DEUXIÈME CONGRUENCE LINÉAIRE DE CUBIQUES GAUCHES.

Par M. M. Stuyvaert (Gand).

Adunanza dell'8 dicembre 1907.

La matrice

$$(1) \quad \begin{vmatrix} a_x & a'_x & a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{vmatrix}$$

de six formes linéaires en x_1, x_2, x_3, x_4 s'annule pour les points d'une cubique gauche. Si les coefficients de ces formes sont des fonctions entières de trois paramètres homogènes, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, qui peuvent être regardés comme les coordonnées d'un point α dans un plan (α), on a ∞^2 cubiques gauches, ou une congruence de ces courbes.

Nous avons exposé les propriétés d'un système pareil, que nous avons appelé *gerbe* G dans notre *Étude de quelques surfaces algébriques engendrées par des courbes du second et du troisième ordre* ¹⁾ chap. III; cette congruence ou gerbe G est l'ensemble des cubiques gauches ayant en commun deux points et trois bisécantes; elle a pour équations

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 a_x & \alpha_2 a'_x & \alpha_3 a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{vmatrix} = 0$$

et admet, comme cas limites, la *gerbe* de REYE formée des cubiques par cinq points et la *gerbe* de R. STURM formée des cubiques ayant même tétraèdre d'osculation.

Vers la même époque, M. VENERONI ²⁾ a examiné les congruences de courbes gauches algébriques d'ordre m et de genre n ; il a considéré celles de ces congruences qui sont d'ordre p et de classe q , en entendant par là que p courbes passent par un point arbitraire de l'espace et que q d'entre elles ont pour bisécante une droite donnée; il a ensuite attribué à p et q les valeurs les plus simples et appliqué ses résultats aux cubiques. Il a découvert notamment deux types de congruences de premier ordre et de première classe.

¹⁾ Gand (Hoste) et Paris (Gauthier-Villars), 1902.

²⁾ *Sopra alcuni sistemi di cubiche gobbe* [Questi Rendiconti, t. XVI (1902), pp. 209-229]; *Sui vari tipi di congruenze bilineari di cubiche gobbe* [Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie II, vol. XXXVII (1904), pp. 259-261].

En novembre 1905, nous avons, dans une Note insérée dans les Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris ³⁾, esquissé une méthode donnant la classification et la représentation analytique de toutes les congruences linéaires de cubiques gauches, pour autant que les paramètres α ne figurent qu'au premier degré dans la matrice donnée. Nous avons indiqué là six types de congruences, parmi lesquels nous avons retrouvé les deux systèmes de M. VENERONI. Notre Note des Comptes rendus, étendue à des systèmes de variétés algébriques plus élevées et accompagnée de la solution de quelques questions connexes a été publiée *in extenso* dans le Journal für die reine und angewandte Mathematik ⁴⁾. Une partie de ce travail est reprise dans un ouvrage d'ensemble couronné par l'Académie royale de Belgique (Prix FRANÇOIS DERUYTS, 1902-1906) et qui doit paraître prochainement dans les Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège sous le titre: *Cinq études de Géométrie analytique* ⁵⁾.

Chacun des six types de congruences dont nous avons établi l'existence peut être étudié séparément suivant le modèle que nous avons donné pour la gerbe G. Nous avons exposé la théorie de l'un de ces systèmes qui est en même temps le premier type de M. VENERONI et qui contient comme cas particulier précisément cette gerbe G, dans un Mémoire paru dans les Bulletins de l'Académie Royale de Belgique (mai 1907) ⁶⁾; les équations de cette congruence peuvent se réduire à la forme

$$\left\| \begin{array}{ccc} \alpha_1 a_x + \alpha_2 b_x + \alpha_3 c_x & \alpha_1 a'_x + \alpha_2 b'_x + \alpha_3 c'_x & \alpha_1 a''_x + \alpha_2 b''_x + \alpha_3 c''_x \\ f_x & f'_x & f''_x \end{array} \right\| = 0.$$

Enfin, dans le présent travail, nous étudions une *deuxième* congruence de cubiques gauches. Ce système est du premier ordre et, en général, de troisième classe; dans un cas particulier il est de première classe et se confond alors avec le deuxième type découvert par M. VENERONI. Dans les pages qui vont suivre, nous aurons à invoquer parfois des résultats que nous avons établis dans un autre travail paru dans les mêmes Bulletins de Belgique (mai 1907) ⁷⁾.

Notre Étude actuelle n'est pourtant point calquée servilement sur nos travaux analogues relatifs à d'autres systèmes de cubiques: dans ces écrits antérieurs, nous insistions surtout sur les surfaces engendrées par les cubiques du système quand on les assujettit à une condition supplémentaire; ici au contraire nous donnons une importance prépondérante à l'étude des éléments singuliers. C'est dire que nous ne prétendons pas avoir épuisé le sujet.

³⁾ *Sur les congruences de cubiques gauches* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CXLI (2^e semestre 1905), pp. 750-752].

⁴⁾ *Congruences de triangles, cubiques gauches et autres variétés annulant des matrices* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. CXXXII (1907), pp. 216-237].

⁵⁾ Cet ouvrage a paru: il est édité par la maison VAN GOETHEM à Gand. [Janvier 1908].

⁶⁾ *Une congruence linéaire de cubiques gauches* [Bulletins de la classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique (1907), pp. 470-514].

⁷⁾ *Sur l'invariantologie de la cubique gauche* [Bulletins de la classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique (1907), pp. 515-537].

La congruence Δ .

La congruence Δ dont nous entreprenons l'étude est représentée par les relations suivantes, où $a_x, b_x, \dots, a'_x, \dots$ sont des formes linéaires en x_1, x_2, x_3, x_4 indépendantes entre elles, et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ des paramètres arbitraires:

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 a_x + \alpha_2 c_x + \alpha_3 f_x & \alpha_1 a'_x + \alpha_2 c'_x + \alpha_3 f'_x & a''_x \\ \alpha_1 b_x + \alpha_2 d_x + \alpha_3 g_x & \alpha_1 b'_x + \alpha_2 d'_x + \alpha_3 g'_x & b''_x \end{vmatrix} = 0.$$

Parfois, pour abrégé, nous représenterons aussi cette congruence Δ par l'évanouissement de la matrice

$$(1) \quad \begin{vmatrix} a_x & a'_x & a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{vmatrix},$$

les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ étant alors implicitement contenus dans les éléments des deux premières colonnes.

A tout système de valeurs de $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$ répond une cubique gauche de la congruence Δ .

La droite $a''b''$ intersection des plans $a''_x = 0, b''_x = 0$ est une bisécante de toutes ces courbes et jouera un rôle considérable dans toute cette étude.

Pour déterminer le nombre de cubiques de la congruence Δ qui passent par un point donné x , il faut résoudre les équations (2) par rapport à $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$; on trouve sans peine les relations

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha_1(a_x b''_x - a''_x b_x) + \alpha_2(c_x b''_x - a''_x d_x) + \alpha_3(f_x b''_x - a''_x g_x) = 0, \\ \alpha_1(a'_x b''_x - a''_x b'_x) + \alpha_2(c'_x b''_x - a''_x d'_x) + \alpha_3(f'_x b''_x - a''_x g'_x) = 0, \end{cases}$$

d'où l'on peut tirer, en général, un seul système de valeurs de $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$; donc, par tout point de l'espace, il passe une cubique de la congruence. En d'autres termes, la congruence Δ est linéaire ou du premier ordre.

En résolvant les équations (3) par rapport aux α , dans le cas où le système de solutions est unique, et en désignant par ρ un facteur de proportionnalité, on a

$$(3') \quad \begin{cases} \rho \alpha_1 = \begin{vmatrix} c_x b''_x - a''_x d_x & f_x b''_x - a''_x g_x \\ c'_x b''_x - a''_x d'_x & f'_x b''_x - a''_x g'_x \end{vmatrix}, \\ \rho \alpha_2 = \begin{vmatrix} f_x b''_x - a''_x g_x & a_x b''_x - a''_x b_x \\ f'_x b''_x - a''_x g'_x & a'_x b''_x - a''_x b'_x \end{vmatrix}, \\ \rho \alpha_3 = \begin{vmatrix} a_x b''_x - a''_x b_x & c_x b''_x - a''_x d_x \\ a'_x b''_x - a''_x b'_x & c'_x b''_x - a''_x d'_x \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Ces formules sont du quatrième degré en x , et deux facteurs s'annulent, dans chaque déterminant, pour $a''_x = b''_x = 0$; si le point α décrit une courbe d'ordre n dans le plan (α) , la cubique Δ correspondante engendre une surface d'ordre $4n$ ayant $a''b''$ comme droite multiple d'ordre $2n$. En général $\frac{1}{2}n(n+3)$ cubiques de la congruence Δ déterminent une surface pareille.

Lignes singulières de la congruence Δ .

On appelle *point singulier* un point par où passe une infinité simple de cubiques Δ , et *ligne singulière* une ligne dont tous les points sont singuliers. La droite $a''b''$ est évidemment une ligne singulière, mais il y en a une autre. En effet, les équations (3) sont indéterminées en $\alpha_1:\alpha_2:\alpha_3$ lorsque l'on a

$$(4) \quad \left\| \begin{array}{ccc} a_x b''_x - a''_x b_x & c_x b''_x - a''_x d_x & f_x b''_x - a''_x g_x \\ a'_x b''_x - a''_x b'_x & c'_x b''_x - a''_x d'_x & f'_x b''_x - a''_x g'_x \end{array} \right\| = 0.$$

Les points x qui vérifient ces dernières relations sont sur un système de lignes d'ordre total égal à douze. Mais la droite $a''b''$ est double sur toutes les surfaces du quatrième ordre passant par ce système de lignes, et simple sur la partie à défalquer de l'intersection de deux d'entre elles; donc cette droite est comptée trois fois dans le système du douzième ordre, et celui-ci se complète par une courbe c_9 du neuvième ordre.

Dans la congruence Δ , le lieu des points singuliers se compose d'une courbe c_9 du neuvième degré et d'une droite $a''b''$.

On a vu que, si le point α décrit une courbe d'ordre n dans le plan (α) , la cubique correspondante engendre une surface d'ordre $4n$; il résulte des formules (3) et (4) que la courbe c_9 est multiple d'ordre n sur cette surface.

Cubiques Δ par un point de c_9 .

Soit y un point quelconque de la courbe singulière c_9 : les équations (3) sont indéterminées en $\alpha_1:\alpha_2:\alpha_3$ quand on y remplace x par y ; alors tous les systèmes de valeurs de $\alpha_1:\alpha_2:\alpha_3$ qui vérifient l'une de ces équations satisfont à l'autre; or celles qui vérifient l'une appartiennent à une droite du plan (α) ; donc les cubiques correspondantes engendrent une surface du quatrième ordre ayant c_9 comme courbe simple et $a''b''$ comme droite double.

Les cubiques de la congruence Δ qui passent par un même point de la courbe singulière c_9 engendrent une surface D_4 du quatrième ordre circonscrite à cette courbe c_9 et ayant pour droite double la bisécante singulière $a''b''$.

Un calcul facile prouve que la surface D_4 engendrée par les cubiques Δ qui passent par un point y de c_9 a ce point y comme point double. Le plan $(a''b''y)$ coupe encore c_9 en des points $O', O'', \dots$; les droites $yO', yO'', \dots$ sont tout entières sur la surface D_4 qu'elles percent en deux points doubles et un point simple. Mais il ne peut y avoir que deux droites pareilles, puisque la section de D_4 par le plan $(a''b''y)$ contient déjà la droite double $a''b''$; donc tout plan mené par $a''b''$ ne coupe plus la courbe c_9 qu'en trois points extérieurs à $a''b''$; cette droite est donc une sexasécante de c_9 , ce qui sera vérifié plus loin.

Les tangentes en y aux cubiques Δ passant par ce point engendrent un cône du

second ordre; il arrive, pour un nombre fini de points y de c_y , que ce cône dégénère en deux plans se coupant suivant la tangente à c_y .

Par un point arbitraire de c_y passent ∞^1 cubiques Δ ; les valeurs correspondantes de $\alpha_1:\alpha_2:\alpha_3$ appartiennent, comme nous l'avons dit, à une droite du plan (α) ; toutes ces ∞^1 droites enveloppent une courbe (A) dans le plan (α) . Deux tangentes à la courbe (A) ont, en général, un seul point commun; donc, *par deux points donnés de la courbe singulière c_y , il passe une cubique de la congruence Δ et généralement une seule.*

Aux points de la courbe (A) répondent des cubiques Δ touchant c_y en un point. *Il existe une cubique Δ et généralement une seule touchant c_y en un point donné.*

Cubiques Δ par un point de $a''b''$.

Si un point x est sur la bisécante principale $a''b''$, les valeurs de $\alpha_1:\alpha_2:\alpha_3$ qui annulent la matrice (2) doivent rendre proportionnelles les deux premières colonnes de cette matrice, et ces valeurs correspondent, dans le plan (α) , aux points d'une conique (C) ; donc, d'après une remarque antérieure:

Les cubiques de la congruence Δ qui passent par un même point N de la bisécante principale $a''b''$ engendrent une surface du huitième ordre T_8 , ayant $a''b''$ pour droite quadruple et c_y pour courbe double.

Puisque toute tangente à la courbe (A) du plan (α) coupe deux fois une conique (C) , on peut mener, par un point donné de la courbe c_y et par un point donné N de la bisécante principale $a''b''$, en général deux cubiques de la congruence Δ .

Il est possible d'obtenir l'équation de la surface T_8 dont il vient d'être question: soient y_1, y_2, y_3, y_4 les coordonnées du point N de $a''b''$. Les valeurs de $\alpha_1:\alpha_2:\alpha_3$ correspondant aux cubiques Δ passant par N doivent, avons-nous dit, satisfaire à l'équation

$$(C) \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1 a_y + \alpha_2 c_y + \alpha_3 f_y & \alpha_1 a'_y + \alpha_2 c'_y + \alpha_3 f'_y \\ \alpha_1 b_y + \alpha_2 d_y + \alpha_3 g_y & \alpha_1 b'_y + \alpha_2 d'_y + \alpha_3 g'_y \end{vmatrix} = 0,$$

ou vérifier, avec une valeur convenable de λ , les relations

$$\begin{aligned} \alpha_1 a_y + \alpha_2 c_y + \alpha_3 f_y + \lambda \alpha_1 a'_y + \lambda \alpha_2 c'_y + \lambda \alpha_3 f'_y &= 0, \\ \alpha_1 b_y + \alpha_2 d_y + \alpha_3 g_y + \lambda \alpha_1 b'_y + \lambda \alpha_2 d'_y + \lambda \alpha_3 g'_y &= 0. \end{aligned}$$

Entre ces relations et les égalités (3) éliminons $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda$; il vient facilement:

$$T_8 \equiv \begin{vmatrix} a_y & c_y & f_y & a'_y & c'_y & f'_y \\ b_y & d_y & g_y & b'_y & d'_y & g'_y \\ a_x b'' - a'' b_x & c_x b'' - a'' d_x & f_x b'' - a'' g_x & . & . & . \\ a'_x b'' - a'' b'_x & c'_x b'' - a'' d'_x & f'_x b'' - a'' g'_x & . & . & . \\ . & . & . & a_x b'' - a'' b_x & c_x b'' - a'' d_x & f_x b'' - a'' g_x \\ . & . & . & a'_x b'' - a'' b'_x & c'_x b'' - a'' d'_x & f'_x b'' - a'' g'_x \end{vmatrix} = 0.$$

On vérifie ici que tout point de $a''b''$ annule quatre lignes de ce déterminant et est donc un point quadruple de la surface T_8 , tandis que tout point de c_9 rend deux lignes du déterminant proportionnelles à deux autres et est donc un point double de la surface.

Il est géométriquement vraisemblable que le point N par où passent toutes les cubiques génératrices de la surface T_8 présente une singularité plus élevée que les autres points de $a''b''$; d'ailleurs l'équation de T_8 , comme on le vérifie sans peine, est satisfaite pour $x = y$, indépendamment du fait que a''_y et b''_y sont nuls.

Ainsi le point N est au moins un point quintuple de T_8 . Il en est même exactement un point quintuple, car toute section plane par ce point est une courbe γ_8 du huitième ordre à neuf points doubles sur c_9 et un point multiple en N ; ce dernier point ne peut être d'un ordre de multiplicité supérieur au cinquième, sans quoi la courbe γ_8 dégénère. Remarquons en passant l'identité

$$\frac{7 \times 6}{2} - \frac{5 \times 4}{2} - 9 = 2$$

exprimant que la courbe γ_8 est de genre 2. Cette courbe est hyperelliptique; elle possède une infinité simple de couples de points tels que chaque couple est déterminé par un de ses points: ces couples sont les intersections, autres que N , du plan de γ_8 avec les cubiques génératrices de T_8 .

Ainsi, la surface T_8 a le point N pour point quintuple.

On peut encore contrôler ce résultat en considérant la conique du plan (α) dont l'équation $(C) = 0$ écrite plus haut est toute indépendante des formes a''_x et b''_x ; on ne peut donc pas, dans le cas général, admettre que cette conique dégénère pour tous les points y de la droite $a''b''$. Cette courbe proprement dite du second ordre est unicursale et elle a une correspondance unidéterminative avec les cubiques génératrices de T_8 et par suite avec leurs tangentes en N ; celles-ci forment donc un cône unicursal à génératrice quadruple $a''b''$; donc ce cône est du cinquième ordre, et le point N est quintuple sur T_8 .

Voici quelques conséquences et quelques autres vérifications:

Il existe une seule cubique Δ passant par le point N de $a''b''$ et y touchant un plan donné mené par $a''b''$; car ce plan coupe le cône quintique des tangentes suivant une génératrice quadruple et encore une autre génératrice.

Il existe trois cubiques Δ passant par N et touchant, sur $a''b''$, ailleurs qu'en N , un plan donné par $a''b''$; car la section de T_8 par ce plan π est une quartique qui coupe $a''b''$ en N et en trois autres points. Cette quartique correspond, point par point, à la conique (C) du plan (α) , puisque toute cubique Δ passant par N coupe deux fois $a''b''$ et perce encore une troisième fois le plan π ; cette quartique est donc unicursale et doit avoir trois nœuds; or ses nœuds sont les intersections de c_9 avec le plan π ; ainsi tout plan par $a''b''$ coupe c_9 en trois points hors de $a''b''$; par suite $a''b''$ coupe six fois c_9 , comme nous l'avons déjà démontré d'une autre manière.

Une droite quelconque menée par N perce encore la surface T_8 en trois autres points; donc cette droite est bisécante de trois cubiques Δ ; nous verrons plus tard que cette propriété appartient à toutes les droites de l'espace.

Une droite joignant le point N de $a''b''$ à un point M de c_9 perce encore la surface T_8 en un point L ; des trois cubiques ayant MN pour bisécante, deux passent par M et N , comme nous l'avons déjà vu, la troisième par N et L .

La surface T_8 et une surface D_4 engendrée par les cubiques Δ passant par un point M de c_9 ont en commun les lignes $a''b''$ et c_9 plus un certain nombre de cubiques de la congruence Δ ; car, par tout point commun, non singulier, des deux surfaces, on peut mener une cubique Δ passant par N et une cubique Δ par M , et comme, par un point non singulier, on ne peut mener qu'une seule cubique Δ , ces deux courbes coïncident; or nous savons qu'il y a deux cubiques Δ par M et N et l'identité suivante vérifie l'ordre total des intersections des surfaces T_8 et D_4 :

$$8 \times 4 = 4 \times 2 \times 1(a''b'') + 2 \times 1 \times 9(c_9) + 2 \times 3.$$

Pareillement, deux surfaces telles que T_8 , engendrées respectivement par les cubiques Δ menées par les points N et N' de $a''b''$, se coupent suivant $a''b''$ et c_9 plus un certain nombre de cubiques Δ . Ce nombre est quatre, d'après l'identité

$$8 \times 8 = 4 \times 4 \times 1(a''b'') + 2 \times 2 \times 9(c_9) + 4 \times 3;$$

donc, par deux points de $a''b''$ passent quatre cubiques Δ .

L'enveloppe (Q) des coniques (C) du plan (α).

Les coniques (C) du plan (α) forment un système quadratique simplement infini; car les coordonnées d'un point de $a''b''$ sont fonctions linéaires d'un paramètre λ et figurent au second degré dans les coefficients des coniques (C).

Dès lors, les courbes (C) du plan (α) enveloppent une courbe (Q) du quatrième ordre.

Nous pouvons remarquer qu'il n'y a pas, en général, de point commun à toutes les coniques (C); car, s'il y en avait un, il y aurait: ou bien une cubique Δ contenant tous les points de $a''b''$; ou bien un point du plan (α) répondant à une infinité de cubiques Δ . Dans le premier cas, pour un système de valeurs de $\alpha_1:\alpha_2:\alpha_3$, la quadrique dont l'équation en y est $(C) = 0$ contiendrait toute la droite $a''b''$; ceci impliquerait trois conditions d'où l'on pourrait éliminer les α et il resterait une relation identique entre les formes $a_x, b_x, \dots$, ce qui est contre l'hypothèse de leur indépendance. Dans le second cas, le plan (α) contiendrait un point singulier; donc la matrice (2), pour un certain système de valeurs de $\alpha_1:\alpha_2:\alpha_3$, représenterait une cubique indéterminée et ceci impliquerait encore trop de conditions pour les trois paramètres homogènes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ dont on dispose. Ce sont là deux cas particuliers qui devraient être étudiés à part, mais que nous excluons du présent travail.

Les quatre points communs à deux coniques (C) donnent les quatre cubiques Δ passant par deux points donnés de $a''b''$; nous vérifions ici un résultat antérieur.

Les quatre points caractéristiques d'une des coniques (C) donnent quatre cubiques Δ tangentes à $a''b''$ en un point donné de cette droite.

On sait que deux groupes de points caractéristiques de deux coniques (C) sont sur une même troisième conique. Donc, les huit cubiques Δ tangentes en deux points donnés de $a''b''$ sont sur une même surface du huitième ordre ayant $a''b''$ comme droite quadruple et c_9 comme courbe double.

Les intersections d'une tangente à la courbe (A) avec la courbe (Q) donnent quatre cubiques Δ passant par un point donné de c_9 et touchant $a''b''$.

Étude de la courbe singulière c_9 .

Chaque cubique de la congruence Δ rencontre huit fois la courbe singulière c_9 .

En effet, dans la matrice (4), on peut, en appliquant le principe de l'addition des colonnes, remplacer la première colonne par les deux éléments suivants :

$$\begin{aligned} (\alpha_1 a_x + \alpha_2 c_x + \alpha_3 f_x) b''_x - (\alpha_1 b_x + \alpha_2 d_x + \alpha_3 g_x) a''_x, \\ (\alpha_1 a'_x + \alpha_2 c'_x + \alpha_3 f'_x) b''_x - (\alpha_1 b'_x + \alpha_2 d'_x + \alpha_3 g'_x) a''_x, \end{aligned}$$

et ces formes s'annulent pour une cubique variable de la congruence Δ accompagnée de sa bisécante $a''b''$. Cette cubique perce, en douze points, la surface du quatrième ordre représentée par le déterminant des deux dernières colonnes de la matrice (4); cette surface a pour droite double la bisécante $a''b''$ de la cubique; donc il reste huit points de la cubique sur la courbe singulière c_9 .

Voici, comme conséquence, une propriété de la courbe (A) du plan (α): les cubiques Δ qui passent par un point de c_9 répondent aux points d'une tangente à la courbe (A); puisque toute cubique Δ s'appuie en huit points sur c_9 , tout point du plan (α) est sur huit tangentes à la courbe (A), ou la courbe (A) est de huitième classe.

La représentation (4) de la courbe singulière a l'inconvénient de contenir $a''b''$ comme droite triple. Il est possible d'obtenir une représentation de cette courbe c_9 , accompagnée de la droite $a''b''$ comptée simple seulement. A cet effet, faisons précéder la matrice (4) d'une ligne de formes du premier degré,

$$a_x, c_x, f_x;$$

nous obtenons une surface du cinquième ordre circonscrite à c_9 et dont l'équation se réduit à

$$b''_x \begin{vmatrix} a_x & c_x & f_x \\ b_x & d_x & g_x \\ a'_x & c'_x & f'_x \end{vmatrix} - a''_x \begin{vmatrix} a_x & c_x & f_x \\ b_x & d_x & g_x \\ b'_x & d'_x & g'_x \end{vmatrix} = 0.$$

Nous trouverions pareillement

$$b''_x \begin{vmatrix} a'_x & c'_x & f'_x \\ a_x & c_x & f_x \\ b'_x & d'_x & g'_x \end{vmatrix} - a''_x \begin{vmatrix} a'_x & c'_x & f'_x \\ b_x & d_x & g_x \\ b'_x & d'_x & g'_x \end{vmatrix} = 0,$$

et la courbe c_9 satisfait donc aux relations suivantes :

$$(5) \quad \begin{vmatrix} a''_x & . & a_x & c_x & f_x \\ b''_x & . & b_x & d_x & g_x \\ . & a''_x & a'_x & c'_x & f'_x \\ . & b''_x & b'_x & d'_x & g'_x \end{vmatrix} = 0,$$

car les points x qui annuleraient la matrice partielle des trois dernières colonnes ne rendent pas les équations (3) en $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$ indéterminées et ne sont donc pas singuliers.

Cette matrice (5) s'annule pour un système de lignes dont l'ordre total est dix et qui comprend la courbe c_9 et la droite $a''b''$ comptée simple.

En faisant précéder la matrice (5) d'une ligne de constantes arbitraires, on a ∞^4 surfaces quartiques S_4 circonscrites à ce système; l'intersection de deux surfaces pareilles se compose de la droite $a''b''$, de la courbe c_9 et d'une sextique gauche c_6 de genre 3, coupant c_9 en 20 points.

Une de ces sextiques gauches annule la matrice des trois dernières colonnes de la matrice (5). M. F. SCHUR s'est occupé de ces courbes; nous en avons exposé la théorie analytique dans le Bulletin de l'Académie royale de Belgique (mai 1907).

En faisant précéder la matrice (5) d'une ligne dont les deux premiers éléments sont nuls et les autres des constantes arbitraires, on a un *réseau de surfaces quartiques* D_4 , ayant toutes $a''b''$ comme droite double et se coupant deux à deux suivant cette droite, plus la courbe c_9 et une cubique gauche. Une cubique pareille est représentée par

$$\begin{vmatrix} . & . & \lambda & \mu & \nu \\ . & . & \lambda' & \mu' & \nu' \\ a''_x & . & a_x & c_x & f_x \\ b''_x & . & b_x & d_x & g_x \\ . & a''_x & a'_x & c'_x & f'_x \\ . & b''_x & b'_x & d'_x & g'_x \end{vmatrix} = 0;$$

en supprimant la dernière ou l'avant-dernière ligne, on reconnaît que cette cubique gauche est sur la surface

$$\frac{a''_x}{b''_x} = \frac{a_x(\mu\nu' - \mu'\nu) + c_x(\nu\lambda' - \nu'\lambda) + f_x(\lambda\mu' - \lambda'\mu)}{b_x(\mu\nu' - \mu'\nu) + d_x(\nu\lambda' - \nu'\lambda) + g_x(\lambda\mu' - \lambda'\mu)},$$

et, en supprimant la troisième ou la quatrième ligne, on trouve une autre quadrique analogue, de sorte que la cubique gauche en question n'est autre que la cubique générale de la congruence Δ . Elle répond notamment au point du plan (z) commun aux droites

$$\lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2 + \nu\alpha_3 = 0, \quad \lambda'\alpha_1 + \mu'\alpha_2 + \nu'\alpha_3 = 0.$$

Puisque les surfaces D_4 forment un réseau, il en passe une seule par deux points non singuliers, et il en passe une infinité, formant faisceau, par un point non singulier. Elles constituent le système complet des surfaces quartiques circonscrites à c_9 et ayant

$a''b''$ pour droite double; car soient E_4 une telle surface et M un quelconque de ses points hors de c_9 et de $a''b''$; la cubique Δ unique menée par M perce la surface E_4 en deux points doubles sur $a''b''$, huit points simples sur c_9 et au point M , ce qui équivaut à treize points; cette cubique est donc tout entière sur E_4 , et forme, avec c_9 et $a''b''$, la base d'un faisceau de surfaces, D_4 , faisceau dont E_4 doit faire partie.

Il en résulte que les surfaces D_4 répondent, sans ambiguïté, aux droites du plan (α) , que notamment les surfaces engendrées par les cubiques Δ passant par un point de c_9 appartiennent au réseau D_4 ; que ce réseau peut se représenter aussi en faisant précéder d'une ligne de constantes la matrice (3). Il en résulte encore qu'une surface du huitième ordre engendrée par les cubiques Δ répondant à une conique proprement dite du plan (α) et notamment la surface T_8 du paragraphe précédent ne peut pas, en général, dégénérer.

Ainsi deux surfaces D_4 se coupent suivant la courbe c_9 et suivant une cubique gauche ayant $a''b''$ comme bisécante. Un plan π par la droite double coupe ces surfaces suivant deux coniques ayant quatre points communs, dont un sur la cubique et trois sur la courbe c_9 . Donc la droite $a''b''$ rencontre c_9 en six points, comme nous l'avons trouvé déjà.

Disons en passant comment on peut concevoir une génération de la congruence Δ : on considère une cubique gauche c_3 et une de ses bisécantes $a''b''$; deux surfaces du quatrième ordre ayant $a''b''$ pour droite double et passant par c_3 se coupent encore suivant une courbe du neuvième ordre c_9 ayant $a''b''$ comme sécante sextuple; par c_9 on peut mener un réseau de surfaces quartiques ayant $a''b''$ comme droite double; leurs intersections mutuelles sont les ∞^2 cubiques gauches de la congruence à construire.

Deux surfaces du quatrième ordre, D_4 et S_4 , circonscrites à c_9 et ayant, l'une $a''b''$ comme droite double, l'autre $a''b''$ comme droite simple, se coupent encore suivant une quintique gauche c_5 ayant $a''b''$ comme bisécante, car un plan π par $a''b''$ coupe les surfaces suivant des courbes du second et du troisième ordre, ayant six intersections dont trois sur c_9 et trois sur c_5 .

Une cubique Δ perce en 12 points une surface S_4 ayant $a''b''$ comme droite simple: deux de ces points sont sur $a''b''$, huit sur c_9 et les deux derniers sur une infinité simple de courbes c_3 tracées sur la surface S_4 .

Une quintique c_5 perce en vingt points une surface D_4 ayant $a''b''$ comme droite double: quatre de ces points sont concentrés aux intersections de c_5 et de $a''b''$, deux sont sur la cubique gauche intersection de la surface D_4 et d'une autre pareille menée par c_5 , et quatorze sont sur c_9 .

Nous venons de voir que deux surfaces S_4 et D_4 se coupent suivant $a''b''$ et deux courbes c_9 et c_5 . Nous savons aussi que deux surfaces S_4 et S'_4 ayant $a''b''$ comme droite simple se coupent suivant $a''b''$ et deux courbes c_9 et c_6 ; la courbe c_5 perce la surface S'_4 en vingt points dont deux sur $a''b''$, quatorze sur c_9 et quatre sur c_6 ; la courbe c_6 perce D_4 en vingt-quatre points dont quatre sur c_5 et vingt sur c_9 .

Cubiques Δ dégénérées.

Nous allons nous occuper à présent des cubiques Δ qui se décomposent en une droite g et une conique c_2 . Montrons d'abord que cette conique ne peut avoir $a''b''$ comme corde. En effet, supposons qu'il en soit ainsi. La cubique dégénérée dont c_2 fait partie appartient à un faisceau de surfaces D_4 ; imaginons la surface de ce faisceau qui passe par un point arbitraire E du plan de c_2 ; cette surface contient la droite double $a''b''$, toute la conique c_2 et encore un point E du même plan; donc tout le plan de c_2 appartient à une surface D_4 ; et il y aurait une surface cubique par c_9 et $a''b''$, et cette surface cubique contiendrait toutes les courbes Δ car elle les couperait en huit points sur c_9 et deux sur $a''b''$; bref il n'y aurait plus de congruence Δ .

Ainsi pour les cubiques Δ dégénérées, la conique ne peut couper deux fois $a''b''$; comme évidemment la droite ne peut non plus couper $a''b''$ en deux points, il faut que la droite et la conique rencontrent $a''b''$ chacune en un point. Dès lors si la droite s'appuie sur c_9 en i points, la conique la rencontre en $8 - i$ points et coupe toute surface D_4 circonscrite à c_9 en $10 - i$ points, dont $8 - i$ sur c_9 et un double sur $a''b''$. Si i est nul ou égal à l'unité, la conique appartient à toutes les surfaces D_4 et par suite à toutes les cubiques Δ , hypothèse à rejeter.

Donc les cubiques Δ dégénérées se composent d'une droite g s'appuyant sur $a''b''$ et coupant c_9 au moins en deux points et d'une conique s'appuyant sur $a''b''$ et sur g et coupant c_9 au plus en six points.

Or tout plan par $a''b''$ coupe c_9 en trois points; une droite g déterminée par deux de ceux-ci rencontre $a''b''$. Par un point arbitraire O de g passent ∞^1 surfaces D_4 que g perce chacune en cinq points, savoir un point double sur $a''b''$, deux points sur c_9 et le point O ; donc g appartient à toutes ces surfaces, et la base du faisceau qu'elles constituent est une cubique dégénérée comprenant la droite g accompagnée d'une conique sexasécante de c_9 .

Par contre il n'existe pas de trisécante de c_9 rencontrant $a''b''$ ailleurs qu'aux points P_i , communs à $a''b''$ et c_9 , car une telle droite devrait appartenir à toutes les surfaces D_4 , donc à toutes les cubiques Δ .

Finalement, *les droites des cubiques Δ dégénérées sont les cordes de c_9 qui rencontrent $a''b''$.*

Surface B_{10} des bisécantes de c_9 rencontrant $a''b''$.

Tout plan π mené par $a''b''$ coupe la surface engendrée par les bisécantes de c_9 qui s'appuient sur $a''b''$ suivant cette droite $a''b''$ qui en est une ligne multiple d'ordre x par exemple, et suivant trois autres droites, savoir les côtés du triangle ABC déterminé dans ce plan π par la courbe c_9 . Le degré de la surface étudiée est donc $x + 3$, et elle admet la courbe c_9 comme courbe double, puisque, par chaque point de c_9 , passent deux génératrices de la surface. Elle coupe aussi une surface D_4 circonscrite à c_9 ,

suivant $a''b''$ comptée $2x$ fois et suivant c_9 comptée double. Par tout autre point commun aux deux surfaces, il passe une bisécante de c_9 et cette droite est tout entière sur D_4 qu'elle perce en trois points simples et un point double; mais inversement les plans menés par $a''b''$ coupent la surface D_4 suivant des coniques, et l'on sait que huit de ces courbes dégénèrent en deux droites dont l'une est bisécante et l'autre unisécante de c_9 , car aucune trisécante de c_9 ne rencontre $a''b''$. Donc l'intersection totale de la surface des bisécantes et de la surface D_4 est d'ordre $2x + 18 + 8$ et comme, d'autre part, elle est aussi d'ordre $4(x + 3)$, on en tire $x = 7$, d'où $x + 3 = 10$.

Les bisécantes de c_9 qui rencontrent $a''b''$ engendrent une surface B_{10} du dixième ordre ayant $a''b''$ pour droite septuple et c_9 pour courbe double.

Comme conséquence, nous voyons que, par un point N de $a''b''$ hors de c_9 , il passe sept génératrices de la surface B_{10} . Le cône de sommet N circonscrit à c_9 est du neuvième ordre, à sept génératrices doubles plus la génératrice sextuple $a''b''$ qui compte pour quinze génératrices doubles; donc le genre de ce cône est égal à

$$\frac{8 \times 7}{2} - 15 - 7 = 6.$$

La courbe c_9 est de genre six.

Il en résulte que, par un point arbitraire de l'espace, il passe 22 bisécantes de c_9 . Quant au cône perspectif à c_9 et ayant son sommet en un point quelconque de la courbe, il est du huitième ordre et de genre six; il a donc quinze génératrices doubles; donc par un point de c_9 , on peut mener quinze trisécantes; ou encore la surface des trisécantes de c_9 admet cette courbe comme ligne multiple d'ordre 15.

Le cône perspectif à c_9 et ayant son sommet en un des six points P_i où c_9 rencontre $a''b''$ est du huitième ordre et admet $a''b''$ comme génératrice quintuple; il est de genre six, donc il admet encore cinq autres génératrices doubles. Par chacun des points P_i communs à c_9 et $a''b''$, il passe cinq trisécantes de c_9 . Ces trente trisécantes font partie de cubiques Δ dégénérées.

Coniques multisécantes de c_9 .

Nous avons vu qu'une cubique Δ dégénérée appartient à un faisceau de surfaces D_4 et qu'elle se compose, en général, d'une bisécante de c_9 s'appuyant sur $a''b''$ et d'une conique coupant six fois c_9 .

Soit réciproquement c_2 une conique s'appuyant sur $a''b''$ et passant par six points de c_9 ; par un point quelconque de c_2 , on peut mener un faisceau de surfaces D_4 qui la contiennent tout entière, car cette conique c_2 perce chacune de ces surfaces en six points simples sur c_9 , un point double sur $a''b''$ et encore un point choisi sur c_2 . D'ailleurs cette conique c_2 perce, en vingt points, la surface B_{10} des bisécantes de c_9 qui s'appuient sur $a''b''$; de ces vingt points, sept sont confondus sur $a''b''$, six sont doubles sur c_2 , et par le vingtième point, on peut mener une génératrice de B_{10} formant, avec c_2 , une cubique Δ dégénérée.

Ainsi, toute conique s'appuyant six fois sur c_9 et une fois sur $a''b''$ fait partie d'une cubique Δ dégénérée.

On sait d'autre part (CLEBSCH, Math. Ann., t. I) qu'une surface D_4 du quatrième degré et possédant une droite double est coupée par 64 plans suivant des couples de coniques, et qu'elle possède 16 lignes droites coupant la droite double; de ces 16 droites, huit sont évidemment bisécantes de c_9 et les autres unisécantes de c_9 .

Une conique située sur une surface D_4 ne peut couper c_9 en sept points, car elle serait sur toutes les surfaces D_4 . Huit des coniques d'une surface D_4 coupent chacune six fois c_9 , une fois une droite de D_4 bisécante de c_9 , et une fois sept droites de D_4 unisécantes de c_9 . Le plan d'une de ces coniques coupe encore D_4 suivant une seconde conique qui rencontre trois fois c_9 , une fois sept droites de D_4 bisécantes de c_9 , et une fois une droite de D_4 unisécante de c_9 .

Quant aux 56 autres couples de coniques situés sur D_4 , chacun se compose: 1° d'une conique coupant cinq fois c_9 et s'appuyant sur huit droites de D_4 dont trois bisécantes et cinq unisécantes de c_9 ; 2° d'une conique coupant quatre fois c_9 et s'appuyant sur huit droites de D_4 dont cinq bisécantes et trois unisécantes de c_9 . Nous laissons au lecteur le soin de vérifier le nombre des intersections de ces coniques avec la surface B_{10} . Remarquons que huit bisécantes de c_9 se combinent trois à trois précisément de 56 manières.

Dans un mémoire sur l'*Invariantologie de la cubique gauche* (Bull. de l'Acad. Roy. de Belgique, mai 1907), nous avons donné, pour la courbe définie par les équations

$$(1) \quad \begin{vmatrix} a_x & a'_x & a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{vmatrix} = 0,$$

l'invariant

$$I = \begin{vmatrix} (aa'a''b) & (aa'b''b) - (a''abb') & (abb'b'') \\ (a'a''bb') - (aa'b'b'') & (a'bb'b'') \\ (a'a''b'') & (a''abb'b'') - (a'a''b''b) & (a'bb'b'') \end{vmatrix},$$

où le symbole $(aa'a''b)$ par exemple désigne le déterminant des coefficients des formes a_x, a'_x, a''_x, b_x .

L'équation $I = 0$ exprime que la cubique donnée dégénère. Or, pour la congruence Δ que nous étudions dans ce travail, les formes a_x, b_x, a'_x, b'_x sont fonctions linéaires des paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, tandis que les formes a''_x, b''_x en sont indépendantes, et nous voyons que le déterminant I contient, au huitième degré, les symboles a, a', b, b' , donc aussi les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$: par suite $I = 0$ représente, dans le plan (α) , une courbe du huitième ordre; et les cubiques correspondantes engendrent une surface d'ordre 32 ayant $a''b''$ comme droite multiple d'ordre 16 et c_9 comme courbe octuple. Mais nous avons vu que les droites des cubiques dégénérées engendrent une surface du dixième ordre ayant $a''b''$ comme droite septuple et c_9 comme courbe double; donc les coniques des cubiques dégénérées de la congruence Δ engendrent une surface d'ordre 22 ayant $a''b''$ comme droite multiple d'ordre 9 et c_9 comme courbe sextuple.

Comme vérification, une bisécante g de c_9 s'appuyant sur $a''b''$ coupe la surface C_{22} que nous venons de trouver en un point 9^{uple} , plus deux points sextuples, plus encore *un* point par où passe la conique qui complète la cubique dégénérée dont g fait partie.

Autre vérification: la surface C_{22} coupe une surface D_4 , circonscrite à c_9 et ayant $a''b''$ comme droite double, suivant cette droite $a''b''$ qui sera comptée 18 fois, suivant la courbe c_9 qui est sextuple pour l'une des surfaces et simple pour l'autre, et enfin, comme on l'a vu plus haut, suivant huit coniques sexasécantes de c_9 ; et l'on a effectivement l'identité

$$4 \times 22 = 1 \times 2 \times 9 + 9 \times 6 \times 1 + 2 \times 8.$$

Nous avons montré aussi, dans notre travail sur l'*Invariantologie de la cubique gauche*, que, dans le cas où I s'annule, l'équation

$$(6) \quad \begin{vmatrix} (aa'a''b) & b_x & (abb'b'') \\ (aa'a''b') & b'_x & (a'b'b'b'') \\ (aa'a''b'') & b''_x & (a''b'b'b'') \end{vmatrix} = 0$$

représente le plan de la conique faisant partie de la cubique dégénérée. Cette équation (6), combinée avec l'égalité $I = 0$, donne

$$\begin{vmatrix} (aa'a''b) & b_x & (aa'b''b) - (a''abb') & (abb'b'') \\ (aa'a''b') & b'_x & (a'a''bb') - (aa'b'b'') & (a'b'b'b'') \\ (aa'a''b'') & b''_x & (a'a'b'b'') - (a'a''b''b) & (a''b'b'b'') \end{vmatrix} = 0.$$

Les quatre symboles a, a', b, b' contenant seuls les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, et au premier degré, on voit, grâce à des procédés connus d'énumération, qu'à tout point x répondent 27 valeurs de $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$, annulant la matrice précédente.

Donc, les plans des coniques faisant partie de cubiques Δ dégénérées enveloppent une développable de classe 27.

Systèmes simplement infinis de cubiques Δ .

D'après les équations (3'), la cubique Δ qui passe par un point donné y répond aux valeurs suivantes des paramètres α :

$$(7) \quad \begin{cases} \rho \alpha_1 = \begin{vmatrix} c_y b''_y - a''_y d_y & f_y b''_y - a''_y g_y \\ c'_y b''_y - a''_y d'_y & f'_y b''_y - a''_y g'_y \end{vmatrix}, \\ \rho \alpha_2 = \begin{vmatrix} f_y b''_y - a''_y g_y & a_y b''_y - a''_y b_y \\ f'_y b''_y - a''_y g'_y & a'_y b''_y - a''_y b'_y \end{vmatrix}, \\ \rho \alpha_3 = \begin{vmatrix} a_y b''_y - a''_y b_y & c_y b''_y - a''_y d_y \\ a'_y b''_y - a''_y b'_y & c'_y b''_y - a''_y d'_y \end{vmatrix}; \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$\rho(\alpha_1 a_x + \alpha_2 c_x + \alpha_3 f_x) \equiv \begin{vmatrix} a_x & c_x & f_x \\ a_y b''_y - a''_y b_y & c_y b''_y - a''_y d_y & f_y b''_y - a''_y g_y \\ a'_y b''_y - a''_y b'_y & c'_y b''_y - a''_y d'_y & f'_y b''_y - a''_y g'_y \end{vmatrix},$$

ou, en abrégé, en n'écrivant que le terme principal du déterminant,

$$\rho(\alpha, a_x + \alpha_2 c_x + \alpha_3 f_x) \equiv [a_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)].$$

On calcule de même les autres éléments de la matrice initiale et l'on obtient, en faisant les substitutions,

$$(8) \quad \begin{vmatrix} [a_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] & [a'_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] & a''_x \\ [b_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] & [b'_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] & b''_x \end{vmatrix} = 0.$$

Ces formules (8) représentent la cubique de la congruence Δ qui passe par le point donné y . Mais on peut interpréter ces relations en disant qu'elles expriment les conditions pour que deux points x et y soient sur une même cubique Δ ; donc, en regardant les y comme coordonnées courantes, ces égalités représentent la cubique Δ passant par le point x accompagnée de la courbe c_y et de la droite $a'' b''$ comptée quadruple.

Si le point y décrit une courbe algébrique, plane ou gauche, d'ordre n , ne rencontrant ni la droite $a'' b''$, ni la courbe singulière c_y , les relations (7) expriment une correspondance unidéterminative entre les points de cette courbe et ceux d'une courbe d'ordre $4n$ du plan (α). Le théorème de la conservation du genre nous apprend que, si p est le genre de la courbe lieu du point y , la courbe plane a

$$\frac{1}{2}(4n - 1)(4n - 2) - p$$

points doubles ou rebroussements.

Par suite, les cubiques Δ qui s'appuient sur une courbe plane ou gauche c_n d'ordre n et de genre p , ne rencontrant ni c_y ni $a'' b''$, engendrent une surface d'ordre $16n$ ayant $a'' b''$ comme droite multiple d'ordre $8n$, et c_y comme courbe multiple d'ordre $4n$. Il y a

$$\frac{1}{2}(4n - 1)(4n - 2) - p$$

cubiques Δ qui sont bisécantes de la courbe c_n .

Toute intersection de c_n avec c_y ou avec $a'' b''$ réduit le degré de la surface, respectivement de quatre ou de huit unités, car à chacune de ces intersections correspond, dans le plan (α), une droite ou une conique faisant partie de la courbe d'ordre $4n$ située dans ce plan.

Si donc c_n rencontre $a'' b''$ en j points et c_y en i points, la surface engendrée sera d'ordre $4(4n - i - 2j)$ et admettra $a'' b''$ comme droite multiple d'ordre $2(4n - i - 2j)$, et c_y comme courbe multiple d'ordre $4n - i - 2j$. Deux courbes pareilles sont rencontrées simultanément par $(4n - i - 2j)(4n' - i' - 2j')$ cubiques Δ .

Comme il pourrait subsister quelque doute sur la valeur du raisonnement très général qui précède, nous allons en vérifier les principaux cas particuliers.

Si le point y décrit une courbe unicursale, ses coordonnées s'expriment rationnellement au moyen d'un seul paramètre; dès lors les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont fonctions entières, d'ordre $4n$, de ce paramètre, et le point α décrit, dans le plan (α), une courbe rationnelle d'ordre $4n$ douée donc de $\frac{1}{2}(4n - 1)(4n - 2)$ points doubles.

Pour $n = 3$, la surface engendrée est d'ordre 48, et il y a 55 cubiques Δ coupant deux fois une cubique donnée (n'ayant aucun point commun avec c_9 , ni avec $a''b''$).

Pour $n = 2$, la surface engendrée est d'ordre 32, et il y a 21 cubiques Δ coupant deux fois une conique donnée. Par exemple, si le cercle imaginaire de l'infini n'a aucun point commun avec c_9 , ni avec $a''b''$, il y a 21 cercles gauches parmi les cubiques Δ . Mais, si une conique c_2 coupe par exemple deux fois $a''b''$ et trois fois c_9 , ou une fois $a''b''$ et cinq fois c_9 , les cubiques Δ qui la rencontrent engendrent une surface D_4 ; et il n'y a qu'une cubique Δ qui rencontre à la fois deux coniques pareilles.

Pour $n = 1$, la surface engendrée est d'ordre 16; et il y a trois cubiques Δ qui ont pour bisécante une droite donnée indépendante de c_9 et de $a''b''$, résultat déjà annoncé plus haut. La surface d'ordre 16 est coupée $16n$ fois par une courbe plane ou gauche d'ordre n , indépendante de c_9 et de $a''b''$; donc la surface des cubiques Δ s'appuyant sur cette courbe d'ordre n est rencontrée $16n$ fois par une droite quelconque, et est donc d'ordre $16n$.

Voici encore des conséquences immédiates de ce qui précède: parmi les cubiques Δ qui s'appuient sur une courbe d'ordre n , il y en a $4n$ qui passent par un point donné de c_9 , $8n$ qui passent par un point donné de $a''b''$, $16n$ qui touchent $a''b''$.

Les cubiques Δ qui s'appuient sur une trisécante de c_9 engendrent, d'après ce qui précède, une surface D_4 ayant $a''b''$ comme droite double.

Deux trisécantes de c_9 ne sont jamais sur une même surface D_4 . En effet, supposons que cela soit possible, et considérons la quadrique ayant pour génératrices d'un même système la droite $a''b''$ et les deux trisécantes supposées d'abord sans point commun; cette quadrique coupe 18 fois c_9 , savoir six fois sur $a''b''$, six fois sur les deux trisécantes et encore en six autres points par chacun desquels il passe une génératrice du second système de la quadrique; ces six rayons percent chacun D_4 en trois points simples et un point double, de sorte que la surface D_4 contient neuf droites de la quadrique et la contient donc tout entière, ce qui est impossible. Si les deux trisécantes se coupaient, on démontrerait que leur plan appartient à la surface D_4 .

On prouve de la même manière qu'il ne peut exister deux quadrisécantes de c_9 , sans point commun; car elles seraient sur une même surface D_4 déterminée par deux points pris chacun sur une des quadrisécantes. Si deux quadrisécantes avaient un point commun hors de c_9 , elles feraient partie de la cubique Δ passant par ce point et celle-ci devrait se compléter par une droite coupant deux fois $a''b''$, ce qui est impossible.

S'il existe donc plus d'une quadrisécante de c_9 , deux d'entre elles doivent toujours se couper sur c_9 . Au surplus, l'existence même d'une quadrisécante (distincte de $a''b''$) reste indécise.

Nous avons vu que les cubiques Δ s'appuyant sur une droite donnée yz engendrent, en général, une surface du seizième ordre. Pour obtenir l'équation de cette surface, prenons les égalités (8) en intervertissant les rôles entre les lettres x et y , de façon

que nous ayons, en coordonnées x , les équations de la cubique Δ passant par le point y , accompagnée de la courbe c_y et de la bisécante singulière $a''b''$ comptée quatre fois. Puis remplaçons y_i par $y_i + k z_i$ et éliminons k : nous obtenons, après quelques calculs,

$$(9) \begin{vmatrix} [a_y(c_x b''_x)(f'_x b''_x)] & [a'_y(c_x b''_x)(f'_x b''_x)] & a''_y \\ [a_z(c_x b''_x)(f'_x b''_x)] & [a'_z(c_x b''_x)(f'_x b''_x)] & a''_z \\ [b_y(c_x b''_x)(f'_x b''_x)] & [b'_y(c_x b''_x)(f'_x b''_x)] & b''_y \\ [b_z(c_x b''_x)(f'_x b''_x)] & [b'_z(c_x b''_x)(f'_x b''_x)] & b''_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} [a_y(c_x b''_x)(f'_x b''_x)] & [a'_y(c_x b''_x)(f'_x b''_x)] & a''_y \\ [a_z(c_x b''_x)(f'_x b''_x)] & [a'_z(c_x b''_x)(f'_x b''_x)] & a''_z \\ [b_y(c_x b''_x)(f'_x b''_x)] & [b'_y(c_x b''_x)(f'_x b''_x)] & b''_y \\ [b_z(c_x b''_x)(f'_x b''_x)] & [b'_z(c_x b''_x)(f'_x b''_x)] & b''_z \end{vmatrix} = 0$$

et c'est l'équation d'une surface du seizième ordre.

Ses lignes singulières s'obtiennent en égalant à zéro la matrice des trois premières colonnes du déterminant (9). Écrivons cette matrice en changeant les lignes en colonnes,

$$(10) \begin{vmatrix} [a_y(c_x b''_x)(f'_x b''_x)] & [a'_y(c_x b''_x)(f'_x b''_x)] & [b_y(c_x b''_x)(f'_x b''_x)] & [b'_y(c_x b''_x)(f'_x b''_x)] \\ [a_z(c_x b''_x)(f'_x b''_x)] & [a'_z(c_x b''_x)(f'_x b''_x)] & [b_z(c_x b''_x)(f'_x b''_x)] & [b'_z(c_x b''_x)(f'_x b''_x)] \\ a''_y & a''_z & b''_y & b''_z \end{vmatrix} = 0.$$

D'après les relations (4), cette matrice (10) s'annule pour la courbe c_y comptée triple, et aussi pour la droite $a''b''$ comptée douze fois, car les points de cette droite annulent deux facteurs dans chaque élément des deux premières lignes de la matrice. Donc, comme les formules (10) représentent un système d'ordre 48, et que nous connaissons des lignes d'ordre 39 vérifiant ces formules, il reste un système du neuvième ordre formé des trois cubiques Δ qui ont pour bisécante la droite donnée $y\chi$. Ainsi nous contrôlons un résultat déjà indiqué et nous allons en trouver encore une autre vérification.

Bisécantes singulières de la congruence Δ .

Nous allons nous servir des résultats de notre Mémoire sur l'*Invariantologie de la cubique gauche* (Bull. de l'Acad. Roy. de Belgique, mai 1907) pour déterminer les trois cubiques Δ qui ont comme bisécante une droite donnée $y\chi$. D'après ce travail, les conditions pour que $y\chi$ soit bisécante de la cubique variable de la congruence Δ s'écrivent comme suit :

$$(11) \begin{vmatrix} \alpha_1 a_y + \alpha_2 c_y + \alpha_3 f_y & \alpha_1 b_y + \alpha_2 d_y + \alpha_3 g_y & \alpha_1 a_z + \alpha_2 c_z + \alpha_3 f_z & \alpha_1 b_z + \alpha_2 d_z + \alpha_3 g_z \\ \alpha_1 a'_y + \alpha_2 c'_y + \alpha_3 f'_y & \alpha_1 b'_y + \alpha_2 d'_y + \alpha_3 g'_y & \alpha_1 a'_z + \alpha_2 c'_z + \alpha_3 f'_z & \alpha_1 b'_z + \alpha_2 d'_z + \alpha_3 g'_z \\ a''_y & b''_y & a''_z & b''_z \end{vmatrix} = 0.$$

Il faut résoudre par rapport à $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$ pour avoir les cubiques cherchées, et il y a visiblement trois solutions. Ainsi, comme nous l'avons déjà trouvé, *il y a trois cubiques Δ ayant pour bisécante une droite donnée*. Ce qui s'exprime encore en disant que la congruence Δ est de troisième classe.

On appelle bisécante singulière une droite qui est bisécante d'une infinité simple de cubiques Δ .

Si $y\lambda$ est une droite pareille, les équations (11) doivent être satisfaites pour une infinité de valeurs de $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$. Or les déterminants extraits de cette matrice (11) représentent des coniques en α et, pour que des coniques aient une infinité de points communs, il faut qu'elles coïncident entre elles, ou bien qu'elles dégénèrent toutes en ayant une droite commune. Nous montrerons plus loin que la première alternative est la moins fréquente et que la seconde contient la première comme cas limite.

Remarquons en passant que nous sommes ici en présence d'un problème d'algèbre très important et non encore résolu, croyons-nous : à combien de conditions doit satisfaire une matrice de formes algébriques pour que son évanouissement représente une variété supérieure à celle qui annule la matrice dans le cas général?

Nous n'avons pas trouvé la réponse à cette question difficile, mais nous pouvons traiter le cas particulier dont nous avons besoin ici.

Dans le plan (α), prenons respectivement, sur les droites $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = 0$, deux points, de coordonnées

$$1, X, 0, \quad \text{et} \quad 1, 0, Y;$$

en faisant varier X et Y , nous amenons la droite qui joint ces deux points en coïncidence avec toutes les droites du plan. Un point d'une de ces droites a pour coordonnées

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = (1 + k) : X : kY.$$

Si la matrice (11) s'annule pour une infinité de points, toute droite (XY) doit contenir au moins un de ces points; de sorte qu'en substituant à $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, les expressions $1 + k, X, kY$, dans la matrice (11), on obtient une matrice qui doit s'annuler pour *une* valeur de k *au moins*, quels que soient X et Y . Faisons cette substitution et, pour la commodité, changeons les lignes en colonnes :

$$(12) \quad \left\| \begin{array}{ccc} a_y + Xc_y + k(a_y + Yf_y) & a'_y + Xc'_y + k(a'_y + Yf'_y) & a''_y \\ b_y + Xd_y + k(b_y + Yg_y) & b'_y + Xd'_y + k(b'_y + Yg'_y) & b''_y \\ a_{\lambda} + Xc_{\lambda} + k(a_{\lambda} + Yf_{\lambda}) & a'_{\lambda} + Xc'_{\lambda} + k(a'_{\lambda} + Yf'_{\lambda}) & a''_{\lambda} \\ b_{\lambda} + Xd_{\lambda} + k(b_{\lambda} + Yg_{\lambda}) & b'_{\lambda} + Xd'_{\lambda} + k(b'_{\lambda} + Yg'_{\lambda}) & b''_{\lambda} \end{array} \right\| = 0.$$

La condition pour que ces équations soient satisfaites pour *une valeur au moins* de k s'obtient en éliminant k ; les conditions pour que ces relations soient vérifiées par *deux* valeurs de k impliquent la précédente, comme nous le vérifierons encore plus tard d'ailleurs.

Nous obtenons donc les conditions *générales* pour que la matrice (11) s'annule pour une infinité de points α , en exprimant qu'elle s'annule pour une *droite* de points, donc en exprimant que, pour certaines valeurs de X et Y , la matrice (12) s'annule pour toute valeur de k . Lorsqu'il en est ainsi, la matrice (12) s'annule pour les trois valeurs $k = 0, k = \infty, k = -1$; et réciproquement, si la matrice s'annule pour ces trois valeurs, les déterminants que l'on en extrait et qui sont des fonctions quadratiques de k , ont trois racines et, par suite, en ont une infinité.

Faisons $k = 0$: nous obtenons une matrice dont deux colonnes sont linéaires en

X et d'où l'on tire, sans peine,

$$(13) \quad -X = |a_y a'_y c'_y a''_y| : |c_y a'_y c'_y a''_y| = |a_y c_y a'_y a''_y| : |a_y c_y c'_y a''_y|;$$

nous n'avons écrit que la première ligne de chaque déterminant.

En faisant $k = \infty$, on obtient un résultat analogue :

$$(14) \quad -Y = |a_y a'_y f'_y a''_y| : |f_y a'_y f'_y a''_y| = |a_y f_y a'_y a''_y| : |a_y f_y f'_y a''_y|.$$

Enfin, en faisant $k = -1$ et en remplaçant X et Y par les valeurs déjà trouvées, on a deux nouvelles conditions dont l'une est une conséquence des précédentes. En effet, pour $k = -1$, les équations (12) donnent, en abrégé et après réduction,

$$(15) \quad ||Xc_y - Yf_y \quad Xc'_y - Yf'_y \quad a''_y|| = 0;$$

or les équations (12), où l'on a fait $k = 0$ et $k = \infty$, expriment que l'on a, pour des paramètres convenables μ , ν et μ' , ν' , la relation

$$(16) \quad a_y + Xc_y + \mu a'_y + \mu Xc'_y + \nu a''_y = 0$$

et trois analogues, ainsi que la relation

$$(17) \quad a_y + Yf_y + \mu' a'_y + \mu' Yf'_y + \nu' a''_y = 0$$

et trois analogues; d'où, par soustraction, l'égalité

$$(18) \quad Xc_y - Yf_y + (\mu - \mu') a'_y + \mu Xc'_y - \mu' Yf'_y + (\nu - \nu') a''_y = 0$$

et trois analogues. Ces relations entraînent les conditions (15) si l'on a $\mu = \mu'$; or si l'un des déterminants extraits de la matrice (15) est nul, trois des équations (18) sont satisfaites pour $\mu = \mu'$; en les combinant avec trois des équations (16), on en conclut que trois des équations (17) sont satisfaites pour $\mu' = \mu$ et comme, en général, ces trois relations (17) ne sont vérifiées que pour un système de paramètres (μ', ν') , il en résulte enfin que les quatre relations (17) et, par suite, les quatre équations (18) sont satisfaites pour $\mu = \mu'$.

Les formules (15) peuvent donc être remplacées par l'évanouissement d'un des déterminants extraits de cette matrice ou par une combinaison de ces déterminants; par exemple on fera précéder la matrice (15) d'une colonne Xc_y et l'on aura, en divisant par X et Y ,

$$|c_y \quad -f_y \quad (Xc'_y - Yf'_y) \quad a''_y| = 0$$

ou

$$X|c_y \quad c'_y \quad f_y \quad a''_y| = -Y|c_y \quad f_y \quad f'_y \quad a''_y|.$$

On aurait pu décomposer de même la seconde colonne de la matrice (15), ce qui aurait donné

$$X|c_y \quad c'_y \quad f_y \quad a''_y| = -Y|c'_y \quad f_y \quad f'_y \quad a''_y|.$$

En divisant, membre à membre, les deux dernières égalités, on trouve

$$(19) \quad \frac{|c_y \quad c'_y \quad f_y \quad a''_y|}{|c_y \quad c'_y \quad f'_y \quad a''_y|} = \frac{|c_y \quad f_y \quad f'_y \quad a''_y|}{|c'_y \quad f_y \quad f'_y \quad a''_y|}.$$

Les équations (13), (14), (19) représentent, en coordonnées de droites $(y_i z_k - y_k z_i)$, trois complexes du quatrième ordre. La surface commune à ces trois complexes est la surface engendrée par les bisécantes singulières de la congruence Δ .

La congruence Δ possède une infinité simple de bisécantes singulières; elles forment une surface réglée commune à trois complexes du quatrième ordre pour chacun desquels la droite $a''b''$ est un rayon double.

Nous avons différé l'examen du cas où la matrice (12) s'annule pour deux valeurs de k . Nous y procédons à présent.

Deux déterminants quelconques extraits de cette matrice (12) sont des fonctions quadratiques de k et n'ont leurs deux racines communes que si leurs trois coefficients sont proportionnels. Or, en comparant les termes extrêmes de ces trinômes, on trouve d'abord

$$\frac{|a_y + Xc_y \quad a'_y + Xc'_y \quad a''_y|_i}{|a_y + Yf_y \quad a'_y + Yf'_y \quad a''_y|_i} = \text{constante} \quad (i = 1, 2, 3, 4);$$

l'indice i indique que l'on doit prendre les quatre lignes de la matrice (12), *sauf* celle de rang i .

En faisant successivement $i = 1, 2, 3, 4$, on a quatre rapports égaux, et, en multipliant leurs termes par des éléments tels que $a_y + Xc_y$, etc. et en additionnant, on voit s'évanouir identiquement le numérateur et, par suite, le dénominateur, ou inversement; on constate ainsi que les déterminants extraits de la matrice suivante, en prenant toujours la dernière colonne, sont tous nuls:

$$(20) \quad \begin{vmatrix} a_y + Xc_y & a'_y + Xc'_y & a_y + Yf_y & a'_y + Yf'_y & a''_y \end{vmatrix}.$$

Donc, ou bien cette matrice est nulle, ou bien l'on a $a''_y = b''_y = a''_x = b''_x = 0$, ce qui représente la bisécante principale $a''b''$.

Ensuite, lorsque cette matrice (20) est nulle, les déterminants que l'on en extrait le sont aussi, et les mineurs relatifs aux éléments correspondants de deux colonnes quelconques de ces déterminants sont proportionnels: par exemple

$$|a_y + Xc_y \quad a'_y + Yf'_y \quad a''_y|_i = |a_y + Xc_y \quad a'_y + Xc'_y \quad a''_y|_i \times \text{constante},$$

$$|a_y + Yf_y \quad a'_y + Xc'_y \quad a''_y|_i = |a_y + Xc_y \quad a'_y + Xc'_y \quad a''_y|_i \times \text{constante},$$

d'où, par addition,

$$\begin{aligned} & |a_y + Xc_y \quad a'_y + Yf'_y \quad a''_y|_i + |a_y + Yf_y \quad a'_y + Xc'_y \quad a''_y|_i \\ & = |a_y + Xc_y \quad a'_y + Xc'_y \quad a''_y|_i \times \text{constante}, \end{aligned}$$

ce qui exprime que les trinômes quadratiques en k extraits de la matrice (12) ont même somme de racines et, comme ils avaient déjà même produit de racines, ils ont même système de racines. L'évanouissement de la matrice (20) est donc une condition suffisante; seulement elle doit se réaliser quels que soient X et Y , de sorte que l'on doit avoir

$$(21) \quad \begin{vmatrix} a_y & c_y & f_y & a'_y & c'_y & f'_y & a''_y \\ b_y & d_y & g_y & b'_y & d'_y & g'_y & b''_y \\ a_x & c_x & f_x & a'_x & c'_x & f'_x & a''_x \\ b_x & d_x & g_x & b'_x & d'_x & g'_x & b''_x \end{vmatrix} = 0.$$

Ces équations, au nombre de quatre, déterminent un nombre fini de bisécantes

singulières; mais celles-ci appartiennent aussi à la surface réglée précédemment découverte, car elles vérifient les équations (13), (14) et (19) dont elles annulent tous les déterminants.

Pour une bisécante singulière, nous avons vu plus haut que les cubiques qui la rencontrent correspondent en général à des points α en ligne droite. Donc ces cubiques engendrent une surface D_4 ayant $a''b''$ pour droite double et c_y comme courbe simple.

Une de ces cubiques, c_y , par exemple, est sur un faisceau de surfaces D_4 ; la bisécante singulière perce une quelconque de ces surfaces en quatre points du système de lignes formant la base du faisceau; deux de ces points sont sur la cubique c_y , donc les deux autres sont sur c_y , car il ne peut y en avoir aucun sur $a''b''$, puisque la cubique c_y aurait alors deux bisécantes dans un même plan.

Ainsi, les bisécantes singulières de la congruence Δ sont des bisécantes de la courbe c_y .

Mais les cubiques Δ qui s'appuient sur une bisécante de c_y engendrent, en général, une surface du huitième ordre, et répondent à des points d'une conique du plan (α); quand cette conique dégénère en deux droites, les cubiques Δ engendrent deux surfaces D_4 ; seulement ces deux surfaces doivent coïncider, car la conique du plan (α) répondant à une droite bisécante de c_y est, nous l'avons vu plus haut, une courbe rationnelle du second ordre, et l'on sait qu'une telle courbe ne peut jamais dégénérer en deux droites distinctes, mais seulement en deux droites coïncidentes.

Les cubiques Δ qui s'appuient sur une bisécante de c_y répondent à une conique du plan (α); pour une infinité simple de bisécantes de c_y , cette conique du plan (α) se réduit à une droite; les bisécantes en question sont les bisécantes singulières de la congruence Δ .

Complexe des tangentes aux cubiques Δ .

Nous avons établi précédemment les équations

$$(8) \quad \begin{vmatrix} [a_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] & [a'_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] & a''_x \\ [b_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] & [b'_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] & b''_x \end{vmatrix} = 0;$$

elles représentent la cubique Δ passant par le point y . Le réseau de quadriques circonscrites est représenté par

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ [a_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] & [a'_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] & a''_x \\ [b_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] & [b'_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] & b''_x \end{vmatrix} = 0.$$

Le plan polaire du point y relatif à une de ces quadriques a pour équation

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ [a_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] & [a'_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] & a''_x \\ [b_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] & [b'_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] & b''_x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ [b_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] & [b'_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] & b''_x \\ [a_y(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] & [a'_y(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] & a''_y \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore, après un calcul facile,

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ [a_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] b''_y & [a'_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] b''_y & a''_x b''_y \\ [b_y(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] a''_y & [b'_y(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] a''_y & a''_y b''_y \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ [b_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] a''_y & [b'_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] a''_y & a''_y b''_x \\ [a_y(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] b''_y & [a'_y(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] b''_y & a''_y b''_y \end{vmatrix} = 0.$$

Comme le point y appartient à la cubique Δ considérée, les dernières lignes de ces deux déterminants sont identiques; l'équation du plan polaire s'obtient donc sous forme d'un seul déterminant en soustrayant, chacun à chacun, les éléments des secondes lignes; l'axe du faisceau de plans polaires rend proportionnelles les deux dernières lignes de ce nouveau déterminant; la dernière peut être débarrassée du facteur b''_y (si on lui conserve la forme qu'elle a dans le second déterminant ci-dessus). Finalement les équations de la tangente en y à la cubique Δ menée par ce point prennent la forme suivante (pour la commodité, on change les lignes en colonnes):

$$(22) \quad \left\| \begin{array}{cc} [a_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] b''_y - [b_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] a''_y & [a_y(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] \\ [a'_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] b''_y - [b'_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] a''_y & [a'_y(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] \\ a''_x b''_y - b''_x a''_y & a''_y \end{array} \right\| = 0.$$

Le déterminant $[a_y(c_y b''_y)(f'_y b''_y)]$ qui figure dans cette matrice s'écrit *in extenso*:

$$\begin{vmatrix} a_y & a_y b''_y - a''_y b_y & a'_y b''_y - a''_y b'_y \\ c_y & c_y b''_y - a''_y d_y & c'_y b''_y - a''_y d'_y \\ f_y & f_y b''_y - a''_y g_y & f'_y b''_y - a''_y g'_y \end{vmatrix},$$

ou, après simplification, en n'écrivant que la première ligne:

$$- a''_y |a_y \quad b_y \quad a'_y b''_y - a''_y b'_y| \equiv a''_y \{a''_y |a_y \quad b_y \quad b'_y| - b''_y |a_y \quad b_y \quad a'_y|\}.$$

La même simplification réussit pour l'élément $[a'_y(c_y b''_y)(f'_y b''_y)]$ de la matrice (22), et alors on peut diviser, par a''_y , la seconde colonne de cette matrice.

En regardant à présent les y comme les coordonnées courantes et x comme un point fixe, on voit que la matrice (22) simplifiée s'annule pour un système de courbes appartenant à la base d'un faisceau de surfaces quintiques; mais on reconnaît que la droite $a'' b''$ est double sur chacune de ces surfaces et que la courbe c_y appartient à chacune d'elles comme droite simple.

Donc, le lieu des points de contact y des tangentes que l'on peut mener aux cubiques Δ par un point fixe x est une courbe gauche du douzième ordre.

On peut procéder aux éliminations d'une manière un peu différente: les quadriques circonscrites à la cubique

$$\left\| \begin{array}{ccc} a_x & a'_x & a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{array} \right\| = 0$$

ont pour équation

$$|\lambda \quad a_x \quad b_x| = 0;$$

les plans polaires d'un point y relatifs à ces quadriques ont pour équation

$$(23) \quad |\lambda \ a_y \ b_x| + |\lambda \ a_x \ b_y| = 0.$$

Mais, si le point y appartient à la cubique considérée, on a

$$a_y = \omega_1 b_y, \quad a'_y = \omega_1 b'_y, \quad a''_y = \omega_1 b''_y,$$

et l'équation (23) devient successivement

$$\begin{aligned} \left| \lambda \ \frac{a_y}{\omega_1} \ \omega_1 b_x \right| + |\lambda \ a_x \ b_y| &= 0, \\ |\lambda \ b_y \ \omega_1 b_x| - |\lambda \ b_y \ a_x| &= 0, \\ |\lambda \ a_x - \omega_1 b_x \ b_y| &= 0. \end{aligned}$$

Les plans tangents à la cubique considérée au point y sont représentés par cette dernière équation et forment un faisceau dont l'axe est

$$|a_x - \omega_1 b_x \ b_y| = 0.$$

Ces équations représentent donc la tangente menée, à la cubique considérée, au point y de paramètre ω_1 . Or la matrice que l'on vient d'écrire donne lieu aux relations suivantes, en introduisant les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$(24) \quad \begin{cases} \alpha_1 a_x + \alpha_2 c_x + \alpha_3 f_x - \omega_1 \alpha_1 b_x - \omega_1 \alpha_2 d_x - \omega_1 \alpha_3 g_x + \omega \alpha_1 b_y + \omega \alpha_2 d_y + \omega \alpha_3 g_y = 0, \\ \alpha_1 a'_x + \alpha_2 c'_x + \alpha_3 f'_x - \omega_1 \alpha_1 b'_x - \omega_1 \alpha_2 d'_x - \omega_1 \alpha_3 g'_x + \omega \alpha_1 b'_y + \omega \alpha_2 d'_y + \omega \alpha_3 g'_y = 0, \\ a''_x - \omega_1 b''_x + \omega b_y = 0; \end{cases}$$

il faut y joindre les égalités suivantes exprimant que le point y appartient à la cubique considérée:

$$(25) \quad \begin{cases} \alpha_1 a_y + \alpha_2 c_y + \alpha_3 f_y - \omega_1 \alpha_1 b_y - \omega_1 \alpha_2 d_y - \omega_1 \alpha_3 g_y = 0, \\ \alpha_1 a'_y + \alpha_2 c'_y + \alpha_3 f'_y - \omega_1 \alpha_1 b'_y - \omega_1 \alpha_2 d'_y - \omega_1 \alpha_3 g'_y = 0, \\ a''_y - \omega_1 b''_y = 0. \end{cases}$$

On tire de là, d'abord

$$\omega_1 = \frac{a''_y}{b''_y}, \quad -\omega = \frac{a''_x b''_y - a''_y b''_x}{(b''_y)^2};$$

puis la substitution dans les autres équations (24) et (25) donne, en abrégéant un peu,

$$\begin{aligned} \alpha_1 [(a_x b''_y) b''_y - (a''_x b''_y) b_y] + \alpha_2 [(c_x b''_y) b''_y - (a''_x b''_y) d_y] + \alpha_3 [(f_x b''_y) b''_y - (a''_x b''_y) g_y] &= 0, \\ \alpha_1 [(a'_x b''_y) b''_y - (a''_x b''_y) b'_y] + \alpha_2 [(c'_x b''_y) b''_y - (a''_x b''_y) d'_y] + \alpha_3 [(f'_x b''_y) b''_y - (a''_x b''_y) g'_y] &= 0, \\ \alpha_1 (a_y b''_y) + \alpha_2 (c_y b''_y) + \alpha_3 (f_y b''_y) &= 0, \\ \alpha_1 (a'_y b''_y) + \alpha_2 (c'_y b''_y) + \alpha_3 (f'_y b''_y) &= 0. \end{aligned}$$

L'élimination de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ donne une matrice qui, en coordonnées y représente un ensemble de lignes. Cette matrice se simplifie si l'on ajoute la troisième et la quatrième ligne multipliées par b''_x , respectivement à la première et à la seconde; le facteur b''_y apparaît alors dans tous les éléments des deux premières lignes et, en le supprimant, on obtient

$$(26) \quad \left\| \begin{array}{ccc} a_x b''_y - b_x a''_y - a''_x b_y + b''_x a_y & c_x b''_y - d_x a''_y - a''_x d_y + b''_x c_y & f_x b''_y - g_x a''_y - a''_x g_y + b''_x f_y \\ a'_x b''_y - b'_x a''_y - a''_x b'_y + b''_x a'_y & c'_x b''_y - d'_x a''_y - a''_x d'_y + b''_x c'_y & f'_x b''_y - g'_x a''_y - a''_x g'_y + b''_x f'_y \\ a_y b''_y - a''_y b_y & c_y b''_y - a''_y d_y & f_y b''_y - a''_y g_y \\ a'_y b''_y - a''_y b'_y & c'_y b''_y - a''_y d'_y & f'_y b''_y - a''_y g'_y \end{array} \right\| = 0.$$

Une énumération facile montre que cette formule représente, en coordonnées y , une courbe du douzième ordre accompagnée de la droite $a''b''$ comptée simple.

La courbe lieu des contacts des tangentes que l'on peut mener d'un point x aux cubiques Δ étant du douzième degré et passant visiblement par le point x même, le cône qui la projette du point x est du onzième ordre. Tel est donc aussi l'ordre du complexe des tangentes aux cubiques de la congruence Δ .

On pourrait, comme nous l'avons fait pour d'autres congruences, chercher l'équation de ce cône, ainsi que ses génératrices singulières, lesquelles sont des rayons singuliers du complexe des tangentes.

Car toute droite étant, en général, bisécante de trois cubiques Δ , il arrive pour ∞^2 droites qu'elles sont touchées par deux des trois cubiques. Nous attirons l'attention sur cette congruence de rayons doubles du complexe des tangentes. Leur étude paraît difficile, étant donné les moyens de représentation dont on dispose.

De plus, les bisécantes singulières que nous avons étudiées plus haut sont aussi des rayons doubles du complexe des tangentes. En effet, les appuis des ∞^1 cubiques Δ qui admettent pour bisécante une droite pareille forment une involution qui a deux points doubles répondant à deux cubiques tangentes à la bisécante considérée.

Nous croyons aussi que la représentation des plans tangents et des plans osculateurs aux cubiques de la congruence Δ donneront lieu à des calculs trop incommodés pour présenter quelque intérêt.

Bisécantes issues d'un point quelconque.

Projetons la cubique

$$\begin{vmatrix} a_x & a'_x & a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{vmatrix} = 0$$

du point y , ce qui se fait en substituant $y_i + kx_i$ à x_i et ce qui donne

$$(27) \quad \begin{vmatrix} a_y + ka_x & a'_y + ka'_x & a''_y + ka''_x \\ b_y + kb_x & b'_y + kb'_x & b''_y + kb''_x \end{vmatrix} = 0.$$

Ces relations équivalent encore aux suivantes :

$$(28) \quad \begin{cases} a_y + ka_x + \omega b_y + \omega kb_x = 0, \\ a'_y + ka'_x + \omega b'_y + \omega kb'_x = 0, \\ a''_y + ka''_x + \omega b''_y + \omega kb''_x = 0. \end{cases}$$

Si le point y est sur la cubique considérée, c'est-à-dire si l'on a

$$a_y = \omega_1 b_y, \quad a'_y = \omega_1 b'_y, \quad a''_y = \omega_1 b''_y,$$

les équations (28) deviennent

$$(\omega_1 + \omega)b_y + ka_x + \omega kb_x = 0$$

et deux analogues; l'élimination de $\omega_1 + \omega$, k , ωk donne, pour l'équation du cône

cherché

$$|a_x \ b_x \ b_y| = 0.$$

[Si y n'était pas un point de la cubique considérée, cette équation représenterait la quadrique circonscrite à cette cubique et déterminée par la droite unisécante qui joint le point y au point $(bb'b'')$ de la courbe].

Dans l'équation précédente introduisons les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, ce qui donne

$$|\alpha_1 a_x + \alpha_2 c_x + \alpha_3 f_x \ \alpha_1 b_x + \alpha_2 d_x + \alpha_3 g_x \ \alpha_1 b_y + \alpha_2 d_y + \alpha_3 g_y| = 0;$$

puis remplaçons $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ par les expressions (3') où nous remplaçons x par y ; enfin, pour la commodité, changeons les lignes du déterminant en colonnes, et nous obtenons :

$$(29) \quad \begin{vmatrix} [a_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] & [a'_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] & a''_x \\ [b_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] & [b'_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] & b''_x \\ [b_y(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] & [b'_y(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] & b''_y \end{vmatrix} = 0.$$

En coordonnées x c'est l'équation du cône de sommet y perspectif à la cubique qui passe par ce point y . Ou bien c'est la condition pour qu'un point y soit à la fois sur une cubique gauche Δ et sur une bisécante passant par le point x . Donc, en coordonnées y , l'équation (29) représente le lieu des points de rencontre des cubiques Δ avec les bisécantes qu'on peut leur mener du point x .

Visiblement cette surface passe par le système de courbes annulant la matrice (22), et l'on peut faire subir à la dernière ligne du déterminant (29) la même simplification qui a été opérée pour la dernière colonne de la matrice (22). Après cette simplification on obtient

$$T_8 \equiv \begin{vmatrix} [a_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] & [a'_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] & a''_x \\ [b_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] & [b'_x(c_y b''_y)(f'_y b''_y)] & b''_x \\ a''_y |a_y \ b_y \ b'_y| - b''_y |a_y \ b_y \ a'_y| & a''_y |a'_y \ b_y \ b'_y| - b''_y |a'_y \ a_y \ b'_y| & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Le lieu des points de rencontre des cubiques Δ avec les bisécantes qu'on peut leur mener d'un point donné x est une surface du huitième ordre T_8 ayant le point donné pour point double et circonscrite à la courbe c_{12} lieu des contacts des tangentes menées de x aux cubiques Δ . Cette surface T_8 admet la courbe singulière c_9 et la droite $a''b''$ comme lignes doubles.

Quand une congruence de cubiques gauches est de première classe et que l'on veut obtenir le lieu du conjugué d'un point fixe x par rapport à toutes ces cubiques, il suffit évidemment de chercher la première polaire de ce point x relative à la surface lieu des points de rencontre des cubiques de la congruence avec les bisécantes qu'on peut leur mener du point x .

Mais ici comme la congruence Δ est de troisième classe, cette méthode ne réussit pas, et l'on doit employer quelque autre procédé, par exemple celui que nous avons exposé dans notre *Étude de quelques surfaces algébriques* (p. 59) et que nous appliquons maintenant.

Trois des quadriques circonscrites à la cubique

$$\begin{vmatrix} a_x & a'_x & a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \end{vmatrix} = 0$$

ont pour équations

$$a_x b'_x - a'_x b_x = 0, \quad a_x b''_x - a''_x b_x = 0, \quad a'_x b''_x - a''_x b'_x = 0.$$

Les plans polaires de y relatifs à ces quadriques sont

$$(30) \quad \begin{cases} a_y b'_x - a'_y b_x + a_x b'_y - a'_x b_y = 0, \\ a_y b''_x - a''_y b_x + a_x b''_y - a''_x b_y = 0, \\ a'_y b''_x - a''_y b'_x + a'_x b''_y - a''_x b'_y = 0. \end{cases}$$

Le point x commun à ces trois plans est le conjugué de y par rapport à la cubique considérée. Pour avoir le lieu de ce point pour toutes les cubiques Δ , il faut introduire les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ dans les équations (30) puis les en éliminer. Les deux dernières de ces équations deviennent

$$\begin{aligned} \alpha_1 (a_y b'_x - a'_y b_x + a_x b'_y - a'_x b_y) + \alpha_2 (c_y b''_x - a''_y d_x + c_x b''_y - a''_x d_y) \\ + \alpha_3 (f_y b''_x - a''_y g_x + f_x b''_y - a''_x g_y) = 0, \\ \alpha_1 (a'_y b''_x - a''_y b'_x + a'_x b''_y - a''_x b'_y) + \alpha_2 (c'_y b''_x - a''_y d'_x + c'_x b''_y - a''_y d'_y) \\ + \alpha_3 (f'_y b''_x - a''_y g'_x + f'_x b''_y - a''_x g'_y) = 0. \end{aligned}$$

Par contre, la première des équations (30) est quadratique en α . Si l'on y remplace $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ par les valeurs que l'on tire des deux dernières relations écrites, on obtient une équation symétrique en x et en y , du cinquième degré en chacune de ces séries de variables, et représentant, en coordonnées x , la surface lieu des points conjugués du point y par rapport aux cubiques Δ , ou réciproquement, en coordonnées y , la surface lieu des points conjugués du point fixe x . Dans cette *liaison*, à tout point x (ou y) répond une surface du cinquième ordre ayant pour point double le point considéré.

Nous passons sous silence l'étude des ∞^2 triangles déterminés, dans un plan fixe, par les cubiques de la congruence Δ . Ces triangles forment ce que l'on pourrait appeler une *involution*, chacun d'eux étant déterminé par un de ses sommets. Les équations de cette involution ne sont autres que celles de la congruence Δ elle-même où les formes algébriques sont supposées *ternaires*, en x_1, x_2, x_3 par exemple, si le plan fixe est choisi comme face $x_4 = 0$ du tétraèdre de référence. Diverses questions se présentent (que nous avons résolues pour d'autres congruences de cubiques) notamment le lieu des points doubles et le nombre des points triples de ces ∞^2 ternes de points, la correspondance existant entre un sommet et le côté opposé de chaque triangle, etc. Nous renvoyons à un autre travail l'examen de ces questions.

Nous terminerons par quelques mots relatifs à des cas particuliers de la congruence Δ .

Cas particulier de la congruence Δ .

Si dans les équations de la congruence Δ , on suppose identiquement nulles les formes f_x, g_x, c'_x, d'_x , on se trouve dans un cas particulier remarquable: le système

de courbes constitue alors une des deux congruences linéo-linéaires de M. VENERONI. Nous désignons ce cas particulier sous le nom de *congruence V*.

Ses propriétés se déduisent immédiatement de celles de la congruence Δ , ou bien elles se démontrent d'une manière analogue; et comme elles sont connues, au moins en partie, il nous sera permis d'être très concis dans ce paragraphe.

La congruence V est représentée par les équations

$$(31) \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 a_x + \alpha_2 c_x & \alpha_1 a'_x + \alpha_3 f'_x & a''_x \\ \alpha_1 b_x + \alpha_2 d_x & \alpha_1 b'_x + \alpha_3 g'_x & b''_x \end{vmatrix} = 0.$$

La droite $a''b''$ est encore une bisécante principale, c'est-à-dire une bisécante de toutes les ∞^2 cubiques V .

Des équations (31) on peut tirer, en général,

$$(32) \quad \begin{cases} \alpha_1 : \alpha_2 = (c_x b''_x - a''_x d_x) : -(a_x b''_x - a''_x b_x), \\ \alpha_1 : \alpha_3 = (f'_x b''_x - a''_x g'_x) : -(a'_x b''_x - a''_x b'_x). \end{cases}$$

Les deux rapports $\alpha_1 : \alpha_2$ et $\alpha_1 : \alpha_3$ sont indéterminés si l'on a $a''_x = b''_x = 0$, ce qui nous ramène à la bisécante principale. Mais le rapport $\alpha_1 : \alpha_2$ est seul indéterminé si l'on a

$$(33) \quad \begin{vmatrix} a_x & c_x & a''_x \\ b_x & d_x & b''_x \end{vmatrix} = 0,$$

sans que a''_x et b''_x soient tous deux nuls. Et de même $\alpha_1 : \alpha_3$ est indéterminé si l'on a

$$(34) \quad \begin{vmatrix} a'_x & f'_x & a''_x \\ b'_x & g'_x & b''_x \end{vmatrix} = 0.$$

Les formules (33) et (34) représentent respectivement deux cubiques gauches γ_3 et γ'_3 constituant, avec la droite $a''b''$, le lieu des points singuliers de la congruence V .

Si un point y est sur la cubique γ_3 , le rapport $\alpha_1 : \alpha_2$ est bien indéterminé, mais $\alpha_1 : \alpha_3$ a une valeur déterminée, k par exemple, de sorte que les ∞^1 points α , répondant à ce point singulier y , décrivent, dans le plan (α) , la droite $\alpha_1 = k\alpha_3$; et les cubiques V correspondantes engendrent la quadrique

$$(35) \quad \begin{vmatrix} k a'_x + f'_x & a''_x \\ k b'_x + g'_x & b''_x \end{vmatrix} = 0$$

ayant pour génératrice $a''b''$ et passant par la cubique singulière γ'_3 ; cette quadrique coupe la cubique γ_3 en six points dont deux sur $a''b''$ et quatre en dehors.

On voit aussi que, par deux points, l'un sur γ_3 et l'autre sur γ'_3 , il passe en général une cubique V et une seule.

Dans le plan (α) il y a deux points singuliers: 1° le point $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ auquel répondent ∞^1 cubiques V engendrant la quadrique

$$f'_x b''_x - g'_x a''_x = 0$$

circonscrite à la cubique singulière γ'_3 ; 2° le point $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ auquel répondent ∞^1

cubiques V engendrant la quadrique

$$c_x b''_x - d_x a''_x = 0$$

circonscrite à γ_3 .

Tous les points de la droite $\alpha_1 = 0$ du plan α donnent la même cubique V , savoir celle qui a pour équations

$$\begin{vmatrix} c_x & f'_x & a''_x \\ d_x & g'_x & b''_x \end{vmatrix} = 0.$$

Par un point y de $a''b''$ passent ∞^1 cubiques V . Les valeurs de $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$, qui y répondent décrivent, dans le plan (α) , la conique

$$(C) \equiv |\alpha_1 a_y + \alpha_2 c_y \quad \alpha_1 a'_y + \alpha_3 f'_y| = 0$$

qui passe par les deux points singuliers du plan (α) et à laquelle répond une surface du quatrième ordre; car, en remplaçant $\alpha_1 : \alpha_2$ et $\alpha_1 : \alpha_3$ par les valeurs trouvées précédemment (32), on obtient

$$(36) \quad \begin{vmatrix} a_y & a_x & b_x \\ c_y & c_x & d_x \\ \cdot & a''_x & b''_x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a'_y & a'_x & b'_x \\ f'_y & f'_x & g'_x \\ \cdot & a''_x & b''_x \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} b_y & a_x & b_x \\ d_y & c_x & d_x \\ \cdot & a''_x & b''_x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b'_y & a'_x & b'_x \\ g'_y & f'_x & g'_x \\ \cdot & a''_x & b''_x \end{vmatrix}$$

On peut, sans changer la valeur de ce déterminant, remplacer les éléments nuls de la première ligne par a''_y et ceux de la seconde par b''_y , puisque le point y est, par hypothèse, sur $a''b''$; on aurait ainsi une formule plus symétrique.

L'équation (36) représente une surface du quatrième ordre ayant $a''b''$ pour droite double, le point y pour point triple, et passant par les cubiques γ_3 et γ'_3 .

Voici quelques corollaires faciles: il existe une seule cubique V passant par un point donné y de $a''b''$ et y touchant un plan donné mené par $a''b''$;—il existe une seule cubique V passant par un point donné y de $a''b''$ et touchant, en un autre point de $a''b''$, un plan donné mené par cette droite; — par deux points donnés de $a''b''$, il passe deux cubiques V .

Les coniques (C) du plan (α) enveloppent une courbe (Q) du quatrième ordre, ayant deux nœuds aux points singuliers du plan. Chaque conique (C) a deux points caractéristiques; donc il y a deux cubiques V touchant $a''b''$ en un point donné.

Il y a une cubique V passant par un point donné de γ_3 (ou γ'_3) et par un point donné de $a''b''$. — Il y a deux cubiques V passant par un point donné de γ_3 (ou γ'_3) et touchant $a''b''$. Etc.

On trouve aisément, dans les formules représentatives de la congruence V , la génération géométrique donnée par M. VENERONI: deux quadriques variables,

$$|\alpha_1 a_x + \alpha_2 c_x \quad a''_x| = 0, \quad |\alpha_1 a'_x + \alpha_3 f'_x \quad a''_x| = 0,$$

passent, l'une par une cubique γ_3 et l'autre par une cubique γ'_3 , et toutes deux par une bisécante commune à ces deux courbes; elles se coupent deux à deux suivant les cubiques V .

Par suite, une cubique V quelconque et une des cubiques singulières sont situées sur une même quadrique et ont pour bisécante une même génératrice de cette surface; on sait que deux courbes pareilles ont quatre points communs.

A présent, les cubiques V passant par un point y de γ_3 sont, avons-nous dit, sur une quadrique passant par γ'_3 et cette surface coupe γ_3 en quatre points seulement extérieurs à $a''b''$. Donc toutes les cubiques V qui passent par un point fixe de γ_3 passent par trois autres points fixes de γ_3 . Les groupes de quatre points déterminés ainsi, sur une cubique singulière, par les cubiques V , forment une involution du quatrième ordre et du premier rang. Par suite il y a six faisceaux de cubiques V qui touchent chaque cubique singulière.

Tout ceci suppose les cubiques γ_3 et γ'_3 sans point commun. A la fin de ce travail, nous examinerons l'hypothèse contraire.

Toute cubique V dégénérée se compose d'une droite rencontrant à la fois γ_3 , γ'_3 et $a''b''$, chacune en un point, et d'une conique rencontrant une fois la droite $a''b''$ et trois fois chacune des cubiques γ_3 et γ'_3 .

Les droites de ces cubiques dégénérées engendrent une surface du sixième ordre ayant $a''b''$ comme droite quintuple et les cubiques singulières γ_3 et γ'_3 comme courbes simples; nous passons sous silence la démonstration de ces faits, car elle ne présente pas de difficulté spéciale.

En appliquant la condition ($I = 0$) pour qu'une cubique gauche en général dégénère, et en y introduisant les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, on trouve que ceux-ci répondent à des points d'une courbe en x du huitième ordre, ayant les points singuliers du plan (α) comme points quadruples. Donc les cubiques V dégénérées engendrent une surface du seizième ordre ayant $a''b''$ comme droite octuple et les cubiques γ_3, γ'_3 comme lignes quadruples. Or nous venons de voir quelle surface décrivent les droites des cubiques V dégénérées; donc les coniques de ces courbes dégénérées engendrent une surface du dixième ordre ayant $a''b'', \gamma_3$ et γ'_3 comme lignes triples.

La cubique V qui passe par un point donné y est déterminée par les relations

$$\begin{aligned}\alpha_1 : \alpha_2 &= (c_y b''_y - a''_y d_y) : - (a_y b''_y - a''_y b_y), \\ \alpha_1 : \alpha_3 &= (f'_y b''_y - a''_y g'_y) : - (a'_y b''_y - a''_y b'_y);\end{aligned}$$

on déduit de là (à un facteur constant près)

$$\alpha_1 a_x + \alpha_2 c_x = \begin{vmatrix} a_x & a_y & b_y \\ c_x & c_y & d_y \\ & a''_y & b''_y \end{vmatrix}$$

et l'on calcule pareillement les autres éléments de la matrice (31). Finalement les équations

tions

$$(37) \quad \left\| \begin{vmatrix} a_x & a_y & b_y \\ c_x & c_y & d_y \\ . & a''_y & b''_y \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a'_x & a'_y & b'_y \\ f'_x & f'_y & g'_y \\ . & a''_y & b''_y \end{vmatrix} \quad a''_x \right\| = 0$$

$$\left\| \begin{vmatrix} b_x & a_y & b_y \\ d_x & c_y & d_y \\ . & a''_y & b''_y \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} b'_x & a'_y & b'_y \\ g'_x & f'_y & g'_y \\ . & a''_y & b''_y \end{vmatrix} \quad b''_x \right\|$$

représentent, en coordonnées x , la cubique V qui passe par le point y et, en coordonnées y , la cubique V qui passe par le point x , accompagnée de la droite $a''b''$. Le principe de l'addition des colonnes permet de remplacer le premier déterminant de la matrice (37) par

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & b_y \\ c_x & c_y & d_y \\ a''_x & a''_y & b''_y \end{vmatrix}$$

ou, en abrégé, $(a_x c_y b''_y)$. Les autres déterminants se remplacent de même par des expressions plus symétriques. Changeons alors x en y et faisons parcourir au point y la droite $y\gamma$: nous aurons

$$\left\| \begin{matrix} (a_y c_x b''_x) + k(a_\gamma c_x b''_x) & (a'_y f'_x b''_x) + k(a'_\gamma f'_x b''_x) & a''_y + k a''_\gamma \\ (b_y c_x b''_x) + k(b_\gamma c_x b''_x) & (b'_y f'_x b''_x) + k(b'_\gamma f'_x b''_x) & b''_y + k b''_\gamma \end{matrix} \right\| = 0.$$

En éliminant k on trouve l'équation d'une surface du huitième ordre engendrée par les cubiques V qui s'appuient sur une droite $y\gamma$. Les lignes doubles de cette surface annulent la matrice

$$(38) \quad \left\| \begin{matrix} (a_y c_x b''_x) & (a_\gamma c_x b''_x) & (b_y c_x b''_x) & (b_\gamma c_x b''_x) \\ (a'_y f'_x b''_x) & (a'_\gamma f'_x b''_x) & (b'_y f'_x b''_x) & (b'_\gamma f'_x b''_x) \\ a''_y & a''_\gamma & b''_y & b''_\gamma \end{matrix} \right\|$$

Elles forment un système d'ordre total 12, composé de la droite $a''b''$ comptée triple, des cubiques singulières γ_1, γ_2 et de la cubique V qui a pour bisécante la droite $y\gamma$. Cette dernière cubique est donc unique, ou la congruence V est de première classe.

Pour avoir directement cette cubique V qui a pour bisécante la droite $y\gamma$, il faut (comme nous l'avons montré pour la congruence Δ) résoudre, par rapport à $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$, les relations

$$(39) \quad \left\| \begin{matrix} \alpha_1 a_y + \alpha_2 c_y & \alpha_1 b_y + \alpha_2 d_y & \alpha_1 a_\gamma + \alpha_2 c_\gamma & \alpha_1 b_\gamma + \alpha_2 d_\gamma \\ \alpha_1 a'_y + \alpha_3 f'_y & \alpha_1 b'_y + \alpha_3 g'_y & \alpha_1 a'_\gamma + \alpha_3 f'_\gamma & \alpha_1 b'_\gamma + \alpha_3 g'_\gamma \\ a''_y & b''_y & a''_\gamma & b''_\gamma \end{matrix} \right\| = 0;$$

on tire de là facilement

$$\alpha_1 \begin{vmatrix} a_y & b_y & a_\gamma & b_\gamma \\ a'_y & b'_y & a'_\gamma & b'_\gamma \\ f'_y & g'_y & f'_\gamma & g'_\gamma \\ a''_y & b''_y & a''_\gamma & b''_\gamma \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} c_y & d_y & c_\gamma & d_\gamma \\ a'_y & b'_y & a'_\gamma & b'_\gamma \\ f'_y & g'_y & f'_\gamma & g'_\gamma \\ a''_y & b''_y & a''_\gamma & b''_\gamma \end{vmatrix} = 0,$$

et pareillement

$$\alpha_1 \begin{vmatrix} a_y & b_y & a_z & b_z \\ c_y & d_y & c_z & d_z \\ a'_y & b'_y & a'_z & b'_z \\ a''_y & b''_y & a''_z & b''_z \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} a_y & b_y & a_z & b_z \\ c_y & d_y & c_z & d_z \\ f'_y & g'_y & f'_z & g'_z \\ a''_y & b''_y & a''_z & b''_z \end{vmatrix} = 0.$$

Les deux rapports $\alpha_1:\alpha_2$ et $\alpha_1:\alpha_3$ sont indéterminés si les déterminants extraits de la matrice suivante, en prenant toujours la dernière colonne, sont tous nuls :

$$(40) \quad \begin{vmatrix} a_y & c_y & a'_y & f'_y & a''_y \\ b_y & d_y & b'_y & g'_y & b''_y \\ a_z & c_z & a'_z & f'_z & a''_z \\ b_z & d_z & b'_z & g'_z & b''_z \end{vmatrix}.$$

Au contraire, le rapport $\alpha_1:\alpha_2$ est seul indéterminé si l'on a

$$\begin{vmatrix} a'_y & b'_y & a'_z & b'_z \\ f'_y & g'_y & f'_z & g'_z \\ a''_y & b''_y & a''_z & b''_z \end{vmatrix} = 0.$$

Mais ceci exprime que la droite yz est bisécante de la cubique singulière γ'_3 et alors les ∞^1 cubiques V correspondantes engendrent une quadrique circonscrite à γ'_3 et passant par quatre points fixes de γ_3 . Quant aux droites yz qui annulent la matrice (40), sans annuler les matrices partielles des colonnes 1, 2, 5 ou 3, 4, 5, elles forment une congruence qui est visiblement de troisième ordre (M. VENERONI a montré qu'elle est aussi de troisième classe).

Ainsi les bisécantes singulières de la congruence V sont: 1° les bisécantes des cubiques singulière γ_3, γ'_3 ; 2° les rayons d'une congruence du troisième ordre annulant la matrice (40).

Pour étudier les tangentes aux cubiques V , considérons le réseau des quadriques circonscrites à une de ces courbes et écrivons, comme suit, l'équation de ce réseau :

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ \alpha_1 a_x + \alpha_2 c_x & \alpha_1 a'_x + \alpha_3 f'_x & a''_x \\ \alpha_1 b_x + \alpha_2 d_x & \alpha_1 b'_x + \alpha_3 g'_x & b''_x \end{vmatrix} = 0.$$

Le plan polaire d'un point y par rapport à une quadrique de ce réseau est représenté par une équation qui s'écrit, en abrégé,

$$\begin{vmatrix} \lambda \\ \alpha_1 a_x + \alpha_2 c_x \\ \alpha_1 b_x + \alpha_2 d_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda \\ \alpha_1 a_y + \alpha_2 c_y \\ \alpha_1 b_x + \alpha_2 d_x \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore

$$b''_y \begin{vmatrix} \lambda \\ \alpha_1 a_x + \alpha_2 c_x \\ a''_y(\alpha_1 b_y + \alpha_2 d_y) \end{vmatrix} - a''_y \begin{vmatrix} \lambda \\ \alpha_1 b_x + \alpha_2 d_x \\ b''_y(\alpha_1 a_y + \alpha_2 c_y) \end{vmatrix} = 0;$$

si le point y est sur la cubique considérée, les troisièmes lignes de ces deux déterminants

sont identiques; les plans polaires forment un faisceau dont l'axe est la tangente en y à la cubique considérée; les équations de cette tangente se tirent de la dernière équation et deviennent, après un petit calcul,

$$\frac{b_y''(\alpha_1 a_x + \alpha_2 c_x) - a_y''(\alpha_1 b_x + \alpha_2 d_x)}{\alpha_1 b_y + \alpha_2 d_y} = \frac{b_y''(\alpha_1 a'_x + \alpha_3 f'_x) - a_y''(\alpha_1 b'_x + \alpha_3 g'_x)}{\alpha_1 b'_y + \alpha_3 g'_y} = \frac{a'_x b_y'' - a_y'' b'_x}{b_y''}.$$

En remplaçant α_1, α_2 et α_1, α_3 par leurs valeurs connues en fonctions des y , on obtient

$$(41) \quad \begin{cases} \left\{ \begin{array}{c|ccc} & a_x & a_y & b_y \\ b_y'' & c_x & c_y & d_y \\ & . & a_y'' & b_y'' \end{array} \right\} - a_y'' \left\{ \begin{array}{c|ccc} & b_x & a_y & b_y \\ d_x & c_y & d_y & \\ & . & a_y'' & b_y'' \end{array} \right\} = (b_y c_y - a_y d_y)(a'_x b_y'' - a_y'' b'_x), \\ \left\{ \begin{array}{c|ccc} & a'_x & a'_y & b'_y \\ b_y'' & f'_x & f'_y & g'_y \\ & . & a_y'' & b_y'' \end{array} \right\} - a_y'' \left\{ \begin{array}{c|ccc} & b'_x & a'_y & b'_y \\ g'_x & f'_y & g'_y & \\ & . & a_y'' & b_y'' \end{array} \right\} = (b'_y f'_y - a'_y g'_y)(a'_x b_y'' - a_y'' b'_x); \end{cases}$$

la première de ces équations se ramène facilement à la forme abrégée suivante

$$(a_x c_y b_y'') b_y'' = (b_x c_y b_y'') a_y'';$$

la seconde donne un résultat analogue et, en combinant les deux formules, on peut écrire

$$(42) \quad \frac{(a_x c_y b_y'')}{(b_x c_y b_y'')} = \frac{(a'_x f'_y b_y'')}{(b'_x f'_y b_y'')} = \frac{a_y''}{b_y''}.$$

En coordonnées x ce sont les équations de la tangente, au point y , à la cubique V passant par ce point. En coordonnées y , ce sont les équations d'un système de lignes, du huitième ordre au total; mais la droite $a'' b''$ appartient à ce système, car ses points, comme le montre un calcul facile, identifient les deux premiers rapports (42); le système se complète donc par une courbe c_7 du septième ordre, lieu des points de contact des tangentes menées aux courbes V par le point fixe x .

Cette courbe c_7 est projetée d'un de ses points, x par exemple, suivant un cône du sixième ordre; donc *le complexe des tangentes aux cubiques V est du sixième ordre.*

Le plan a_y'' est en somme un plan arbitraire mené par $a'' b''$; il coupe c_7 aux quatre points, généralement extérieurs à $a'' b''$, qui annulent aussi les deux premiers numérateurs des fractions (42). Si en particulier a'_x était nul, ces quatre points se réduiraient à un seul, savoir le point x lui-même. Il en résulte que la courbe c_7 coupe $a'' b''$ en trois points et y touche le plan $(a'' b'' x)$.

Pour projeter, de x , la courbe c_7 , il suffit de remplacer y par $x + ky$ dans les équations (42) et d'éliminer k ensuite: la substitution donne

$$\frac{(a_x c_y b_y'') + k(a_x c_y b_y'')}{(b_x c_x b_y'') + k(b_x c_y b_y'')} = \frac{(a'_x f'_y b_y'') + k(a'_x f'_y b_y'')}{(b'_x f'_x b_y'') + k(b'_x f'_y b_y'')} = \frac{a_y'' + k a_y''}{b_y'' + k b_y''}.$$

L'élimination simple de k donne une équation que nous n'écrivons pas et qui représente, en coordonnées y , le cône du complexe des tangentes ayant pour sommet x , accompagné du plan $(a'' b'' x)$.

Les conditions pour que les équations précédentes soient vérifiées par deux valeurs de k donnent les rayons singuliers de ce cône:

$$\left\| \begin{array}{cccc} (a_x c_y b''_x) & (b_x c_x b''_y) & (a_x c_y b''_y) & (b_x c_y b''_y) \\ (a'_x f'_y b''_x) & (b'_x f'_x b''_y) & (a'_x f'_y b''_y) & (b'_x f'_y b''_y) \\ a''_x & b''_x & a''_y & b''_y \end{array} \right\| = 0.$$

Cette formule représente huit rayons issus de x ; comme la courbe c_y était accompagnée de sa trisécante $a'' b''$, trois de ces rayons joignent le point x aux intersections de c_y et $a'' b''$. Les cinq autres rayons sont des génératrices doubles du cône des tangentes et nous sont déjà connus: 1° les bisécantes menées de x aux cubiques singulières γ_1, γ'_1 , lesquelles bisécantes annulent respectivement les éléments de la première et de la seconde ligne dans la matrice ci-dessus; 2° les trois autres bisécantes singulières issues de x , qui annulent la matrice (40) et qui rendent donc proportionnelles les deux premières lignes de la matrice ci-dessus.

Le faisceau des plans tangents en y à la cubique V qui passe par ce point y même a pour équation

$$(43) \quad \frac{(a_x c_y b''_y) + \lambda(a'_x f'_y b''_y)}{(b_x c_y b''_y) + \lambda(b'_x f'_y b''_y)} = \frac{a''_y}{b''_y}.$$

La condition pour qu'un plan de ce faisceau passe par deux points fixes donnés z et z' s'obtient en substituant à x successivement z et z' et en éliminant λ ; on trouve

$$(44) \quad \frac{(a_z c_y b''_y) b''_y - (b_z c_y b''_y) a''_y}{(a'_z f'_y b''_y) b''_y - (b'_z f'_y b''_y) a''_y} = \frac{(a_{z'} c_y b''_y) b''_y - (b_{z'} c_y b''_y) a''_y}{(a'_{z'} f'_{z'} b''_y) b''_y - (b'_{z'} f'_{z'} b''_y) a''_y}.$$

En coordonnées y c'est l'équation d'une surface S_6 du sixième ordre. La droite zz' en est une droite simple, car, en substituant aux y les coordonnées du point z , point quelconque de la droite zz' , on voit que les quatre déterminants du premier rapport ont chacun deux colonnes identiques, tandis que ceux du second rapport ne sont généralement pas nuls.

La section de la surface S_6 par un plan quelconque contenant la droite zz' se complète par une courbe du cinquième degré. Donc, *le lieu des points de contact d'un plan avec les cubiques de la congruence V est une courbe du cinquième ordre.*

L'équation (43) représente le faisceau des plans tangents, au point y , à la cubique V passant par ce point; cette cubique elle-même est représentée par les équations (37) que nous pouvons écrire sous la forme suivante:

$$\frac{(a_x c_y b''_y)}{(b_x c_y b''_y)} = \frac{(a'_x f'_y b''_y)}{(b'_x f'_y b''_y)} = \frac{a''_x}{b''_x} = -\omega,$$

ou encore

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a_x c_y b''_y) + \omega(b_x c_y b''_y) = 0, \\ (a'_x f'_y b''_y) + \omega(b'_x f'_y b''_y) = 0, \\ a''_x + \omega b''_x = 0. \end{array} \right.$$

Entre les équations (43) et (45) éliminons les x ; nous obtenons un déterminant nul dont nous n'écrivons qu'une colonne:

$$(46) \quad \begin{vmatrix} (a_i c_y b_y'') b_y'' - (b_i c_y b_y'') a_y'' + \lambda [(a_i' f_y' b_y'') b_y'' - (b_i' f_y' b_y'') a_y''] \\ (a_i c_y b_y'') + \omega (b_i c_y b_y'') \\ (a_i' c_y b_y'') + \omega (b_i' f_y' b_y'') \\ a_i'' + \omega b_i'' \end{vmatrix} = 0.$$

L'indice i prend, dans les diverses colonnes, les valeurs 1, 2, 3, 4. Quel que soit λ , deux des racines de cette équation cubique en ω sont égales à $-(a_y'' : b_y'')$, qui est le paramètre ω du point y . S'il en est de même de la troisième racine, le plan tangent représenté par l'équation (43) est le plan osculateur à la cubique V_y . Mais alors le produit des racines de l'équation (46) en ω doit être $-(a_y'' : b_y'')$, ce qui s'exprime par la relation suivante, obtenue après un calcul facile,

$$\begin{vmatrix} (b_i c_y b_y'') + \lambda (b_i' f_y' b_y'') \\ (a_i c_y b_y'') \\ (a_i' f_y' b_y'') \\ a_i'' \end{vmatrix} + \left(\frac{a_y''}{b_y''} \right)^2 \begin{vmatrix} (a_i c_y b_y'') + \lambda (a_i' f_y' b_y'') \\ (b_i c_y b_y'') \\ (b_i' f_y' b_y'') \\ b_i'' \end{vmatrix} = 0.$$

En éliminant λ entre cette égalité et l'équation (43), on obtient une équation à deux séries de variables x et y . En coordonnées courantes x , elle représente le plan osculateur en y à la cubique V passant par ce point y . En coordonnées courantes y , elle représente la surface lieu des points de contact des plans osculateurs menés du point fixe x aux cubiques V .

Faisons ici une remarque en passant. On peut prendre les équations d'une cubique variable de la congruence V , les résoudre par rapport aux x , et parvenir ainsi à des résultats analogues à ceux que nous avons obtenus, de la même manière, pour un autre système de cubiques, dans un travail intitulé: *Une congruence linéaire de cubiques gauches* (Bull. Acad. Roy. de Belgique, mai 1907). Nous laissons au lecteur le soin d'effectuer ces calculs et de vérifier notamment qu'il y a six cubiques V qui osculent un plan donné.

Enfin nous trouverons un dernier résultat en projetant la cubique

$$\begin{vmatrix} a_x & a_x' & a_x'' \\ b_x & b_x' & b_x'' \end{vmatrix} = 0$$

d'un point y situé sur la courbe même. Le cône quadratique ainsi obtenu a, comme nous le savons, pour équation

$$|a_x \ b_x \ b_y| = 0,$$

ou, en supposant que la cubique appartienne à la congruence V et en introduisant explicitement les paramètres α ,

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 a_x + \alpha_2 c_x & \alpha_1 b_x + \alpha_2 d_x & \alpha_1 b_y + \alpha_2 d_y \\ \alpha_1 a_x' + \alpha_3 f_x' & \alpha_1 b_x' + \alpha_3 g_x' & \alpha_1 b_y' + \alpha_3 g_y' \\ a_x'' & b_x'' & b_y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Remplaçons alors $\alpha_1:\alpha_2$ et $\alpha_1:\alpha_3$ par leurs valeurs en fonction des y , puisque le point y est sur la cubique en question :

$$\left| \begin{array}{ccc} a_x & a_y & b_y \\ c_x & c_y & d_y \\ . & a''_y & b''_y \\ a'_x & a'_y & b'_y \\ f'_x & f'_y & g'_y \\ . & a''_y & b''_y \\ a''_x & & \end{array} \right| \begin{array}{ccc} b_x & a_y & b_y \\ d_x & c_y & d_y \\ . & a''_y & b''_y \\ b'_x & a'_y & b'_y \\ g'_x & f'_y & g'_y \\ a''_y & b''_y & \\ b''_x & & \end{array} \begin{array}{l} (b_y c_y - a_y d_y) \\ \\ \\ (b'_y f'_y - a'_y g'_y) \\ \\ \\ \text{I} \end{array} = 0,$$

ou, après un calcul facile,

$$\left| \begin{array}{ccc} (a_x & c_y & b''_y) \\ (a'_x & f'_y & b''_y) \end{array} \begin{array}{ccc} (b_x & c_y & b''_y) \\ (b'_x & f'_y & b''_y) \end{array} \right| = 0.$$

En coordonnées x c'est le cône de sommet y perspectif à la cubique V passant par y . En coordonnées y c'est une surface S_4 du quatrième ordre, lieu des appuis des bisécantes aux cubiques V issues d'un point fixe x . Cette surface S_4 passe par la droite $a''b''$.

La première surface polaire du point x relativement à cette surface S_4 est une surface cubique, lieu du conjugué de ce point x par rapport aux cubiques V .

Cas particuliers de la congruence V .

On obtient évidemment des cas particuliers de la congruence V en supposant que les cubiques singulières γ_3 et γ'_3 aient, outre leur bisécante commune $a''b''$, un certain nombre de points communs (quatre au plus). Pour chacun de ces points, les rapports $\alpha_1:\alpha_2$ et $\alpha_1:\alpha_3$ sont complètement indéterminés et, par suite, ces points appartiennent à toutes les cubiques de la congruence.

M. L. GODEAUX, au cours de recherches relatives à des générations de courbes, surfaces, complexes, etc., a rencontré le cas particulier où γ_3 et γ'_3 ont deux points communs, et il nous a communiqué cette circonstance.

Lorsque les deux cubiques γ_3 et γ'_3 ont quatre points communs A, B, C, D , nous retrouvons, comme cas particulier de la congruence V , le système U des cubiques gauches passant par quatre points et possédant une bisécante commune $a''b''$, système connu depuis longtemps et que l'on sait être de premier ordre et de classe zéro.

Signalons, en passant, une forme propre à représenter cette congruence U : si l'on désigne par λ, μ, ν des paramètres variables, la matrice

$$\left\| \begin{array}{cccc} \lambda & \mu & \nu & 0 \\ a_x & c_x & f_x & a''_x \\ b_x & d_x & g_x & b''_x \end{array} \right\|$$

s'annule pour ∞^2 cubiques gauches ayant $a''b''$ comme bisécante et passant par les

quatre points

$$\begin{vmatrix} a_x & c_x & f'_x & a''_x \\ b_x & d_x & g_x & b''_x \end{vmatrix} = 0.$$

Ceux-ci sont donc des points fondamentaux, et les seuls points singuliers sont ceux de la bisécante $a''b''$.

On peut, à titre d'exercice, faire, sur cette forme, la théorie de la congruence U . On verra, par exemple, que les bisécantes d'une des cubiques U sont données par les relations

$$\begin{cases} \lambda k + \mu k' + \nu k'' = 0, \\ k a_x + k' c_x + k'' f_x + k''' a''_x = 0, \\ k b_x + k' d_x + k'' g_x + k''' b''_x = 0. \end{cases}$$

Pour qu'une telle bisécante passe par deux points donnés y et z , il faut des conditions qui s'expriment en remplaçant x par y et z dans les dernières relations; d'où, en éliminant k, k', k'', k''' , on trouve

$$\begin{vmatrix} a_y & c_y & f_y & a''_y \\ b_y & d_y & g_y & b''_y \\ a_z & c_z & f_z & a''_z \\ b_z & d_z & g_z & b''_z \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui représente, en coordonnées-lignes (y, z) , un complexe de REYE. En général donc une droite n'est bisécante d'aucune cubique de la congruence U ; mais les droites qui font exception appartiennent à un complexe de REYE (théorème connu).

Gand, 2 décembre 1907.

M. STUYVAERT.