischer Substitutionen.

Endlich haben wir noch zu bemerken, dass wir für unsere Betrachtungen im Innern der Ellipse die auf diese Ellipse zu gründende projective Massbestimmung in Anwendung bringen, über welche man alles Nähere in der unten genannten Abhandlung Klein's nachsehen wolle*). In der ω -Halbebene entspringt daraus die von Poincaré für dieselbe zuerst in Anwendung gebrachte Massbestimmung**); doch kommt die letztere in der Folge nicht weiter in Betracht.

§ 2.

Die elliptischen u. s. w. Substitutionen innerhalb der Gruppen $\Gamma^{(1)}$ und $\bar{\Gamma}^{(1)}$.

Indem wir unsere Einzeluntersuchung mit dem einfachsten Falle, nämlich $q = 1$, beginnen, mögen wir zuvörderst die cyklischen Untergruppen aus elliptischen Substitutionen in ihrer Gesamtheit charakterisiren, die in der $\Gamma^{(1)}$ enthalten sind. Für diesen Fall ist f_0 positiv und alsdann hat die Gleichung (1) § 4 höchstens die Lösungen $u' = 0, \pm 1, \pm 2$, wobei wir auch noch von $u' = +2$ absehen können, da diese Lösung stets auf die identische Substitution führt. Nun haben wir in allen Fällen nur solche Lösungen heranzuziehen, die der Congruenz $u' \equiv 2 \pmod{f_0}$ genügen, und also ist bei den in Rede stehenden Werthen von u' f_0 offenbar auf die vier Möglichkeiten $f_0 = 1, 2, 3, 4$ eingeschränkt. Indessen bleiben selbst die beiden letzten Werthe $f_0 = 3, 4$ ausgeschlossen; nach den Regeln des § 5 haben wir nämlich für diese beiden Fälle, wie man leicht bemerkt, die Congruenz $u' \equiv 2 \pmod{2f_0}$ zu fordern, was durch die zur Verfügung stehenden Werthe von u' in keiner Weise geleistet werden kann. Die beiden zurückbleibenden Werthe $f_0 = 1, 2$ kommen nun aber thatsächlich zur Geltung, wie die hierhergehörigen Beispiele $(1, 0, 0)$,

*) Ueber die sogenannte nicht-euklidische Geometrie, Math. Ann. Bd. 4 (1872).

**) Cf. Poincaré, Théorie des groupes fuchsien, Acta math. Bd. 1 (1882).

$(2, 1, 1)$ belegen. Für $f_0 = 1$ haben wir die vier Lösungen $(0, \pm 2)$, $(\pm 2, 0)$ der Pell'schen Gleichung (1) § 4, für $f_0 = 2$ aber die beiden $(\pm 2, 0)$. Sprechen wir also das Resultat aus: *Innerhalb $\Gamma^{(1)}$ findet sich eine Gattung cyklischer Untergruppen G_4 vierter Ordnung, nämlich für $f_0 = 1$, und weiter eine Gattung cyklischer G_2 , nämlich für $f_0 = 2$.* Wenn wir alle innerhalb unserer Gruppe gleichberechtigten Untergruppen zu einer Classe zusammenfassen, so bleibt hier vorab noch unentschieden, ob die beiden angeführten Gattungen jeweils aus einer oder aus mehreren Classen bestehen.

Da im gegenwärtigen Falle $f = 0$ ganzzahlige Lösungen besitzt, so bemerken wir nun sogleich weiter: *Innerhalb der $\Gamma^{(1)}$ giebt es eine Gattung von cyklischen Untergruppen aus parabolischen Substitutionen;* als Beispiel verfolge man etwa die zu $(1, 1, 0)$ gehörende Untergruppe.

Vor allem aber müssen wir jetzt die harmonischen Perspectivitäten innerhalb der $\bar{\Gamma}^{(1)}$, d. h. die Operationen zweiter Art der Periode zwei verfolgen. Für dieselben muss $v' = 0$ und also $u' = -2$ sein, während f_0 nur negative Zahlwerthe besitzen darf. Aus der Congruenz $u' = -2 \equiv 2, \pmod{f_0}$ entspringen somit die drei Möglichkeiten $f_0 = -1, -2, -4$, von denen die letzte wieder nach den genaueren Regeln des § 5 auszuschliessen ist. Die beiden Fälle $f_0 = -1, -2$ kommen aber thatsächlich in Betracht, wie die leicht durchzurechnenden Beispiele $(0, 1, 0)$ und $(0, 1, 1)$ belegen. Also das Resultat: *Es giebt innerhalb der $\bar{\Gamma}^{(1)}$ zwei Gattungen von harmonischen Perspectivitäten; für die eine ist $f_0 = -1$, für die andere $f_0 = -2$.*

Es kommen aber, wie man leicht bestätigt, für die einzelne der im Laufe des Paragraphen angeführte Gattung stets die *gesamten* ganzzahligen Lösungen der gerade gültigen Gleichung $f_0 = 1, 2, \dots$ zur Verwendung. Insbesondere haben wir als Axen für die erste Gattung der eben genannten Perspectivitäten die Geraden

$$(1) \quad x_0 x - y_0 y - z_0 z = 0,$$

wo x_0, y_0, z_0 alle ganzzahligen Lösungen von $x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 = -1$ durchlaufen, während für die zweite Gattung in analoger Weise alle ganzzahligen Lösungen von $x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 = -2$ zu nehmen sind.

§ 3.

Fundamentbereiche für die Gruppen $\bar{\Gamma}^{(1)}$ und $\Gamma^{(1)}$.

Um jetzt für die betrachteten Gruppen thatsächlich Fundamentbereiche in zweckmässiger Gestalt einzugrenzen, denke man sich die Gesamtheit der soeben genannten Perspectivitätsaxen (1) § 2 gezogen. Dieselben werden das Innere der Ellipse in unendlich viele Bereiche theilen, die sich gegen die Ellipse hin allenthalben häufen.

Diese Bereiche denken wir uns abwechselnd schraffirt und frei gelassen, und haben dann ohne Weiteres den Satz: Je zwei benachbarte Bereiche sind bei Zugrundelegung der verabredeten Maassbestimmung symmetrisch, irgend zwei gleichartige Bereiche aber congruent; in der That gehen ja alle diese Bereiche aus einem unter ihnen durch Substitutionen der $\bar{\Gamma}^{(1)}$ hervor.

Die Gestalt der in Rede stehenden Bereiche bringen wir leicht in Erfahrung. Von den drei Punkten $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$, $(0, -1, 1)$ genügen die ersten beiden der Bedingung $f_0 = -1$, während der letztere $f_0 = -2$ liefert. Ihnen entsprechen also drei Perspectivitäten der $\bar{\Gamma}^{(1)}$, und die zugehörigen Axen sind gegeben durch:

$$(1) \quad z = 0, \quad x - y - z = 0, \quad y - z = 0.$$

Dieselben bilden ein Dreieck mit den Ecken $(2, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ und den Winkeln $\frac{\pi}{2}$ bez. $\frac{\pi}{4}$, 0 . Die Eckpunkte des Dreiecks liefern bez. $f_0 = 2, 1, 0$, ergeben also je einen Fixpunkt für die drei in $\Gamma^{(1)}$ enthaltenen Gattungen elliptischer und parabolischer Substitutionen.

Wir behaupten nun: Das Innere des gefundenen Dreiecks wird von keiner Perspectivitätsaxe durchzogen. Eine solche kann nämlich erstlich nicht über eine der beiden Ecken $(1, 0, 0)$, $(2, 1, 1)$ in das Dreieck eindringen, da dortselbst die Axen mindestens die Winkel $\frac{\pi}{4}$ bez. $\frac{\pi}{2}$ mit einander bilden müssen. Die fragliche Axe müsste sonach eine der beiden Seiten $z = 0$, $y - z = 0$ in einem von einer Ecke des Dreiecks verschiedenen Punkte überkreuzen, und dortselbst würde also der Fixpunkt für eine elliptische Substitution der $\Gamma^{(1)}$ gelegen sein. Daraufhin untersuche man die Lösungen von $f_0 = 1, 2$ für $z_0 = 0$ und $y_0 = z_0$; $x_0^2 - y_0^2 = 2$ hat überhaupt keine ganzzahlige Lösung, $x_0^2 - y_0^2 = 1$ nur die eine $(1, 0, 0)$, welche auf die Ecke unseres Dreiecks führt. Die kleinste positive Lösung von $x_0^2 - 2y_0^2 = 1$ ergiebt den Punkt $(3, 2, 2)$, diejenige von $x_0^2 - 2y_0^2 = 2$ aber $(2, 1, 1)$. Letzterer ist Ecke des Dreiecks, ersterer liegt auf der Linie $y - z = 0$ bereits über unser Dreieck hinaus; alle höheren Lösungen liefern aber auf Grund elementarer Ueberlegung Punkte, die sich dem Rande der Ellipse noch mehr genähert haben. *Es wird also thatsächlich das Innere unseres Dreiecks nicht noch von einer weiteren Perspectivitätsaxe durchzogen.*

Hiermit haben wir nun ohne Weiteres das Resultat gewonnen: *Die unendlich vielen Bereiche, in welche das Innere der Ellipse durch die Perspectivitätsaxen getheilt wird, sind abwechselnd symmetrische und congruente geradlinige Dreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, 0 . Durch die*

Operationen der $\bar{\Gamma}^{(1)}$ wird diese Theilung in sich transformirt, und also geht z. B. das soeben besonders beschriebene Dreieck durch eine beliebig herausgegriffene Operation der $\bar{\Gamma}^{(1)}$ entweder in ein anderes Dreieck der Theilung oder in sich selbst über. Letzteres ist aber, wie man sofort erkennt, auf keine Weise möglich, *und eben deswegen besitzen wir in einem beliebigen unserer Dreiecke, z. B. jenem oben besonders beschriebenen, direct einen Fundamentalbereich für die Gruppe $\bar{\Gamma}^{(1)}$.* Neben dieses Dreieck, das wir schraffirt denken, lagern wir nun noch dasjenige freie Dreieck der Theilung, welches mit jenem die Seite $x - y - z = 0$ gemein hat. Beide zusammengenommen werden alsdann ein grösseres Dreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 0$ bilden, *und in diesem besitzen wir einen Fundamentalbereich für die Gruppe $\Gamma^{(1)}$.* Die letztere Gruppe lässt sich demnach aus *zwei* Operationen erzeugen, von denen die eine elliptisch, mit dem Fixpunkte $(2, 1, 1)$, die andere parabolisch mit dem Fixpunkte $(1, 1, 0)$ ist; in ternärer Gestalt lauten diese Substitutionen bez.

$$(2) \quad \begin{vmatrix} 3, & -2, & -2 \\ 2, & -2, & -1 \\ 2, & -1, & -2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3, & -2, & 2 \\ 2, & -1, & 2 \\ 2, & -2, & 1 \end{vmatrix}.$$

Gehen wir nun zur ω -Halbebene, so haben wir dortselbst zuvörderst als Symmetriekreise für die in $\bar{\Gamma}^{(1)}$ enthaltenen Spiegelungen die durch die folgende Gleichung gegebenen:

$$(3) \quad (x_0 - y_0) \cdot (X^2 + Y^2) - 2z_0 X + (x_0 + y_0) = 0;$$

und zwar durchlaufen x_0, y_0, z_0 für eine Gattung von Spiegelungen wieder alle ganzzahligen Lösungen von $f_0 = -1$, für die andere von $f_0 = -2$. Durch diese Kreise wird die gesammte Halbebene in unendlich viele abwechselnd symmetrische und congruente*) *Kreisbogendreiecke* mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, 0$ eingetheilt. Diese Eintheilung ist

in Fig. 1 der beigegebenen Tafel angedeutet, wo sich übrigens ein gewisser Complex solcher Kreisbogendreiecke eingegrenzt findet, dessen Bedeutung weiterhin noch hervortreten wird. Fundamentalraum für $\bar{\Gamma}^{(1)}$ ist das schraffirte Dreieck mit den Ecken $\omega = i, 1 + i\sqrt{2}, i\infty$. Lagern wir das rechts daneben liegende freie Dreieck an, so haben wir einen Fundamentalbereich für $\Gamma^{(1)}$. Die Erzeugenden der letztern Gruppe (in der Figur durch punktirte Pfeile angedeutet) sind die beiden folgenden:

$$(4) \quad V_1(\omega) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\omega - \frac{3}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\omega - \frac{1}{\sqrt{2}}}, \quad V_2(\omega) = \omega + 2.$$

*) Im Sinne der zugehörigen Maassbestimmung.

Ihre Combination giebt die Substitution der Periode vier:

$$(5) \quad V_3(\omega) = V_1 V_2(\omega) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \omega - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \omega + \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Aus der Figur lesen wir endlich noch den Satz ab: Die beiden Gattungen von Untergruppen G_4 und G_2 bestehen jeweils nur aus *einer* Classe, desgleichen die Gattung der Untergruppen aus parabolischen Substitutionen. Demgegenüber haben wir *drei* Classen von Spiegelungen, von denen zwei zu $f_0 = -1$ gehören, während die dritte $f_0 = -2$ hat. *)

§ 4.

Fundamentalebereiche der Gruppen $\bar{\Gamma}^{(3)}$ und $\Gamma^{(3)}$.

Die soeben zur Verwendung gekommenen Ueberlegungen führen auch in den folgenden Fällen auf's Leichteste zum gewünschten Resultat, und wir wenden dieselben sogleich auf den nächsten Fall einer ungeraden Primzahl nämlich auf $q = 3$ an. Indem wir hier immer zwischen den beiden Fällen zu unterscheiden haben, dass f_0 prim gegen 3 oder durch 3 theilbar ist, haben wir erstlich *drei* Gattungen cyklischer Untergruppen aus *elliptischen* Substitutionen. Alle ganzzahligen Lösungen von $3x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 = 1$, z. B. $(1, 1, 1)$ liefern eine Gattung cyklischer G_6 der Ordnung *sechs*, desgleichen liefern die Lösungen von $f_0 = 2$ z. B. $(1, 1, 0)$ eine Gattung cyklischer G_2 der Ordnung *zwei*, und endlich haben wir für $f_0 = 3$ z. B. $(2, 0, 3)$ eine Gattung cyklischer G_4 der Ordnung *vier*. Jede dieser drei Gattungen besteht, wie wir sehen werden, nur aus einer *einzig*en Classe. Parabolische Substitutionen kommen für den gegenwärtigen Fall nicht in Betracht, da $f_0 = 0$ keine ganzzahligen Lösungen zulässt; dagegen finden sich in der erweiterten Gruppe *drei* Gattungen von Spiegelungen, die bez. den Gleichungen $f_0 = -1, -2, -6$ zugehören. Wir werden bemerken, dass jede dieser Gattungen nur aus einer einzigen Classe besteht und haben übrigens als Beispiele bez. $(1, 2, 0), (1, 2, 1)$ und $(2, 3, 3)$.

Nunmehr denke man sich wieder für die gesammten soeben gefundenen Perspectivitäten die drei Systeme von Axen gezogen, die

*) Die hiermit gefundene Figur ist bereits früher von Hrn. Hurwitz betrachtet worden; vergl. dessen Aufsatz: *Ueber eine Reihe neuer Functionen, welche die absoluten Invarianten gewisser Gruppen ganzzahliger linearer Transformationen bilden*, Math. Ann. Bd. 20 (1881).

in dem Inneren der Ellipse die für unsere Gruppe charakteristische Eintheilung liefern. Um die Gestalt der einzelnen Bereiche in Erfahrung zu bringen, wolle man bemerken, dass die drei Punkte $(0, 0, 1)$, $(0, 1, -1)$, $(1, 3, 0)$ bez. den Gleichungen $f = -1, -2, -6$ genügen. In den drei zugehörigen Polaren

$$(1) \quad z = 0, \quad y - z = 0, \quad x - y = 0$$

besitzen wir also für jede der drei Gattungen von Perspectivitäten eine Axe. Die drei Axen (1) bilden ein Dreieck mit den Ecken $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$; diese drei Punkte aber genügen den Gleichungen $f_0 = 1, 2, 3$, liefern also die Fixpunkte für je eine cyklische Untergruppe aus den drei oben gefundenen Gattungen elliptischer Substitutionen. Als Winkel des Dreiecks erhalten wir bei $(1, 1, 0)$ und $(1, 0, 0)$ bez. $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{4}$; bei $(1, 1, 1)$ findet der Winkel $\frac{\pi}{6}$ statt. Die zum Fixpunkte $(1, 1, 1)$ gehörende G_6 lässt sich nämlich aus der elliptischen Substitution der Periode sechs:

$$x' = 2x - z, \quad y' = 3x - 2z, \quad z' = y$$

erzeugen, und diese transformirt die Linie $x - z = 0$ in $x - y = 0$. Wir beweisen endlich genau wie im vorigen Paragraphen, dass das Innere des Dreiecks von keiner weiteren Perspectivitätsaxe durchsetzt wird; damit ist bei der Gestalt dieses Dreiecks evident, dass es einen Fundamentalbereich für $\bar{\Gamma}^{(3)}$ liefert.

Indem wir jetzt zur ω -Halbebene gehen, haben wir dort die drei Classen von Halbkreisen:

$$(x_0\sqrt{3} - y_0)(X^2 + Y^2) - 2z_0X + (x_0\sqrt{3} + y_0) = 0$$

zu zeichnen, für welche $f_0 = -1, -2, -6$ ist. Dieselben theilen die Halbebene in unendlich viele *Kreisbogendreiecke mit den Winkeln* $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$, von denen je zwei benachbarte symmetrisch sind. Ein

einzelnes dieser Dreiecke, z. B. dasjenige mit den Ecken $\omega = \frac{i\sqrt{2}}{-1+\sqrt{3}}$, i , $\frac{1+i}{-1+\sqrt{3}}$, welches dem oben beschriebenen geradlinigen Dreieck

entspricht, ergibt uns einen Fundamentalbereich für die Gruppe $\bar{\Gamma}^{(3)}$. Spiegeln wir dieses Dreieck etwa an der imaginären ω -Axe, so *entspringt ein Doppeldreieck mit den Ecken* $\omega = i$, $\frac{\pm 1+i}{-1+\sqrt{3}}$ und den

Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$, und in ihm besitzen wir einen Fundamentalraum für die Gruppe $\Gamma^{(3)}$ (vergl. hier überall Fig. 2 der Tafel). Die fragliche Gruppe lässt sich sonach aus zwei Substitutionen erzeugen, beide

elliptisch und zwar von der Periode vier bez. zwei. Diese Substitutionen sind:

$$(2) \quad V_1(\omega) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\omega - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\omega + \frac{1}{\sqrt{2}}}, \quad V_2(\omega) = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} \cdot \omega.$$

§ 5.

Fundamentaltbereiche für die Gruppen $\bar{\Gamma}^{(5)}$ und $\Gamma^{(5)}$.

In der nun zu besprechenden Gruppe $\Gamma^{(5)}$ giebt es im ganzen *drei* Classen von cyklischen Untergruppen aus elliptischen Substitutionen, und zwar bestehen *zwei* von diesen Classen aus Gruppen G_2 der Ordnung *zwei*, die dritte aus Gruppen G_4 der Ordnung *vier*. Für die beiden Classen von G_2 ist $f_0 = 1$, bez. $= 2$, und wir führen als Beispiele die zu den Fixpunkten $(1, 2, 0)$, $(2, 3, 3)$ gehörenden G_2 an; für die Classe der G_4 liefert $(1, 0, 0)$ ein Beispiel, wir haben dortselbst $f_0 = 5$. Hierzu kommt *eine* Classe von cyklischen Untergruppen aus *parabolischen* Substitutionen, zu denjenigen Fixpunkten gehörig, welche von den ganzzahligen Lösungen der Gleichung $f = 0$ herrühren; ein Beispiel für die letztere Classe liefert der Fixpunkt $(1, 2, 1)$. Auf der anderen Seite haben wir innerhalb $\bar{\Gamma}^{(5)}$ *vier* Classen von *harmonischen Perspectivitäten*; für die ersten beiden unter ihnen ist $f_0 = -1$ bez. -2 , die beiden letzten Classen haben übereinstimmend $f_0 = -5$. Beispiele für diese vier Classen werden durch die vier Perspectivitätscentra

$$(1) \quad (0, 0, 1), (0, 1, -1), (3, 5, 5), (2, 5, 0)$$

geliefert.

Um jetzt einen Fundamentalraum für $\bar{\Gamma}^{(5)}$ im Innern der Ellipse abzugrenzen, ziehe man die vier zu den Centren (1) gehörenden Axen. Dieselben sind gegeben durch die Gleichungen

$$(2) \quad z = 0, \quad y - z = 0, \quad 3x - y - z = 0, \quad 2x - y = 0.$$

Dieselben bilden ein Viereck mit den Eckpunkten

$$(3) \quad (1, 0, 0), (2, 3, 3), (1, 2, 1), (1, 2, 0),$$

wo bez. die Winkel stattfinden $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, 0 , $\frac{\pi}{2}$. Die Eckpunkte (3) aber ergeben $f_0 = 5, 2, 0, 1$ und liefern sonach für jede der oben genannten Classen cyklischer Untergruppen ein Beispiel. Im gefundenen Viereck erkennen wir daraufhin einen Fundamentalbereich für die Gruppe $\bar{\Gamma}^{(5)}$ und stellen von hieraus sofort einen ebensolchen für $\Gamma^{(5)}$ durch Verdoppelung des Vierecks her. Die oben angeführten Sätze

über die Untergruppen von $\bar{\Gamma}^{(5)}$ aber sind nun leicht nachträglich bestätigt. Man betrachte z. B. die Perspektivitätsachsen: Die beiden letzten Axen (2) bestehen jeweils aus *zwei* Vierecksseiten und haben als Sehnen der Ellipse je zwei *ganzzahlige* Endpunkte. Auf jeder ist ein Fixpunkt einer G_2 gelegen, nämlich die Punkte (2, 3, 3) und (1, 2, 0); aber diese Punkte sind *nicht* äquivalent, da der eine $f_0 = 2$, der andere $f_0 = 1$ hat, und eben dieserhalb können beide Axen nicht zu derselben Classe gehören.

Indem wir jetzt zur ω -Halbebene vorgehen, kommt der Satz: *Die Halbkreise*

$$(4) \quad (x_0\sqrt{5} - y_0)(X^2 + Y^2) - 2z_0X + (x_0\sqrt{5} + y_0) = 0,$$

wobei x_0, y_0, z_0 alle ganzzahligen Lösungen der drei Gleichungen $f_0 = -1, -2, -5$ durchlaufen, theilen die ω -Halbebene in unendlich viele Kreisbogenvierecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, 0$, die alle aus einem unter ihnen nach dem Princip der Symmetrie erzeugt werden können. Das Viereck mit den Ecken (3) ergibt jetzt das Kreisbogenviereck mit den Ecken:

$$(5) \quad \omega = i, = \frac{3 + i\sqrt{2}}{-3 + 2\sqrt{5}}, = 2 + \sqrt{5}, = i(2 + \sqrt{5}),$$

und in ihm besitzen wir einen Fundamentalbereich für $\bar{\Gamma}^{(5)}$.

Spiegeln wir dieses Viereck längs derjenigen seiner Seiten, welche die beiden letzten Punkte (5) verbindet, so entspringt ersichtlich durch Anfügung des Spiegelbildes an jenes erstere Viereck ein Kreisbogenfünfeck, welches einen Fundamentalbereich für $\Gamma^{(5)}$ liefert. (Man vergl. hier überall die Figur 3, welche jedoch die hier in Rede stehende Viereckstheilung nicht direct liefert, sondern nur mit ihr kreisverwandt ist). Zufolge dieser Gestaltung des Fundamentalbereichs lässt sich die Gruppe $\Gamma^{(5)}$ aus *drei* Substitutionen erzeugen, die bez. elliptisch, parabolisch und hyperbolisch sind (cf. Fig. 3); diese Erzeugenden der $\Gamma^{(5)}$ sind:

$$(6) \quad V_1(\omega) = \frac{2 + \sqrt{5}}{(2 - \sqrt{5})\omega}, \quad V_2(\omega) = \frac{(1 - \sqrt{5})\omega + (5 + 2\sqrt{5})}{(-5 + 2\sqrt{5})\omega + (1 + \sqrt{5})},$$

$$V_3(\omega) = \frac{\frac{-2 + \sqrt{5}}{\sqrt{2}}\omega + \frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{2}}}{\frac{2 - \sqrt{5}}{\sqrt{2}}\omega + \frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{2}}}.$$

§ 6.

Fundamentaltbereiche der für $q = 7$ eintretenden Gruppen.

In der Gruppe $\Gamma^{(7)}$ finden sich Untergruppen endlicher Ordnung für die drei Werthe 2, 7, 14 von f_0 , und zwar liefern dieselben *drei* Classen von Untergruppen G_2, G_4, G_7 ; Beispiele solcher Untergruppen aus elliptischen Substitutionen liefern die Fixpunkte $(1, 2, 1), (1, 0, 0), (11, 28, 7)$. Des ferneren finden sich in $\bar{\Gamma}^{(7)}$ insgesamt *zwei* Classen von harmonischen Perspectivitäten, nämlich für $f_0 = -1$ und $f_0 = -2$; Beispiele für dieselben haben wir sofort zu betrachten.

Um einen Fundamentaltbereich für $\bar{\Gamma}^{(7)}$ zu erhalten, ist es hier zweckmässig, die Perspectivitätscentra

$$(1) \quad (0, 1, 0), (0, 1, -1), (1, -2, -2), (1, 0, -3)$$

zu benutzen, denen bez. die Axen zugehören:

$$(2) \quad y = 0, \quad y - z = 0, \quad 7x + 2y + 2z = 0, \quad 7x + 3z = 0.$$

Dieselben bilden im Innern der Ellipse ein *ungleichseitiges Parallelogramm* mit den Ecken

$$(3) \quad (1, 0, 0), (4, -7, -7), (6, -7, -14), (3, 0, -7),$$

woselbst bez. die Winkel $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ stattfinden. Man zeigt in gewohnter Weise, dass keine weitere Perspectivitätsaxe in das Innere des gewonnenen Vierecks eindringt, und damit entspringt der Satz:
Zeichnen wir in der ω -Halbebene die Gesamtheit der Halbkreise:

$$(4) \quad (x_0\sqrt{7} - y_0)(X^2 + Y^2) - 2z_0X + (x_0\sqrt{7} + y_0) = 0$$

für $f_0 = -1$ und $f_0 = -2$, so erscheint dieselbe in unendlich viele, als *ungleichseitige Parallelogramme* zu bezeichnende, *Kreisbogenvierecke* mit den Winkeln $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ getheilt, die alle aus einem unter ihnen nach dem Symmetrieprincip entstehen.

Nun aber ist besonders interessant, dass wir für den gegenwärtigen Fall im beschriebenen Viereck, welches übrigens in der ω -Halbebene die vier Ecken bekommt:

$$(5) \quad \omega = i, \quad \frac{-\sqrt{7} + i\sqrt{2}}{4 + \sqrt{7}}, \quad \frac{-2\sqrt{7} + i}{6 + \sqrt{7}}, \quad \frac{-\sqrt{7} + i\sqrt{2}}{3},$$

noch nicht einen Fundamentaltbereich für die Gruppe $\bar{\Gamma}^{(7)}$ besitzen. Man bemerke nämlich, dass von den vier Ecken (3) des Vierecks zwei die Gleichung $f_0 = 7$, die beiden anderen aber $f_0 = 14$ befriedigen. Die Gleichung $f_0 = 2$, welche doch auch Fixpunkte für Gruppen G_2 liefert, bleibt ausser Betracht. Da wird man nun sofort bemerken, dass die *Mittelpunkte* unserer *Kreisbogenparallelogramme* die noch

fehlenden Punkte mit $f_0 = 2$ liefern müssen. In der That sind die Diagonalen des Vierecks (2) durch

$$(6) \quad 2y - z = 0, \quad 7x + y + 3z = 0$$

gegeben, und diese schneiden sich in dem Punkte $(1, -1, -2)$, der $f_0 = 2$ befriedigt. Aber durch diesen Punkt zieht *keine* Perspectivitätsaxe hindurch, und also liefert uns $q = 7$ das Beispiel einer nicht ausschliesslich aus Spiegelungen erzeugbaren $\bar{\Gamma}^{(q)}$. Man ziehe demnach etwa die Diagonale $7x + y + 3z = 0$ und spalte dadurch von unserem Viereck ein Dreieck mit den Ecken

$$\omega = i, \quad \frac{-V\bar{7} + iV\bar{2}}{4 + V\bar{7}}, \quad \frac{-V\bar{7} + iV\bar{2}}{3}$$

ab, wobei wir dann die eine Hälfte der Diagonale der anderen Hälfte durch die gleich zu nennende elliptische Substitution der Periode zwei V_2 zuzuordnen haben. Spiegeln wir alsdann dieses Dreieck an der von der Geraden $y - z = 0$ herrührenden Seite, so gewinnen wir durch Anfügung des entspringenden Spiegelbildes einen Fundamentalbereich für die Gruppe $\Gamma^{(7)}$. Diese letztere lässt sich demgemäss aus den drei Substitutionen erzeugen:

$$(7) \quad V_1(\omega) = \frac{\frac{1}{V\bar{2}}\omega - \frac{1}{V\bar{2}}}{\frac{1}{V\bar{2}}\omega + \frac{1}{V\bar{2}}}, \quad V_2(\omega) = \frac{-V\bar{2}\omega + \frac{1-V\bar{7}}{V\bar{2}}}{\frac{1+V\bar{7}}{V\bar{2}}\omega + V\bar{2}},$$

$$V_3(\omega) = \frac{-\frac{1}{V\bar{2}}\omega + \frac{2-V\bar{7}}{V\bar{2}}}{\frac{2+V\bar{7}}{V\bar{2}}\omega + \frac{1}{V\bar{2}}}.$$

Uebrigens beachte man, dass ein einzelnes der beschriebenen Vierecke einen Fundamentalbereich für eine innerhalb der Gesamtgruppe $\bar{\Gamma}^{(7)}$ ausgezeichnete Untergruppe $\bar{\Gamma}_2^{(7)}$ vom Index zwei liefert. Dass die letztere dann wieder ausschliesslich aus Spiegelungen erzeugbar ist, macht ihre Einführung evident. (Vergl. hier überall Fig. 4).

§ 7.

Die Fundamentalbereiche der bei $q = 11$ eintretenden Gruppen.

Bei $q = 11$ kommen für elliptische Substitutionen die vier Gleichungen in Betracht: $f_0 = 1, 2, 11, 33$, für welche wir bez. die vier ganzzahligen Lösungen

$$(1) \quad (1, 1, 3), \quad (1, 0, 3), \quad (1, 0, 0), \quad (5, 11, 11)$$

als Beispiele anführen. Diese Gleichungen liefern uns vier Classen

von Untergruppen G_2, G_2, G_4, G_3 . Demgegenüber finden sich in der $\bar{\Gamma}^{(11)}$ drei Classen von Spiegelungen, welche bez. den Gleichungen $f_0 = -1, -2, -22$ zugehören.

Unter den Perspectivitätscentren fixire man etwa die vier:

$$(2) \quad (0, 1, -1), (0, 1, 0), (3, 0, 11), (1, 2, 3).$$

von denen das erste und letzte der nämlichen Classe ($f_0 = -2$) angehört. Die zugehörigen Axen sind gegeben durch:

$$(3) \quad y - z = 0, \quad y = 0, \quad 3x - z = 0, \quad 11x - 2y - 3z = 0;$$

diese bilden ein Viereck mit den Ecken

$$(4) \quad (1, 0, 0), (1, 0, 3), (1, 1, 3), (5, 11, 11),$$

woselbst bez. die Winkel $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ stattfinden. Hier haben wir also genau die Eckpunkte (1) wiedergewonnen. Da man wieder leicht zeigt, dass keine fernere Perspectivitätsaxe in das Innere des bezeichneten Vierecks eindringt, so folgt der Hauptsatz: *Die ω -Halbebene wird durch die gesammten Halbkreise:*

$$(x_0\sqrt{11} - y_0)(X^2 + Y^2) - 2z_0X + (x_0\sqrt{11} + y_0) = 0$$

für $f_0 = -1, -2, -22$ mit einer Eintheilung in Kreisbogenvierecke der Winkel $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ versehen. Dabei entspricht dem geradlinigen Viereck (3) das Kreisbogenviereck mit den Ecken:

$$(5) \quad \omega = i, \quad = \frac{3 + i\sqrt{2}}{\sqrt{11}}, \quad = \frac{3 + i}{-1 + \sqrt{11}}, \quad = \frac{\sqrt{11} + i\sqrt{3}}{5 - \sqrt{11}}.$$

Letzteres können wir zum Fundamentalraum der $\bar{\Gamma}^{(11)}$ wählen, welche Gruppe sich, wie man sieht, aus Spiegelungen allein erzeugen lässt. Indem wir dann wieder an dem von $y - z = 0$ herrührenden Kreise spiegeln, gewinnen wir in gewohnter Weise ein Fundamentalsechseck für die Gruppe $\Gamma^{(11)}$ (vergl. Fig. 5). Letztere Gruppe hat demzufolge die drei Erzeugenden:

$$(6) \quad V_1(\omega) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\omega - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\omega + \frac{1}{\sqrt{2}}}, \quad V_2(\omega) = \frac{\frac{1 - \sqrt{11}}{2} \cdot \omega + \frac{5 + \sqrt{11}}{2}}{\frac{-5 + \sqrt{11}}{2} \cdot \omega + \frac{1 + \sqrt{11}}{2}},$$

$$V_3(\omega) = \frac{\frac{-3 + \sqrt{11}}{2} \omega + \frac{3 + \sqrt{11}}{2}}{\frac{3 - \sqrt{11}}{2} \omega + \frac{3 + \sqrt{11}}{2}}.$$

Von diesen Substitutionen sind die beiden ersten elliptisch, die letzte hyperbolisch.

Die Betrachtungen der vorausgehenden Paragraphen, die wir hiermit abbrechen, geben ihrer Qualität nach die Gedankenreihen an, welche auch in den weiterhin folgenden Fällen zu den entsprechenden Resultaten führen. Immer sind es nur wenige Zahlwerthe f_0 , die für die Aufstellung der elliptischen Substitutionen und der Spiegelungen heranzuziehen sind, und es gelingt auch leicht, in diesem Betracht ein allgemeines Schema für beliebige Primzahlen q aufzustellen, wobei Fallunterscheidungen für q modulo 24 vorzunehmen sind. Demgegenüber ist zu betonen, dass die Rechnungen, welche über die nun behandelten Einzelfälle hinaus zur thatsächlichen Aufstellung der Fundamentalbereiche führen, alsbald recht umfängliche werden, und es ist dieserhalb nicht wahrscheinlich, dass man auf dem eingeschlagenen inductiven Wege zu allgemeinen Resultaten vordringen kann. In diesem Sinne lassen wir es bei den jetzt gegebenen Entwicklungen bewenden, ziehen dieselben aber nun noch zur weiteren Inbetrachtung heran.

Dritter Theil.

Zusammenstellung einiger fernerer Bemerkungen über die betrachteten Gruppen.

§ 1.

Satz über die Coefficienten der ω -Substitutionen der Gruppen $\Gamma^{(q)}$.*)

Bei den elliptischen und hyperbolischen Substitutionen (6) in I, § 6 der Gruppe $\Gamma^{(q)}$ ist die Summe des ersten und vierten Coefficienten $\sqrt{u+2}$ die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl, bei einer parabolischen Substitution (7) I, § 6 ist die entsprechende Summe gleich zwei. Erstere Substitution können wir unzweideutig durch die vier Zahlen $\sqrt{u+2}$, x_0 , y_0 , z_0 charakterisiren und bezeichnen sie in diesem Sinne symbolisch durch $(\sqrt{u+2}; x_0, y_0, z_0)$, letztere in analoger Weise durch $(a; x_0, y_0, z_0)$.

Jetzt wolle man die beiden Substitutionen $(\sqrt{u+2}; x_0, y_0, z_0)$ und $(\sqrt{u'+2}; x'_0, y'_0, z'_0)$ combiniren, was auf die Operation

$$(\sqrt{u''+2}; x''_0, y''_0, z''_0)$$

führen möge. Zufolge einer leichten Rechnung haben wir:

$$(1) \quad \sqrt{u''+2} = \frac{1}{2} \sqrt{u+2} \sqrt{u'+2} - \frac{1}{2} (q x_0 x'_0 - y_0 y'_0 - z_0 z'_0) \sqrt{\frac{u-2}{-f_0}} \sqrt{\frac{u'-2}{-f'_0}}.$$

*) Cf. Poincaré l. c., p. 431.

Combiniren wir $(\sqrt{u+2}; x_0, y_0, z_0)$ mit $(a'; x'_0, y'_0, z'_0)$, so wird die Summe des ersten und vierten Coefficienten in der entspringenden Substitution

$$(2) \quad \sqrt{u'+2} = \sqrt{u+2} + \frac{a}{\sqrt{q}} (qx_0x'_0 - y_0y'_0 - z_0z'_0) \sqrt{\frac{u-2}{-f_0}},$$

und endlich erhalten wir in entsprechender Weise von zwei parabolischen Substitutionen aus:

$$(3) \quad 2 - \frac{2aa'}{q} (qx_0x'_0 - y_0y'_0 - z_0z'_0)$$

als Summe des ersten und vierten Coefficienten der neuen Substitution.

Man wolle jetzt annehmen, dass weder $(\sqrt{u+2}; x_0, y_0, z_0)$ noch $(\sqrt{u'+2}; x'_0, y'_0, z'_0)$ die Periode zwei besitzt. Alsdann ist weder $\sqrt{u+2}$ noch $\sqrt{u'+2}$ gleich Null, und wir schreiben

$$(4) \quad \sqrt{u+2} = r\sqrt{s}, \quad \sqrt{u'+2} = r'\sqrt{s'},$$

wo r, s, r', s' ganze Zahlen sind und s, s' keinen quadratischen Theiler ausser 1 besitzen. Indem wir (1) mit $\sqrt{u+2} \sqrt{u'+2}$ multipliciren, kommt mit Rücksicht auf (5) in I, § 6:

$$\begin{aligned} \sqrt{u''+2} \cdot \sqrt{u+2} \cdot \sqrt{u'+2} &= \frac{1}{2} (u+2) (u'+2) \\ &\quad - \frac{1}{2} (qx_0x'_0 - y_0y'_0 - z_0z'_0) vv' q^v, \end{aligned}$$

wo $v = \pm 1$ oder 0 ist. Immer entnehmen wir aus einer leichten Interpretation dieser Gleichung den Satz: Die Quadratwurzel $\sqrt{u''+2}$ aus der ganzen Zahl $(u''+2)$ geht durch Multiplication mit $\sqrt{s \cdot s'}$ in eine ganze Zahl über; schreiben wir also (4) entsprechend

$$\sqrt{u''+2} = r''\sqrt{s''},$$

so ist $s'' = \frac{s \cdot s'}{\tau^2}$, wo τ der grösste gemeinsame Theiler von s und s' ist. Wenden wir eine gleiche Ueberlegung auf (2) an, so findet sich unter Anpassung der Bezeichnungsweise an diese Formel direct $s' = s$. Es würde nicht schwer halten, diesen Satz auch auf elliptische Substitutionen der Periode zwei auszudehnen; doch haben wir solches in der Folge nicht nöthig.

Jetzt wolle man sich für die einzelne Gruppe $\Gamma^{(2)}$ ein solches System von Erzeugenden aufstellen, dass sich unter den letzteren keine einzige Substitution der Periode zwei findet; (es hat das in den sogleich zu betrachtenden Fällen niemals Schwierigkeit). Die begrenzte Anzahl der verschiedenen Zahlen s , welche für diese Substitution in Betracht kommen, sei ν ; diese selbst seien durch $s_1, s_2, \dots, s_\nu$ be-

zeichnet. Für die gesammten Substitutionen der Gruppe kommen dann als Zahlen s nur die folgenden vor:

$$s_1, s_2, \dots, \frac{s_1 s_2}{\tau_1}, \frac{s_1 s_3}{\tau_2}, \dots, \frac{s_1 s_2 \dots s_\mu}{\tau_i}.$$

Die Anzahl dieser Grössen ist eine begrenzte, und es mögen sich insbesondere $(\mu - 1)$ verschiedene unter ihnen finden. Wir überblicken dann sofort den Satz: *Es giebt in der Gruppe $\Gamma^{(q)}$ eine ausgezeichnete Untergruppe $\Gamma_\mu^{(q)}$ des endlichen Index μ , welche alle diejenigen Substitutionen der $\Gamma^{(q)}$ umfasst, bei denen $\sqrt{\mu + 2}$ eine ganze Zahl ist. Diese Gruppe $\Gamma_\mu^{(q)}$ ist vom arithmetischen Standpunkt aus besonders interessant: Ihre Substitutionen haben die Gestalt:*

$$(5) \quad \omega' = \frac{\frac{a + b\sqrt{q}}{2} \cdot \omega + \frac{c + d\sqrt{q}}{2}}{\frac{-c + d\sqrt{q}}{2} \cdot \omega + \frac{a - b\sqrt{q}}{2}},$$

wo a, b, c, d solche ganze Zahlen sind, dass die Determinante von (5) der Einheit gleich ist. Hier könnten wir dann wieder alle diejenigen Substitutionen (5) in eine Untergruppe für sich sammeln, bei denen a, b, c, d gerade Zahlen sind.

§ 2.

Erläuterung des gewonnenen Satzes durch die Beispiele

$$q = 1, 3, 7.$$

Besonders einfach gestalten sich die soeben durchlaufenen Entwicklungen für den ersten in Betracht kommenden Fall $q = 1$. Wir gebrauchen da an Stelle der unter (4) II, § 3 gegebenen Erzeugenden V_1, V_2 zweckmässig die folgenden:

$$(1) \quad V_2(\omega) = \omega + 2, \quad V_3 = V_2^{-1} V_1(\omega) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \omega + \frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}} \omega + \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Die einzige hier eintretende Zahl s ist also $s=2$, und somit ist $\mu=2$. Das Polygon der zugehörigen ausgezeichneten $\Gamma_2^{(1)}$ ist in Fig. 1 durch stärker ausgezogene Randcurven angedeutet, und die Erzeugenden von $\Gamma_2^{(1)}$ sind, wie man sogleich sieht:

$$V_2(\omega) = \omega + 2, \quad (V_2 V_3 V_2)^2(\omega) = -\frac{1}{\omega}.$$

Hier fallen die Coefficienten direct ganzzahlig aus, und wir erhalten in der $\Gamma_2^{(1)}$ eine in der Modulgruppe enthaltene wohlbekannte Unter-

gruppe Γ_3 vom Index drei*). Die in Rede stehende Gruppe ist innerhalb der Modulgruppe eine von drei gleichberechtigten, während sie auf der andern Seite innerhalb $\Gamma^{(1)}$ ausgezeichnet ist.

Für die $\Gamma^{(3)}$ brauchen wir an Stelle der unter (2) II, § 4 genannten Erzeugenden V_1, V_2 zweckmässig die folgenden:

$$(2) \quad V_1(\omega) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \omega - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \omega + \frac{1}{\sqrt{2}}},$$

$$V_3(\omega) = V_2 V_1(\omega) = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2} \omega + \frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\frac{1-\sqrt{3}}{2} \omega - \frac{1-\sqrt{3}}{2}}.$$

Als Zahlen $\sqrt{s_1}, \sqrt{s_2}, \dots$ haben wir hier also die drei $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$, so dass die ausgezeichnete $\Gamma_\mu^{(q)}$ im gegenwärtigen Falle eine $\Gamma_4^{(3)}$ wird. Das Fundamentalpolygon derselben findet man in Fig. 2 angedeutet; es ist, wie alle bisher in Betracht gekommenen Polygone vom Geschlechte $p = 0$ und ergibt für die $\Gamma_4^{(3)}$ die drei Erzeugenden:

$$(3) \quad V_1^2(\omega) = \frac{-1}{\omega}, \quad V_3^2(\omega) = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2} \omega + \frac{3+\sqrt{3}}{2}}{\frac{-3+\sqrt{3}}{2} \omega + \frac{1-\sqrt{3}}{2}},$$

$$(V_3 V_1^2)^2(\omega) = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2} \omega - \frac{3+\sqrt{3}}{2}}{-\frac{3+\sqrt{3}}{2} \omega + \frac{1-\sqrt{3}}{2}}.$$

Durch Zusammenlegung dieses Polygons zur geschlossenen Ebene kommt man übrigens auf die Vierertheilung derselben zurück.

Wir verfolgen endlich auch noch den Fall $q = 7$, wo wir an Stelle der drei in II, § 6 genannten Substitutionen V_1, V_2, V_3 als Erzeugende der $\Gamma^{(7)}$ die nachfolgenden gebrauchen:

$$(4) \quad V_1(\omega) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \omega - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \omega + \frac{1}{\sqrt{2}}}, \quad V_4 = V_1 V_2(\omega) = \frac{\frac{-3-\sqrt{7}}{2} \omega - \frac{1+\sqrt{7}}{2}}{\frac{-1+\sqrt{7}}{2} \omega + \frac{3-\sqrt{7}}{2}},$$

$$V_5(\omega) = V_1 V_3(\omega) = \frac{-\frac{3+\sqrt{7}}{2} \omega + \frac{1-\sqrt{7}}{2}}{\frac{1+\sqrt{7}}{2} \omega + \frac{3-\sqrt{7}}{2}}.$$

Hier haben wir demgemäss als Grössen $\sqrt{s}$ die drei $\sqrt{2}, \sqrt{7}, \sqrt{14}$,

*) l. c. p. 289 u. f.

und wir gewinnen als $\Gamma_\mu^{(q)}$ wieder eine ausgezeichnete $\Gamma_4^{(7)}$ des Index vier. Den Fundamentalbereich derselben findet man in Fig. 4 angedeutet und sieht leicht, dass derselbe dem Geschlechte $p = 1$ angehört. Die Erzeugenden der $\Gamma_4^{(7)}$ sind die folgenden vier:

$$(5) \quad \begin{aligned} \omega' &= -\frac{1}{\omega}, & \omega' &= \frac{2\omega - 2 + \sqrt{7}}{(2 + \sqrt{7})\omega + 2}, \\ \omega' &= \frac{\frac{3 + \sqrt{7}}{2} \cdot \omega + \frac{3 - \sqrt{7}}{2}}{\frac{-3 - \sqrt{7}}{2} \cdot \omega + \frac{3 - \sqrt{7}}{2}}, & \omega' &= \frac{\frac{3 + \sqrt{7}}{2} \cdot \omega - \frac{3 - \sqrt{7}}{2}}{\frac{3 + \sqrt{7}}{2} \cdot \omega + \frac{3 - \sqrt{7}}{2}}. \end{aligned}$$

Hieran schliesst sich eine äusserst interessante Fragestellung. Wir kommen allgemein auf die Substitutionen (5) des vorigen Paragraphen zurück, wobei wir indes für $q = 4h + 1$ noch die weitere Bedingung anfügen, dass von den vier Zahlen a, b, c, d der einzelnen Substitution stets die beiden ersten, wie auch die beiden letzten einander modulo 2 congruent sein sollen, eine Bedingung, die für $q = 4h - 1$ von selbst erfüllt ist. Im ersteren Falle sind die vier Coefficienten der einzelnen Substitution *ganze* Zahlen des aus der Basis $(1, \sqrt{q})$ zu bildenden Zahlkörpers, im zweiten Falle kommen auch die Hälften ganzer Zahlen vor; immer aber sind der erste und vierte Coefficient conjugirt, sowie auch der zweite und negativ genommene dritte. Es besteht nun der Satz, dass die Gesamtheit der solchergestalt definirten Substitutionen für das einzelne q eine Gruppe $\gamma^{(q)}$ bildet; bei $q = 4h + 1$ ist dies aus der Ganzzahligkeit der Coefficienten sofort evident, bei $q = 4h - 1$ hat man eine elementare arithmetische Ueberlegung anzustellen, der wir hier nicht nachgehen können. In $\gamma^{(q)}$ ist nun offenbar $\Gamma_\mu^{(q)}$ als Untergruppe enthalten, und es entspringt die Frage (die wir gleichfalls hier nicht verfolgen können), wie sich des näheren das Verhältniss der Untergruppe zur umfassenden Gruppe gestaltet.

§ 3.

Beziehung der Gruppe $\Gamma^{(q)}$ bei $q = 4h + 1$ zur Modulgruppe.

Wir fanden soeben, dass die Gruppe $\Gamma^{(1)}$ mit der Modulgruppe eine Untergruppe von endlichem Index gemeinsam hat. Wie wir hier zum Schluss zeigen wollen, tritt das gleiche Sachverhältniss für alle Gruppen $\Gamma^{(q)}$ mit $q = 4h + 1$ ein (sowie ganz allgemein bei denjenigen ternären Formen, welche die Null darzustellen vermögen).

Für $q = 4h + 1$ hat $f = qx^2 - y^2 - z^2 = 0$ ganzzahlige Lösungen, die, wie wir sagen werden, ganzzahlige Punkte des Kegelschnitts $f = 0$ ergeben. Zwei unter diesen Punkten wählen wir aus, nennen die beiden Tangenten in ihnen $\xi = 0$, $\xi = 0$ und ihre Verbindungslinie $\eta = 0$,

wo ξ, η, ζ lineare homogene Ausdrücke der x, y, z sind, die bis auf constante Factoren bestimmt sind. Die letzteren Factoren denken wir so gewählt, dass die neun Coefficienten dieser drei Ausdrücke ganze Zahlen sind, dass ferner f bis auf einen Factor in $(\xi\zeta - \eta^2)$ übergeht, dass endlich sonst überflüssige gemeinsame Factoren der neun Coefficienten nicht auftreten. So gewinnen wir eine ganzzahlige Substitution T der Gestalt (3) I, § 1, deren Determinante Δ sein möge.

Bevor wir die ternären Substitutionen S der Gruppe $\Gamma^{(q)}$ vermöge T transformiren, wolle man bemerken, dass sich das bekannte Princip aus der Theorie der Modulfunctionen, durch Congruenzen bezüglich eines festen Moduls n Untergruppen auszusondern, sofort auf die $\Gamma^{(q)}$ der ganzzahligen ternären Substitutionen anwenden lässt.*) Insbesondere werden diejenigen Substitutionen, deren Diagonalglieder $\equiv 1$ sind, während die übrigen sechs Glieder durch n theilbar sind, eine ausgezeichnete Congruenzgruppe bilden, die wir als Hauptcongruenzgruppe bezeichnen werden. Sie ist von endlichem Index und spielt eine ganz ähnliche Rolle, wie diejenige Untergruppe der Modulgruppe, welche als Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe bezeichnet wird.

Jetzt transformire man $\Gamma^{(q)}$ durch T , wobei die einzelne Substitution S in $U = T^{-1}ST$ übergeht. Die Substitution U hat die Gestalt (4) I, § 1, wobei die Coefficienten rationale Brüche $\frac{b_{ik}}{\Delta}$ mit dem Nenner Δ sein werden, während sich die Zähler b_{ik} linear und ganzzahlig aus den Coefficienten von S aufbauen. Soll U ganzzahlig sein, so müssen die neun Bedingungen $b_{ik} \equiv 0, (\text{mod. } \Delta)$ erfüllt sein. Die Identität $S = 1$ liefert $U = 1$, erfüllt also diese Bedingungen, damit aber offenbar auch jede mit 1 modulo Δ congruente Substitution S . Indem aber die Gruppe aller ganzzahligen Substitutionen U der Determinante 1 keine andere als die Modulgruppe Γ ist, entspringt offenbar der Satz, dass diese letztere Gruppe Γ mit der transformirten Gruppe $T^{-1}\Gamma^{(q)}T$ eine Untergruppe von endlichem Index gemein hat. Durch Umkehrung dieses Schlussverfahrens überblickt man ohne Mühe, dass die in Rede stehende gemeinsame Untergruppe innerhalb der Modulgruppe eine Congruenzgruppe der Stufe Δ ist.

Bei $q = 5$ ziehen wir etwa die beiden ganzzahligen Lösungen $(1, 2, \pm 1)$ von $5x^2 - y^2 - z^2 = 0$ heran und schreiben daraufhin als Substitution T :

$$\begin{aligned}\xi &= 5x - 2y - z, \\ \eta &= -10x + 5y, \\ \zeta &= 25x - 10y + 5z.\end{aligned}$$

Die Form f geht alsdann über in $\frac{1}{5}(\xi\zeta - \eta^2)$, während wir als Deter-

*) Cf. Poincaré, l. c., p. 422.

minante von T sofort $\Delta = 50$ erhalten. Setzen wir jetzt in Anlehnung an (1) I, § 6 von ξ, ζ, η aus $\omega' = \frac{\eta + i\sqrt{\xi\zeta - \eta^2}}{\xi}$, während ω seine im § 5 des vorigen Theiles zu Grunde gelegte Bedeutung beibehält, so ist auf Grund einer kurzen Rechnung:

$$\omega' = -\sqrt{5} \cdot \frac{\omega + 2 + \sqrt{5}}{\omega - 2 - \sqrt{5}}.$$

Die in Fig. 3 gegebene Viereckstheilung der $\Gamma^{(5)}$ ist nun sogleich in der Halbebene ω' gezeichnet. Indem man diese Figur also nach dem Princip der Symmetrie weiter fortsetzt, muss es möglich sein, durch eine ganze Anzahl solcher Kreisbogenvierecke ein gewisses Polygon einer Congruenzgruppe 50^{ster} Stufe gerade vollständig auszufüllen. Wir müssen es indessen unterlassen, dies mit Hülfe von Figuren wirklich durchzuführen.

Berlin, den 22. October 1890.