SUR LA SOMMATION DES SÉRIES DE LAPLACE ET DE LEGENDRE.

Par M. Michel Plancherel (Fribourg).

Adunanza del 13 agosto 1911.

Il existe des séries de polynômes de LEGENDRE et des séries de fonctions sphériques divergeant en certains points bien que leurs fonctions génératrices soient continues. De telles séries peuvent être construites par les procédés généraux de MM. HAAR ¹⁾ et LEBESGUE ²⁾. Mais alors que pour une fonction sommable la convergence de la série de FOURIER de cette fonction en un point ne dépend que des valeurs de la fonction au voisinage de ce point, il n'en est plus de même pour la série de LEGENDRE de cette fonction. Témoin la fonction

$$\frac{1}{(1-x)^s}, \quad -1 \leq x \leq 1$$

dont la série de LEGENDRE diverge dans tout l'intervalle $(-1, +1)$ lorsque $\frac{1}{4} \leq s < 1$ ³⁾. D'autre part, cependant, la suite des coefficients du développement en série de LAPLACE d'une fonction sommable détermine cette fonction à une fonction d'intégrale nulle près. Il est donc important de connaître des procédés simples permettant de reconstruire la fonction à partir des coefficients de son développement en série de LAPLACE. Le premier résultat général obtenu dans cette voie est dû à M. FÉJÉR ⁴⁾: *la série de LAPLACE d'une fonction intégrable, sommée par les moyennes de CESÀRO du second ordre, converge vers la fonction en tout point de continuité de celle-ci.*

Il y a quelques années, M. DE LA VALLÉE POUSSIN ⁵⁾ a été amené à considérer

¹⁾ A. HAAR, *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme* (I. Mitteilung) [Mathematische Annalen, Bd. LXIX (1910), pp. 331-371].

²⁾ H. LEBESGUE, *Sur les intégrales singulières* [Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, III^e série, t. I (1909), pp. 25-117].

³⁾ L. FEJÉR, *Über die LAPLACESche Reihe* [Mathematische Annalen, Bd. LXVII (1909), pp. 76-109].

A. HAAR, *Über die LEGENDRESche Reihe* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXII (2^e sem. 1911), pp. 132-142].

⁴⁾ loc. cit. ³⁾.

⁵⁾ CH.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynômes et des suites limitées de FOURIER* [Bulletins de la classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique, 1908, pp. 193-254].

un procédé de sommation entièrement différent des procédés de CESÀRO et de HÖLDER. L'application de ce procédé aux séries de FOURIER lui a donné des résultats d'une grande généralité. Son procédé de sommation lui permet non seulement de trouver la valeur de la fonction en tout point de continuité de celle-ci, mais encore de *calculer les dérivées, de tout ordre de la fonction, là où elles existent.*

Il m'a paru intéressant d'appliquer aux séries de LAPLACE un procédé de sommation du même type que celui de M. DE LA VALLÉE POUSSIN. Les résultats obtenus ne le cèdent pas en généralité à ceux qu'il a obtenus sur les séries de FOURIER; ils sont plus étendus que ceux que l'on obtient par l'emploi des secondes moyennes de CESÀRO. Le procédé étudié ici présente encore sur celui de M. FÉJER l'avantage d'exprimer en formules simples et faciles à étudier les suites de fonctions dont la limite est cherchée ⁶⁾.

CHAPITRE I.

La sommation de la série de Laplace.

1. *Le procédé de sommation.* — Soit la série de fonctions

$$(1) \quad u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots$$

Le procédé de sommation de cette série, qu'emploie M. DE LA VALLÉE POUSSIN consiste à poser

$$(2) \quad \Sigma_n = u_0 + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{(n+1)(n+2) \dots (n+k)} u_k$$

et à chercher la limite de Σ_n pour $n = \infty$. Si cette limite existe,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_n = \Sigma,$$

nous dirons que la série (1) est sommable par le procédé de M. DE LA VALLÉE POUSSIN et qu'elle a pour somme Σ . Nous n'emploierons pas ici le procédé (2), mais nous poserons

$$(3) \quad S_n = u_0 + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{(n+2)(n+3) \dots (n+k+1)} u_k$$

et nous chercherons la limite de S_n pour $n = \infty$. Si cette limite existe,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

nous dirons que la série (1) est sommable par le procédé (S_n) et que sa somme est égale à S . Il est clair que S peut exister sans que la série (1) soit convergente au sens ordinaire du mot, mais on voit sans difficulté que si la série (1) converge vers une limite s , la suite (3) converge aussi et que $S = s$. Pour le voir partons du lemme suivant :

⁶⁾ Les résultats du présent travail ont été annoncés dans ma Note : *Sur l'application aux séries de LAPLACE du procédé de sommation de M. DE LA VALLÉE POUSSIN* [Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CLII (1^{er} semestre 1911), pp. 1226-1228].

LEMME : $a_k, b_k (k = 1, 2, \dots, n)$ étant des quantités réelles, les b_k étant décroissants et positifs, on a

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq M b_0$$

si, quelque soit $k \leq n$,

$$\left| \sum_{p=1}^k a_p \right| \leq M.$$

Ce lemme résulte immédiatement de l'identité d'ABEL

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) \sum_{p=1}^k a_p + b_n \sum_{p=1}^n a_p.$$

Supposant la série (1) convergente, nous pouvons, à tout $\varepsilon > 0$ faire correspondre un indice $N = N(\varepsilon)$, tel que

$$\left| \sum_n^m u_k \right| < \varepsilon, \quad \text{pour } n, m \geq N;$$

puis, comme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{(n+2)(n+3) \dots (n+k+1)} = 1$$

lorsque k reste fixe, nous déterminerons $M = M(\varepsilon)$, tel que

$$\left| \sum_{k=1}^N \frac{m(m-1) \dots (m-k+1)}{(m+2) \dots (m+k+1)} u_k - \sum_{k=1}^N u_k \right| < \varepsilon, \quad \text{pour } m \geq M.$$

Or, comme pour toute valeur de m supérieure au plus grand des deux nombres M, N

$$S_m = \sum_{k=1}^N \frac{m(m-1) \dots (m-k+1)}{(m+2) \dots (m+k+1)} u_k + \sum_{k=N+1}^m \frac{m(m-1) \dots (m-k+1)}{(m+2) \dots (m+k+1)} u_k$$

et que le lemme appliqué à la seconde somme du second membre montre qu'elle est plus petite en valeur absolue que

$$\varepsilon \cdot \frac{m(m-1) \dots (m-N)}{(m+1) \dots (m+N+2)} < \varepsilon,$$

on conclut

$$\left| S_m - \sum_{k=1}^N u_k \right| < 2\varepsilon, \quad m \geq M, N,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N u_k = s.$$

Le procédé de sommation (S_n) est du même type que le procédé (Σ_n) de M. DE LA VALLÉE POUSSIN. Il se pose naturellement à son sujet la question de savoir s'il lui est équivalent. La réponse est affirmative, elle s'exprime par le théorème suivant :

Si la série (1) est sommable par le procédé (Σ_n) , elle est sommable, de même somme, par le procédé (S_n) , et réciproquement.

Je donne de ce théorème une démonstration que je dois à l'obligeance de mon

Inversement, si l'on exprime Σ_n linéairement en fonction de $S_0, S_1, \dots, S_n$

$$\begin{aligned}\Sigma_0 &= \beta_{00} S_0, \\ \Sigma_1 &= \beta_{10} S_0 + \beta_{11} S_1, \\ &\dots \dots \dots \\ \Sigma_n &= \beta_{n0} S_0 + \beta_{n1} S_1 + \dots + \beta_{nn} S_n,\end{aligned}$$

les coefficients β_{nk} sont donnés par

$$\begin{aligned}\beta_{n0} &= -\frac{1}{2(2n-1)}, \\ \beta_{n1} &= -\frac{1.3}{2.2!} \frac{n}{(2n-1)(2n-3)}, \\ &\dots \dots \dots \\ \beta_{nk} &= -\frac{1.3.5 \dots (2k+1)}{2(k+1)!} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{(2n-1)(2n-3) \dots (2n-2k-1)}, \\ &\dots \dots \dots \\ \beta_{n,n-1} &= -\frac{1}{2}, \\ \beta_{n,n} &= \frac{2n+1}{n+1}.\end{aligned}$$

Ici encore

$$\begin{aligned}\beta_{n0} + \beta_{n1} + \dots + \beta_{nn} &= 1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{nk} &= 0.\end{aligned}$$

Tous les coefficients β_{nk} sont négatifs, sauf β_{nn} . On peut donc démontrer de la même manière que si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

existe, l'on a aussi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_n = S.$$

Il y a donc bien équivalence complète entre les deux procédés de sommation. *Tous les théorèmes des § suivants sont donc encore vrais, si l'on remplace dans leur énoncé le procédé (S_n) par le procédé (Σ_n) de M. DE LA VALLÉE POUSSIN*, car ces théorèmes ne concernent que la limite de S_n . Les formules se présentant, dans ce qui suit, beaucoup plus simplement lorsqu'on emploie le procédé (S_n) , nous nous bornerons à l'emploi de ce dernier.

2. Quelques formules préliminaires. — Partons de la relation

$$\left(2 \cos \frac{x}{2}\right)^{2n+1} = \left(e^{\frac{ix}{2}} + e^{-\frac{ix}{2}}\right)^{2n+1},$$

développons le second membre par la formule du binôme et groupons deux à deux les termes du développement également éloignés des extrêmes. Nous obtenons

$$\begin{aligned}2 \left[\cos \left(n + \frac{1}{2}\right) x + \binom{2n+1}{1} \cos \left(n - \frac{1}{2}\right) x + \dots \right. \\ \left. \dots + \binom{2n+1}{k} \cos \left(n - k + \frac{1}{2}\right) x + \dots + \binom{2n+1}{n} \cos \frac{x}{2} \right].\end{aligned}$$

Renversons l'ordre des termes et mettons $\binom{2n+1}{n}$ en facteur :

$$2^{2n+1} \cos^{2n+1} \frac{x}{2} = 2 \binom{2n+1}{n} \left[\cos \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{(n+2)(n+3) \dots (n+k+1)} \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) x \right].$$

Dérivons par rapport à x ; nous obtenons, après quelques réductions faciles,

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{2^{2n} (n!)^2 (n+1)}{(2n)!} \cos^{2n} \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} \\ & = \sin \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{(n+2)(n+3) \dots (n+k+1)} (2k+1) \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) x. \end{aligned} \right.$$

Cette identité est très importante. Elle nous permettra de trouver une expression simple de la sommation des séries de LAPLACE. Désignons par k_n la quantité

$$(5) \quad k_n = \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2 (n+1)}{\pi (2n)!}$$

et cherchons-en une expression asymptotique pour n très grand. On peut utiliser pour cela la formule de STIRLING, qui donne

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \left(\sqrt{\pi} + \frac{\omega}{\sqrt{2n}} \right),$$

ω étant compris entre -1 et $+1$ ⁷⁾, et que nous écrivons au moyen du symbole O de M. LANDAU :

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n} \left(\sqrt{\pi} + O(n^{-\frac{1}{2}}) \right).$$

Ce symbole a ici la signification suivante: $g(n)$ étant une fonction de l'argument discontinu n , positive pour les grandes valeurs de n , et $f(n)$ étant une fonction quelconque de n , l'écriture

$$f(n) = O(g(n))$$

veut dire qu'à partir d'une certaine valeur N de n

$$\left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| < A, \quad n \geq N,$$

A étant une constante positive indépendante de n . Lorsque $f(n)$ contient encore un paramètre variable t , et que, dans un certain intervalle $\alpha \leq t \leq \beta$,

$$\left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| < A, \quad n \geq N, \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

A étant indépendant de n , t , nous dirons que $f(n) = O(g(n))$ uniformément en t dans (α, β) . On voit au moyen de cette notation que

$$(6) \quad k_n = \frac{(n+1)\sqrt{n\pi}}{\pi} + O(n) = O(n^{\frac{3}{2}}).$$

⁷⁾ Voir, par ex : É. GOURSAT, *Cours d'Analyse* (Paris, Gauthier-Villars), tome I (1902), page 328; C. JORDAN, *Cours d'Analyse*, 2^e édition (Paris, Gauthier-Villars), tome II (1894), page 182.

$P_n(x)$ désignant comme d'habitude le polynôme de LEGENDRE d'ordre n ,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n},$$

nous aurons à utiliser la formule de MEHLER ⁸⁾

$$(7) \quad P_n(\cos \omega) = \frac{2}{\pi} \int_{\omega}^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\psi d\psi}{\sqrt{2(\cos \omega - \cos \psi)}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots; 0 \leq \omega \leq \pi),$$

qui, pour $n = 0$, se réduit à

$$(7_a) \quad 1 = \frac{2}{\pi} \int_{\omega}^{\pi} \frac{\sin \frac{1}{2}\psi d\psi}{\sqrt{2(\cos \omega - \cos \psi)}}.$$

Le radical est à prendre positivement dans ces formules.

3. *La série de Laplace.* — Sur la surface sphérique de rayon égal à l'unité

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

introduisons les coordonnées polaires par les formules

$$x = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = \cos \vartheta \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

L'axe des z est donc pris comme axe polaire, ϑ est la distance (sphérique) polaire et φ la longitude. (ϑ, φ) et (ϑ', φ') étant deux points de la surface sphérique, leur distance sphérique ω est donnée par

$$(8) \quad \cos \omega = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi').$$

L'élément d'aire au point (ϑ', φ') a pour valeur

$$(9) \quad d\sigma' = \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi'.$$

La formule suivante de la théorie des fonctions sphériques

$$(10) \quad \int P_n(\cos \omega) d\sigma' = 0 \quad (n > 0),$$

où l'intégrale (comme ce sera toujours le cas, sans indication expresse du contraire) est étendue à toute la surface sphérique, est une conséquence immédiate du fait que sa valeur est indépendante de la position du point (ϑ, φ) et de la propriété d'orthogonalité des polynômes de LEGENDRE

$$\begin{aligned} \int P_n(\cos \omega) d\sigma' &= \int P_n(\cos \vartheta') d\sigma' = \int_0^{\pi} d\vartheta' \sin \vartheta' P_n(\cos \vartheta') \int_0^{2\pi} d\varphi' \\ &= 2\pi \int_{-1}^{+1} P_n(x) dx = 0 \quad (n > 0). \end{aligned}$$

Considérons maintenant une fonction $F(\vartheta, \varphi)$ de la position d'un point sur la

⁸⁾ Cfr. HEINE, *Handbuch der Kugelfunctionen* (Berlin, G. Reimer), Bd. I, 2. Auflage (1878), p. 44. Cette formule résulte très simplement des formules de DIRICHLET.

sphère et faisons la seule hypothèse que l'intégrale de la valeur absolue de cette fonction, étendue à toute la surface sphérique, existe :

$$(11) \quad \int |F(z', \varphi')| d\sigma' = M.$$

Cette intégrale peut s'entendre au sens ordinaire de RIEMANN ou au sens de LEBESGUE. Nos raisonnements sont les mêmes dans un cas et dans l'autre. Nous pouvons sous cette hypothèse former effectivement tous les termes de la série suivante, convergente ou non,

$$(12) \quad \frac{1}{4\pi} \int F(z', \varphi') d\sigma' + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \int F(z', \varphi') P_k(\cos \omega) d\sigma'.$$

C'est la *série de LAPLACE* de $F(z, \varphi)$. Sommant cette série par le procédé indiqué plus haut (3), nous avons à former la suite

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} S_n(z, \varphi) &= \frac{1}{4\pi} \int F(z', \varphi') d\sigma' \\ &+ \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{4\pi} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{(n+2)(n+3) \dots (n+k+1)} \int F(z', \varphi') P_k(\cos \omega) d\sigma' \end{aligned} \right.$$

et à chercher sa limite pour $n = \infty$. Appliquant la formule de MEHLER (7) et l'identité (4), nous obtenons

$$(14) \quad S_n(z, \varphi) = \frac{k_n}{2\pi} \int d\sigma' F(z', \varphi') \int_{\omega}^{\pi} \cos^{2n} \frac{\psi}{2} \frac{\sin \frac{\psi}{2} d\psi}{\sqrt{2(\cos \omega - \cos \psi)}}.$$

L'expression asymptotique (6) de k_n montre qu'il est équivalent de chercher la limite pour $n = \infty$ de $S_n(z, \varphi)$ ou de

$$\frac{(n+1)\sqrt{n\pi}}{2\pi^2} \int d\sigma' F(z', \varphi') \int_{\omega}^{\pi} \cos^{2n} \frac{\psi}{2} \frac{\sin \frac{\psi}{2} d\psi}{\sqrt{2(\cos \omega - \cos \psi)}}.$$

Notons, pour abréger,

$$(15) \quad L(n, t) = \int_t^{\pi} \cos^{2n} \frac{\psi}{2} \frac{\sin \frac{\psi}{2} d\psi}{\sqrt{2(\cos t - \cos \psi)}} \quad (0 \leq t \leq \pi),$$

donc

$$(16) \quad S_n(z, \varphi) = \frac{k_n}{2\pi} \int F(z', \varphi') L(n, \omega) d\sigma'$$

4. *Propriétés de $L(n, t)$.* — Il résulte de sa définition (15) que $L(n, t)$ est une quantité essentiellement positive à l'intérieur de l'intervalle $(0, \pi)$,

$$(17) \quad L(n, t) > 0 \quad (0 < t < \pi).$$

Cette remarque est importante; elle nous permettra plus loin de nous servir uniquement du premier théorème de la moyenne dans les estimations d'intégrales que nous ferons.

Si nous prenons maintenant pour $F(\varpi, \varphi)$ la fonction

$$F(\varpi, \varphi) = 1,$$

les formules (10) montrent que la série de LAPLACE (12) se réduit à son premier terme; on a donc ici

$$S_n(\varpi, \varphi) = 1,$$

d'où, d'après (16),

$$(18) \quad \frac{k_n}{2\pi} \int L(n, \omega) d\sigma' = 1.$$

$\cos^{2n} \frac{t}{2}$ étant une fonction positive décroissante dans $(0, \pi)$, le premier théorème de la moyenne donne dans (15)

$$L(n, t) < \cos^{2n} \frac{t}{2} \int_t^\pi \frac{\sin \frac{\psi}{2} d\psi}{\sqrt{2(\cos t - \cos \psi)}},$$

c'est-à-dire, d'après (7_a),

$$L(n, t) < \frac{\pi}{2} \cos^{2n} \frac{t}{2} = O\left(\cos^{2n} \frac{t}{2}\right).$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \cos \frac{t}{2} &= 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{t}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{t}{2}\right)^4 - \dots \\ &< 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{t}{2}\right)^2 + \frac{1}{4^2} \left(\frac{t}{2}\right)^4 = \left(1 - \frac{t^2}{16}\right)^2. \end{aligned}$$

Mais,

$$1 - \frac{t^2}{16} < e^{-\frac{t^2}{16}},$$

donc,

$$\cos \frac{t}{2} < e^{-\frac{t^2}{8}},$$

$$\cos^{2n} \frac{t}{2} < e^{-\frac{nt^2}{4}},$$

c'est-à-dire

$$\cos^{2n} \frac{t}{2} = O\left(e^{-\frac{nt^2}{4}}\right).$$

Donc,

$$(19) \quad \frac{k_n}{2\pi} L(n, t) = O\left(n^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{nt^2}{4}}\right)$$

et il résulte des inégalités trouvées que, dans tout intervalle $\varepsilon \leq t \leq \pi$, $\varepsilon > 0$, on a uniformément en t

$$(20) \quad \frac{k_n}{2\pi} L(n, t) = O\left(n^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{n\varepsilon^2}{4}}\right) \quad (0 < \varepsilon \leq t \leq \pi).$$

Si donc on étend l'intégrale suivante à la calotte déterminée par l'inégalité $\omega \geq \varepsilon$, il vient

$$(21) \quad \frac{k_n}{2\pi} \int_{(\omega \geq \varepsilon)} L(n, \omega) d\sigma' = O\left(n^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{n\varepsilon^2}{4}}\right) \quad (\varepsilon > 0),$$

ce qui montre que cette intégrale tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Il vient donc, à cause de (18),

$$\frac{k_n}{2\pi} \int_{(\omega \leq \varepsilon)} L(n, \omega) d\sigma' = 1 - O(n^{\frac{3}{2}} e^{-n\frac{\varepsilon^2}{4}}) \quad (\varepsilon > 0),$$

l'intégrale étant étendue, comme le montre la notation, à l'aire de la calotte de centre (z, φ) et de rayon sphérique ε . Par suite

$$(22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{2\pi} \int_{(\omega \leq \varepsilon)} L(n, \omega) d\sigma' = 1.$$

5. La convergence de la suite $S_n(z, \varphi)$. — Les estimations précédentes permettent de démontrer rapidement la convergence de la suite $S_n(z, \varphi)$ sous des conditions déjà très générales. Énonçons d'abord le

THÉORÈME I. — *La convergence de la suite $S_n(z, \varphi)$ en un point ne dépend que des valeurs de la fonction $F(z, \varphi)$ au voisinage de ce point.*

Par voisinage du point (z, φ) nous entendrons toujours l'ensemble des points vérifiant la condition

$$0 < \omega \leq \varepsilon,$$

ε étant une quantité positive. Ce voisinage est donc formé par l'ensemble de tous les points de la calotte $\omega \leq \varepsilon$, à l'exception du point (z, φ) lui-même. Décomposons maintenant la sphère en deux calottes par le petit cercle $\omega = \varepsilon$; nous avons, en tenant compte des estimations du § 4,

$$\begin{aligned} \left| \frac{k_n}{2\pi} \int_{(\omega \geq \varepsilon)} F(z', \varphi') L(n, \omega) d\sigma' \right| &\leq \frac{k_n}{2\pi} \max_{\varepsilon \leq \omega \leq \pi} L(n, \omega) \cdot \int_{(\omega \geq \varepsilon)} |F(z', \varphi')| d\sigma' \\ &= O(n^{\frac{3}{2}} e^{-n\frac{\varepsilon^2}{4}}). \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z, \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{2\pi} \int_{(\omega \leq \varepsilon)} F(z', \varphi') L(n, \omega) d\sigma',$$

ce qui démontre le théorème.

Si nous supposons maintenant que la fonction $F(z', \varphi')$ est bornée dans le voisinage $0 < \omega \leq \varepsilon$ et si $m(\varepsilon)$ et $M(\varepsilon)$ sont ses limites inférieure et supérieure dans ce voisinage, nous voyons, en appliquant à (23) le théorème de la moyenne, que

$$m(\varepsilon) \frac{k_n}{2\pi} \int_{(\omega \leq \varepsilon)} L(n, \omega) d\sigma' \leq \frac{k_n}{2\pi} \int_{(\omega \leq \varepsilon)} F(z', \varphi') L(n, \omega) d\sigma' \leq M(\varepsilon) \frac{k_n}{2\pi} \int_{(\omega \leq \varepsilon)} L(n, \omega) d\sigma';$$

donc, (22), en passant à la limite,

$$(24) \quad m(\varepsilon) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} S_n(z, \varphi) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} S_n(z, \varphi) \leq M(\varepsilon),$$

ce que nous pouvons énoncer :

THÉORÈME II. — *Les limites inférieure et supérieure pour $n \rightarrow \infty$ de la suite $S_n(z, \varphi)$ en un point, sont comprises entre les limites inférieure et supérieure de $F(z, \varphi)$ dans le voisinage de ce point.*

Si, en particulier, la fonction F est bornée sur toute la sphère, on voit, en reprenant l'analyse, que :

Les sommes $S_n(z, \varphi)$ relatives à une fonction $F(z, \varphi)$ bornée sur toute la surface sphérique, restent comprises entre les limites inférieure et supérieure de F sur la surface.

Si maintenant F est continue au point (z, φ) ,

$$\lim_{\varepsilon=0} m(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon=0} M(\varepsilon) = F(z, \varphi),$$

et le passage à la limite $\varepsilon = 0$ dans (24) donne

$$\lim_{n=\infty} S_n(z, \varphi) = F(z, \varphi).$$

Si $F(z, \varphi)$ est continue dans toute une calotte, on voit, en reprenant les raisonnements, que la convergence de $S_n(z, \varphi)$ vers sa limite a lieu uniformément dans toute calotte *entièrement intérieure* à la première. Nous avons donc, en résumé, le

THÉORÈME III. — *La suite $S_n(z, \varphi)$ a pour limite $F(z, \varphi)$ en tout point de continuité de la fonction F . La convergence est uniforme dans toute calotte entièrement intérieure à une calotte de continuité de $F(z, \varphi)$.*

6. *Introduction de la valeur moyenne.* — Soit (z, φ) un point de la surface sphérique. Formons l'intégrale de ligne

$$(25) \quad F(z, \varphi; t) = \frac{1}{s(t)} \int_{\omega=t} F(z', \varphi') ds$$

étendue au petit cercle de centre (z, φ) et de rayon sphérique égal à t . ds est l'élément d'arc sur ce petit cercle et $s(t)$ désigne son périmètre. La limite

$$(26) \quad \lim_{t \rightarrow 0} F(z, \varphi; t) = F(z, \varphi; +0),$$

si elle existe, est dite la *valeur moyenne* de la fonction F au point (z, φ) . Lorsque la fonction F est continue au point (z, φ) , sa valeur moyenne en ce point existe et est égale à F ; on le voit, sans difficulté, en remarquant que dans ce cas

$$F(z', \varphi') = F(z, \varphi) + \lambda(z', \varphi'),$$

$\lambda(z', \varphi')$ tendant uniformément vers zéro avec ω . L'introduction de la valeur moyenne permet de démontrer le théorème suivant, dont la première partie du théorème III est un cas particulier.

THÉORÈME IV. — *La suite $S_n(z, \varphi)$ a pour limite la valeur moyenne $F(z, \varphi; +0)$ en tout point où cette expression existe.*

La généralité de la démonstration n'est pas diminuée en supposant, pour simplifier l'écriture, que le point (z, φ) est au pôle du système de coordonnées, puisque la valeur des termes de la série de LAPLACE est indépendante de la position de ce système. $F(z, \varphi; t)$ se réduit alors à

$$(25_a) \quad F(0, \varphi; t) = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t, \varphi') d\varphi'.$$

La formule (16) donne au pôle, car alors $z = 0$, $\omega = z'$,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{k_n}{2\pi} \int F(z', \varphi') L(n, z') d\sigma' \\ &= \frac{k_n}{2\pi} \int_0^\pi dz' \sin z' L(n, z') \int_0^\pi F(z', \varphi') d\varphi' \\ &= k_n \int_0^\pi f(t) L(n, t) \sin t dt. \end{aligned}$$

Les relations (18) et (22) donnent également

$$(18_a) \quad k_n \int_0^\pi L(n, t) \sin t dt = 1,$$

$$(22_a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} k_n \int_0^\varepsilon L(n, t) \sin t dt = 1 \quad (0 < \varepsilon \leq \pi),$$

et il vient, d'après le théorème I,

$$(23_a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n \int_0^\varepsilon f(t) L(n, t) \sin t dt.$$

Or, $L(n, t) \sin t$ étant positif, il vient, par l'emploi du théorème de la moyenne, $\bar{m}(\varepsilon)$ et $\bar{M}(\varepsilon)$ représentant ici les limites inférieure et supérieure de $f(t)$ dans $0 < t \leq \varepsilon$,

$$(24_a) \quad \bar{m}(\varepsilon) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} S_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} S_n \leq \bar{M}(\varepsilon),$$

c'est-à-dire au cas où $f(+0)$ existe

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{m}(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{M}(\varepsilon) \\ &= f(+0). \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

7. La dérivée première de $L(n, t)$. — Avant d'étudier des cas de convergence plus généraux et de passer à l'étude des dérivées de la suite $S_n(z, \varphi)$, il est nécessaire d'étudier les dérivées de $L(n, t)$. Supposons d'abord $t \geq \frac{\pi}{2}$. De (15) résulte alors, en effectuant la transformation

$$\begin{aligned} u &= -\cos \psi, \\ du &= 2 \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2} d\psi \end{aligned}$$

et en posant

$$z = -\cos t,$$

la valeur

$$L(n, t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_z^1 \cos^{2n-1} \frac{\psi}{2} \frac{du}{\sqrt{u-z}}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{dL(n, t)}{dt} &= \frac{dL(n, t)}{dz} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin t \frac{d}{dz} \int_z^1 \cos^{2n-1} \frac{\psi}{2} \frac{du}{\sqrt{u-z}}. \end{aligned}$$

Par une intégration par parties

$$\int_{\gamma}^1 \cos^{2n-1} \frac{\psi}{2} \frac{du}{\sqrt{u-\gamma}} = \left| 2 \cos^{2n-1} \frac{\psi}{2} \cdot \sqrt{u-\gamma} \right|_{u=\gamma}^{u=1} - 2 \int_{\gamma}^1 \frac{d}{du} \cos^{2n-1} \frac{\psi}{2} \cdot \sqrt{u-\gamma} du.$$

Le terme aux limites est nul, car $\cos \frac{\psi}{2}$ s'annule pour $u = 1$. Il vient maintenant par différentiation

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\gamma} \int_{\gamma}^1 \cos^{2n-1} \frac{\psi}{2} \frac{du}{\sqrt{u-\gamma}} &= -2 \frac{d}{d\gamma} \int_{\gamma}^1 \frac{d}{du} \cos^{2n-1} \frac{\psi}{2} \cdot \sqrt{u-\gamma} du \\ &= -\frac{2n-1}{2} \int_{\gamma}^1 \cos^{2n-2} \frac{\psi}{2} \cdot \sin \frac{\psi}{2} \frac{d\psi}{du} \cdot \frac{du}{\sqrt{u-\gamma}} \\ &= -\frac{2n-1}{2} \int_t^{\pi} \cos^{2n-2} \frac{\psi}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\psi}{2} d\psi}{\sqrt{\cos t - \cos \psi}}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\frac{dL(n, t)}{dt} = -\frac{2n-1}{4} \sin t \int_t^{\pi} \cos^{2n-2} \frac{\psi}{2} \frac{\sin \frac{\psi}{2} d\psi}{\sqrt{2(\cos t - \cos \psi)}}$$

ou

$$(25) \quad \frac{dL(n, t)}{dt} = -\frac{2n-1}{4} \sin t L(n-1, t).$$

Cette formule, vraie pour $t \geq \frac{\pi}{2}$, s'étend par prolongement analytique à tout l'intervalle $(0, \pi)$, car $L(n, t)$ et $L(n-1, t)$ sont des fonctions entières de t , comme il résulte de (13). On peut d'ailleurs la démontrer directement pour $t < \frac{\pi}{2}$ en décomposant $L(n, t)$ en deux intégrales

$$L_1(n, t) = \int_t^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} \frac{\psi}{2} \frac{\sin \frac{\psi}{2} d\psi}{\sqrt{2(\cos t - \cos \psi)}}, \quad L_2(n, t) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^{2n} \frac{\psi}{2} \frac{\sin \frac{\psi}{2} d\psi}{\sqrt{2(\cos t - \cos \psi)}}.$$

La substitution

$$u = \cos \psi,$$

$$\gamma = \cos t$$

pour la première et

$$u = -\cos \psi,$$

$$\gamma = \cos t$$

pour la seconde, les ramènent à

$$L_1(n, t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\gamma} \cos^{2n-1} \frac{\psi}{2} \frac{du}{\sqrt{\gamma-u}}, \quad L_2(n, t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \cos^{2n-1} \frac{\psi}{2} \frac{du}{\sqrt{u+\gamma}}$$

et en opérant la différentiation comme plus haut, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{dL_1(n, t)}{dt} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \sin t \frac{d}{dz} \int_0^{\pi} \cos^{2n-1} \frac{\psi}{2} \frac{du}{\sqrt{z-u}} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cos^{2n-1} \frac{\pi}{4} \frac{\sin t}{\sqrt{\cos t}} - \frac{2n-1}{4} \sin t L_1(n-1, t) \\ \frac{dL_2(n, t)}{dt} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \sin t \frac{d}{dz} \int_0^{\pi} \cos^{2n-1} \frac{\psi}{2} \frac{du}{\sqrt{z+u}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos^{2n-1} \frac{\pi}{4} \frac{\sin t}{\sqrt{\cos t}} - \frac{2n-1}{4} \sin t L_2(n-1, t)\end{aligned}$$

et par addition, on retrouve (25).

$L(n, t)$ étant essentiellement positif, nous voyons par (25) que

$$(26) \quad \frac{dL(n, t)}{dt} < 0 \quad (0 < t < \pi).$$

Il résulte, sans autre des relations (19), (20), que dans tout intervalle (ε, π) , $\varepsilon > 0$, on a uniformément en t

$$(27) \quad k_n \frac{dL(n, t)}{dt} = O(n^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{n\varepsilon^2}{4}}) \quad (0 < \varepsilon \leq t \leq \pi).$$

Nous avons encore

$$(28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 t \frac{dL(n, t)}{dt} dt = -1.$$

En effet, une intégration par parties donne pour la valeur de l'intégrale

$$\frac{k_n}{2} |\sin^2 t L(n, t)|_{t=0}^{t=\pi} - k_n \int_0^{\pi} \cos t \cdot L(n, t) \sin t dt.$$

Le premier terme tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$; quant à l'intégrale

$$-k_n \int_0^{\pi} \cos t L(n, t) \sin t dt$$

elle converge bien d'après (23_a) et (24_a) vers $-\cos 0 = -1$.

8. *Théorème général sur la limite de la suite $S_n(\varpi, \varphi)$.* Nous supposons encore que le point (ϖ, φ) se trouve au pôle. Partons de la relation (23_a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n \int_0^{\pi} f(t) L(n, t) \sin t dt$$

et intégrons par parties l'intégrale du second membre

$$\begin{aligned}&k_n \int_0^{\pi} f(t) L(n, t) \sin t dt \\ &= k_n \int_0^{\pi} f(t) dt \cdot \sin \varepsilon L(n, \varepsilon) - k_n \int_0^{\pi} \int_0^t f(\xi) d\xi \frac{d}{dt} [L(n, t) \sin t] dt.\end{aligned}$$

Le premier terme tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$, tout revient à calculer la limite du

second terme, qui, développé, s'écrit

$$-k_n \int_0^\varepsilon \left[\frac{1}{\sin t} \int_0^t f(\xi) d\xi \right] \cos t L(n, t) \sin t dt - k_n \int_0^\varepsilon \left[\frac{1}{\sin t} \int_0^t f(\xi) d\xi \right] \sin^2 t \frac{dL(n, t)}{dt} dt.$$

Supposons maintenant que la limite

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{\sin t} \int_0^t f(\xi) d\xi = \bar{f}$$

existe et soit finie. Dans ce cas, le premier terme de la dernière expression a pour limite, d'après le § 6,

$$-\bar{f}.$$

Quant au second terme, l'emploi du théorème de la moyenne (applicable puisque $\frac{dL(n, t)}{dt}$ est de signe constant) et de la relation (28) donne pour la limite de ce terme

$$+ 2\bar{f}.$$

Il vient donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\bar{f} + 2\bar{f} = \bar{f};$$

d'où le théorème:

THÉORÈME V_a. — La suite $S_n(\varpi, \varphi)$ converge vers $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{\sin t} \int_0^t F(\varpi, \varphi; t) dt$ en tout point où cette limite existe.

Si, plus haut, nous avons intégré par parties comme suit

$$\begin{aligned} & k_n \int_0^\varepsilon f(t) L(n, t) \sin t dt \\ &= k_n \int_0^\varepsilon f(t) \sin t dt \cdot L(n, \varepsilon) - k_n \int_0^\varepsilon \left[\frac{1}{\sin^2 t} \int_0^t f(\xi) \sin \xi d\xi \right] \frac{dL(n, t)}{dt} \sin t dt, \end{aligned}$$

il se serait introduit, en remplaçant $f(t)$ par sa définition (25_a), la limite pour $t \rightarrow +0$ de

$$\frac{1}{\sin^2 t} \int_{(\omega \leq t)} F(\varpi', \varphi') d\sigma'$$

et, en remarquant que

$$2\pi(1 - \cos t) = 4\pi \sin^2 \frac{t}{2}$$

n'est autre chose que l'aire de la calotte de centre (ϖ, φ) et de rayon sphérique égal à t , on obtiendrait le théorème:

THÉORÈME V_b. — La suite $S_n(\varpi, \varphi)$ converge vers

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi(1 - \cos t)} \int_{(\omega \leq t)} F(\varpi', \varphi') d\sigma'$$

en tout point où cette limite existe. En particulier, elle converge vers $F(\varpi, \varphi)$ en tout point où F est égale à la dérivée de surface de son intégrale superficielle, c'est-à-dire en tout point où F est égale à la limite ci-dessus indiquée.

Il résulte du théorème V et des propriétés des intégrales de RIEMANN et de LEBESGUE, que la limite de $S_n(\varpi, \varphi)$ existe presque partout; les points où cette limite

n'existe pas ou n'est pas égale à $F(z, \varphi)$ forment un ensemble de mesure superficielle nulle.

CHAPITRE II.

La sommation des dérivées.

9. *La dérivée première de $S_n(z, \varphi)$.* — Un demi grand cercle de la sphère, ayant son origine au point (z, φ) , est complètement déterminé par sa direction en ce point. $S_n(z, \varphi)$ étant une fonction continue, différentiable, la limite de

$$\frac{S_n(z', \varphi') - S_n(z, \varphi)}{\omega},$$

lorsque le point (z', φ') tend vers le point (z, φ) en se déplaçant sur le demi grand cercle de direction θ , existe et définit la dérivée de $S_n(z, \varphi)$ suivant l'arc θ

$$\frac{\partial S_n(z, \varphi)}{\partial \theta}.$$

De la formule (16)

$$S_n(z, \varphi) = \frac{k_n}{2\pi} \int F(z', \varphi') L(n, \omega) d\sigma'$$

découle

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_n(z, \varphi)}{\partial \theta} &= \frac{k_n}{2\pi} \int F(z', \varphi') \frac{\partial L(n, \omega)}{\partial \theta} d\sigma' \\ &= \frac{k_n}{2\pi} \int F(z', \varphi') \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \frac{dL(n, \omega)}{d\omega} d\sigma'. \end{aligned}$$

Du théorème connu que dans un triangle sphérique un côté est plus grand que la différence des deux autres, résulte

$$\left| \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right| \leq 1.$$

Il suffira donc, puisque alors (27)

$$\left| \frac{k_n}{2\pi} \int_{(\omega \geq \varepsilon)} F(z', \varphi') \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \frac{dL(n, \omega)}{d\omega} d\sigma' \right| \leq O(n^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{\pi \varepsilon^2}{4}}) \int |F(z', \varphi')| d\sigma',$$

d'étudier la limite

$$(29) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial S_n(z, \varphi)}{\partial \theta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{2\pi} \int_{(\omega \leq \varepsilon)} F(z', \varphi') \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \frac{dL(n, \omega)}{d\omega} d\sigma',$$

donc :

THÉORÈME VI. — La convergence en un point de la suite $\frac{\partial S_n(z, \varphi)}{\partial \theta}$ ne dépend que des valeurs de la fonction F dans le voisinage de ce point.

Par suite de l'indépendance des quantités qui interviennent dans la dernière formule de la position du système de coordonnées, nous nous bornerons à placer le point (z, φ) considéré au pôle. Nous prenons donc $z = 0$, $\omega = z'$. Le demi grand cercle θ

est maintenant un méridien de longitude φ . $\frac{\partial \omega}{\partial \theta}$ se réduit alors à $\left(\frac{\partial \omega}{\partial \vartheta}\right)_{\vartheta=0}$. Or de

$$\cos \omega = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos (\varphi - \varphi')$$

vient en dérivant par rapport à ϑ , φ restant fixe,

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\sin \omega d\omega = -\sin \vartheta \cos \vartheta' d\vartheta + \cos \vartheta \sin \vartheta' \cos (\varphi - \varphi') d\vartheta \\ \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta} = \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta'}{\sin \omega} - \frac{\cos \vartheta \sin \vartheta'}{\sin \omega} \cos (\varphi - \varphi'), \end{array} \right.$$

d'où, pour $\vartheta = 0$, $\omega = \vartheta'$,

$$(31) \quad \left(\frac{\partial \omega}{\partial \vartheta}\right)_{\vartheta=0} = -\cos (\varphi - \varphi').$$

On a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial S_n(0, \varphi)}{\partial \vartheta} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{2\pi} \int_0^\pi d\vartheta' \sin \vartheta' \frac{dL(n, \vartheta')}{d\vartheta'} \int_0^{2\pi} F(\vartheta', \varphi') \cos (\varphi - \varphi') d\varphi'.$$

Notons

$$\frac{1}{\pi \sin \vartheta'} \int_0^{2\pi} F(\vartheta', \varphi') \cos (\varphi - \varphi') d\varphi' = F_1(\vartheta', \varphi).$$

Il vient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial S_n(0, \varphi)}{\partial \vartheta} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{2} \int_0^\pi F_1(t, \varphi) \sin^2 t \frac{dL(n, t)}{dt} dt.$$

λ étant une valeur moyenne de $F_1(t, \varphi)$ dans $0 < t < \varepsilon$, le théorème de la moyenne donne pour la dernière intégrale

$$-\lambda \frac{k_n}{2} \int_0^\pi \sin^2 t \frac{dL(n, t)}{dt} dt.$$

Si donc $F_1(t, \varphi)$ a une limite $F_1(+0, \varphi)$ pour $t = +0$, on aura (28)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial \vartheta} S_n(0, \varphi) = F_1(+0, \varphi).$$

La limite

$$(32) \quad \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{\pi \sin t} \int_0^{2\pi} F(t, \varphi') \cos (\varphi - \varphi') d\varphi'$$

est dite, par analogie, la *dérivée généralisée* au pôle $\vartheta = 0$ de la fonction $F(\vartheta, \varphi)$ relativement au méridien de longitude φ . On la définit sans difficulté en un point quelconque pour une direction quelconque et l'on peut énoncer le résultat:

THÉORÈME VII. — *La suite*

$$\frac{\partial}{\partial \theta} S_n(\vartheta, \varphi) = \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{(n+2)(n+3) \dots (n+k+1)} \frac{2k+1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \int F(\vartheta', \varphi') P_k(\cos \omega) d\sigma'$$

a pour limite la dérivée généralisée de la fonction $F(\vartheta, \varphi)$ suivant l'arc θ au point (ϑ, φ) , lorsque cette dérivée généralisée existe.

Il résulte encore de la démonstration que $\frac{\partial}{\partial \vartheta} S_n(0, \varphi)$ a ses limites inférieure et supérieure pour $n = \infty$ comprises entre les limites inférieure et supérieure de

$$\frac{1}{\pi \sin t} \int_0^{2\pi} F(t, \varphi') \cos (\varphi - \varphi') d\varphi' \quad (0 < t \leq \varepsilon).$$

Dans l'hémisphère nord, $F(z', \varphi')$ est une fonction univoque des deux variables

$$x = \sin z' \cos \varphi', \quad y = \sin z' \sin \varphi',$$

le point (x, y) étant la projection du point (z', φ') sur le plan de l'équateur; soit

$$(33) \quad F(z, \varphi) = \mathfrak{F}(x, y).$$

Si $\mathfrak{F}(x, y)$ possède au point $x=0, y=0$ une différentielle première totale, c'est-à-dire :

1° si $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}$ existent et sont finies au point $x=0, y=0$,

2° si dans le voisinage du point $x=0, y=0$ la fonction peut s'exprimer par

$$\mathfrak{F}(x, y) = \mathfrak{F}(0, 0) + x \frac{\partial \mathfrak{F}(0, 0)}{\partial x} + y \frac{\partial \mathfrak{F}(0, 0)}{\partial y} + x \eta_1 + y \eta_2$$

avec

$$\lim_{x=0, y=0} \eta_1 = \lim_{x=0, y=0} \eta_2 = 0$$

quand x, y tendent indépendamment vers zéro, nous dirons, pour abréger, que $F(z, \varphi)$ possède au pôle une différentielle première. Dans ce cas, dans le voisinage du pôle,

$$F(z', \varphi') = \mathfrak{F}(0, 0) + \sin z' \left[\frac{\partial \mathfrak{F}(0, 0)}{\partial x} \cos \varphi' + \frac{\partial \mathfrak{F}(0, 0)}{\partial y} \sin \varphi' \right] + \sin z' \cdot \eta_3$$

$$\lim_{z'=0} \max_{0 \leq \varphi' \leq 2\pi} |\eta_3| = 0.$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F(z', \varphi') \cos(\varphi - \varphi') d\varphi' &= \pi \sin z' \left[\frac{\partial \mathfrak{F}(0, 0)}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial \mathfrak{F}(0, 0)}{\partial y} \sin \varphi \right] \\ &+ \sin z' \int_0^{2\pi} \eta_3 \cos(\varphi - \varphi') d\varphi', \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{z'=0} \frac{1}{\pi \sin z'} \int_0^{2\pi} F(z', \varphi') \cos(\varphi - \varphi') d\varphi' = \frac{\partial \mathfrak{F}(0, 0)}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial \mathfrak{F}(0, 0)}{\partial y} \sin \varphi.$$

Mais comme le second membre n'est autre que la dérivée de F relativement à l'arc de longitude φ au pôle, nous voyons qu'en tout point où $F(z, \varphi)$ possède une différentielle première, la dérivée généralisée de F relativement à un arc θ passant par ce point est égale à la dérivée $\frac{\partial F}{\partial \theta}$. Le théorème VII a donc le

COROLLAIRE. — La suite $\frac{\partial}{\partial \theta} S_n(z, \varphi)$ a pour limite $\frac{\partial F(z, \varphi)}{\partial \theta}$, en tout point où F possède une différentielle première.

$z = z(u, v), \varphi = \varphi(u, v)$ étant une représentation paramétrique régulière d'une calotte sphérique, dans laquelle F possède une différentielle et où $\frac{\partial F}{\partial u}$ est continue, la convergence de la suite $\frac{\partial}{\partial u} S_n(z, \varphi)$ vers $\frac{\partial F}{\partial u}$ est uniforme dans toute calotte entièrement intérieure à la première. C'est immédiat.

10. La limite de la dérivée seconde $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} S_n(z, \varphi)$. — θ_1 et θ_2 étant les arcs comptés sur deux grands cercles de plans perpendiculaires passant par le point (z, φ) , les dé-

rivées secondes à étudier sont au nombre de trois,

$$\frac{\partial^2 S_n}{\partial \theta_1^2}, \quad \frac{\partial^2 S_n}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}, \quad \frac{\partial^2 S_n}{\partial \theta_2^2}.$$

L'étude de la troisième se ramène évidemment à l'étude de la première. Consacrons ce § à la première. De la valeur donnée au § 9 pour $\frac{\partial}{\partial \theta} S_n(\varpi, \varphi)$ découle, par une nouvelle différentiation,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} S_n(\varpi, \varphi) &= \frac{k_n}{2\pi} \int F(\varpi', \varphi') \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial \omega}{\partial \theta} \frac{dL(n, \omega)}{d\omega} \right] d\sigma' \\ &= \frac{k_n}{2\pi} \int F(\varpi', \varphi') \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \frac{dL(n, \omega)}{d\omega} d\sigma' + \frac{k_n}{2\pi} \int F(\varpi', \varphi') \left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right)^2 \frac{d^2 L(n, \omega)}{d\omega^2} d\sigma'. \end{aligned}$$

Si nous prenons pour F la valeur

$$F(\varpi', \varphi') = 1,$$

$S_n(\varpi, \varphi)$ se réduit alors à 1 et $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} S_n(\varpi, \varphi)$ à 0, donc

$$\frac{k_n}{2\pi} \int \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial \omega}{\partial \theta} \frac{dL(n, \omega)}{d\omega} \right] d\sigma' = 0.$$

Si nous supposons que la valeur moyenne $F(\varpi, \varphi; +0)$ existe au point considéré, nous aurons, en retranchant de la précédente la dernière relation multipliée par $F(\varpi, \varphi; +0)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} S_n(\varpi, \varphi) &= \frac{k_n}{2\pi} \int [F(\varpi', \varphi') - F(\varpi, \varphi; +0)] \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \frac{dL(n, \omega)}{d\omega} d\sigma' \\ &\quad + \frac{k_n}{2\pi} \int [F(\varpi', \varphi') - F(\varpi, \varphi; +0)] \left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right)^2 \frac{d^2 L(n, \omega)}{d\omega^2} d\sigma'. \end{aligned}$$

Prenons maintenant, pour simplifier, le point (ϖ, φ) au pôle et soit φ la longitude de l'arc θ ; il nous suffira de chercher la limite de

$$\frac{\partial^2}{\partial \varpi^2} S_n(0, \varphi).$$

Nous avons déjà trouvé (31)

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial \varpi} \right)_{\varpi=0} = -\cos(\varphi - \varphi').$$

En différentiant encore une fois la formule (30) par rapport à ϖ

$$-\cos \omega d\omega^2 - \sin \omega d^2 \omega = -\cos \varpi \cos \varpi' d\varpi^2 - \sin \varpi \sin \varpi' \cos(\varphi - \varphi') d\varpi^2$$

il vient

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \varpi^2} = -\frac{\cos \omega}{\sin \omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \varpi} \right)^2 + \frac{\cos \varpi \cos \varpi'}{\sin \omega} + \frac{\sin \varpi \sin \varpi'}{\sin \omega} \cos(\varphi - \varphi')$$

et pour $\varpi = 0$

$$(34) \quad \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \varpi^2} \right)_{\varpi=0} = \cotg \varpi' \sin^2(\varphi - \varphi').$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \varpi^2} S_n(o, \varphi) &= \frac{k_n}{2\pi} \int [F(\varpi', \varphi') - f(+o)] \cotg \varpi' \cdot \sin^2(\varphi - \varphi') \frac{dL(n, \varpi')}{d\varpi'} d\sigma' \\ &+ \frac{k_n}{2\pi} \int [F(\varpi', \varphi') - f(+o)] \cos^2(\varphi - \varphi') \frac{d^2 L(n, \varpi')}{d\varpi'^2} d\sigma', \end{aligned}$$

en notant par $f(+o)$ la valeur moyenne supposée existante au pôle. Notons

$$g(t, \varphi) = \frac{1}{\pi \sin^2 t} \int_0^{2\pi} [F(t, \varphi') - f(+o)] \sin^2(\varphi - \varphi') d\varphi',$$

$$h(t, \varphi) = \frac{1}{\pi \sin^2 t} \int_0^{2\pi} [F(t, \varphi') - f(+o)] \cos^2(\varphi - \varphi') d\varphi'.$$

Alors

$$\frac{\partial^2}{\partial \varpi^2} S_n(o, \varphi) = \frac{k_n}{2} \int_0^\pi g(t, \varphi) \cos t \cdot \sin^2 t \frac{dL(n, t)}{dt} dt + \frac{k_n}{2} \int_0^\pi h(t, \varphi) \cdot \sin^3 t \frac{d^2 L(n, t)}{dt^2} dt.$$

Si donc

$$\lim_{t \rightarrow +0} g(t, \varphi) = g(+o, \varphi)$$

existe, nous aurons immédiatement, d'après une recherche déjà faite au § 8, pour la limite du premier terme la valeur

$$-g(+o, \varphi).$$

Pour calculer la limite du second terme, remarquons qu'à teneur de (25)

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 L(n, t)}{dt^2} &= -\frac{2n-1}{4} \cos t L(n-1, t) - \frac{2n-1}{4} \sin t \frac{dL(n-1, t)}{dt} \\ &= \frac{\cos t}{\sin t} \frac{dL(n, t)}{dt} - \frac{2n-1}{4} \sin t \frac{dL(n-1, t)}{dt}. \end{aligned} \right.$$

On a donc, uniformément en t , dans tout intervalle (ε, π) , $\varepsilon > 0$, d'après (20) et (27),

$$(36) \quad k_n \frac{d^2 L(n, t)}{dt^2} = O(n^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{n\varepsilon^2}{4}}) \quad (0 < \varepsilon \leq t \leq \pi).$$

La limite du second terme est donc la même que celle de

$$\begin{aligned} &\frac{k_n}{2} \int_0^\varepsilon h(t, \varphi) \sin^3 t \frac{d^2 L(n, t)}{dt^2} dt \\ &= \frac{k_n}{2} \int_0^\varepsilon h(t, \varphi) \cos t \cdot \sin^2 t \frac{dL(n, t)}{dt} dt - \frac{2n-1}{4} \frac{k_n}{2} \int_0^\varepsilon h(t, \varphi) \sin^4 t \frac{dL(n-1, t)}{dt} dt. \end{aligned}$$

Or, si la limite

$$\lim_{t \rightarrow +0} h(t, \varphi) = h(+o, \varphi)$$

existe, au second membre le premier terme a pour limite, d'après les calculs faits au § 8, $-h(+o, \varphi)$.

Quant au second terme, sa valeur est, d'après le théorème de la moyenne,

$$-\frac{2n-1}{4} \frac{k_n}{2} \bar{h} \int_0^\varepsilon \sin^4 t \frac{dL(n-1, t)}{dt} dt,$$

$\bar{h}$ étant une valeur moyenne de $h(t, \varphi)$ dans $0 < t < \varepsilon$. En intégrant par parties

$$-\frac{2n-1}{4} \frac{k_n}{2} \int_0^\varepsilon \sin^4 t \frac{dL(n-1, t)}{dt} dt = -\frac{2n-1}{4} \frac{k_n}{2} \sin^4 \varepsilon L(n-1, \varepsilon) \\ + 2k_n \int_0^\varepsilon \sin^3 t \cos t \frac{2n-1}{4} L(n-1, t) dt,$$

le premier terme tend vers zéro et le second est égal, d'après (25), à

$$2k_n \int_0^\varepsilon \cos t \sin^2 t \frac{dL(n, t)}{dt} dt.$$

Il a donc 4 pour limite, d'après (28). L'intégrale considérée a donc la limite

$$4h(+0, \varphi).$$

Rassemblant les résultats obtenus, on voit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^2}{\partial z^2} S_n(0, \varphi) = -g(+0, \varphi) - h(+0, \varphi) + 4h(+0, \varphi) \\ = 3h(+0, \varphi) - g(+0, \varphi)$$

lorsque ces quantités existent. La valeur

$$3h(+0, \varphi) - g(+0, \varphi) = \frac{3}{\pi} \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{\sin^2 t} \int_0^{2\pi} [F(t, \varphi') - f(+0)] \cos^2(\varphi - \varphi') d\varphi' \\ - \frac{1}{\pi} \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{\sin^2 t} \int_0^{2\pi} [F(t, \varphi') - f(+0)] \sin^2(\varphi - \varphi') d\varphi'$$

peut être appelée, lorsqu'elle existe, la *dérivée seconde généralisée* de la fonction F au pôle, relativement à l'arc de longitude φ . $f(+0)$ y désigne la valeur moyenne supposée existante de F au pôle.

En notant comme plus haut (33) $F(z', \varphi') = \mathfrak{F}(x, y)$ et en supposant que $\mathfrak{F}$ possède au point $x = 0, y = 0$ une différentielle seconde, on verrait que la dérivée généralisée est dans ce cas égale à la valeur de la dérivée seconde ordinaire. En particulier, pour $\varphi = 0$, on trouve

$$h(+0, \varphi) = \frac{1}{8} \left[3 \frac{\partial^2 \mathfrak{F}(0, 0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}(0, 0)}{\partial y^2} \right],$$

$$g(+0, \varphi) = \frac{1}{8} \left[\frac{\partial^2 \mathfrak{F}(0, 0)}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 \mathfrak{F}(0, 0)}{\partial y^2} \right],$$

d'où

$$3h(+0, \varphi) - g(+0, \varphi) = \frac{\partial^2 \mathfrak{F}(0, 0)}{\partial x^2}.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème:

THÉORÈME VIII. — La suite $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} S_n(z, \varphi)$ converge en tout point (z, φ) où la fonction F possède une dérivée seconde généralisée relativement à l'arc θ vers la valeur de cette dérivée. En particulier, elle converge vers $\frac{\partial^2 F(z, \varphi)}{\partial \theta^2}$ en tout point où F possède une différentielle seconde totale.

II. La suite $\frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} S_n(z, \varphi)$. — θ_1 et θ_2 désignant les arcs pris sur deux grands cercles perpendiculaires, on a

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} S_n(z, \varphi) = \frac{k_n}{2\pi} \int F(z', \varphi') \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \frac{dL(n, \omega)}{d\omega} d\sigma' + \frac{k_n}{2\pi} \int F(z', \varphi') \frac{\partial \omega}{\partial \theta_1} \frac{\partial \omega}{\partial \theta_2} \frac{d^2 L(n, \omega)}{d\omega^2} d\sigma'.$$

$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}$ et $\frac{\partial \omega}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \omega}{\partial \theta_2}$ étant bornés dans toute calotte $\omega \geq \varepsilon$, on voit, comme plus haut, qu'il suffit de considérer les intégrales étendues à la calotte $\omega \leq \varepsilon$. Donc,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} S_n(z, \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{2\pi} \left\{ \int_{(\omega \leq \varepsilon)} F(z', \varphi') \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \frac{dL(n, \omega)}{d\omega} d\sigma' + \int_{(\omega \leq \varepsilon)} F(z', \varphi') \frac{\partial \omega}{\partial \theta_1} \frac{\partial \omega}{\partial \theta_2} \frac{d^2 L(n, \omega)}{d\omega^2} d\sigma' \right\}.$$

On pourrait tirer de là un théorème analogue au théorème VI.

Prenons maintenant, pour simplifier, (z, φ) au pôle et comme direction de θ_1 et de θ_2 les directions $\varphi = 0$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Pour calculer rapidement les valeurs $\frac{\partial \omega}{\partial \theta_1}$,

$\frac{\partial \omega}{\partial \theta_2}$, $\frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}$, posons

$$x = \sin z \cos \varphi, \quad y = \sin z \sin \varphi; \quad x' = \sin z' \cos \varphi', \quad y' = \sin z' \sin \varphi'.$$

Il en résulte, dans le voisinage du pôle, à des infiniments petits d'ordre supérieur près,

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}, \\ \frac{\partial \omega}{\partial \theta_1} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_{x=y=0} = - \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = - \cos \varphi', \\ \frac{\partial \omega}{\partial \theta_2} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)_{x=y=0} = - \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = - \sin \varphi', \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)_{x=y=0} = - \frac{x' y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = - \frac{\sin \varphi' \cos \varphi'}{\sin z'} \end{array} \right.$$

On aura donc à étudier au pôle la limite de

$$- \frac{k_n}{2\pi} \int_{(\omega \leq \varepsilon)} F(z', \varphi') \frac{\sin \varphi' \cos \varphi'}{\sin z'} \frac{dL(n, z')}{dz'} d\sigma' + \frac{k_n}{2\pi} \int_{(\omega \leq \varepsilon)} F(z', \varphi') \sin \varphi' \cos \varphi' \frac{d^2 L(n, z')}{dz'^2} d\sigma'$$

ou encore, en posant

$$l(t) = \frac{1}{\pi \sin^2 t} \int_0^{2\pi} F(t, \varphi') \sin \varphi' \cos \varphi' d\varphi',$$

celle de

$$- \frac{k_n}{2} \int_0^\varepsilon l(t) \sin^2 t \frac{dL(n, t)}{dt} dt + \frac{k_n}{2} \int_0^\varepsilon l(t) \sin^3 t \frac{d^2 L(n, t)}{dt^2} dt.$$

Les analyses des §§ précédents montrent que, lorsque

$$\lim_{t \rightarrow +0} l(t) = l(+0)$$

existe, les limites de ces deux intégrales sont respectivement $l(+0)$ et $3l(+0)$. Par

suite, pour les valeurs de θ_1 et θ_2 considérées

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial^2 S_n}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = 4l(+0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \sin^2 t} \int_0^{2\pi} F(t, \varphi') \sin 2\varphi' d\varphi'.$$

Au cas où $F(z, \varphi)$ possède au pôle une différentielle seconde totale, on voit que pour les valeurs de θ_1 et θ_2 considérées

$$\left(\frac{\partial^2 F(z, \varphi)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right)_{z=0} = \frac{\partial^2 \mathfrak{F}(0, 0)}{\partial x \partial y} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \sin^2 t} \int_0^{2\pi} F(t, \varphi') \sin 2\varphi' d\varphi'.$$

Appelant cette limite *dérivée seconde généralisée relativement aux arcs θ_1 et θ_2* , nous obtenons donc le

THÉOREME IX. — La suite $\frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} S_n(z, \varphi)$ converge vers la *dérivée seconde généralisée de F relativement à θ_1 et θ_2* , en tout point où cette dérivée existe. En particulier, elle converge vers $\frac{\partial^2 F(z, \varphi)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}$ en tout point où F possède une différentielle seconde.

12. Les dérivées d'ordre supérieur. — On pourrait pousser plus loin l'analyse pour les dérivées d'ordre supérieur à 2. Les calculs sont compliqués, mais la marche à suivre est évidente. On pourra toujours démontrer au moyen des formules dérivées de (25) et en remarquant que les dérivées $\frac{\partial^{n_1+n_2} \omega}{\partial \theta_1^{n_1} \partial \theta_2^{n_2}}$ restent bornées dans la calotte $\omega \geq \varepsilon$, que la convergence des suites dérivées ne dépend que des valeurs de F au voisinage du point considéré. Il s'introduira tout naturellement des dérivées généralisées qui se ramènent aux dérivées ordinaires lorsque la fonction possède une différentielle de l'ordre correspondant. On arrive ainsi au théorème suivant :

THÉOREME X. — $F(z, \varphi)$ étant une fonction absolument intégrable sur la sphère, θ_1 et θ_2 les longueurs comptées sur deux arcs de grand cercle orthogonaux passant par le point (z, φ) , la suite

$$\frac{\partial^{n_1+n_2}}{\partial \theta_1^{n_1} \partial \theta_2^{n_2}} S_n(z, \varphi) = \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{(n+2)(n+3) \dots (n+k+1)} \frac{\partial^{n_1+n_2}}{\partial \theta_1^{n_1} \partial \theta_2^{n_2}} \int F(z', \varphi') P_k(\cos \omega) d\sigma'$$

a pour limite $\frac{\partial^{n_1+n_2} F(z, \varphi)}{\partial \theta_1^{n_1} \partial \theta_2^{n_2}}$ en tout point où $F(z, \varphi)$ possède une différentielle totale d'ordre $n_1 + n_2$.

On verrait encore que lorsque dans toute une calotte, à représentation paramétrique régulière (u, v) , $F(z, \varphi)$ possède une différentielle totale d'ordre $n_1 + n_2$ et une dérivée $\frac{\partial^{n_1+n_2} F(z, \varphi)}{\partial u^{n_1} \partial v^{n_2}}$ continue, la convergence de $\frac{\partial^{n_1+n_2}}{\partial u^{n_1} \partial v^{n_2}} S_n(z, \varphi)$ est uniforme dans toute calotte entièrement intérieure à la précédente.

CHAPITRE III.

La sommation des séries de Legendre.

13. Un théorème général. — Des résultats précédents sur la sommation des séries de LAPLACE on passe par une méthode connue aux résultats analogues sur la somma-

tion des séries de LEGENDRE. Prenons, en effet, pour $F(\varpi, \varphi)$ une fonction indépendante de φ

$$F(\varpi, \varphi) = F(\varpi).$$

Le terme général de la série de LAPLACE de $F(\varpi)$

$$\frac{2k+1}{4\pi} \int F(\varpi') P_k(\cos \omega) d\sigma'$$

se réduit, par l'emploi de la formule d'addition des fonctions sphériques

$$P_n(\cos \omega) = P_n(\cos \varpi) P_n(\cos \varpi') + 2 \sum_{s=1}^n \frac{(n-s)!}{(n+s)!} P_{ns}(\cos \varpi) P_{ns}(\cos \varpi') \cos s(\varphi - \varphi'),$$

à

$$\frac{2k+1}{2} P_k(\cos \varpi) \int_0^\pi F(\varpi') P_k(\cos \varpi') \sin \varpi' d\varpi'.$$

La série de LAPLACE de $F(\varpi)$ est donc

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi F(\varpi') \sin \varpi' d\varpi' + \sum_{k=1}^\infty \frac{2k+1}{2} P_k(\cos \varpi) \int_0^\pi F(\varpi') P_k(\cos \varpi') \sin \varpi' d\varpi'.$$

Tous les théorèmes démontrés dans les deux premiers chapitres sont applicables à cette série. Introduisons

$$x = \cos \varpi$$

$$F(\varpi) = f(x), \quad -1 \leq x \leq +1$$

la série devient

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^\infty \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(\xi) P_k(\xi) d\xi P_k(x).$$

C'est la série de LEGENDRE de $f(x)$. Pour pouvoir former cette série, il faut et il suffit que

$$\int_{-1}^{+1} |f(x)| dx$$

existe; cela revient à prendre $|F(\varpi)|$ intégrable sur la sphère.

Tout point de continuité de $F(\varpi)$ sur la sphère est un point de continuité pour $f(x)$ et réciproquement. Si, en un point intérieur de l'intervalle $(-1, +1)$, $f(x+0)$ et $f(x-0)$ existent, $F(\varpi+0)$ et $F(\varpi-0)$ existent et $F(\varpi)$ possède sur tout le parallèle de distance polaire ϖ une valeur moyenne, égale à

$$\frac{F(\varpi+0) + F(\varpi-0)}{2} = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

En effet, fixant un point (ϖ, φ) de longitude φ quelconque, la valeur moyenne est définie par la limite pour $t = +0$ de (25)

$$\frac{1}{s(t)} \int_{\omega=t} F(\varpi', \varphi') ds.$$

Le parallèle passant par (ϖ, φ) coupe la circonférence $\omega = t$ en deux arcs

$$(1) \quad \varpi - t \leq \varpi' \leq \varpi,$$

$$(2) \quad \varpi \leq \varpi' \leq \varpi + t,$$

et, $s_1(t)$ et $s_2(t)$ étant les longueurs de ces deux arcs

$$s_1(t) = \int_{(1)} ds, \quad s_2(t) = \int_{(2)} ds,$$

on a

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{s_1(t)}{s(t)} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{s_2(t)}{s(t)} = \frac{1}{2}.$$

Par suite, le théorème de la moyenne montre que

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{s(t)} \int_{(1)} F(z') ds = \frac{1}{2} F(z - 0); \quad \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{s(t)} \int_{(2)} F(z') ds = \frac{1}{2} F(z + 0).$$

La valeur moyenne est donc bien $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$. A l'extrémité $x = +1$ ($x = -1$) de l'intervalle, on voit sans autre que si $f(1-0)$ [$f(-1+0)$] existe, la valeur moyenne de $F(z)$ au pôle $z = 0$ ($z = \pi$) existe et lui est égale.

De même, lorsqu'au point intérieur x , $f(x)$ est dérivée de son intégrale indéfinie, $F(z)$ est pour la valeur correspondante égale à la dérivée superficielle de son intégrale superficielle. Il en sera de même pour $x = +1$, $x = -1$ lorsque $f(+1)$, $f(-1)$ sont respectivement égales aux limites de

$$\frac{1}{h} \int_{1-h}^1 f(x) dx, \quad \frac{1}{h} \int_{-1}^{-1+h} f(x) dx \quad (h > 0),$$

pour $h = 0$.

On peut donc conclure le théorème général:

THÉORÈME XI. — Soit $[a_k]$ la suite des coefficients de LEGENDRE

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_k(x) dx$$

d'une fonction $f(x)$ absolument intégrable dans l'intervalle $(-1, +1)$ et soit

$$S_n(x) = a_0 P_0(x) + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{(n+2)(n+3) \dots (n+k+1)} a_k P_k(x) \quad (-1 \leq x \leq 1):$$

1. En tout point de continuité de $f(x)$, la suite $S_n(x)$ converge vers $f(x)$. La convergence est uniforme dans tout intervalle entièrement intérieur à un intervalle de continuité de $f(x)$.

2. En tout point de discontinuité de première espèce, $S_n(x)$ a pour limite

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

lorsque x est intérieur. Lorsque $x = \pm 1$ la limite est respectivement $f(1-0)$, $f(-1+0)$.

3. $S_n(x)$ a pour limite la dérivée de l'intégrale définie de $f(x)$ en tout point intérieur où elle existe. $S_n(-1)$ [$S_n(+1)$] converge vers la dérivée à droite (à gauche) au point $x = -1$ ($x = +1$) de l'intégrale indéfinie de $f(x)$, quand elle existe.

14. La sommation des dérivées. — Pour étendre nos théorèmes sur l'approximation des dérivées, remarquons que lorsque $F(z)$ possède une différentielle d'ordre n sur la

sphère, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ existe et inversement. Il peut y avoir exception aux extrémités de l'intervalle $(-1, +1)$. Ces points ne sont des points réguliers pour la sommation de la dérivée d'ordre n que lorsque les n premières dérivées de $F(z)$ s'annulent pour $z=0$ ou $z=\pi$, car, dans ce cas seulement, $F(z)$ possède une différentielle d'ordre n aux pôles.

On peut voir que, lorsque pour un point x intérieur

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

existe, $F(z)$ possède une dérivée généralisée sur la sphère pour toute direction θ . De même l'analogie de la dérivée seconde généralisée est ici

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2\bar{f}(x)}{h^2},$$

$\bar{f}(x)$ désignant la valeur moyenne au point x . Les théorèmes du Chapitre II nous donnent donc, sans autre, le

THÉOREME XII. — *La suite dérivée*

$$\frac{d^s S_n(x)}{dx^s} = \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{(n+2)(n+3) \dots (n+k+1)} a_k \frac{d^s P_k(x)}{dx^s} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

converge pour $n = \infty$:

1. Vers $\frac{d^s f(x)}{dx^s}$ en tout point intérieur où cette dérivée existe. La convergence est uniforme dans tout intervalle entièrement intérieur à un intervalle de continuité de $\frac{d^s f(x)}{dx^s}$.

2. Vers la dérivée généralisée d'ordre s de $f(x)$ en tout point intérieur où elle existe.

Quant au dernier point, nous n'en avons pas donné ici une démonstration complète. Le lecteur y suppléera sans difficulté. Pour la définition des dérivées généralisées d'ordre quelconque on pourra consulter le mémoire cité de M. DE LA VALLÉE POUSSIN.

Je n'insiste pas sur les conséquences que l'on peut tirer de ces théorèmes et sur leurs relations étroites avec les théorèmes de WEIERSTRASS et de PAINLEVÉ sur l'approximation des fonctions et de leurs dérivées.

Genève, le 26 juin 1911.

MICHEL PLANCHEREL.