Mühe unterzogen, die Berechnung einmal ohne und ein andermal mit Randkorrekturen streng durchzuführen; er gelangte zu Resultaten, welche die Elemente des Berliner Jahrbuches bestätigen. Da nun kein Zweifel mehr über gewisse Grund-

lagen bestehen konnte, habe ich nochmals in letzter Näherung mit verbesserten Randkorrekturen usw. die Resultate der III. Abh. einer Revision unterzogen und führe nun hier die definitiven Wertsysteme an:

	<i>Schlüter</i>	<i>Hartwig</i>	<i>Hayn</i>
$\lambda =$	$-5^{\circ} 9' 56'' \pm 11''$	$-5^{\circ} 10' 26'' \pm 25''$	$-5^{\circ} 10' 10'' \pm 20''$
$\beta =$	$-3 11 0 \pm 9$	$-3 10 32 \pm 21$	$-3 11 15 \pm 14$
$h =$	$15 32.9 \pm 0.44$	$15 34.7 \pm 1.15$	$15 33.9 \pm 0.66$
$\mathcal{J} =$	$1 32 14 \pm 14$	$1 31 51 \pm 36$	$1 32 33 \pm 15$
$f =$	0.71 ± 0.03	0.73 ± 0.07	0.77 ± 0.04

Es sind hier λ und β die selenographische Länge und Breite von Mösting A, h sein Radiusvektor, gültig für mittlere Parallaxe, $\mathcal{J}$ die Neigung des Mondäquators gegen die Ekliptik und f die bekannte Funktion der 3 Trägheitsmomente. Die 3 Systeme stimmen innerhalb ihrer Fehlergrenzen völlig überein. Näheres über die Ableitung der definitiven Elemente muß einer späteren Abhandlung vorbehalten bleiben. Es wird da auch zu untersuchen sein, warum die *Schlüterschen* Beobachtungen bisher abweichende Werte ergaben. Die definitiven Resultate sind

$$\begin{aligned} \lambda &= -5^{\circ} 10' 7'' \pm 9'' & h &= 15' 33''.4 \pm 0''.34 \\ \beta &= -3 11 2 \pm 7 & \mathcal{J} &= 1^{\circ} 32' 20'' \pm 10'' \\ f &= 0.73 \pm 0.02. \end{aligned}$$

Ein selenozentrischer Winkel erscheint von der Erde gesehen etwa 220 mal kleiner. Die Angabe solcher Koordinaten auf Bogensekunden ist daher ein gewisser Zahlenluxus, der hier nur beibehalten wurde, da die mittleren Fehler und weiter unten die Werte der physischen Libration praktischerweise in Sekunden zu geben waren. Die scheinbare Größe der mittleren Fehler liegt überall unter $0''.1$, da auch h immer stark verkürzt erscheint, im Maximum in ein Viertel seiner Länge.

Die 3 Störungen der Rotation, deren Bedeutung aus S. K. I zu ersehen ist, ergeben sich entsprechend den Werten $f = 0.71, 0.73, 0.75$ zu

Leipzig, 1914 Juni 16.

$$\begin{aligned} x &= -13'' \sin g + 70'' \sin g' + 38'' \sin 2\omega \\ &\quad -13 \quad +65 \quad +26 \\ &\quad -12 \quad +60 \quad +18 \\ \varrho &= -104'' \cos g + 32'' \cos(g+2\omega) - 11'' \cos(2g+2\omega) \\ &\quad -106 \quad +34 \quad -11 \\ &\quad -107 \quad +36 \quad -11 \\ \mathcal{J}\sigma &= -106'' \sin g + 32'' \sin(g+2\omega) - 11'' \sin(2g+2\omega) \\ &\quad -108 \quad +34 \quad -11 \\ &\quad -109 \quad +36 \quad -11 \end{aligned}$$

Die Formeln wurden für 3 Werte von f berechnet, um zu zeigen, wie genau die »physische Libration« nunmehr bestimmt ist.

Im allgemeinen empfiehlt es sich bekanntlich, mit ungestörten Werten von Länge, Neigung und Knoten zu rechnen und dafür anzunehmen, die selenographischen Koordinaten von Mösting A seien veränderlich. Ist $\lambda' = \lambda + d\lambda$ und $\beta' = \beta + d\beta$ die Länge und Breite des Kraters gegen das ungestörte Koordinatensystem, so ist

$$\begin{aligned} d\lambda &= -13'' \sin g + 65'' \sin g' + 26'' \sin 2\omega \\ d\beta &= -107'' \sin(\omega + \lambda) - 34'' \sin(\omega - \lambda) + 11'' \sin(g + \omega - \lambda). \end{aligned}$$

Die definitiven Resultate unterscheiden sich nur so unbedeutend von den Grundlagen des Berliner Jahrbuchs, daß im allgemeinen die Ephemeride als bis auf $0''.2$ genau angesehen werden kann; nur in besonderen, seltenen Fällen kann der Fehler etwas größer sein.

F. Hayn.

Adhuc pauca de principio medii arithmetici. A Ph. Angelitti.

1. Articulo quem nuper in Astronomische Nachrichten No. 4737 edidi de principio medii arithmetici, adhuc pauca adicere cogor. Ingressus enim viam mihi a Dre. A. Sellerio, jam ante meo discipulo, amice et concinne per litteras ostensam, illas quoque demonstrationes quas in paragraphis 3 et 10 prodidi, duobus tantum postulatis superstructas, redigere potui in formam nullis adminiculis calculi infinitesimalis egentem.

2. Re vera, sit $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ valor maxime probabilis exoriens ex mensuris $x_1, x_2, \dots, x_n$ aequalia pondera habentibus.

Primum postulatam enuntiari potest per aequationes

$$\begin{aligned} \varphi(x_1 + h, x_2, \dots, x_n) &= \varphi(x_1, x_2 + h, \dots, x_n) = \text{etc.} \\ &= \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n + h), \end{aligned}$$

et alterum postulatam per aequationem

$$\varphi(\alpha, \alpha, \dots, \alpha) = \alpha.$$

Ex primo postulato colligitur

$$\varphi(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) = \varphi(x_1 + [h], x_2, \dots, x_n).$$

Si statuatur $[h] = 0$, id est $[(x+h)] = [x]$, erit

$$\varphi(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Si, ut casus particularis, statuatur $nM = [x]$, habebitur

$$\varphi(M, M, \dots, M) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

et per secundum postulatam

$$M = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Itaque medium arithmeticum M erit valor maxime probabilis.

3. Item, sit $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ valor maxime probabilis exoriens ex mensuris $x_1, x_2, \dots, x_n$ habentibus respectiva pondera $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Tunc primum postulatam enuntiari potest per aequationes

$$\begin{aligned} \varphi(x_1 + h/p_1, x_2, \dots, x_n) &= \varphi(x_1, x_2 + h/p_2, \dots, x_n) = \text{etc.} \\ &= \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n + h/p_n). \end{aligned}$$

Ex hoc postulato colligitur

$$\varphi(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) = \varphi(x_1 + [ph]/p_1, x_2, \dots, x_n).$$

Si statuatur $[ph] = 0$, id est $[p(x+h)] = [px]$, erit
 $\varphi(x_1+h_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Si, ut casus particularis, statuatur $[p]P = [px]$, habebitur
 $\varphi(P, P, \dots, P) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

Scripseram Panormi, a. d. VIII kalendas Julias 1914.

et per secundum postulatam

$$P = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Itaque medium ponderatum P erit valor maxime probabilis.

Ph. Angelitti.

Rursus de principio medii arithmetici. A R. Suppantšitsch.

1. Mathematici et Astronomi theoremata etiam maxime perspicua reducere ad principia generalia magna cum laude solent. *Angelitti* clarissimus doctor nuper humanissime veteriorum menda demonstrationum clarissimi *Stone* liquentia fecit novamque edidit demonstrationem in *Astronomische Nachrichten* No. 4424 (vol. 185, pg. 113 et seqq.), quam mirifico modo simplicem reddidit in *Astr. Nachr.* No. 4737 (vol. 198, pg. 137 et seqq.) annotationem probans, quam prodidi in opusculo meo *Zur Axiomatik der Methode der kleinsten Quadrate*, edito in libro qui dicitur *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien*, vol. 72, pg. 3 et seqq. Demonstrationibus *Angelitti* praeclari illius viri aliquid additurus primum methodum meam illo loco prolatam, quatenus ad principium medii arithmetici pertinet, breviter explicabo.

2. Equidem censeo nihil loci esse assumptioni functiones, quibus ad reperendum valorem maxime probabilem alicuius quantitatis evadentis ex compluribus mensuris utimur, derivatis partialibus primis gaudere, quia exitus mensurae cuiusvis re vera forte magis quam lege quadam naturali accidit. Qua ex re talem aspernatus assumptionem maiorem demonstrationis difficultatem inde exortam non metui.

3. Proinde postulatis nisus sum subsequentibus:

I°. Ex una observatione unus valor x_i evadit quantitatis a per observationem determinandae, sed iste valor nihil est nisi unus ex silva tota valorum, qui evadere possunt. Silva valorum possibilium finita est.

II°. Exstant numeri quidam $p_i^{(1)}, p_i^{(2)}, \dots$ probabilitatem cuiusvis valoris $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots$ inter valores silvae indicantes.

Hinc statim sequitur:

$$p_i^{(j)} < 1.$$

$$\sum_j p_i^{(j)} = 1$$

Summam

$$\sum_j (x_i^{(j)} - a) p_i^{(j)}$$

secundum consuetudinem errorem systematicum appellamus. Deinde ponendum est:

III°. Singulae observationes erroribus systematicis carent.

Habemus ergo quacumque utimur mensura:

$$\sum_j (x_i^{(j)} - a) p_i^{(j)} = 0.$$

4. Primum postulatam tertii paragraphi re vera satis perspicuum esse patet, quia numeri ex singulis observationibus evadentes finito tantum numero decimalium gaudent omnesque in quodam intervallo finito inclusi sunt. Si quis malit, pro illa postulata haec ponat:

I°. Silva valorum possibilium continua est.

II°. Exstat functio quaedam $\varphi_i(x)$, per integralem semper exstantem

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi_i(x) dx$$

probabilitatem significans valorem ex observatione i evadentem inclusum esse in intervallo

$$\alpha \leq x_i \leq \beta.$$

Hinc statim sequitur:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(x) dx = 1.$$

III°. Singulae observationes erroribus systematicis carent:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi_i(x) dx = a.$$

5. Utrum evidentia postulatorum paragraphi tertii an quarti potius sit probanda, lectoris iudicium invocandum est, quod utraque in eundem finem exeunt.

Demonstratio nostra hinc nulla alia re nisi tribus his postulatis supplenda est.

IV°. Exstat functio continua valorum $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ singulis observationibus determinatorum et quarundam quantitatum, parametra quae dicturus sum, $y_1, y_2, \dots, y_s$, scilicet

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_s)$$

gaudens hac proprietate:

$$f(kx_1, kx_2, \dots, kx_n, ky_1, ky_2, \dots, ky_s) = kf(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s).$$

Ultima aequatione conditio analytica assumptionis definitur valorem eliciendum non pendere ex unitate qua metientes usi sumus; minime vero ponitur z derivatas partiales habere.

V°. Inter functiones z solas eas eligi oportet quae erroribus carent systematicis.

Ex postulatis iamiam enumeratis efficitur esse:

$$z = \lambda_1(x_1 - a) + \lambda_2(x_2 - a) + \dots + \lambda_n(x_n - a) + a,$$

id quod in opusculo meo computatione usus satis difficili demonstravi. Quantitates $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ numeri sunt arbitrarii.

6. Nunc ponendum est:

VI°. Pro valore a quantitatis metiendae valor computandus z ponendus est.

Inde statim apparet:

$$z = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_n x_n,$$

ubi habemus:

$$\mu_i = \lambda_i / (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n).$$

$$\sum \mu_i = 1.$$