Mittelwertbildung und Reihentransformation.

Von

Ernst Jacobsthal in Berlin.

Es ist bekannt, daß die Differenzenrechnung gestattet, langsam konvergente Reihen in solche von besserer Konvergenz umzuwandeln¹⁾. In den folgenden Zeilen werden diese Methoden in Beziehung gesetzt zu den aufeinanderfolgenden arithmetischen Mitteln, die man aus den Teilsummen der betrachteten Reihe erhält. Dabei treten besonders solche alternierenden Reihen hervor, bei denen die absoluten Beträge der Glieder mehrfach monotone Reihen bilden, d. h. solche, deren Differenzenreihen aus positiven abnehmenden Gliedern bestehen.

§ 1.

Hilfssätze und Hilfsformeln.

Hilfssatz 1²⁾. *Konvergiert die Folge $\{x_n\}$ gegen x , so konvergiert auch mit wachsendem n*

$$B_n = \frac{\sum_{\lambda=1}^n x_\lambda y_\lambda^{(n)}}{\sum_{\lambda=1}^n y_\lambda^{(n)}}$$

gegen x , falls die Zahlen $y_\lambda^{(n)}$ folgende Bedingungen erfüllen:

- a) $\sum_{\lambda=1}^{\infty} |y_\lambda^{(n)}|$ ist für $n = 1, 2, \dots$ konvergent.

¹⁾ Vgl. Euler, Differentialrechnung, 2, Kap. I; Markoff, Differenzenrechnung, Kap. 14, S. 178 ff.; Pringsheim, Vorles. über Zahlen- und Funktionenlehre, 1, Zweite Abteilung: Unendl. Reihen mit reellen Gliedern, S. 437 f.

²⁾ Vgl. O. Toeplitz, Über allgemeine lineare Mittelbildungen, Prace mat.-fiz. 22 (1911), S. 113–119.

b) Es gibt eine feste positive Zahl g ; so daß für jedes $n = 1, 2, \dots$ stets

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} |y_{\lambda}^{(n)}| \leq g \left| \sum_{\lambda=1}^{\infty} y_{\lambda}^{(n)} \right|$$

ist.

c) Für $n \geq n_0$ ist mindestens eine der Zahlen $y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots$ von 0 verschieden.

Daraus folgt in Verbindung mit b), daß $\sum_{\lambda=1}^{\infty} y_{\lambda}^{(n)} \neq 0$ für $n \geq n_0$ ist.

d) Bei festem k ist mit $n \rightarrow \infty$ auch

$$\frac{y_k^{(n)}}{\sum_{\lambda=1}^{\infty} y_{\lambda}^{(n)}} \rightarrow 0.$$

Bemerkung: Sind alle $y_{\lambda}^{(n)} \geq 0$, so ist b) von selbst erfüllt und a) besagt, daß $\sum_{\lambda=1}^{\infty} y_{\lambda}^{(n)}$ konvergent sein soll.

Beweis: Es werde $x_n = x + \varepsilon_n$ gesetzt, so ist $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Ist dann ε eine beliebig kleine positive Größe, so möge $m = m(\varepsilon) \geq n_0$ derart bestimmt sein, daß für $n \geq m$ stets $\varepsilon_n < \varepsilon : 2g$ ist. Ferner bedeute ϑ_m eine positive Größe, die nicht kleiner ist als die größte der Zahlen $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, \dots, |\varepsilon_m|$. Nun sei nach d) die Zahl $m' \geq m$ so gewählt, daß für $n \geq m'$

$$\frac{|y_{\nu}^{(n)}|}{\left| \sum_{\lambda=1}^{\infty} y_{\lambda}^{(n)} \right|} < \frac{\varepsilon}{2m\vartheta_m}$$

ist, falls $\nu = 1, 2, \dots, m$ ist. Dann wird für $n \geq m'$

$$\begin{aligned} |B_n - x| &= \left| \frac{\sum_{\lambda=1}^{\infty} x_{\lambda} y_{\lambda}^{(n)}}{\sum_{\lambda=1}^{\infty} y_{\lambda}^{(n)}} - x \right| = \frac{\left| \sum_{\lambda=1}^{\infty} \varepsilon_{\lambda} y_{\lambda}^{(n)} \right|}{\left| \sum_{\lambda=1}^{\infty} y_{\lambda}^{(n)} \right|} \leq \frac{\sum_{\lambda=1}^{\infty} |\varepsilon_{\lambda}| |y_{\lambda}^{(n)}|}{\left| \sum_{\lambda=1}^{\infty} y_{\lambda}^{(n)} \right|} \\ &= \frac{\sum_{\lambda=1}^m |\varepsilon_{\lambda}| |y_{\lambda}^{(n)}|}{\left| \sum_{\lambda=1}^{\infty} y_{\lambda}^{(n)} \right|} + \frac{\sum_{\lambda=m+1}^{\infty} |\varepsilon_{\lambda}| |y_{\lambda}^{(n)}|}{\left| \sum_{\lambda=1}^{\infty} y_{\lambda}^{(n)} \right|} \end{aligned}$$

$< \vartheta_m \cdot m \cdot \frac{\varepsilon}{2m\vartheta_m} + \frac{\varepsilon}{2g} \cdot g = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, d. h. $B_n \rightarrow x$ mit $n \rightarrow \infty$, w. z. b. w.

Zusatz: Sind die $y_{\lambda}^{(n)} \geq 0$ und erfüllen sie die Bedingungen a) und c), und ist der Hilfssatz unter diesen Voraussetzungen für eine spezielle positive

Nullfolge $\{x_\lambda^{(0)}\}$ richtig, dann ist er für jede konvergente Folge $\{x_\lambda\}$ richtig. Denn ist k ein fester Index, so ist

$$0 \leq \frac{x_k^{(0)} y_k^{(n)}}{\sum_{\lambda=1}^{\infty} y_\lambda^{(n)}} \leq \frac{\sum_{\lambda=1}^{\infty} x_\lambda^{(0)} y_\lambda^{(n)}}{\sum_{\lambda=1}^{\infty} y_\lambda^{(n)}} = B_n < \varepsilon x_k^{(0)}$$

für hinreichend großes n , da ja nach Voraussetzung $B_n \rightarrow 0$ ist. Also ist

$$0 \leq \frac{y_k^{(n)}}{\sum_{\lambda=1}^{\infty} y_\lambda^{(n)}} < \varepsilon \quad \text{für } n \geq \bar{n}(\varepsilon), \text{ d. h.}$$

$$\frac{y_k^{(n)}}{\sum_{\lambda=1}^{\infty} y_\lambda^{(n)}} \rightarrow 0,$$

falls $n \rightarrow \infty$ und k ein fester Index ist. Somit erfüllen die $y_\lambda^{(n)}$ auch Bedingung d), und deshalb gilt der Satz stets.

Wenn eine gegen x konvergente Folge $x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots$ gegeben ist, so bilden wir aus je n_1 aufeinanderfolgenden Gliedern derselben das arithmetische Mittel und nennen diese Mittel $x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, \dots$; aus je n_2 aufeinanderfolgenden Gliedern dieser neuen Folge bilden wir wiederum das arithmetische Mittel und erhalten eine weitere Folge $x_0^{(3)}, x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, \dots$ usw.³⁾. Jede dieser unendlich vielen Folgen strebt ersichtlich gegen x . Bildet man also die unendliche Matrix

$$(M) \quad \begin{pmatrix} x_0^{(1)} & x_0^{(2)} & x_0^{(3)} & \dots \\ x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} & \dots \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

so konvergieren daher die Elemente jeder Spalte gegen x . Wir werden zeigen, daß auch die Glieder jeder Zeile gegen x streben und sprechen also aus

Hilfssatz 2⁴⁾. *In der Matrix (M) konvergieren die Elemente jeder Reihe gegen x .*

Will man die Beziehungen zwischen den Elementen zweier Nachbarnspalten und ebenso die Beziehung zwischen den Gliedern einer Spalte und

³⁾ $n_1, n_2, n_3, \dots$ sind willkürliche natürliche Zahlen ≥ 2 .

⁴⁾ Der Beweis benutzt im wesentlichen die späteren Gleichungen (4) bis (6) und Hilfssatz 1.

denen der ersten Spalte ausdrücken, so ist es zweckmäßig, von einer Funktion $f(z; p)$ Gebrauch zu machen, die wir folgendermaßen erklären: Es sei p eine positive Zahl und z eine reelle Veränderliche, dann setzen wir

$$(1) \quad \begin{aligned} f(z; p) &= 1 \quad \text{für } 0 \leq z < p, \\ &= 0 \quad \text{für } z < 0 \text{ und } z \geq p. \end{aligned}$$

Verstehen wir dann unter $n_1, n_2, n_3, \dots$ natürliche Zahlen ≥ 2 und ist $n_0 = 1$, so ist

$$(2) \quad x_\nu^{(k+1)} = \frac{1}{n_k} \sum_{\lambda} f(\lambda; n_k) x_{\nu+\lambda}^{(k)} \quad (k=1, 2, 3, \dots; \nu=0, 1, 2, \dots),$$

wobei man die Summation über alle ganzen Zahlen λ erstrecken kann.

Um die Elemente der $(m+1)$ -ten Spalte in (M) durch die der ersten Spalte auszudrücken, hat man (2) wiederholt anzuwenden. Setzt man nun

$$(3) \quad g_m(k) = \sum_{\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_m = k} f(\lambda_0; n_0) f(\lambda_1; n_1) \dots f(\lambda_m; n_m),$$

wobei die Summation über alle Systeme ganzer Zahlen $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ auszudehnen ist, deren Summe gleich k ist, so ist $g_m(k)$ für jede ganze Zahl k und $m=0, 1, 2, 3, \dots$ erklärt. Die fortgesetzte Anwendung von (2) liefert unter Benutzung von (3) folgende Gleichung

$$(4) \quad x_\nu^{(m+1)} = \frac{1}{n_0 n_1 n_2 \dots n_m} \sum_{k=0}^{\infty} g_m(k) x_{\nu+k}^{(1)} \quad (m, \nu=0, 1, 2, \dots).$$

Über die Natur der Koeffizienten $g_m(k)$ erhält man Aufschluß, wenn man insbesondere $x_\nu^{(1)} = z^\nu$, $|z| < 1$ setzt, woraus $\lim x_\nu^{(1)} = x = 0$ folgt. In diesem Falle ergibt (2) für $k=1$ und $k=2$:

$$x_\nu^{(2)} = \frac{1}{n_1} (z^\nu + z^{\nu+1} + \dots + z^{\nu+n_1-1}) = \frac{z^\nu}{n_1} \frac{1-z^{n_1}}{1-z},$$

$$x_\nu^{(3)} = \frac{1}{n_1 \cdot n_2} \cdot \frac{1-z^{n_1}}{1-z} (z^\nu + z^{\nu+1} + \dots + z^{\nu+n_2-1}) = \frac{z^\nu}{n_1 \cdot n_2} \frac{1-z^{n_1}}{1-z} \cdot \frac{1-z^{n_2}}{1-z},$$

usw. Schließlich erhält man $x_\nu^{(m+1)}$ und daher nach (4) folgende Gleichung:

$$x_\nu^{(m+1)} = \frac{1}{n_0 n_1 \dots n_m} \sum_{k=0}^{\infty} g_m(k) z^{\nu+k} = \frac{z^\nu}{n_0 n_1 \dots n_m} \frac{1-z^{n_0}}{1-z} \cdot \frac{1-z^{n_1}}{1-z} \dots \frac{1-z^{n_m}}{1-z} \quad (m, \nu=0, 1, 2, \dots).$$

Hieraus folgt

$$(5) \quad F_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_m(k) z^k = \prod_{i=0}^m \frac{1-z^{n_i}}{1-z} \quad (m=0, 1, 2, \dots).$$

Setzen wir hierin $z = +1$, so erhalten wir

$$(6) \quad \sum_{k=0}^{\infty} g_m(k) = n_0 n_1 n_2 \dots n_m \quad (m=0, 1, 2, \dots).$$

Dagegen ergibt $z = -1$:

$$(7) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k g_m(k) = \frac{1 - (-1)^{n_0 n_1 \dots n_m}}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Ich erwähne noch die folgenden beiden aus (3) und (5) leicht beweisbaren Gleichungen

$$(8) \quad g_m(k) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_{m-1}(\lambda) f(k - \lambda; n_m) \\ = g_{m-1}(k - n_m + 1) + g_{m-1}(k - n_m + 2) + \dots + g_{m-1}(k) \\ (m = 1, 2, \dots);$$

$$(9) \quad g_m(k) = g_m(n_0 + n_1 + n_2 + \dots + n_m - m - 1 - k) \\ (m = 0, 1, 2, \dots; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Ist $n_1 = n_2 = n_3 = \dots = 2$, dann folgt aus (5), daß $g_m(k) = \binom{m}{k}$ ist. Die Koeffizienten $g_m(k)$ sind also verallgemeinerte Binomialkoeffizienten; die Gleichungen (6) bis (9) gehen für den erwähnten Spezialfall in bekannte Gleichungen über.

Nun kann man im Hinblick auf (6) der Gleichung (4) folgende Form geben:

$$(4a) \quad x_{\nu}^{(m+1)} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} g_m(k) x_{\nu+k}^{(1)}}{\sum_{k=0}^{\infty} g_m(k)} \quad (m, \nu = 0, 1, 2, \dots).$$

Schreibt man hierin für $x_{\nu+k}^{(1)}$ kurz x_{k+1} , so ist $x_{\lambda} \rightarrow x$, und bezeichnet man $g_m(k)$ mit $y_{k+1}^{(m)}$, so gewinnt (4a) die Gestalt

$$(4b) \quad B_m = x_{\nu}^{(m+1)} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k^{(m)}}{\sum_{k=1}^{\infty} y_k^{(m)}}.$$

Wir behaupten nun, daß auf (4b) der erste Hilfssatz anwendbar ist, d. h. $\lim_{m \rightarrow \infty} x_{\nu}^{(m+1)} = x$ ist, womit dann der zweite Hilfssatz bewiesen wäre.

Um das nachzuweisen, bemerken wir zunächst, daß die Koeffizienten $y_k^{(m)} \geq 0$ sind und die Voraussetzungen (a) bis (c) des ersten Hilfssatzes erfüllen. Nach dem zu ihm gemachten Zusatz ist er daher in unserem Falle anwendbar, falls es gelingt, eine spezielle positive Nullfolge $\{x_k\}$ aufzuweisen, für die er gilt. Das ist nun leicht. Setzt man nämlich $x_k = x_{\nu+k-1}^{(1)} = \vartheta^{\nu+k-1}$, wobei $0 < \vartheta < \frac{1}{2}$, also $2 - 2\vartheta > 1$ ist, so ist $\{x_k\}$

eine positive Nullfolge. Dann wird aber nach der (5) vorangehenden Gleichung

$$0 < B_m = x^{(m+1)} = \frac{\vartheta^v}{n_0 n_1 \dots n_m} \cdot \frac{1 - \vartheta^{n_0}}{1 - \vartheta} \cdot \frac{1 - \vartheta^{n_1}}{1 - \vartheta} \dots \frac{1 - \vartheta^{n_m}}{1 - \vartheta} < \frac{1}{2^m} \frac{1}{(1 - \vartheta)^m} = \frac{1}{(2 - 2\vartheta)^m}.$$

Wegen $2 - 2\vartheta > 1$ folgt daraus $\lim_{m \rightarrow \infty} B_m = \lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m+1)} = 0$. Damit ist also die Gültigkeit des Hilfssatzes 1 in dem speziellen Fall gezeigt, und deshalb ist dieser Satz auf (4b) infolge des erwähnten Zusatzes stets anwendbar, somit der zweite Hilfssatz bewiesen.

Aus ihm folgt nun allgemein

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{F_m(z)}{n_0 n_1 \dots n_m} = 0,$$

falls $|z| < 1$ ist, was bisher nur für $0 < z < \frac{1}{2}$ bekannt war⁵⁾.

Wir setzen noch für späteren Gebrauch

$$(10) \quad C_k^{(m)} = \sum_{\lambda=k}^{\infty} g_m(\lambda) \quad (m = 0, 1, 2, \dots; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Sind alle Zahlen $n_1, n_2, n_3, \dots = 2$, so setzen wir $C_k^{(m)} = c_k^{(m)}$. Dann ist

$$(10a) \quad c_k^{(m)} = \sum_{\lambda=k}^{\infty} \binom{m}{\lambda} \quad (m = 0, 1, 2, \dots; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Wir schließen § 1 mit folgenden Bemerkungen. In üblicher Weise wird im folgenden $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, $\Delta^2 x_n = \Delta \Delta x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n, \dots$ gesetzt. Wir bezeichnen dann $(-1)^n \Delta^n x_\lambda$ mit $D^n x_\lambda$, also $Dx_n = x_n - x_{n+1}$ ($D^0 x_\lambda = x_\lambda$). Dann gelten die bekannten Formeln

$$(11) \quad D^n x_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} (-1)^k x_{\lambda+k}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

$$(12) \quad D^n a_\lambda b_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} D^{n-k} a_{\lambda+k} D^k b_\lambda$$

⁵⁾ Da die Zahlen $y_k^{(m)}$ die Voraussetzung (d) des ersten Hilfssatzes erfüllen, so ist $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{g_m(k)}{n_0 n_1 \dots n_m} = 0$. Bezeichnet man die größte der Zahlen $g_m(0), g_m(1), g_m(2), \dots$ mit a_m , und setzt man dann $\frac{a_m}{n_0 n_1 \dots n_m} = b_m$, so folgt leicht $b_1 > b_2 > \dots > 0$, also existiert $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m$. Vermutlich ist dieser Grenzwert gleich 0. Die Vermutung ist sicher richtig, falls alle Zahlen $n_1, n_2, \dots = 2$ sind, wie aus der Stirlingschen Formel folgt; wenn sie allgemein richtig ist, dann ergibt sich aus ihr sofort, daß bei festem k $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{g_m(k)}{n_0 n_1 \dots n_m} = 0$ ist.

§ 2.

Anwendung der Mittelwertbildung auf die Teilsummen einer konvergenten Reihe.

Es sei

$$(1) \quad s = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

irgendeine konvergente Reihe⁶⁾. Wir setzen dann ihre Teilsummen

$$(1a) \quad a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{\nu-1} a_\nu = S_\nu^{(1)} = s_\nu^{(1)}$$

für $\nu = 1, 2, 3, \dots$ und erklären: $S_0^{(1)} = 0$. Auf die gegen s konvergente Folge $S_0^{(1)}, S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, \dots$ wenden wir dann die fortgesetzte Mittelwertbildung an und bezeichnen die *Mittelwerte m -ter Ordnung* mit $S_\nu^{(m+1)}$. Dann ist nach § 1, (4)

$$(2) \quad S_\nu^{(m+1)} = \frac{1}{n_0 n_1 \dots n_m} \sum_{k=0}^{\infty} g_m(k) S_{\nu+k}^{(1)} \quad (m, \nu = 0, 1, 2, \dots)$$

In Verbindung mit (1a) ergibt sich nach § 1, (10)

$$(3) \quad S_\nu^{(m+1)} = \frac{1}{n_0 n_1 n_2 \dots n_m} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k C_{k-\nu}^{(m)} \quad (m, \nu = 0, 1, 2, \dots)$$

Bildet man also für die unendliche Reihe (1) die Matrix

$$(M^*) \quad \begin{pmatrix} S_0^{(1)} & S_0^{(2)} & S_0^{(3)} & \dots \\ S_1^{(1)} & S_1^{(2)} & S_1^{(3)} & \dots \\ S_2^{(1)} & S_2^{(2)} & S_2^{(3)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix},$$

so konvergieren in ihr die Elemente jeder Reihe gegen s (Hilfssatz 2). Also ist

$$(4) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} S_\nu^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_\nu^{(k)} = s.$$

In dem besonderen Falle, in dem alle Zahlen $n_1, n_2, \dots = 2$ sind, setzen wir $S_\nu^{(k)} = s_\nu^{(k)}$. Dann ist

$$(2a) \quad s_\nu^{(m+1)} = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} s_{\nu+k}^{(1)} \quad (m, \nu = 0, 1, 2, \dots)$$

$$(3a) \quad s_\nu^{(m+1)} = \frac{1}{2^m} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k C_{k-\nu}^{(m)} \quad (m, \nu = 0, 1, 2, \dots)$$

Es ist dann

$$(5) \quad s_\nu^{(m+1)} = \frac{1}{2} \{s_\nu^{(m)} + s_{\nu+1}^{(m)}\} \quad (m = 1, 2, \dots; \nu = 0, 1, 2, \dots)$$

⁶⁾ Die Glieder der Reihe können dabei auch komplexe Zahlen sein.

Bildet man nun nach (2a) die Differenz $\Delta_\nu s_\nu^{(m+1)} = s_{\nu+1}^{(m+1)} - s_\nu^{(m+1)}$, wobei der Index ν am Differenzensymbol zum Ausdruck bringt, daß die Differenzenbildung sich auf die Veränderung der Marke ν bezieht, so folgt (§ 1, (11)):

$$(6) \quad \Delta_\nu s_\nu^{(m+1)} = \frac{(-1)^\nu}{2^m} D^m a_{\nu+1} \quad (m, \nu = 0, 1, 2, \dots).$$

Ersetzt man hierin ν durch $\nu + 1$ und verbindet dann durch Addition (6) mit der so neu entstehenden Gleichung, so ist

$$(6a) \quad s_{\nu+2}^{(m+1)} - s_\nu^{(m+1)} = \frac{(-1)^\nu}{2^m} D^{m+1} a_{\nu+1} \quad (m, \nu = 0, 1, 2, \dots).$$

Aus (5) ergibt sich ferner $\Delta_m s_\nu^{(m)} = \frac{1}{2} \Delta_\nu s_\nu^{(m)}$ und deshalb nach (6)

$$(7) \quad \Delta_m s_\nu^{(m)} = \frac{(-1)^\nu}{2^m} D^{m-1} a_{\nu+1} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots).$$

Summiert man in (7) über $m = 1, 2, \dots, n-1$, so folgt

$$(8) \quad s_\nu^{(n)} = s_\nu^{(1)} + (-1)^\nu \sum_{k=1}^{n-1} \frac{D^{k-1} a_{\nu+1}}{2^k}, \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots; n = 2, 3, \dots).$$

Da man nach (4) hierin mit $n \rightarrow \infty$ zur Grenze übergehen kann, so ergibt sich die Eulersche Transformation der Reihe (1) aus (8):

$$(8a) \quad s = s_\nu^{(1)} + (-1)^\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^{k-1} a_{\nu+1}}{2^k} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots).$$

Der zweite Summand auf der rechten Seite dieser Gleichung stellt demnach die Reihe $(-1)^\nu a_{\nu+1} + (-1)^{\nu+1} a_{\nu+2} + \dots$ dar. Für $\nu = 0$ ist insbesondere

$$(8b) \quad s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^{k-1} a_1}{2^k}.$$

Während (6), (6a) und (7) gestatten, die höheren Differenzen der a_ν durch die höheren Teilsummen auszudrücken, lassen sich diese selbst mittels (8) durch jene ausdrücken.

Eng zusammen mit den Gleichungen (8) bis (8b) hängen die Formeln⁷⁾

$$(9) \quad \begin{aligned} s &= s_1^{(n)} - \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} D^n a_{2k} \\ s &= s_0^{(n)} + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} D^n a_{2k-1} \end{aligned} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

⁷⁾ Vgl. z. B. Pringsheim, l. c.

Sie sind offenbar für $n = 1$ richtig; verbindet man die beiden Gleichungen (9) additiv unter Benutzung von (5), so erhält man die zweite Gleichung (9) für den nächst höheren Zeiger ($n + 1$). Führt man dieselbe Rechnung aber durch, nachdem man vorher in der zweiten Gleichung (9) auf der rechten Seite das erste Summenglied abgespalten hat, und verwendet man dann noch neben (5) die Gleichung (7), so erhält man die erste Gleichung (9) für den nächst höheren Index ($n + 1$). Wenn (9) also für n richtig ist, so gelten diese Gleichungen auch für ($n + 1$), und da sie für $n = 1$ richtig sind, so sind sie für jedes n erfüllt. Aus (9) folgt wegen (4), daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} D^n a_{2k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} D^n a_{2k-1} = 0$$

ist. Da nach (8) und (8a)

$$s = s_1^{(n)} - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{D^{k-1} a_2}{2^k} = s_0^{(n)} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{D^{k-1} a_1}{2^k} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ist, so lehrt der Vergleich von (9) mit diesen Gleichungen, daß

$$(10) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} D^n a_{2k} &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{D^{k-1} a_2}{2^{k+1-n}} \\ \sum_{k=1}^{\infty} D^n a_{2k-1} &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{D^{k-1} a_1}{2^{k+1-n}} \end{aligned} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Die Gültigkeit der entwickelten Formeln, insbesondere der Gleichungen (8a) und (8b) (Eulersche Transformation), ist nur an die Voraussetzung geknüpft, daß Reihe (1) konvergiert.

§ 3.

Monotone Folgen⁸⁾.

Es sei $b_1, b_2, b_3, \dots$ eine Folge mit der Eigenschaft, daß $D^\lambda b_\mu > 0$ ist für jedes μ der Reihe $1, 2, 3, \dots$ und jedes λ der Reihe $0, 1, 2, \dots, r$, dann heißt die Folge $\{b_\mu\}$ eine r -fach monotone Folge. Sie wird aber vollmonoton genannt, falls die Beziehung $D^\lambda b_\mu > 0$ sogar für jedes $\lambda \geq 0$ gilt. Als Beispiele vollmonotoner Folgen seien erwähnt:

1. $1, x, x^2, \dots$ für $0 < x < 1$; es ist

$$D^\lambda x^\mu = (1 - x)^\lambda \cdot x^\mu > 0;$$

⁸⁾ In diesem Paragraphen werden nur reelle Größen in Betracht gezogen.

2. $a_\lambda = \frac{1}{p\lambda + q}$, $\lambda = 1, 2, \dots$; $p + q > 0$, $p > 0$; hier ist

$$D_\lambda^n \frac{1}{p\lambda + q} = \frac{p^n n!}{\prod_{t=0}^n \{p\lambda + q + pt\}} > 0;$$

3. $\frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 3}, \frac{1}{\ln 4}, \dots$; daß diese Reihe vollmonoton ist, ergibt sich leicht aus folgendem Satz, mit dessen Hilfe man auch leicht die anderen Beispiele hätte behandeln können.

Satz: Ist $\varphi(x)$ eine für $x \geq a > 0$ erklärte reelle positive und unbeschränkte differenzierbare Funktion, für die stets $\text{sign } \varphi^{(n)}(x) = (-1)^n$ ist, so ist bei positivem h die Folge

$$\varphi(a), \varphi(a+h), \varphi(a+2h), \dots$$

vollmonoton.

Die Richtigkeit des Satzes folgt sofort aus der bekannten Gleichung

$$D^n \varphi(x) = (-1)^n h^n \varphi^{(n)}(\xi),$$

wobei ξ ein Zwischenwert zwischen x und $x + nh$ ist. Denn diese Gleichung lehrt, daß $D^n \varphi(x) > 0$ ist. Verwendet man diesen Satz bei der Funktion $\varphi(x) = \frac{1}{\ln x}$, so ergibt sich das dritte Beispiel.

Nach § 1, (12) erhält man sofort den

Kompositionssatz: Sind $\{a_\lambda\}$, $\{b_\lambda\}$ vollmonotone Folgen, so ist auch $\{a_\lambda b_\lambda\}$ eine ebensolche Folge.

Daß $\{a_\lambda + b_\lambda\}$ ebenfalls vollmonoton ist, ist ja klar.

Das gibt ein Mittel an die Hand, aus unseren Beispielen beliebig viele andere zu bilden. Ferner ist leicht zu zeigen: Ist $\{a_\lambda\}$ vollmonoton, so ist in

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \dots \\ Da_1 & Da_2 & Da_3 & Da_4 & & \dots \\ D^2 a_1 & D^2 a_2 & D^2 a_3 & & & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \end{array}$$

jede unendliche Folge einer wagerechten oder schrägen Reihe wieder von derselben Beschaffenheit; und ist $a_1, Da_1, D^2 a_1, \dots$ vollmonoton, so gilt das gleiche von $a_1, a_2, \dots$

Ist nun bei der Reihe (1) des § 2 die Folge der absoluten Beträge der Glieder, d. h. $a_1, a_2, a_3, \dots$, mehrfach monoton, so hat die Matrix

$$M^* = (S^{(k)})$$

des vorigen Paragraphen besondere Eigenschaften, die wir jetzt entwickeln wollen. Es handelt sich dabei um eine Verallgemeinerung der Tatsache,

daß $S_0^{(1)} < S_2^{(1)} < S_4^{(1)} < \dots < \dots < S_5^{(1)} < S_3^{(1)} < S_1^{(1)}$ ist, falls die Folge $\{a_\nu\}$ einfach monoton ist. Um den Satz bequem aussprechen zu können, nennen wir eine gegen x konvergente Folge $x_0, x_1, x_2, \dots$ *alternierend*, falls $x_0 < x_2 < x_4 < \dots < \dots < x_5 < x_3 < x_1$ ist. Dann behaupten wir folgendes

Satz: *Bildet man zu der konvergenten⁹⁾ Reihe $s = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$, in der die Folge $\{a_\nu\}$ r -fach (voll-) monoton ist, die Matrix*

$$(M^*), \quad \begin{pmatrix} S_0^{(1)} & S_0^{(2)} & S_0^{(3)} & \dots \\ S_1^{(1)} & S_1^{(2)} & S_1^{(3)} & \dots \\ S_2^{(1)} & S_2^{(2)} & S_2^{(3)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix},$$

so ist in ihr jede Gliederfolge in einer der r ersten Spalten (in allen Spalten) *alternierend*. Betrachtet man aber von der Matrix nur die ersten $(r+1)$ Spalten, so wachsen in dieser Teilmatrix die Glieder der ersten, dritten, fünften, ... Zeile¹⁰⁾, während die der anderen Zeilen abnehmen. (Ist $\{a_\nu\}$ vollmonoton, so gilt dieser zweite Teil des Satzes für die unverkürzten Zeilen der Matrix M^* .)

Beweis: Wir bemerken zuerst, daß der zweite Teil des Satzes eine Folge des ersten ist; denn alternieren etwa die Elemente der λ -ten Spalte, d. h. ist $S_0^{(\lambda)} < S_2^{(\lambda)} < \dots < S_3^{(\lambda)} < S_1^{(\lambda)}$, und bildet man zu $S_\nu^{(\lambda)}$ den rechten Nachbarn in der Matrix M^* , also

$$S_\nu^{(\lambda+1)} = \frac{1}{n_\lambda} \{S_\nu^{(\lambda)} + S_{\nu+1}^{(\lambda)} + \dots + S_{\nu+n_\lambda-1}^{(\lambda)}\},$$

so ist bei geradem ν das erste Glied in der Klammer kleiner als alle übrigen und deshalb $S_\nu^{(\lambda+1)} > S_\nu^{(\lambda)}$; bei ungeradem ν aber ist ebenso $S_\nu^{(\lambda+1)} < S_\nu^{(\lambda)}$, und daraus folgt der zweite Teil des Satzes, falls der erste richtig ist. Ferner bemerken wir, daß wir nur den Fall einer r -fach monotonen Folge $\{a_\nu\}$ zu betrachten, da der andere Fall einer vollmonotonen Folge sich aus jenem ergibt.

Für den Beweis des ersten Teiles setzen wir

$$(1) \quad (-1)^\nu D_\nu S_{\nu-1}^{(m)} = (-1)^\nu (S_{\nu-1}^{(m)} - S_\nu^{(m)}) = f_{m,\nu}^{(0)} \quad (m, \nu = 1, 2, 3, \dots).$$

Dann ist insbesondere

$$(1a) \quad f_{1,\nu}^{(0)} = a_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

⁹⁾ Falls $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu > 0$, die Reihe also divergiert, gilt der Satz auch.

¹⁰⁾ Das sind die Zeilen mit geradem unteren Zeiger.

Weiter sei

$$(2) \quad f_{m,\nu}^{(\lambda)} = D_\nu^\lambda f_{m,\nu}^{(0)} \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots; m, \nu = 1, 2, \dots).$$

Somit folgt für $\lambda = 1$:

$$\begin{aligned} f_{m,\nu}^{(1)} &= (-1)^\nu (S_{\nu-1}^{(m)} - S_\nu^{(m)}) - (-1)^{\nu+1} (S_\nu^{(m)} - S_{\nu+1}^{(m)}) \\ &= (-1)^\nu (S_{\nu-1}^{(m)} - S_{\nu+1}^{(m)}), \quad \text{d. h.} \end{aligned}$$

$$(2a) \quad f_{m,\nu}^{(1)} = (-1)^\nu (S_{\nu-1}^{(m)} - S_{\nu+1}^{(m)}) \quad (m, \nu = 1, 2, \dots).$$

Zwischen den Zahlen $f_{m,\nu}^{(\lambda)}$ besteht nun folgende Gleichung:

$$(3) \quad f_{m+1,\nu}^{(\lambda)} = \frac{1 - (-1)^{n_m}}{2n_m} f_{m,\nu+n_m-1}^{(\lambda)} + \frac{1}{n_m} \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{n_m-1}{2}\right]} f_{m,\nu+2\mu}^{(\lambda+1)} \quad \left(\begin{array}{l} \lambda = 0, 1, 2, \dots \\ m, \nu = 1, 2, \dots \end{array} \right),$$

denn sie ist zunächst einmal für $\lambda = 0$ richtig; setzt man nämlich für diesen Fall in (3) links und rechts für $f_{\nu,\tau}^{(\tau)}$ ($\tau = 0, 1$) die Ausdrücke aus (1) und (2a) ein, so ergibt sich links: $(-1)^\nu (S_{\nu-1}^{(m+1)} - S_\nu^{(m+1)})$ und rechts nach einer einfachen Rechnung: $(-1)^\nu \frac{1}{n_m} (S_{\nu-1}^{(m)} - S_{\nu+n_m-1}^{(m)})$, und diese Ausdrücke sind auf Grund der ersten im Beweis vorkommenden Gleichung wirklich einander gleich. Da nun nach (2) offenbar $D_\nu f_{m,\nu}^{(\lambda)} = f_{m,\nu}^{(\lambda+1)}$ ist, so folgt aus (3), wenn man links und rechts bezüglich ν die Differenz D_ν bildet, die Gleichung (3) erneut, nur mit der Abweichung, daß λ durch $(\lambda + 1)$ ersetzt ist. Ist also (3) für $\lambda = 0$ richtig, so ist diese Gleichung es auch für $\lambda = 1$ und deshalb für $\lambda = 2$ usw.

An die Gleichung (3)¹¹⁾ knüpfen wir nun alle weiteren Folgerungen. Ist nämlich $\{a_\nu\}$ r -fach monoton, so ist nach den Gleichungen (1a) und (2) $f_{1,\nu}^{(\lambda)} > 0$ für jedes λ der Reihe $0, 1, 2, \dots, r$ und $\nu \geq 1$; setzt man nun in (3) $m = 1$ und für λ die Werte $0, 1, 2, \dots, r - 1$, so ist die rechte Seite in (3) positiv, also auch die linke, d. h. es ist $f_{2,\nu}^{(\lambda)} > 0$ für $\lambda = 0, 1, 2, \dots, r - 1$. Setzt man jetzt in (3) $m = 2$ und λ gleich einem

¹¹⁾ Die Gleichung (3) führt durch wiederholte Anwendung zu

$$(4) \quad f_{m+1,\nu}^{(\lambda)} = \sum_k p_{k,0} D^\lambda a_{\nu+k} + \sum_k p_{k,1} D^{\lambda+1} a_{\nu+k} + \dots + \sum_k p_{k,m} D^{\lambda+m} a_{\nu+k}, \quad \left(\begin{array}{l} m, \lambda = 0, 1, 2, \dots \\ \nu = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right).$$

Hierin sind die $p_{k,\mu} \geq 0$ und mindestens einer > 0 ; ferner sind sie von ν unabhängig und der von ν ebenfalls unabhängige Summationsbuchstabe k durchläuft in jeder Summe von 0 an gewisse Werte. Aus (4) folgt leicht (5a) und (5b).

der Werte $0, 1, 2, \dots, r-2$, so erkennt man entsprechend, daß für diese Werte stets $f_{3,\nu}^{(\lambda)} > 0$ ist. Indem man so fortfährt, gelangt man zusammenfassend zu folgenden Bedingungen:

$$(5a) \quad f_{m+1,\nu}^{(0)} = (-1)^\nu (S_{\nu-1}^{(m+1)} - S_\nu^{(m+1)}) > 0 \quad \left(\begin{array}{l} m = 0, 1, 2, \dots, r \\ \nu = 1, 2, \dots \end{array} \right);$$

$$(5b) \quad f_{m+1,\nu}^{(1)} = (-1)^\nu (S_{\nu-1}^{(m+1)} - S_{\nu+1}^{(m+1)}) > 0 \quad \left(\begin{array}{l} m = 0, 1, 2, \dots, r-1 \\ \nu = 1, 2, \dots \end{array} \right).$$

Aus (5b) ergibt sich nun, wenn man $\nu = 2, 4, 6, \dots$ setzt: $S_1^{(m+1)} > S_3^{(m+1)} > S_5^{(m+1)} > \dots, (m = 0, 1, \dots, r-1)$. Dagegen ergibt sich für $\nu = 1, 3, 5, \dots$: $S_0^{(m+1)} < S_2^{(m+1)} < S_4^{(m+1)} < \dots, (m = 0, 1, 2, \dots, r-1)$. Da beide Folgen gegen s streben, schließt man weiter: $S_0^{(m+1)} < S_2^{(m+1)} < S_4^{(m+1)} < \dots < \dots < S_5^{(m+1)} < S_3^{(m+1)} < S_1^{(m+1)}, (m = 0, 1, \dots, r-1)$, was sich auch unter Zuhilfenahme von (5a) ohne Benutzung der Tatsache der Konvergenz ergeben würde. Damit ist gezeigt, daß in M^* die ersten r Spalten alternieren und somit der Satz bewiesen.

Wir bemerken zu dem vorstehenden Beweise noch, daß er sich in dem Falle, in dem $n_1 = n_2 = n_3 = \dots = 2$ ist, viel leichter führen läßt. Dann ergeben sich nämlich die wesentlichen Ungleichheiten (5a) und (5b) einfach aus den Gleichungen (6) und (6a) des § 2. Auch der Teil des Satzes, der sich auf die Zeilen bezieht, ist dann eine unmittelbare Folge der Gleichung (7) in § 2. Ja, es folgt dann sogar, daß die Zeilenbehauptung richtig bleibt, wenn man die Teilmatrix betrachtet, die aus den $(r+2)$ ersten Spalten der Matrix M^* besteht.

Aus (5a) folgt auf Grund von § 2, (2) noch leicht: Ist $\sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{m}{\lambda} (-1)^\lambda a_{\nu+\lambda} > 0$ für $\nu = 1, 2, \dots$ und $m = 0, 1, \dots, r$, so ist auch $\sum_{\lambda=0}^{\infty} g_m(\lambda) (-1)^\lambda a_{\nu+\lambda} > 0$ für $\nu = 1, 2, \dots$ und $m = 0, 1, 2, \dots, r$.

Die Eulersche Transformation ist gerade in dem Falle von Bedeutung, in dem $\{a_\nu\}$ vollmonoton ist; denn dann läßt sich über die erzielte Genauigkeit etwas aussagen. Nach § 2, (8) und (8a), ist nämlich

$$(6) \quad s - s_\nu^{(n)} = (-1)^\nu \sum_{k=n}^{\infty} \frac{D^{k-1} a_{\nu+1}}{2^k} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots).$$

Da nun $\{a_\nu\}$ vollmonoton ist, ist $D^i a_\mu < D^{i-1} a_\mu$, und deswegen folgt

$$(7) \quad 0 < (-1)^\nu (s - s_\nu^{(n)}) < \frac{D^{n-1} a_{\nu+1}}{2^n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) = \frac{D^{n-1} a_{\nu+1}}{2^{n-1}} < \frac{D^{n-2} a_{\nu+1}}{2^{n-1}}.$$

Der Ausdruck $s^{(n)}$ stellt also den Wert s mit einem Fehler dar, der kleiner ist als das Doppelte des ersten nicht benutzten Gliedes $\frac{D^{n-1} a_{\nu+1}}{2^n}$;

oder mit geringerer Schärfe: der kleiner ist als das letzte in $s_v^{(n)}$ auftretende Reihenglied $\frac{D^{n-2} a_{v+1}}{2^{n-1}}$. Will man also insbesondere aus der

Gleichung $s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^{k-1} a_1}{2^k}$ den Wert s mit einem Fehler $< \varepsilon$ berechnen, so hat man in der Folge

$$\frac{D^0 a_1}{2}, \quad \frac{D a_1}{4}, \quad \frac{D^2 a_1}{8}, \dots, \frac{D^{k-1} a_1}{2^k}, \dots$$

vor dem Gliede aufzuhören, daß $< \frac{\varepsilon}{2}$ ist und die vor diesem Gliede stehenden Elemente der Folge zu addieren.

Ich füge noch folgende Bemerkungen hinzu: Da stets

$$s_{2\nu}^{(k+1)} = \frac{1}{2} \{ s_{2\nu}^{(k)} + s_{2\nu+1}^{(k)} \} < s$$

ist, so folgt

$$0 < s_{2\nu+1}^{(k)} - s < s - s_{2\nu}^{(k)},$$

d. h. von zwei Nachbarelementen einer Spalte in $M^{*12})$ ist stets das der bessere Näherungswert, das einen ungeraden unteren Index hat.

Will man bei beliebigem $n_1, n_2, \dots$ eine Abschätzung für den Unterschied zweier Nachbarelemente einer Spalte in M^* haben, so ergibt sich leicht eine solche aus Gleichung (1). Denn wir erhalten zunächst durch Summation aus

$$D S_{\nu-1}^{(m)} = (-1)^{\nu} f_{m,\nu}^{(0)},$$

daß

$$S_0^{(m)} - S_{\mu}^{(m)} = \sum_{\nu=1}^{\mu} (-1)^{\nu} f_{m,\nu}^{(0)}$$

ist. Und hieraus: $S_{\mu}^{(m)} - S_{\mu+p}^{(m)} =$

$$\sum_{\nu=\mu+1}^{\mu+p} (-1)^{\nu} f_{m,\nu}^{(0)} = (-1)^{\mu+1} (f_{m,\mu+1}^{(0)} - f_{m,\mu+2}^{(0)} + \dots + (-1)^{p-1} f_{m,\mu+p}^{(0)})$$

$$(\mu = 0, 1, 2, \dots; m, p = 1, 2, \dots).$$

Da nun $\{a_{\nu}\}$ vollmonoton ist, ist $\{f_{m,\nu}^{(0)}\}_{\nu=1,2,\dots}$ eine vollmonotone Folge; also ist:

$$|S_{\mu}^{(m)} - S_{\mu+p}^{(m)}| < f_{m,\mu+1}^{(0)} = |D_{\mu} S_{\mu}^{(m)}| \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots; m, p = 1, 2, 3, \dots).$$

Insbesondere gilt dies für $p = n_m$. Daher ist wegen

$$D_{\nu} S_{\nu}^{(m+1)} = S_{\nu}^{(m+1)} - S_{\nu+1}^{(m+1)} = \frac{1}{n_m} (S_{\nu}^{(m)} - S_{\nu+n_m}^{(m)}),$$

$$|D_{\nu} S_{\nu}^{(m+1)}| = \frac{1}{n_m} |S_{\nu}^{(m)} - S_{\nu+n_m}^{(m)}| < \frac{1}{n_m} |D_{\nu} S_{\nu}^{(m)}|,$$

¹²⁾ $n_1 = n_2 = \dots = 2$.

d. h.

$$(8) \quad |D_\nu S_\nu^{(m+1)}| < \frac{1}{n_m} |D_\nu S_\nu^{(m)}| \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots)$$

und daraus ergibt sich

$$(8a) \quad |D_\nu S_\nu^{(m+1)}| < \frac{|D_\nu S_\nu^{(1)}|}{n_1 \cdot n_2 \dots n_m} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots).$$

Will man eine gegebene alternierende Reihe, bei der die absoluten Beträge der Glieder vollmonoton sind, mit Hilfe der Eulerschen Transformation berechnen, also nach der Formel

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^{k-1} a_1}{2^k},$$

so hat man zuerst die einzelnen Differenzen $D^0 a_1 = a_1$, $D a_1$, $D^2 a_1$, ... zu berechnen und dann nach Division durch die zugehörigen Potenzen von 2 zu addieren. In denjenigen Fällen, in denen man für diese Differenzen leicht angebbare Ausdrücke besitzt, die bequem zu berechnen sind, wird dieser Weg wohl am einfachsten sein. So ist es z. B. bei $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ und ähnlichen Reihen. Hat man aber solche Ausdrücke nicht, so muß man sich die Differenzen durch fortgesetzte Subtraktionen berechnen; man erhält dann bekanntlich ein Schema von folgender Form:

In der ersten Spalte stehen die absoluten Beträge $a_\nu = D^0 a_\nu$ der Glieder der Reihe $a_1 - a_2 + a_3 - \dots$. In den folgenden Spalten stehen die ersten, zweiten, usw. Differenzen $D a_\nu$, $D^2 a_\nu$, ...

Die zu benutzenden Differenzen sind in jeder Spalte aus der ersten Zeile zu entnehmen; man kann aber statt dessen ebensogut die fortgesetzten arithmetischen Mittel $s_\nu^{(n)}$ oder statt dessen $2^{n-1} s_\nu^{(n)}$ durch fortgesetzte Addition bilden. Das hat dann den Vorteil, daß jede einzelne Zahl des Schemas nach Division durch die betreffende Potenz von 2 einen Näherungswert für die Reihe ergibt und man aus Nachbarelementen einer Spalte eine obere und untere Schranke für den Wert der Reihe erhält, wobei man weiß, welcher von den betrachteten Werten der bessere Näherungswert ist. Dies Verfahren ist natürlich auch dann anwendbar, wenn $\{a_\nu\}$ nicht vollmonoton ist; es gewährt in diesem Falle der zuerst erwähnten Anordnung der Rechnung gegenüber den Vorteil, daß die Zahlen des Schemas allmählich alle das gleiche Vorzeichen erhalten, falls der Wert der Reihe von 0 verschieden ist. Nur weiß man dann ja nichts über die erzielte Genauigkeit, da ja die Eulersche Transformation darüber keine bindenden Schlüsse gestattet.

Ich füge ohne weitere Erläuterungen ein Beispiel bei; es sei die Reihe

$$s = 1 - \frac{0,99}{1,1} + \frac{0,99^2}{1,2} - \frac{0,99^3}{1,3} + \dots$$

gegeben. Wir erhalten folgende Anordnung der Rechnung:

a_v	$s_v^{(1)}$	$2 s_v^{(2)}$	$4 s_v^{(3)}$	$8 s_v^{(4)}$	$16 s_v^{(5)}$	$32 s_v^{(6)}$
1,000 000 000	0,000 000 000	1,000 000 000	2,100 000 000	4,216 750 000	8,437 366 154	16,875 836 931
0,900 000 000	1,000 000 000	1,100 000 000	16 750 000	20 616 154	8 470 777	6 205 139
0,816 750 000	0,100 000 000	1,016 750 000	03 866 154	17 854 623	7 734 362	5 975 007
0,746 383 846	0,916 750 000	87 116 154	13 988 469	9 879 739	8 240 645	6 123 908
0,686 140 007	0,170 366 154	26 872 315	05 891 270	8 360 906	7 883 263	024 628
0,633 993 367	0,856 506 161	79 018 955	12 469 636	9 522 357	8 141 365	92 544
0,588 425 093	0,222 512 794	33 450 681	07 052 721	8 619 008	7 951 179	44 995
0,548 273 784	0,810 937 887	73 602 040	11 566 287	9 332 171	8 093 816	
0,512 635 941	0,262 664 153	37 964 247	07 765 884	8 761 645		
0,480 798 551	0,775 300 094	69 801 637	10 995 761			
0,452 191 038	0,294 501 543	41 194 124				
	0,746 692 581					

$64 s_v^{(7)}$	$128 s_v^{(8)}$	$256 s_v^{(9)}$	$512 s_v^{(10)}$	$1024 s_v^{(11)}$	$2048 s_v^{(12)}$
33,752 042 070	67,504 222 216	135,008 501 277	270,017 027 789	540,034 067 460	1080,068 140 709
180 146	79 061	26 512	39 671	73 249	
098 915	47 451	13 159	3 578		
148 536	65 708	20 419			
17 172	54 711				
37 539					

Hieraus folgt als zu kleiner Wert $s_0^{(12)} = 0,527377022$ und als zu großer Wert $s_1^{(11)} = 0,527377025$, wobei in beiden Werten die letzte Ziffer durch Erhöhung entstanden ist; das arithmetische Mittel aus beiden ist $0,52737702(35)$. Der genaue Wert ist bis auf 8 Stellen nach dem Komma gleich $0,52737702$.

Nach dieser praktischen Anwendung mögen noch folgende theoretischen Bemerkungen erwähnt werden. Die Voraussetzung, daß $\{a_v\}$ vollmonoton ist, bedeutet ein sehr starkes inneres Band zwischen den Zahlen a_v . Ist z. B. der Anfang der Folge $\{a_v\}$ bekannt, so sind die folgenden Elemente durch sehr zahlreiche Ungleichheiten bedingt. Daher kommt es, daß man aus wenigen bekannten Anfangselementen einer vollmonotonen Folge für die zugehörige alternierende Reihe enge Schranken aufstellen kann, die sich einfach daraus ergeben, daß die Glieder in den Spalten der Matrix M^* alternieren. Fängt beispielsweise eine vollmonotone Folge mit 1 an, so liegt der Wert der zugehörigen Reihe zwischen 0,5 und 1; sind die beiden ersten Glieder der Folge $1, \frac{1}{2}$, so ist der Wert der Reihe zwischen 0,625 und 0,75 gelegen. Hat die Folge die drei

Anfangsglieder $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, so liegt die Summe der alternierenden Reihe zwischen $0,6 \dots$ und $0,7083 \dots$. Und ist schließlich von $\{a_n\}$ der Anfang $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, so liegt der Reihenwert zwischen $0,682291\bar{6} \dots$ und $0,69791\bar{6} \dots$. So ist also die Reihe für $\ln 2$ bereits durch ihre ersten vier Glieder in enge Schranken eingeschlossen, weil die Beträge ihrer Glieder eine vollmonotone Folge bilden. Und ähnlich liegt es mit jeder derartigen Reihe.

Diese Abschätzung einer solchen Reihe mit Hilfe der höheren arithmetischen Mittel, die aus den ersten Teilsummen gebildet sind, kann benutzt werden, um folgenden Satz¹³⁾ zu beweisen.

Satz. Ist die Funktionenfolge $\{f_\nu(x)\}$ in dem Intervall $0 < x \leq a$ erklärt und daselbst für jedes x dieses Intervalls mindestens zweifach monoton, sind ferner die beiden Gleichungen $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(x) = 0$, ($0 < x \leq a$), $\lim_{x \rightarrow 0} Df_1(x) = 0$ erfüllt, so genügt die durch

$$F(x) = f_1(x) - f_2(x) + f_3(x) - \dots$$

für $0 < x \leq a$ erklärte Funktion $F(x)$ den Gleichungen:

$$\limsup_{x \rightarrow 0_+} F(x) = \frac{1}{2} \limsup_{x \rightarrow 0_+} f_1(x),$$

$$\liminf_{x \rightarrow 0_+} F(x) = \frac{1}{2} \liminf_{x \rightarrow 0_+} f_1(x).$$

Beweis: Die $F(x)$ definierende Reihe ist zunächst konvergent. Die Teilsummen $s_0^{(1)}, s_1^{(1)}, s_2^{(1)}$ haben folgende Werte: $s_0^{(1)} = 0$, $s_1^{(1)} = f_1(x)$, $s_2^{(1)} = f_1(x) - f_2(x) = Df_1(x)$. Da $\{f_\nu(x)\}$ mindestens zweifach monoton ist, so alternieren auch $s_0^{(2)}, s_1^{(2)}, s_2^{(2)}, \dots$. Nun ist $s_0^{(2)} = \frac{1}{2}f_1(x)$ und $s_1^{(2)} = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}Df_1(x)$, und da nun

$$\frac{1}{2}f_1(x) < F(x) < \frac{1}{2}f_1(x) + \frac{1}{2}Df_1(x)$$

ist, während $\lim_{x \rightarrow 0_+} Df_1(x) = 0$ ist, so ergeben sich hieraus sofort die behaupteten Gleichungen.

Zusatz: Unter den Voraussetzungen des Satzes zieht das Vorhandensein des $\lim_{x \rightarrow 0_+} f_1(x)$ das des $\lim_{x \rightarrow 0_+} F(x)$ nach sich und umgekehrt.

Ist also $\lim_{x \rightarrow 0_+} f_1(x)$ vorhanden (woraus $\lim_{x \rightarrow 0_+} f_\nu(x) = \lim_{x \rightarrow 0_+} f_1(x)$ folgt),

¹³⁾ Man kann natürlich diesen Satz leicht allgemeiner formulieren, indem man das in dem Satz vorkommende Intervall durch eine Punktmenge ersetzt und statt der Zahl 0 irgendeinen Häufungspunkt derselben nimmt, wobei dann natürlich die Voraussetzung über $Df_1(x)$ entsprechend abgeändert werden muß.

und definiert man $F(0)$ durch $\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0_+} f_1(x)$, so ist $F(x)$ für $x = 0$ bei rechtsseitiger Annäherung stetig. Aus diesen Ergebnissen folgt z. B. für

$$F_1(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{1+\nu x} \quad \text{und für} \quad F_2(x) = 1 - \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} - \dots,$$

daß $\lim_{x \rightarrow 0_+} F_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0_+} F_2(x) = 0,5$ ist. Setzt man übrigens $F_1(0) = \frac{1}{2}$, dann hat $F_1(x)$ für $x = 0$ eine Ableitung von rechts, und zwar ist sie, wie man durch Heranziehung von $s_0^{(3)}$ und $s_1^{(3)}$ erkennt, gleich 0,25.

(Eingegangen am 9. Mai 1919.)