Beiträge zur Theorie der Punktmengen. I.

Von

A. Schoenflies in Königsberg i./Pr.

Als eines der allgemeinsten Probleme aus der Theorie der Punktmengen kann man die Aufgabe bezeichnen, die grundlegenden Sätze der *Analysis Situs* mengentheoretisch zu formulieren und zu begründen und die Beziehungen darzulegen, die zwischen den *mengentheoretisch-geometrischen* und den *analytischen* Ausdrucksweisen derselben Begriffe und Sätze obwalten. Die paradoxen Resultate, wie sie z. B. in der eineindeutigen Abbildung der Continua und in der Peanoschen Kurve vorliegen, haben die naiven Vorstellungen der Analysis Situs gründlich zerstört. Um so mehr muß man verlangen, daß die Mengentheorie wiederum Ersatz schafft und die geometrischen Grundbegriffe in einer Weise definiert, die ihnen ihren natürlichen für die Analysis Situs charakteristischen Inhalt wieder zurückgibt. Ist auch die vielgeschmähte Anschauung keine Quelle des Beweises, so scheint es mir doch — wenigstens im Gebiet der Analysis Situs — ein Ziel der Forschung zu sein, den Inhalt der geometrischen Definitionen mit dem Anschauungs*inhalt* in Übereinstimmung zu bringen.

Einen ersten Beitrag zur Lösung dieser Aufgabe hat bekanntlich Herr C. Jordan durch seinen Kurvensatz geliefert; einen zweiten ich kürzlich selbst, indem ich zeigte*), in welcher Weise der Kurvensatz des Herrn C. Jordan einer Umkehrung fähig ist. Dieser Satz besagt bekanntlich, daß eine im Intervall $t_0 \cdots t_1$ umkehrbar eindeutige und stetige Beziehung $x = f(t)$ und $y = \varphi(t)$ — falls zu t_0 und t_1 dasselbe Wertepaar x, y gehört — eine Punktmenge bestimmt, die die Ebene in ein Äußeres und ein Inneres teilt. Es erweist sich aber *nicht jede* Punktmenge, die die Ebene in ein Äußeres und ein Inneres teilt, als eine stetige Kurve. Der *geometrische* Begriff der *Gebietsgrenze*, die eine Scheidung der Ebene in zwei getrennte Gebiete bewirkt, kann daher *nicht* als Äquivalent der *analytischen Stetigkeit* angesehen werden. Er ist vielmehr der weitere; um ihn in den engeren Begriff der stetigen Kurve überzuführen, muß man zu ihm, wie ich a. a. O. zeigte, eine wesentliche Bedingung hinzufügen.

*) Nachr. d. Göttinger Ges. d. Wiss. 1902.

Was diese Bedingung betrifft, so kann man sie als eine Verallgemeinerung derjenigen *axiomatischen* Tatsache ansehen, die dem *Dedekindschen Schnittprinzip* zu Grunde liegt. Dieses Prinzip, das eine eineindeutige Beziehung zwischen dem Zahlenkontinuum und den Punkten einer Geraden herstellt, löst damit für den elementaren Fall einer Geraden die gleiche Aufgabe, die hier für eine beliebige Kurve behandelt wird; es ist geometrisch damit äquivalent, daß zwei auf verschiedenen Seiten einer Geraden liegende Punkte durch ihre Verbindungslinie stets *einen und nur einen* Punkt der Geraden ausschneiden. Die Eigenschaft, die für diejenigen Punktmengen erfüllt sein muß, über die Werte eines Parameters stetig und eineindeutig verteilt werden sollen, ist hiervon die genaue Verallgemeinerung. Sie verlangt, daß zwei auf verschiedenen Seiten der Punktmenge liegende Punkte durch einen Streckenzug verbindbar sind, der *einen und nur einen* Punkt der Punktmenge enthält. Dieser Punkt ist alsdann wieder der *Schnitt* der bezüglichen Kurve mit dem Streckenzug.

Der eben erwähnte Streckenzug kann eine unendliche Zahl von Strecken enthalten; er besitzt aber dann nur *einen einzigen* Grenzpunkt, nämlich den Kurvenpunkt selbst. Das Auftreten solcher Streckenzüge wird verständlich, wenn man beachtet, wie umfassend die Kurvenklasse ist, auf die sich der fragliche Satz bezieht. So gehören zu ihnen auch diejenigen, die aus funktionentheoretischen Fundamentalbereichen ableitbar sind, indem man diese Bereiche den zugehörigen Substitutionen unterwirft; vorausgesetzt nur, daß hierdurch eine Teilung der Ebene in zwei Gebiete der genannten Art entsteht*).

Im Folgenden gebe ich eine ausführliche Darlegung dieser Dinge, die in vieler Hinsicht von dem Beweisgang, den ich in meiner Note befolgte, abweicht, übrigens inhaltlich in vielen Punkten über sie hinausgeht. Ich gehe von den Eigenschaften des einfachen Polygons als geometrischer Grundlage aus und bestimme die bezüglichen Punktmengen so, daß sie sich als natürliche Verallgemeinerungen des einfachen Polygons ergeben.

Wenn die ausführliche Darlegung etwas umständlich ausgefallen ist, so liegt dies an zwei Umständen. Da man nämlich von einer rein geometrischen, resp. mengentheoretischen Problemstellung ausgeht, so entbehrt man die einfachen Hülfsmittel, über die die Analysis verfügt, und hat die ihnen entsprechenden Tatsachen aus den axiomatischen Grundlagen der Geometrie und der Mengenlehre erst abzuleiten. Um dies durchzuführen, konstruiere ich eine Punktmenge, die mit Bezug auf die gegebene überall dicht ist und zu ihr dieselbe Stellung einnimmt, wie die endlichen Dezimal-

*) Ein vorzügliches Beispiel bildet die von Herrn Fricke untersuchte Kurve, die aus einem Kreisbogenvierseit als Fundamentalbereich entsteht. Vgl. diese Annalen, Bd. 44, S. 584 ff.

brüche zur Gesamtheit aller Zahlen. Ich gelange zu ihr mittelst der oben genannten Streckenzüge, die von einem inneren Punkte zu gewissen Kurvenpunkten hinlaufen und sich um ihn immer mehr verdichten. Die zweite Schwierigkeit besteht darin, daß die Natur der verschiedenen Punktmengen außerordentlich mannigfach ist; erst eine allmähliche Analyse aller Möglichkeiten führt auf diejenigen Mengen, die als die einfachsten Typen anzusehen sind, und sich als stetige Kurven in dem obigen Sinne erweisen. Gerade hierin liegt aber die Schwierigkeit des Beweises. Denn der Beweisgang muß auch die Natur derjenigen Punktmengen erkennen lassen, die der oben eingeführten Bedingung *nicht* genügen; er muß ferner erkennen lassen, warum für diese Punktmengen die Umkehrung des Jordanschen Satzes nicht zutrifft.

In gewisser Hinsicht berühren sich die folgenden Untersuchungen auch mit dem Inhalt des von Herrn Hilbert unlängst veröffentlichten Aufsatzes: *Über die Grundlagen der Geometrie**). Dort wird die Umkehrung des Jordanschen Kurvensatzes für einen speziellen Fall (den sogenannten „wahren Kreis") ebenfalls bewiesen. Freilich ist der Ausgangspunkt hier und dort wesentlich verschiedener Art. Während bei den folgenden Untersuchungen nur elementare geometrische Hilfsmittel angewandt werden, und die analytische Darstellung das letzte Ziel der Untersuchung bildet, operiert Herr Hilbert von vornherein mit den umkehrbar eindeutigen und stetigen Transformationen der Zahlenebene in sich. Aus ihnen scheidet er mittelst gewisser Axiome die „Bewegungen" aus, und beweist mit Hilfe dieser Axiome, daß alle Lagen, in die ein Punkt durch diejenigen „Drehungen" übergeht, bei denen ein Punkt fest bleibt, eine Jordansche Kurve bilden (den „wahren Kreis"), die stetig und eineindeutig auf den gewöhnlichen Kreis abbildbar ist. Dies beruht wesentlich darauf, daß der wahre Kreis in einfacher Weise durch die Punkte eines gewöhnlichen Kreises bestimmt ist. Im übrigen spielen auch im Hilbertschen Beweis die Wege, die einen äußeren oder inneren Punkt mit den Punkten des wahren Kreises verbinden, eine wichtige Rolle. Während aber bei ihm die Existenz solcher Wege eine fast unmittelbare Folge seiner Annahmen über die Abbildung ist, ist bei der vorliegenden Untersuchung die Punktmenge *nur* durch die Eigenschaften der Gebietsteilung gegeben; die den Wegen entsprechenden Streckenzüge sowie die auf der Kurve durch sie bestimmte Teilmenge müssen daher konstruktiv Schritt für Schritt erzeugt werden**). Gerade diese konstruktive Erzeugung sowie der Nachweis der aus ihr fließenden, für den Beweisgang nötigen Eigenschaften bilden eine Hauptaufgabe der folgenden Darlegung.

*) Diese Annalen, Bd. 56, S. 381.

**) Dies geschieht hier im wesentlichen ebenso, wie in der S. 195 zitierten Note.

§ 1.

Einige Sätze über ebene Polygone.

Sind $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ beliebige Punkte, so soll die Gesamtheit der Strecken $A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_{n-1}A_n$ als *Streckenzug* oder *Weg* bezeichnet werden. Falls der Streckenzug sich nicht selber kreuzt, möge er *einfach* heißen. Fällt der Endpunkt des Streckenzuges mit dem Anfangspunkt zusammen, so heißt er *geschlossen;* er bildet dann ein *Polygon.* Das Polygon heißt *einfach,* wenn der Streckenzug ein einfacher ist. Alle Polygone, von denen im Folgenden die Rede sein wird, liegen ganz im *endlichen* Gebiet*).

Eine grundlegende Eigenschaft eines einfachen Polygons ist die, daß es die Ebene in ein *Äußeres* und ein *Inneres* zerlegt. Wird ein *einfacher* Weg, der entweder ganz oder doch abgesehen von seinen Endpunkten dem Inneren oder Äußeren des Polygons angehört, als *innerer,* resp. *äußerer Weg* bezeichnet, so lautet der Satz, der die bezügliche Eigenschaft ausdrückt, in ausführlicher Darstellung folgendermaßen:

I. *Jedes einfache ebene Polygon $\mathfrak{P}$ bestimmt in der Ebene $\mathfrak{E}$ drei Punktmengen, nämlich die Punkte des Polygons $\mathfrak{P}$, die Menge $\mathfrak{A}$ der äußeren Punkte und die Menge $\mathfrak{J}$ der inneren Punkte, sodaß*

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{P} + \mathfrak{A} + \mathfrak{J}$$

ist, und folgende Beziehungen statthaben: 1) *Je zwei Punkte von $\mathfrak{J}$ oder $\mathfrak{A}$ lassen sich durch einen einfachen inneren resp. äußeren Weg verbinden, und umgekehrt.* 2) *Auch jeder Punkt von $\mathfrak{P}$ läßt sich mit jedem Punkt von $\mathfrak{J}$ oder $\mathfrak{A}$ durch einen einfachen inneren oder äußeren Weg verbinden; jeder Punkt von $\mathfrak{A}$ läßt sich daher mit jedem Punkt von $\mathfrak{J}$ durch einen Weg verbinden, der nur einen Punkt von $\mathfrak{P}$ enthält.*

Aus diesem Satz folgt noch, daß zwei Wege, die denselben Punkt von $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{J}$ mit demselben Polygonpunkt verbinden, niemals einen weiteren Polygonpunkt einschließen.

Auf den Beweis**) gehe ich nicht näher ein; dagegen ist es für das Folgende nützlich, zu zeigen, wie man die im Satz genannten Wege wirklich ausführen kann.

Auf zwei beliebigen Strecken, die keinen Punkt gemein haben, gibt

---

*) Eine wesentliche Beschränkung ist hierin nicht enthalten. Die Transformation mittelst reziproker Radien kann eine gegebene Punktmenge in eine andere überführen, die im Endlichen liegt, und im Sinn der Analysis situs mit der ersten gleichwertig ist.

**) Wie Herr Hilbert kürzlich hervorgehoben hat, beruht der vorstehende Satz auf der *axiomatischen* Tatsache, daß eine unbegrenzte Gerade die Ebene in zwei durch sie getrennte Gebiete zerlegt; vgl. Grundlagen der Geometrie, S. 7.

es ein Punktepaar, dessen Abstand ein Minimum ist. Ein solches Minimum existiert daher auch für je zwei nicht anstoßende Seiten des Polygons $\mathfrak{P}$. Ist δ das kleinste von ihnen, so ziehe man im Abstand $\varepsilon < 1/2\,\delta$ zu jeder Polygonseite eine äußere Parallele und schlage um jede konvexe Ecke von $\mathfrak{P}$ einen Kreis mit dem Radius ε, so bilden diese Parallelen mit den innerhalb jedes Kreises liegenden Verbindungslinien ihrer Berührungspunkte ein einfaches Polygon $\mathfrak{P}_a$, das im Äußern von $\mathfrak{P}$ verläuft. Analog kann man mittelst innerer Parallelen und der um die konkaven Ecken geschlagenen Kreise ein einfaches Polygon $\mathfrak{P}_i$ konstruieren, das im Innern von $\mathfrak{P}$ verläuft. Beide Polygone haben die Eigenschaft, daß keiner ihrer Punkte von $\mathfrak{P}$ um mehr als ε entfernt ist.

Sind nun a_1 und a_2 zwei äußere Punkte, die mindestens den Abstand η von $\mathfrak{P}$ haben, so zeichne man ein Polygon $\mathfrak{P}_a$, sodaß $\varepsilon < \eta$ und $\varepsilon < 1/2\,\delta$ ist, und ziehe einen einfachen Streckenzug, der von a_1 nach a_2 führt. Enthält er keinen Punkt von $\mathfrak{P}$, so ist er von selbst ein äußerer Weg. Enthält er dagegen einen Punkt von $\mathfrak{P}$, so kreuzt er notwendig auch $\mathfrak{P}_a$; ist a' der erste und a'' der letzte Kreuzungspunkt, so ersetze man das zwischen a' und a'' gelegene Wegstück durch denjenigen Teil des Polygons $\mathfrak{P}_a$, der von a' bis a'' reicht. Der so modifizierte Streckenzug ist dann ein äußerer Weg. Analog verfährt man mit zwei inneren Punkten. Endlich kann man mittelst der Polygone $\mathfrak{P}_a$ und $\mathfrak{P}_i$ auch erreichen, daß ein von einem äußeren zu einem inneren Punkt führender Weg das Polygon nur einmal und zwar an einer beliebig gegebenen Stelle trifft.

Die im Satz I. enthaltenen Eigenschaften sind, soweit das Gebiet der *Analysis situs* in Frage kommt, für den Polygonbegriff grundlegend. Insbesondere fließen aus ihm die bekannten Folgerungen über Teilung, Zusammensetzung und Kreuzung von Polygonen. Ihr Bestehen soll daher als *charakteristisches Merkmal* aller derjenigen Punktmengen angesehen werden, die ich als *Verallgemeinerungen des Polygonbegriffs* einführe. Es gelten dann auch für diese Punktmengen alle die ebengenannten Folgerungen, deren alleinige Quelle der Satz I. ist.

Die nächste Verallgemeinerung des Polygonbegriffs, die ich vornehme, besteht darin, daß die Seitenzahl unendlich groß wird. Um dies durchzuführen, leite ich zuvor einen Hülfsatz über ebene Polygone ab (§ 2). Abgesehen von Satz I. und den eben genannten aus ihm fließenden Folgerungen benutzt er noch die Tatsache, daß bei jedem ein Polygon kreuzenden Streckenzuge die Kreuzungspunkte in *Eintritts-* und *Austrittspunkte* geschieden werden können, und deren gegenseitige Beziehungen.

§ 2.

Beweis eines Hülfsatzes über ebene Polygone.

Sei $\mathfrak{q}$ ein Quadrat mit dem Mittelpunkt O, und A, L, L' Punkte außerhalb $\mathfrak{q}$. Man zeichne (Fig. 1) zwei einfache Streckenzüge

$$\mathfrak{l} = AB \cdots L \quad \text{und} \quad \mathfrak{l}' = AB' \cdots L'$$

und nehme innerhalb von $\mathfrak{q}$ zwei Punkte M und M' in der Weise an, daß $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ mit MOM' ein *einfaches* Polygon

$$\mathfrak{p} = AB \cdots LMOM'L' \cdots B'A$$

bestimmen, von dem keine Ecke auf $\mathfrak{q}$ fällt. Im übrigen kann dieses Polygon das Quadrat beliebig oft kreuzen. Die Schnittpunkte von LM und $L'M'$ mit $\mathfrak{q}$ seien Q und Q'.

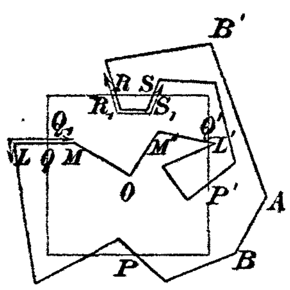

Fig. 1.

Wir verbinden die Punkte A und O durch einen in Bezug auf $\mathfrak{p}$ *inneren* Weg $A \cdots O$. Dieser Weg kreuzt das Quadrat $\mathfrak{q}$ entweder nur einmal, oder es gibt einen Punkt, in dem er $\mathfrak{q}$ zum letzten Mal kreuzt. Sei K der Kreuzungspunkt und PP' dasjenige notwendig existierende Intervall von $\mathfrak{q}$, das K enthält, sodaß P auf dem Streckenzug $\mathfrak{l}$, P' auf $\mathfrak{l}'$ liegt und PP' keinen weiteren Punkt von $\mathfrak{p}$ enthält. Dadurch wird ein Polygon

$$\mathfrak{P} = AB \cdots PP' \cdots B'A$$

bestimmt, das, weil K, also auch die Punkte von PP' innere Punkte von $\mathfrak{p}$ sind, ein Teilpolygon von $\mathfrak{p}$ ist. Es gehört daher O, und damit auch der Streckenzug MOM', zu den *äußeren* Punkten des Polygons $\mathfrak{P}$. Da ferner der von A nach O führende Weg bei K in $\mathfrak{q}$ eintritt, so folgt, daß auch der Streckenzug $\mathfrak{l}$ bei P in $\mathfrak{q}$ *eintritt*, und ebenso $\mathfrak{l}'$ bei P'.

Die Punkte Q und Q' zerlegen $\mathfrak{q}$ in zwei Teile. Einer von ihnen ist dadurch definiert, daß die inneren Punkte von PP' ihm *nicht* angehören; wir bezeichnen ihn durch $\mathfrak{q}'$. Wird er von den Streckenzügen $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ nicht gekreuzt, so besteht er aus lauter *äußeren* Punkten von $\mathfrak{p}$. Dies ist unmittelbar klar, falls P und P' mit Q und Q' identisch sind. Ist aber P von Q verschieden, so folgt es daraus, daß der Streckenzug $\mathfrak{l}$ sowohl bei P, wie auch bei Q in das Quadrat $\mathfrak{q}$ eintritt. Wird dagegen $\mathfrak{q}'$ von $\mathfrak{l}$ oder $\mathfrak{l}'$ gekreuzt, und ist R der erste Kreuzungspunkt von Q aus, so folgert man zunächst wieder, daß QR eine äußere Strecke für $\mathfrak{p}$ ist. Der bei R in $\mathfrak{q}$ eintretende Streckenzug wird dann $\mathfrak{q}$ in einem Punkt S verlassen, der notwendig auf $\mathfrak{q}'$ liegt; denn sonst müßte er den Streckenzug $QMOM'Q'$ kreuzen, was ausgeschlossen ist. Es sind dann entweder alle Punkte von SQ' äußere Punkte von $\mathfrak{p}$, oder es gibt ein in S beginnendes Intervall ST dieser Art, sodaß wieder T ein Kreuzungspunkt von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ ist, und der bei T in $\mathfrak{q}$ eintretende Streckenzug in einem Punkt U austritt, der auf $\mathfrak{q}$ zwischen S und Q' enthalten ist, usw.

Nun sei δ der kleinste Abstand der Streckenzüge $L \cdots A \cdots L'$ und MOM', so konstruiere man auf die in § 1 angegebene Weise mit $\varepsilon < \frac{1}{2}\delta$ das Polygon $\mathfrak{p}_a$. Dieses mag die auf $\mathfrak{q}'$ gelegenen äußeren Strecken $QR, ST, \cdots$ in $Q_1, R_1, S_1, T_1, U_1, \cdots$ schneiden. Alsdann bestimmen die von R_1 bis S_1, von T_1 bis U_1 $\cdots$ reichenden Streckenzüge dieses Polygons $\mathfrak{p}_a$ nebst den Strecken $QR_1, S_1T_1, \cdots$ und dem Streckenzug $QL \cdots A \cdots L'Q'$ ein einfaches Polygon

$$\mathfrak{Q} = A \cdots LQR_1 \cdots S_1T_1 \cdots Q'L' \cdots A,$$

von dem klar ist, daß $\mathfrak{p}$ ein Teilpolygon von ihm ist; denn der ganze Streckenzug $QR_1 \cdots S_1T_1 \cdots Q'$ besteht, von den Endpunkten abgesehen, aus äußeren Punkten von $\mathfrak{p}$. Es ist daher O ein *innerer* Punkt von $\mathfrak{Q}$.

Da $\mathfrak{p}$ Teilpolygon von $\mathfrak{Q}$ ist und $\mathfrak{P}$ Teilpolygon von $\mathfrak{p}$, so ist auch $\mathfrak{P}$ Teilpolygon von $\mathfrak{Q}$. Aus der Definition von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ ist daher ersichtlich, daß das Polygon $\mathfrak{R}$, das $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{Q}$ ergänzt, definiert ist durch

$$\mathfrak{R} = P \cdots LQR_1 \cdots S_1T_1 \cdots Q'L' \cdots P',$$

und daß auch für $\mathfrak{R}$ der Punkt O ein *innerer* Punkt ist.

Die vorstehenden Betrachtungen beruhen, insoweit das Polygon $\mathfrak{p}$ in Betracht kommt, ausschließlich darauf, daß man mit zwei einfachen Streckenzügen

$$ML \cdots A \cdots L'M' \quad \text{und} \quad MOM'$$

operiert, die einander nicht kreuzen und der Bedingung genügen, daß A, L, L' außerhalb und MOM' innerhalb von $\mathfrak{q}$ liegen. Der Verlauf von MOM' innerhalb von $\mathfrak{q}$ kommt jedoch für den Beweis nur insofern in Frage, daß dieser Streckenzug durch O gehen muß.

Die erhaltenen Resultate können daher auch als Eigenschaften der Streckenzüge

$$AB \cdots LM \quad \text{und} \quad AB' \cdots L'M'$$

angesehen werden. Um in diesem Fall das Intervall PP' zu definieren, kann man folgendermaßen verfahren. Man kann zunächst zeigen, daß sich M mit M' durch einen innerhalb $\mathfrak{q}$ verlaufenden Streckenzug $\mathfrak{l}_1$ verbinden läßt, der mit den beiden gegebenen Streckenzügen ein einfaches Polygon $\mathfrak{p}$ bestimmt, und dann PP', wie vorstehend mittelst $\mathfrak{p}$ definieren. Oder aber man definiere, ohne $\mathfrak{l}_1$ zu zeichnen, PP' als dasjenige Intervall von $\mathfrak{q}$, das mit den Streckenzügen $A \cdots P$ und $A \cdots P'$ ein einfaches Polygon $\mathfrak{P}$ bestimmt, das den Punkt A enthält, und, falls es mehrere solche Polygone gibt, so ist $\mathfrak{P}$ dasjenige, das alle andern als Teilpolygone enthält. Mit PP' ist dann wieder der Teil $\mathfrak{q}'$ von $\mathfrak{q}$ bestimmt. Was ferner $\mathfrak{Q}$ betrifft, so beruht seine Bestimmung nur auf der Existenz einer Größe δ und der Möglichkeit, von dem Polygon $\mathfrak{p}_a$ die von R_1 bis S_1, von T_1 bis $U_1 \cdots$ reichenden Streckenzüge zu konstruieren.

Hiervon werden wir in § 3 Gebrauch zu machen haben.

§ 3.

Die Polygone mit unendlich vielen Seiten.

Es handelt sich jetzt darum, den Polygonbegriff auf den Fall auszudehnen, daß die Zahl der Seiten über alle Grenzen wächst.

Sei also

$$\{A_\nu\} = A_1, A_2, A_3, \cdots, A_\nu, \cdots$$

eine Menge unendlich vieler Punkte, so soll die Gesamtheit der Strecken $A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_\nu A_{\nu+1}, \cdots$ wiederum als *Streckenzug* bezeichnet werden. Er heißt *einfach*, falls nur je zwei aneinander grenzende Strecken einen gemeinsamen Punkt besitzen. Dieser Streckenzug hat mindestens einen Grenzpunkt; er kann aber auch unendlich viele haben, die sogar eine beliebige Kurve ausmachen können, und die wir zu dem Streckenzug hinzurechnen.

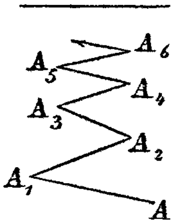

Fig. 2.

Die nebenstehenden Beispiele sollen eine Vorstellung von der großen Mannigfaltigkeit solcher Streckenzüge geben. In Fig. 2 bilden die Häufungspunkte ein Stück einer Geraden g, in Fig. 3 erfüllen sie den Umfang eines Quadrats; man kann diese Beispiele auch so modifizieren, daß die Strecken mit wachsendem ν beliebig klein werden.

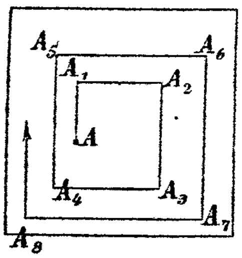

Fig. 3.

Auch diese Streckenzüge lassen sich so kombinieren, daß die von ihnen gebildete Figur, wie das einfache Polygon, die Ebene in ein Äußeres und ein Inneres teilt. Für den Streckenzug von Fig. 2 kann dies z. B. so geschehen, daß man ihn zunächst an g spiegelt, und die so entstandene Figur noch einmal an der Geraden, die A mit dem aus ihm entstandenen Spiegelbild verbindet. Die so entstandene Punktmenge soll jedoch *nicht* als Verallgemeinerung des Polygonbegriffes betrachtet werden, da sie nicht den sämtlichen Eigenschaften von Satz I. genügt. Es ist unmöglich einen auf g enthaltenen Punkt p der Punktmenge mit einem inneren oder äußeren Punkt durch einen Streckenzug zu verbinden, der außer p nur innere oder äußere Punkte enthält.

Aus diesem Grunde beschränken wir uns im Folgenden auf solche Streckenzüge, die nur *einen einzigen* Grenzpunkt A_ω besitzen; er ist dann auch Grenzpunkt der Punktmenge $\{A_\nu\}$. *Nur diese Streckenzüge bezeichnen wir von jetzt an als Wege*, und falls sie sich nicht selber kreuzen, als *einfache Wege.* Bei einem einfachen Weg soll auch ausgeschlossen sein, daß der Punkt A_ω in eine Seite $A_\nu A_{\nu+1}$ hineinfällt. Die Punkte A_1 und A_ω bilden den *Anfangspunkt* und den *Endpunkt* des Weges. Eine *endliche Länge* braucht jedoch ein solcher Weg *nicht* zu besitzen*).

Zwei derartige einfache Wege, die von demselben Anfangspunkt zu demselben Endpunkt laufen, die einander nicht kreuzen und von denen jeder aus einer endlichen oder unendlichen Zahl von Strecken besteht, bezeichne ich nunmehr allgemein als *einfaches Polygon.* Auf sie kann nämlich der Satz I. vollinhaltlich übertragen werden. Naturgemäß kann dies nur so bewiesen werden, daß man stets mit Polygonen von endlicher Seitenzahl operiert; diese sollen, falls es zur Unterscheidung nötig ist, auch als *gewöhnliche* Polygone bezeichnet werden.

Seien also

$$\mathfrak{L} = AA_1A_2 \cdots A_\omega \quad \text{und} \quad \mathfrak{L}' = AA_1'A_2' \cdots A_\omega$$

zwei einfache Wege, die zusammen das einfache Polygon

$$\mathfrak{P} = AA_1 \cdots A_\omega \cdots A_1'A$$

bilden. Man lege (Fig. 4) um A_ω als Mittelpunkt ein Quadrat $\mathfrak{q}_1$, das durch keine Ecke von $\mathfrak{P}$ hindurchgeht; überdies soll A außerhalb von $\mathfrak{q}_1$ liegen. Die letzten Schnittpunkte von $\mathfrak{q}_1$ mit $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ seien Q_1 und Q_1', und es falle Q_1 in die Seite $A_\lambda A_{\lambda+1}$ und Q_1' in die Seite $A_\varrho' A_{\varrho+1}'$; ferner seien

$$\mathfrak{l}_1 = AA_1 \cdots A_\lambda \quad \text{und} \quad \mathfrak{l}_1' = AA_1' \cdots A_\varrho'$$

die von A nach A_λ und A_ϱ' gehenden Teile von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$. Auf sie können wir dann die Betrachtungen von § 2 anwenden. Gemäß § 2 bestimmen wir auf ihnen zwei auf $\mathfrak{q}_1$ liegende Punkte P_1 und P_1' und damit ein Polygon

$$\mathfrak{P}_1 = P_1 \cdots A_1AA_1' \cdots P_1',$$

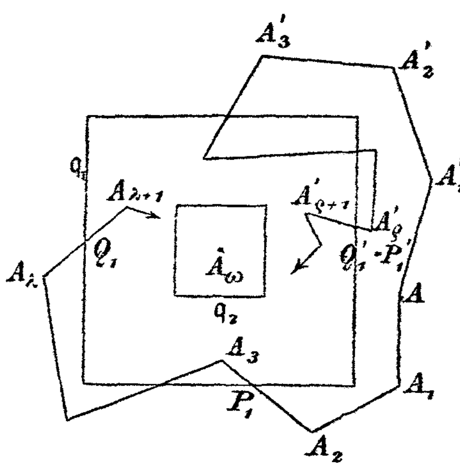

Fig. 4.

sodaß $A_{\lambda+1}$, $A_{\varrho+1}'$ und A_ω zu den *äußeren* Punkten von $\mathfrak{P}_1$ gehören.

Wenn δ den kleinsten Abstand der beiden Streckenzüge

$$A_\lambda \cdots A \cdots A_\varrho' \quad \text{und} \quad A_{\lambda+1} \cdots A_\omega \cdots A_{\varrho+1}'$$

bedeutet, so kann man, wie in § 2, zu denjenigen Teilen von $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_1'$, die innerhalb von $\mathfrak{q}_1$ liegen, mit $\varepsilon < \frac{1}{2}\delta$ die zugehörigen äußeren Streckenzüge konstruieren, und erhält somit wieder das einfache Polygon

$$\mathfrak{Q}_1 = A \cdots A_\lambda Q_1R_1 \cdots S_1T_1 \cdots Q_1'A_\varrho'A.$$

Für dieses Polygon sind $A_{\lambda+1}$, $A_{\varrho+1}'$ und A_ω *innere* Punkte.

*) Die Punkte

$$x = 1/n, \quad y = (-1)^n \cdot 1/n \qquad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

durch Strecken verbunden, liefern einen solchen Weg.

Endlich ist wieder

$$\mathfrak{R}_1 = P_1 \cdots A_\lambda Q_1 R_1 \cdots S_1 T_1 \cdots Q_1' A_\varrho' \cdots P_1'$$

dasjenige Polygon, das $\mathfrak{P}_1$ zu $\mathfrak{Q}_1$ ergänzt; es ist daher A_ω *innerer* Punkt auch von $\mathfrak{R}_1$. Aus der Definition von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ ist überdies klar, daß beide den Streckenzug $P_1 \cdots A \cdots P_1'$ enthalten.

Aus der Bestimmung von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ folgt weiter, daß der Abstand des Punktes A_ω von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ größer als $\frac{1}{2}\delta$ ist. Man kann daher um A_ω als Mittelpunkt ein zu $\mathfrak{q}_1$ paralleles Quadrat $\mathfrak{q}_2$ so legen, daß $\mathfrak{q}_2$ innerhalb $\mathfrak{Q}_1$ und außerhalb $\mathfrak{P}_1$ liegt; es genügt, die Seite von $\mathfrak{q}_2$ kleiner als $\frac{1}{2}\delta\sqrt{2}$ zu nehmen. Wir wählen $\mathfrak{q}_2$ überdies so, daß $A_{\lambda+1}$ und $A_{\varrho+1}'$ zu seinen äußeren Punkten gehören. Mit diesem Quadrat kann man ebenso operieren, wie mit $\mathfrak{q}_1$ und gelangt dadurch zu den drei Polygonen

$$\mathfrak{P}_2 = P_2 \cdots A_1 A A_1' \cdots P_2',$$
$$\mathfrak{Q}_2 = A \cdots A_\mu Q_2 R_2 \cdots S_2 T_2 \cdots Q_2' A_\sigma' \cdots A,$$
$$\mathfrak{R}_2 = P_2 \cdots A_\mu Q_2 R_2 \cdots S_2 T_2 \cdots Q_2' A_\sigma' \cdots P_2',$$

wo $\mu > \lambda$ und $\sigma > \varrho$ ist und $A_\mu A_{\mu+1}$, resp. $A_\sigma' A_{\sigma+1}'$ die letzte Strecke der Streckenzüge $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$, die $\mathfrak{q}_2$ kreuzt. Diese drei Polygone besitzen zu A_ω und zueinander die nämlichen Beziehungen, wie $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{R}_1$. Insbesondere enthalten $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{Q}_2$ beide den Streckenzug $P_2 \cdots A \cdots P_2'$. Ferner aber ist $\mathfrak{P}_1$ Teilpolygon von $\mathfrak{P}_2$, da $\mathfrak{P}_2$ eine Strecke von $\mathfrak{q}_2$ enthält, und $\mathfrak{q}_2$ außerhalb von $\mathfrak{P}_1$ liegt; ebenso folgt, daß $\mathfrak{Q}_2$ Teilpolygon von $\mathfrak{Q}_1$ ist. Was schließlich $\mathfrak{R}_2$ betrifft, so zeigt man leicht, daß es innerhalb des Quadrates $\mathfrak{q}_1$ liegt. Von dem Streckenzug $Q_2 R_2 \cdots Q_2'$ ist es unmittelbar klar, denn er liegt gemäß seiner Definition (§ 2) entweder auf $\mathfrak{q}_2$ oder innerhalb $\mathfrak{q}_2$. Da nun A_ω gemäß Festsetzung von dem Streckenzug $A_\lambda \cdots A \cdots A_\varrho'$ mindestens den Abstand δ besitzt, so können die auf $\mathfrak{q}_2$ liegenden Punkte P_2 und P_2' diesem Streckenzug nicht angehören. Sie liegen daher auf $A_\lambda \cdots A_\omega \cdots A_\varrho'$, und da $A_\lambda A_{\lambda+1}$ und $A_\varrho' A_{\varrho+1}'$ außerhalb von $\mathfrak{q}_2$ liegen, auf $A_{\lambda+1} \cdots A_\omega \cdots A_{\varrho+1}'$. Dieser Streckenzug liegt aber nach Festsetzung innerhalb von $\mathfrak{q}_1$, denn $A_\lambda A_{\lambda+1}$ und $A_\varrho' A_{\varrho+1}'$ sind die letzten Strecken von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$, die $\mathfrak{q}_1$ schneiden. Daher liegt auch $P_2 \cdots A_\mu Q_2$ und $P_2' \cdots A_\sigma' Q_2'$ innerhalb von $\mathfrak{q}_1$, also auch $\mathfrak{R}_2$ selbst.

In dieser Weise kann man fortfahren, indem man eine gegen A_ω konvergierende Reihe von Quadraten

$$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_3, \cdots, \mathfrak{q}_\nu, \cdots$$

benutzt. Man erhält durch sie drei Reihen von Polygonen

$$\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_\nu, \cdots,$$
$$\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \cdots, \mathfrak{Q}_\nu, \cdots,$$
$$\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \cdots, \mathfrak{R}_\nu, \cdots,$$

sodaß je zwei Polygone $\mathfrak{P}_\nu$, $\mathfrak{P}_{\nu+1}$ und $\mathfrak{Q}_\nu$, $\mathfrak{Q}_{\nu+1}$ in der oben angegebenen Beziehung zueinander stehen und $\mathfrak{R}_{\nu+1}$ innerhalb $\mathfrak{q}_\nu$ liegt. Aus der Konstruktion dieser Polygone geht überdies hervor, daß für irgend einen von A_ω verschiedenen Punkt p von $\mathfrak{P}$ stets ein kleinster Index τ existiert, sodaß p den Polygonen $\mathfrak{P}_\tau$ und $\mathfrak{Q}_\tau$ als Polygonpunkt angehört.

Mit Hülfe dieser Polygone beweisen wir den folgenden Satz:

II. *Ist $\mathfrak{P}$ ein einfaches Polygon mit unendlich vielen Seiten, haben $\mathfrak{P}_\lambda$ und $\mathfrak{Q}_\lambda$ die oben angegebene Bedeutung, ist ferner $\mathfrak{J}$ die Menge der Punkte, die für irgend ein λ innere Punkte eines Polygons $\mathfrak{P}_\lambda$, also auch aller Polygone $\mathfrak{P}_{\lambda+\nu}$ sind, und $\mathfrak{A}$ die Menge aller Punkte, die für irgend ein λ äußere Punkte eines Polygons $\mathfrak{Q}_\lambda$ und damit auch aller Polygone $\mathfrak{Q}_{\lambda+\nu}$ sind, so genügen diese Mengen der Gleichung*

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{P} + \mathfrak{A} + \mathfrak{J}$$

und es gilt für sie der Satz I. *des* § 1.

Aus der Definition der Polygone $\mathfrak{P}_\lambda$, $\mathfrak{Q}_\lambda$, $\mathfrak{R}_\lambda$ folgt zunächst, daß jeder Punkt, der *nicht* dem Polygon $\mathfrak{P}$ angehört, für jedes λ entweder dem Innern oder dem Umfang von $\mathfrak{P}_\lambda$ und damit dem *Innern* von $\mathfrak{P}_{\lambda+1}$, oder dem Äußern resp. dem Umfang von $\mathfrak{Q}_\lambda$, also auch dem *Äußern* von $\mathfrak{Q}_{\lambda+1}$, oder aber dem *Innern* von $\mathfrak{R}_\lambda$ angehört. Punkte, die weder zu $\mathfrak{P}$, noch zu $\mathfrak{J}$, noch auch zu $\mathfrak{A}$ gehören, können daher an sich nur solche sein, die für *jedes* λ innere Punkte von $\mathfrak{R}_\lambda$ sind. Da aber $\mathfrak{R}_\lambda$ innerhalb von $\mathfrak{q}_{\lambda-1}$ liegt, so sind diese Punkte zugleich innere Punkte aller $\mathfrak{q}_\lambda$; es giebt aber nur einen solchen Punkt, nämlich A_ω. Da nun A_ω zu $\mathfrak{P}$ gehört, so ist damit die obige Gleichung erwiesen.

Sind nun i' und i'' zwei Punkte von $\mathfrak{J}$, so existiert ein erstes Polygon $\mathfrak{P}_\varrho$, dem beide als innere Punkte angehören. Sie sind mithin durch einen Weg verbindbar, der innerhalb $\mathfrak{P}_\varrho$ liegt und daher zu $\mathfrak{J}$ gehört. Sind a' und a'' Punkte von $\mathfrak{A}$, so gibt es ein erstes Polygon $\mathfrak{Q}_\sigma$, außerhalb dessen sie liegen; sie sind daher durch einen Weg verbindbar, der außerhalb von $\mathfrak{Q}_\sigma$ verläuft, also zu $\mathfrak{A}$ gehört. Ist p ein von A_ω verschiedener Punkt von $\mathfrak{P}$, und i ein Punkt von $\mathfrak{J}$, so gibt es ein erstes Polygon $\mathfrak{P}_\tau$, sodaß i innerhalb und p auf $\mathfrak{P}_\tau$ liegt, woraus die bezügliche Verbindbarkeit von p mit i folgt; ebenso folgt sie für p und einen Punkt von $\mathfrak{A}$. Ist endlich p mit A_ω identisch, und i ein Punkt von $\mathfrak{J}$, der innerer Punkt von $\mathfrak{P}_\tau$, also auch aller $\mathfrak{P}_{\tau+\nu}$ ist, so betrachte man die auf den Quadraten $\mathfrak{q}_\tau, \mathfrak{q}_{\tau+1}, \cdots, \mathfrak{q}_{\tau+\nu}$ liegenden Intervalle

$$P_\tau P'_\tau,\ P_{\tau+1}P'_{\tau+1},\ \cdots,\ P_{\tau+\nu},\ P'_{\tau+\nu},\ \cdots$$

und nehme auf ihnen je einen Punkt

$$P''_\tau,\ P''_{\tau+1},\ \cdots,\ P''_{\tau+\nu}$$

an. Man kann dann i mit P_τ'' durch einen Weg verbinden, der innerhalb $\mathfrak{P}_\tau$ liegt, P_τ'' mit $P_{\tau+1}''$ durch einen Weg, der innerhalb $\mathfrak{P}_{\tau+1}$ und außerhalb $\mathfrak{P}_\tau$ liegt, usw. Die Gesamtheit dieser Wege bildet dann einen *inneren Weg*, der nur A_ω als Grenzpunkt enthält. Analog beweist man die Verbindbarkeit von A_ω mit einem Punkt von $\mathfrak{A}$ durch einen *äußeren Weg*.

Der Satz II. läßt sich auch auf solche Polygone ausdehnen, in die eine endliche Zahl von Streckenzügen mit je einem Grenzpunkt eingeht. Doch ist damit die Grenze der Verallgemeinerungsfäkigkeit des Polygonbegriffes nicht erreicht.

Es ist ersichtlich, daß die in § 1 erwähnten Sätze über Teilung, Zerlegung und Zusammensetzung von Polygonen auch für die hier betrachteten Polygone in Kraft bleiben.

§ 4.

Einige allgemeine Eigenschaften der Punktmengen.

Die Punktmengen, mit denen wir uns zunächst beschäftigen, sind *abgeschlossen*, sodaß ihre Grenzpunkte ihnen zugehören. Eine solche Menge zerfällt nach einem von Herrn G. Cantor herrührenden Satz*) in eine gewisse *abzählbare* Menge *isolierter* Punkte, und eine *perfekte* Menge. Es genügt daher, zunächst perfekte Mengen in Betracht zu ziehen. Da eine perfekte Menge, die in einem Gebiet *überall dicht* ist, *alle* Punkte des Gebiets enthält, so ist sie durch die Grenze des Gebiets hinlänglich charakterisiert; wir werden daher zunächst nur mit *nirgends dichten* Mengen operieren. Für eine solche existiert kein auch noch so kleines Flächenstück, dessen sämtliche Punkte ihr zugehören. Wir nehmen wieder an, daß die zu betrachtenden Mengen ganz im Endlichen enthalten sind**).

Für diese Mengen sind zunächst einige allgemeine Begriffe und Eigenschaften zu erörtern. Ich beginne mit dem Abstandsbegriff.

Für eine jede abgeschlossene Menge $\mathfrak{T}$ lassen sich bekanntlich *stetige* Funktionen des Orts definieren; alle aus dem Stetigkeitsbegriff fließenden Folgerungen gelten für sie in der gleichen Weise wie für das Kontinuum***). Insbesondere gilt auch der Satz, daß eine stetige Funktion des Orts, die eine obere oder untere Grenze besitzt, an mindestens einer Stelle der

---

*) Math. Ann. 23, S. 463 ff.

**) Vgl. die Anmerkung auf S. 198.

***) Vgl. meinen Bericht über Mengenlehre, Jahresbēr. d. deutsch. Math. Ver. Bd. 8, 2, S. 115 ff.

Menge $\mathfrak{T}$ ein Maximum resp. ein Minimum erreicht. Dies führt zu folgender Definition des Abstands eines beliebigen Punktes p der Ebene von der Menge $\mathfrak{T}$. Ist t irgend ein Punkt von $\mathfrak{T}$, und $\varrho(p, t)$ der *Abstand von p und t*, so ist $\varrho(p, t)$ eine in $\mathfrak{T}$ *stetige* Funktion, wie aus elementaren geometrischen Tatsachen folgt. Andrerseits gibt es für alle Größen $\varrho(p, t)$ eine untere Grenze, also auch mindestens einen Punkt von $\mathfrak{T}$, für den sie angenommen wird. Den so bestimmten Minimumswert von ϱ bezeichnen wir als *Abstand $\varrho(p, \mathfrak{T})$ des Punktes p von $\mathfrak{T}$.* Er ist selbst eine stetige Funktion von p, wie ebenfalls leicht gezeigt wird.

In ähnlicher Weise kann man den Abstand *zweier* abgeschlossener Mengen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ definieren. Sind nämlich t und t' zwei ihrer Punkte, so ist $\varrho(t, t')$ stetige Funktion von t und t'; es gibt daher wieder ein Minimum aller Werte $\varrho(t, t')$, das wir durch $\varrho(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}')$ bezeichnen und als Abstand der Mengen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ definieren.

Sei nun $\mathfrak{q}$ ein Quadrat, in dem $\mathfrak{T}$ enthalten ist, und $\mathfrak{E}(\mathfrak{q})$ die Menge aller Punkte, die dem Innern und dem Umfang von $\mathfrak{q}$ angehören. Setzt man dann

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{T} + \mathfrak{M}(\mathfrak{q}),$$

so heißt $\mathfrak{M}(\mathfrak{q})$ die *Komplementärmenge* von $\mathfrak{T}$ bezüglich $\mathfrak{q}$. Kürzer bezeichnen wir die Mengen $\mathfrak{E}(\mathfrak{q})$ und $\mathfrak{M}(\mathfrak{q})$ auch durch $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$, schreiben also

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{T} + \mathfrak{M};$$

es kann dann $\mathfrak{E}$ insbesondere auch die sämtlichen Punkte der Ebene bedeuten.

Um einen Punkt m von $\mathfrak{M}$ lege man jetzt ein Quadrat, dessen innere Punkte ebenfalls zu $\mathfrak{M}$ gehören, und lasse es parallel mit sich so wachsen, daß m sein Mittelpunkt bleibt. Da $\varrho(m, \mathfrak{T})$ stetige Funktion von $\mathfrak{T}$ ist, so gibt es unter diesen Quadraten ein größtes, und auf seinem Umfang liegt *mindestens ein Punkt* von $\mathfrak{T}$. Man lasse das Quadrat nun weiter wachsen, doch so, daß diejenigen Seiten, die Punkte von $\mathfrak{T}$ enthalten, *fest bleiben*, und nur die andern sich weiter von m entfernen. Auf diese Weise werden schließlich sämtliche Seiten fest, und es entsteht ein Rechteck, dessen Inneres zu $\mathfrak{M}$ gehört, während auf *jeder* Seite mindestens ein Punkt von $\mathfrak{T}$ liegt. Dieses Rechteck nenne ich *den zu m gehörigen punktfreien Bereich.*

Dabei ist zu bemerken: 1) Fällt beim Wachstum des Quadrats ein Punkt von $\mathfrak{T}$ in eine Ecke, so können *beide* in der Ecke zusammenstoßende Seiten fest werden (Fig. 5), es kann *eine bestimmte* Seite fest werden (Fig. 6), es kann aber auch das weitere Wachstum des Quadrats so erfolgen, daß eine *beliebige* der beiden Seiten fest wird (Fig. 7). Im letzten Fall wähle man eine von ihnen beliebig als festwerdend. Es liegt dann freilich eine Unbestimmtheit in der Gestalt des Rechtecks vor, doch ist dies ohne Belang. 2) Da $\mathfrak{T}$ im Innern eines Quadrates q liegt, so

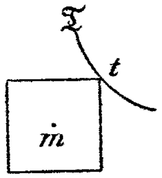

Fig. 5.

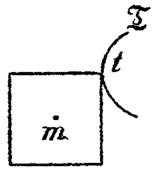

Fig. 6.

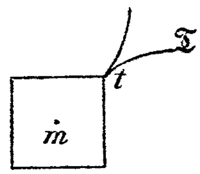

Fig. 7.

kann eine Seite auch dadurch fest werden, daß sie mit einer Seite von q zusammenfällt*).

Der so definierte Bereich hat gemäß seiner Konstruktion die folgenden Eigenschaften:

1) Seine inneren Punkte gehören zu $\mathfrak{M}$. 2) Auf seinem Umfang liegt eine zu $\mathfrak{T}$ gehörige Teilmenge $\mathfrak{T}_m$, die aus einer endlichen oder unendlichen Zahl von Punkten besteht, und sogar die Mächtigkeit des Kontinuums haben kann. 3) *Eine Vergrößerung durch Parallelverschiebung auch nur einer seiner Seiten läßt der Bereich nicht zu.*

Diese Bereiche habe ich bereits in meinem Bericht eingeführt**); sie bilden das Analogon zu den punktfreien Intervallen der linearen Mengen.

§ 5.

Der Begriff des Zusammenhangs.

Der *Zusammenhang* ist sowohl für eine perfekte Menge $\mathfrak{T}$, wie auch für ihre Komplementärmenge $\mathfrak{M}$ zu definieren. Da es sich hier um Eigenschaften allgemeinster Art handelt, so nehme ich $\mathfrak{T}$ zunächst als beliebige perfekte Menge an.

Herr G. Cantor, der allen diesen Dingen zuerst methodisch gerecht geworden ist, benutzt für die Definition des Zusammenhangs den *Abstandsbegriff*. Er definiert eine beliebige Punktmenge T als zusammenhängend***), „wenn für je zwei Punkte t und t' derselben, bei vorgegebener beliebig kleiner Zahl ε immer eine *endliche* Zahl Punkte $t_1, t_2, \cdots t_\nu$ von T auf mehrfache Art vorhanden sind, sodaß die Entfernungen $\overline{tt_1}, \overline{t_1t_2}, \overline{t_2t_3}, \cdots \overline{t_\nu t'}$ sämtlich kleiner sind, als ε.“ Wenn nun auch der Abstand zweier Punkte für die hier vorliegenden Untersuchungen einen axiomatischen geometrischen

*) Der an sich mögliche Fall, daß eine Seite eines neuen Bereiches an eine Seite eines schon vorhandenen stößt, ist hier ausgeschlossen; vgl. § 8.

**) a. a. O. S. 81 ff.

***) Math. Ann. Bd. 21, S. 575.

Grundbegriff bildet, so scheint es mir doch zweckmäßig, rein mengentheoretische Definitionen überall da zu bevorzugen, wo es möglich ist, besonders aber, wenn ihnen der Vorzug theoretischer Einfachheit zukommt. Eine solche Definition ist für eine perfekte Menge $\mathfrak{T}$ möglich; ich definiere nämlich:

Eine perfekte Menge $\mathfrak{T}$ heißt zusammenhängend, wenn sie nicht in Teilmengen zerlegbar ist, deren jede perfekt ist.

Diese Definition findet sich, wie ich nachträglich bemerkte, bereits bei Herrn Jordan*); Herr Study, dem ich sie brieflich mitteilte, hat sich ihr angeschlossen**). Herr Jordan stellt jedoch die Definition nur auf, um aus ihr die Cantorsche Formulierung abzuleiten und dann mit dieser zu operieren. Demgegenüber ist zu bemerken, daß die Definition nicht etwa nur formale Vorzüge besitzt. Es genüge, auf folgendes hinzuweisen. Der Zusammenhang ist eine für die gesamte Analysis situs wichtige und grundlegende Eigenschaft. Da man nun die Analysis situs als diejenige Wissenschaft auffassen kann, die *sich bei den umkehrbar eindeutigen und stetigen Abbildungen invariant verhält****), so muß auch der Zusammenhang der Gebilde bei solchen Abbildungen *invariant* bleiben. In der Tat kann aber diese Eigenschaft aus der obigen Definition auf das einfachste gefolgert werden, was ich hier noch anführen möchte.

Seien nämlich die beiden perfekten Mengen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}_1$ eineindeutig und stetig aufeinander abgebildet, und sei die Menge $\mathfrak{T}$ zusammenhängend. Wäre nun die Menge $\mathfrak{T}_1$ nicht zusammenhängend, so müßte sie in zwei Teilmengen $\mathfrak{T}_1'$ und $\mathfrak{T}_1''$ zerfallen, die beide perfekt sind. Die ihnen bei der stetigen Abbildung entsprechenden Teilmengen $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$ von $\mathfrak{T}$ müßten daher ebenfalls perfekt sein†), was jedoch, da $\mathfrak{T}$ zusammenhängend ist, unmöglich ist.

Ich erwähne noch, daß die Invarianz des Zusammenhangs bei den stetigen aber nur einseitig eindeutigen Abbildungen *nicht* vorhanden ist. Es genüge, auf dasjenige Beispiel als Beleg hinzuweisen, das ich in meinem Bericht ausführlich behandelt habe, und das die Peanosche Abbildung des Quadrats auf die Gerade betrifft††). Einer das Quadrat durchziehenden *Strecke* entspricht nämlich bei dieser Abbildung stets eine *nirgends dichte* auf der Geraden liegende Punktmenge, die als solche in beliebig viele abgeschlossene Punktmengen zerlegbar ist.

---

*) Cours d'analyse, 2. Aufl. Bd. 1, S. 25.

**) Geometrie der Dynamen, S. 248. Als ich Herrn Study die bezügliche briefliche Mitteilung machte, war mir die Stelle des Jordanschen cours d'analyse, unbekannt.

***) So verfährt auch Herr Thomae, Abriß einer Theorie der Funktionen, S. 5.

†) Vgl. meinen Bericht über Mengenlehre, a. a. O. S. 117.

††) a. a. O. S. 121ff.

Wir beschränken uns nunmehr auf *zusammenhängende* Mengen $\mathfrak{T}$.

Um den Zusammenhang für die Menge $\mathfrak{M}$ zu definieren, die Komplementärmenge einer zusammenhängenden Menge $\mathfrak{T}$ ist, verfahre ich folgendermaßen. Sei m irgend ein Punkt von $\mathfrak{M}$, so gibt es jedenfalls andre Punkte von $\mathfrak{M}$, die sich mit m durch einen einfachen Weg verbinden lassen, der ganz zu $\mathfrak{M}$ gehört; man sieht auch leicht, daß ein solcher Weg immer nur eine endliche Zahl von Strecken enthält. Nun ist m entweder mit *jedem* andern Punkt von $\mathfrak{M}$ durch einen solchen Weg verbindbar, oder nicht. Im ersten Fall folgt, daß man auch je zwei Punkte m' und m'' durch einen solchen Weg verbinden kann. Die beiden von m' und m'' nach m führenden Wege stellen ihn nämlich unmittelbar dar, falls sie sich nicht kreuzen; kreuzen sie sich, so liefern ihn die Teilwege bis zum ersten Kreuzungspunkt. Wir definieren daher:

Die Komplementärmenge $\mathfrak{M}$ einer zusammenhängenden perfekten Menge $\mathfrak{T}$ heißt zusammenhängend, resp. zusammenhängendes Gebiet, falls je zwei ihrer Punkte durch einen einfachen Weg verbindbar sind, der ihr ganz angehört).*

Ist die Menge $\mathfrak{M}$ nicht zusammenhängend, so scheiden wir sie in zwei Teilmengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ und zwar auf folgende Weise. Zu $\mathfrak{A}$ rechnen wir die Punkte auf dem Umfang des Quadrates $\mathfrak{q}$, in dem $\mathfrak{T}$ enthalten ist, sowie alle diejenigen, die mit ihnen durch einen einfachen zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Weg verbindbar sind; alle andern rechnen wir zu $\mathfrak{J}$. Zwei Punkte a' und a'' von $\mathfrak{A}$ sind dann wieder durch einen zu $\mathfrak{A}$ gehörigen Weg verbindbar; *die Menge $\mathfrak{A}$ stellt daher ein zusammenhängendes Gebiet dar.* Dagegen ist kein Punkt von $\mathfrak{A}$ mit einem Punkt von $\mathfrak{J}$ durch einen zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Weg verbindbar. Wir bezeichnen daher $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ als *getrennte* Mengen, resp. als solche, die *durch $\mathfrak{T}$ voneinander getrennt sind.*

Da $\mathfrak{T}$ zusammenhängend ist, so schließen zwei Wege, die von einem Punkt m zu einem Punkt m' gehen, entweder *alle* Punkte von $\mathfrak{T}$ ein, oder *keinen.* Nun liefert das Quadrat $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{A}$ gehöriges Polygon, das $\mathfrak{T}$ einschließt. Daraus folgt, daß zwei zu $\mathfrak{J}$ gehörige Wege, die von i zu i' laufen, niemals einen Punkt von $\mathfrak{T}$ einschließen. Denn sonst läge $\mathfrak{T}$ ganz in dem von ihnen gebildeten Polygon $\mathfrak{p}$ und es würden alle zwischen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}$ liegenden Punkte zu $\mathfrak{A}$ gehören, also auch $\mathfrak{p}$, resp. i und i' selbst. *Wir bezeichnen daher $\mathfrak{A}$ als Äußeres, $\mathfrak{J}$ als Inneres bezüglich $\mathfrak{T}$.*

Ist die Menge $\mathfrak{J}$ *nicht* zusammenhängend, so zerfällt sie in zwei Mengen $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_1'$, sodaß $\mathfrak{J}_1$ alle Punkte von $\mathfrak{J}$ enthält, die mit einem beliebig fixierten Punkt i_1 verbindbar sind, und $\mathfrak{J}_1'$ die übrigen. Es sind

*) Diese Definition ist mit der Cantorschen inhaltlich übereinstimmend. Doch dürfte es sich empfehlen, die Definitionen für die Mengen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{M}$ zu sondern. Vgl. auch Study, a. a. O.

daher $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_1'$ getrennte Mengen. Mit $\mathfrak{J}_1'$ kann man ähnlich verfahren, und gelangt so zu dem Resultat, daß $\mathfrak{J}$ in eine Reihe getrennter Teilmengen

$$\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \cdots \mathfrak{J}_\nu, \cdots$$

zerfallen kann, deren jede ein zusammenhängendes Gebiet ist. Die Indizes ν können bis zu transfiniten Ordnungszahlen aufsteigen; die Gebiete lassen sich aber auch so ordnen, daß nur endliche Indizes auftreten, z. B. so, daß man in jedem $\mathfrak{J}_\nu$ den Punkt m_ν beliebig annimmt, und die Gebiete nach der Größe des Abstandes $\varrho(m_\nu, \mathfrak{T})$ ordnet. Es folgt schließlich:

III. *Die Komplementärmenge einer zusammenhängenden Menge $\mathfrak{T}$ bildet entweder ein zusammenhängendes Gebiet, oder sie zerfällt in zwei getrennte Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$, sodaß es in $\mathfrak{J}$ kein Polygon gibt, das $\mathfrak{T}$ einschließt, während in $\mathfrak{A}$ solche Polygone existieren. Die Menge $\mathfrak{A}$ ist stets zusammenhängend, die Menge $\mathfrak{J}$ bildet entweder ein zusammenhängendes Gebiet, oder sie zerfällt in eine endliche oder abzählbare Menge getrennter Gebiete $\mathfrak{J}_\nu$; d. h.*

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{T} + \mathfrak{A} + \sum \mathfrak{J}_\nu.$$

Ist im besonderen $\mathfrak{T}$ wieder eine nirgends dichte Menge, so stellt ein in beliebig viele Teile zerlegtes einfaches Polygon den einfachsten Typus solcher Mengen dar. Es war aber notwendig, die Natur dieser Mengen aus den zu Grunde gelegten Definitionen in allgemeinster Weise abzuleiten.

Die einfachsten zusammenhängenden Mengen $\mathfrak{T}$ sind diejenigen, deren Komplementärmenge in *zwei getrennte Gebiete* zerfällt, oder *selbst zusammenhängend* ist. Auf sie lassen sich die übrigen Mengen $\mathfrak{T}$ zurückführen. Mit ihnen werden wir uns daher zunächst ausschließlich beschäftigen.

§ 6.

Die zu einem zusammenhängenden Gebiet gehörige Gebietsteilung.

Sei also $\mathfrak{T}$ eine nirgends dichte, zusammenhängende Menge, deren Komplementärmenge nur aus einem oder höchstens zwei Gebieten besteht. Irgend eines von ihnen bezeichnen wir jetzt durch $\mathfrak{M}$. Zu jedem Punkt m gehört ein punktfreier Bereich (§ 4). Diese Bereiche stehen zu der Menge $\mathfrak{T}$ in einer einfachen Beziehung. Wie ich in meinem Bericht gezeigt habe*), läßt sich nämlich das Gebiet $\mathfrak{M}$ mit einer abzählbaren Menge solcher Bereiche so bedecken, daß die auf dem Umfang der Bereiche enthaltenen Punkte von $\mathfrak{T}$ nebst deren Grenzpunkten die gesamte Menge $\mathfrak{T}$ konstituieren. *Die Menge $\mathfrak{T}$ steht also zu diesen Bereichen genau*

*) a. a. O. S. 81ff.

in derselben Beziehung, wie die lineare nirgends dichte Menge zu ihren punktfreien Intervallen.

Während es sich in meinem Bericht nur darum handelte, den *Existenzbeweis* für diese Tatsachen zu führen, wollen wir hier eine *spezielle* Konstruktion der Bereiche ausführen, die für die vorliegenden Aufgaben zweckmäßig ist. Um die Begriffe zu fixieren, denken wir uns in der Ebene eine x- und eine y-Achse beliebig angenommen und lassen die Seiten der Bereiche diesen *Achsen* parallel laufen. Um ferner die Betrachtung möglichst einfach zu gestalten, möge der Menge $\mathfrak{T}$ *ein Stück einer Geraden nicht angehören;* ferner soll die zu $\mathfrak{T}$ gehörige Menge $\mathfrak{M}$ in *zwei* Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ zerfallen, und man ziehe zunächst die Menge $\mathfrak{J}$ in Betracht.

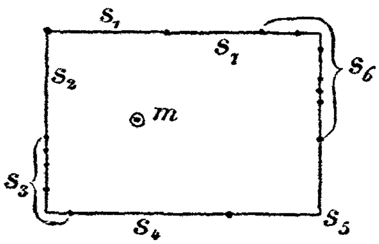

Fig. 8.

Sei m *irgend einer* ihrer Punkte und S der zugehörige punktfreie Bereich. Auf dem Umfang von S liegt dann (Fig. 8) eine endliche oder unendliche Menge von punktfreien Intervallen s', deren innere Punkte zu $\mathfrak{M}$ gehören, während ihre Endpunkte und deren Grenzpunkte eine Teilmenge von $\mathfrak{T}$ konstituieren. Ein solches Intervall s' kann übrigens auf zwei verschiedenen Seiten von S enthalten sein; dies wird immer und nur dann der Fall sein, wenn ein Eckpunkt von S zu $\mathfrak{M}$ gehört.

Die so bestimmte Intervallmenge denken wir uns der Größe nach geordnet, und bezeichnen sie durch

(1) $$\mathfrak{S}' = \{s_\nu'\} = s_1', s_2', s_3', \cdots s_\nu', \cdots.$$

Man fixiere nun eine positive Umlaufsrichtung für den Umfang von S, die wir im folgenden festhalten, und bestimme eine Reihe gegen Null abnehmender Zahlen

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \cdots > \varepsilon_\nu > \cdots.$$

Die Intervalle $s_i' \geqq \varepsilon_1$ teilen den Umfang von S in eine endliche Zahl konsekutiver Teile. Dazu gehören sie selbst, sowie die etwa zwischen je zweien von ihnen enthaltenen Teilintervalle. Diese alle denken wir uns in positiver Reihenfolge durchlaufen, und bezeichnen sie, von irgend einem beginnend, durch

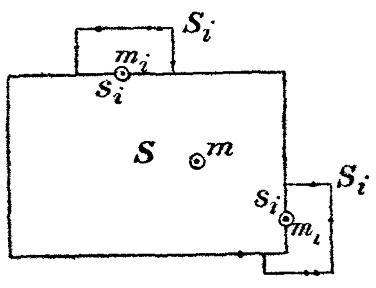

Fig. 9.

(2) $$\mathfrak{S}_1 = \{s_1, s_2, \cdots s_\lambda\},$$

sodaß in diese Menge jedenfalls alle Intervalle $s_i' \geqq \varepsilon_1$ eingehen.

Für jedes zu $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{S}_1$ gehörige Intervall s_i benutzen wir (Fig. 9) nun seinen *Mittelpunkt* als Konstruktionspunkt m_i

für einen neuen punktfreien Bereich S_i; es bleibt dann für S_i von vornherein die Seite fest, auf der m_i liegt. Gehört dem Intervall s_i eine Ecke von S an, so kann der Bereich S_i mit einer oder mit zwei Seiten an S angrenzen (Fig. 9). Den Bereich S bezeichnen wir jetzt noch als Polygon $\mathfrak{P}$.

Die Bereiche S_i bilden mit S zusammen ein Polygon $\mathfrak{P}'$, dessen Inneres zu $\mathfrak{M}$ gehört, während auf seinem Umfang eine Teilmenge $\mathfrak{T}'$ von $\mathfrak{T}$ liegt, die auf $\mathfrak{P}'$ eine Intervallmenge

$$(3) \qquad \mathfrak{S}'' = \{s_\nu''\} = s_1'', s_2'', \cdots s_\nu'', \cdots$$

bestimmt, die wieder der Größe nach geordnet sein soll. Wir definieren nun auf $\mathfrak{P}'$ eine zu $\mathfrak{S}_1$ analoge Intervallmenge $\mathfrak{S}_2$ und zwar folgendermaßen.

Gemäß der angegebenen Konstruktion wird ein Intervall s_i, das einen Punkt m_i enthält, durch einen zu $\mathfrak{P}'$ gehörigen Linienzug $\mathfrak{l}_i$ ersetzt, der durch $\mathfrak{T}'$ in gewisse zu $\mathfrak{S}''$ gehörige Intervalle zerfällt. Unter ihnen mögen solche enthalten sein, die nicht kleiner als ε_2 sind. Füllen sie den Linienzug $\mathfrak{l}_i$ nicht ganz aus, so zerfällt er in sie und die etwa zwischen je zweien von ihnen resp. zwischen seinen Endpunkten liegenden Intervalle. Alle diese, im positiven Sinn durchlaufen, bezeichnen wir durch

$$s_{i1}, s_{i2}, \cdots s_{i\mu};$$

dabei ist zu beachten, daß s_{i1} und $s_{i\mu}$ mit s_i ein Stück gemein haben können. Enthält jedoch $\mathfrak{l}_i$ kein Intervall $s_i'' \geqq \varepsilon_2$, so bezeichnen wir den ganzen Linienzug $\mathfrak{l}_i$ durch s_{i0}.

Ist andrerseits s_i ein solches Intervall von $\mathfrak{S}_1$, das *nicht* zu $\mathfrak{S}'$ gehört, und enthält es kein Intervall $s_i'' \geqq \varepsilon_2$, so bezeichnen wir s_i nunmehr durch s_{i0}, so daß $s_i = s_{i0}$ ist. Dasselbe soll geschehen, wenn s_i ein einziges Intervall $s_i'' \geqq \varepsilon_2$ darstellt, sodaß also $\varepsilon_1 > s_i'' \geqq \varepsilon_2$ ist. In jedem andern Fall *zerfällt* s_i in mindestens ein resp. mehrere Intervalle $s_i'' \geqq \varepsilon_2$ und in die etwa zwischen je zweien von ihnen resp. zwischen seinen Endpunkten liegenden Intervalle; alle diese, in positiver Reihenfolge durchlaufen, bezeichnen wir alsdann durch

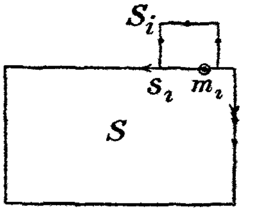

Fig. 10.

$$s_{i1}, s_{i2}, \cdots s_{i\mu}.$$

Auf diese Weise ist der ganze Umfang von $\mathfrak{P}'$ in lauter Intervalle s_{ik} zerlegt; sie konstituieren die Intervallmenge

$$(4) \qquad \mathfrak{S}_2 = \{s_{ik}\},$$

in die jedenfalls alle Intervalle $s_i'' \geqq \varepsilon_2$ eingehen.

Ein Intervall s_{ik} kann, wie Fig. 10 zeigt, außer auf *einer*, *zwei* oder auch auf *drei* Seiten von $\mathfrak{P}'$ enthalten sein.

Wir fahren nun in der Konstruktion der Bereiche fort. Für jedes Intervall s_{ik}, das keine konkave Ecke von $\mathfrak{P}'$ enthält, benutzen wir seinen

Halbierungspunkt m_{ik} als Konstruktionspunkt eines Bereiches S_{ik}. Falls jedoch s_{ik} eine konkave Ecke enthält, so soll diese (Fig. 11) den Punkt m_{ik} abgeben; dann bleiben für m_{ik} von vornherein zwei Bereichseiten fest. Alle diese Bereiche S_{ik} bilden mit $\mathfrak{P}'$ zusammen ein Polygon $\mathfrak{P}''$, dessen Inneres zu $\mathfrak{M}$ gehört, während sein Umfang eine Teilmenge $\mathfrak{T}''$ von $\mathfrak{T}$ enthält, die auf $\mathfrak{P}''$ eine gewisse Menge punktfreier Intervalle

(5) $$\mathfrak{S}''' = \{s_\nu'''\} = s_1''', s_2''', \cdots s_\nu''', \cdots$$

bestimmt.

Wir definieren nun wieder eine auf $\mathfrak{P}''$ liegende Intervallmenge $\mathfrak{S}_3$. Jedes Intervall s_{ik} von $\mathfrak{S}_2$, das zugleich zu $\mathfrak{S}''$ gehört, wird durch unsre Konstruktion durch einen zu $\mathfrak{P}''$ gehörigen Linienzug $\mathfrak{l}_{ik}$ ersetzt. Liegt auf ihm kein Intervall $s_i''' \geqq \varepsilon_3$, so bezeichnen wir ihn durch s_{ik0}; enthält jedoch $\mathfrak{l}_{ik}$ solche Intervalle, so bezeichnen wir sie, sowie die etwa zwischen je zweien von ihnen resp. zwischen den Endpunkten von $\mathfrak{l}_{ik}$ liegenden Teilintervalle, in positiver Reihenfolge durch

$$s_{ik1}, s_{ik2}, \cdots s_{ik\nu}.$$

Ist dagegen s_{ik} ein Intervall, das *nicht* zu $\mathfrak{S}''$ gehört, und enthält es kein Intervall $s_i''' \geqq \varepsilon_3$, so bezeichnen wir es durch s_{ik0}; ebenso, falls es ein einziges Intervall $s_i''' \geqq \varepsilon_3$ darstellt; es ist also $s_{ik} = s_{ik0}$. In jedem andern Fall *zerfällt* s_{ik} und enthält mindestens ein Intervall $s_i''' \geqq \varepsilon_3$; alsdann bezeichnen wir diese Intervalle und die etwa zwischen ihnen resp. den Endpunkten von s_{ik} liegenden Teilintervalle durch

$$s_{ik1}, s_{ik2}, \cdots s_{ik\nu}.$$

Auf diese Weise ist der ganze Umfang von $\mathfrak{P}''$ in lauter Intervalle s_{ikl} zerfällt, die zusammen die Menge

(6) $$\mathfrak{S}_3 = \{s_{ikl}\}$$

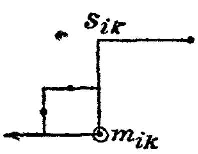

Fig. 11.

ausmachen, die alle Intervalle $s_i''' \geqq \varepsilon_3$ entlhält.

Auch die Intervalle s_{ikl} sind *höchstens auf drei* Seiten von $\mathfrak{P}''$ enthalten. Dies beruht darauf, daß (Fig. 11) bei den Intervallen s_{ik}, in die eine konkave Ecke fällt, diese Ecke als Punkt m_{ik} benutzt wird, und daß auf jedem Intervall s_{ik}, das auf drei Seiten von $\mathfrak{P}'$ liegt, eine solche Ecke vorhanden ist (Fig. 10).

In dieser Weise fahren wir fort. Wir gelangen so zu den Bereichen

(7) $$S, S_i, S_{ik}, S_{ikl}, \cdots S_N,$$

wo N eine Gruppe von ν Indizes bedeutet, zu den Polygonen

(8) $$\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \mathfrak{P}'', \mathfrak{P}''', \cdots \mathfrak{P}^{(\nu)}, \cdots,$$

deren Inneres stets zu $\mathfrak{M}$ gehört, und zu den auf ihnen liegenden Intervallmengen

$$(9) \qquad \mathfrak{S}', \mathfrak{S}'', \mathfrak{S}''', \cdots \mathfrak{S}^{(\nu)}, \mathfrak{S}^{(\nu+1)},$$

resp.

$$(10) \qquad \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3, \cdots \mathfrak{S}_\nu, \mathfrak{S}_{\nu+1},$$

sodaß $\mathfrak{S}_\nu = \{s_N\}$ alle Intervalle $s_i^{(\nu)} \geqq \varepsilon_\nu$ enthält und jedes s_N *höchstens auf drei* Seiten von $\mathfrak{P}^{(\nu-1)}$ liegen kann.

Die so definierten Bereiche S_N bezeichne ich als eine *zu $\mathfrak{M}$ gehörige einfache Gebietsteilung.*

Wir haben im Vorstehenden die Menge $\mathfrak{M}$ als eine Menge $\mathfrak{J}$ vorausgesetzt. Ist sie eine Menge $\mathfrak{A}$, oder gehört zu $\mathfrak{T}$ nur eine einzige zusammenhängende Komplementärmenge $\mathfrak{M}$, so benutzen wir die Ecken des Quadrats $\mathfrak{q}$, in dem $\mathfrak{T}$ liegt, als erste Punkte für die Konstruktion der Bereiche. Wir beginnen mit irgend einer Ecke, verfahren ebenso mit einer zweiten, die nicht bereits dem zur ersten konstruierten Bereich angehört, und eventuell noch mit der dritten und vierten. Wir erhalten dann ein erstes Polygon $\mathfrak{P}'$, dessen *Äußeres* zu $\mathfrak{M}$ gehört, während auf seinem Umfang eine Teilmenge $\mathfrak{T}'$ liegt, und auch hier jedes punktfreie Intervall auf *höchstens drei* Seiten von $\mathfrak{P}'$ enthalten ist. Mit diesem Polygon verfahren wir nun analog wie oben, und gelangen zu den gleichen Resultaten, wie für die Menge $\mathfrak{J}$, nur mit dem Unterschied, daß hier das *Äußere* aller Polygone $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ zu $\mathfrak{M}$ gehört.

Es erübrigt noch die Frage, ob ein Bereich S_N an einen bereits vorhandenen Bereich S_M angrenzen kann. Ist dies der Fall, so kann der ihnen gemeinsame Punkt nicht zu $\mathfrak{M}$ gehören. Denn gäbe es einen solchen Punkt m, und faßt man ihn zunächst als Punkt von S_M auf, so könnte man einen zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Weg legen, der von m_0 über $m_i, m_{ik}, \cdots$ nach m_M und zuletzt nach m führte, und ebenso einen Weg von m_0 über m_N nach m. Diese beiden Wege bilden dann ein Polygon $\mathfrak{p}$, das zu $\mathfrak{M}$ gehört, und es würden Punkte von $\mathfrak{T}$ sowohl außerhalb wie innerhalb von $\mathfrak{p}$ liegen, was ausgeschlossen ist.

Es können daher S_M und S_N nur Punkte von $\mathfrak{T}$ gemein haben. Dies ist aber auch möglich. Da $\mathfrak{T}$ nach Annahme kein Stück einer Geraden enthalten sollte, so folgt weiter, daß nur ein Eckpunkt von S_M mit einem Eckpunkt von S_N zusammenfallen kann. Dadurch wird aber die weitere Konstruktion der Bereiche nicht modifiziert; ebensowenig wird die eindeutige Bestimmtheit der Polygone $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ und der Mengen $\mathfrak{S}^{(\nu)}$ resp. $\mathfrak{S}_\nu$ dadurch geändert.

Ich bemerke noch, daß, wenn S_M und S_N den Punkt t gemein haben, die beiden von m_0 nach t durch S_M resp. S_N führenden Wege ein Polygon $\mathfrak{p}$ bilden, sodaß sowohl sein Äußeres wie sein Inneres Punkte von $\mathfrak{T}$ enthält.

§ 7.
Die einfache geschlossene Kurve.

Der allgemeine *Kurvenbegriff der Analysis* hat im Lauf der Zeit einen außerordentlich ausgedehnten Inhalt angenommen. Ihn durch eine äquivalente mengentheoretische Definition zu erschöpfen, ist ausgeschlossen. Es genüge, auf zwei Beispiele hinzuweisen. Der Peanoschen Kurve, bei der x und y eindeutige und stetige Funktionen einer Variablen sind, gehören alle Punkte eines Quadrates an. Bei der mengentheoretischen Definition kann aber die Punktmenge immer nur als *Ganzes* in Betracht kommen; andrerseits gehört es zu den elementarsten Erfordernissen der Analysis situs, die *Dimension* als *Invariante* zu betrachten und zwischen *Strecke* und *Fläche* zu unterscheiden, sodaß hier ein prinzipieller Gegensatz zu Tage tritt.

Ein zweites Beispiel ist das folgende. Wird eine *Epicykloide* so bestimmt, daß die beiden Kreisradien in einem irrationalen Verhältnis stehen, so besteht sie aus unendlich vielen einfachen Bögen, die einen Kreisring *überall dicht* erfüllen, ohne daß ihr jedoch jeder Punkt des Kreisringes zugehört. Hier sind also x und y in der Weise stetige und eindeutige Funktionen einer Variablen, daß die durch sie dargestellte Punktmenge *nicht abgeschlossen* ist, während es doch ein grundlegendes Erfordernis der *Geometrie* ist, unter den Begriffen Kurve, Fläche usw. *abgeschlossene* Mengen zu verstehen.

Angesichts dieser Schwierigkeit halte ich es für zweckmäßig, die Definitionen zunächst so eng wie möglich zu fassen und von solchen Punktmengen auszugehen, die Vertreter der einfachsten Kurventypen sind. Dabei lasse ich mich von einer doppelten Überlegung leiten. Wie bereits oben bemerkt wurde (§ 5), dürfte es im Sinn der Analysis situs liegen, die Bezeichnungen so zu wählen, daß sie bei *eineindeutigen und stetigen* Abbildungen *invariant* bleiben, genau wie die Dimension und der Zusammenhang. Zweitens aber sollen sie den natürlichen Verallgemeinerungen der einfachsten Figuren entsprechen, zumal derjenigen, die sich mit Streckenzügen bilden lassen, d. h. des einfachen Polygons.

Eine der wichtigsten geometrischen Eigenschaften der *einfachen geschlossenen Kurve* ist die, daß sie, genau wie das Polygon, eine *einfache Gebietsgrenze* ist, also die Ebene in zwei durch sie getrennte Punktmengen teilt, in ein *Äußeres* $\mathfrak{A}$ und ein *Inneres* $\mathfrak{J}$. Doch fällt, analog zu den Ausführungen von § 3, nicht jede Punktmenge, die eine solche Teilung bewirkt, unter den einfachen Kurvenbegriff. Man betrachte nur die im Beginn des § 3 erwähnten Beispiele, die sich auf Kurven übertragen lassen*). Die einfache Kurve erhalten wir dann erst, wenn wir für die Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ die dem einfachen Polygon zugehörigen und im Satz I enthaltenen Eigenschaften voraussetzen. Wir definieren also:

Wenn eine perfekte Menge $\mathfrak{T}$ die Ebene in zwei Teilmengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ zerlegt, die den Bedingungen des Satzes I genügen, so heißt sie eine geschlossene einfache Kurve.

Für eine geschlossene einfache Kurve $\mathfrak{T}$ sind demnach die Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ so definiert, daß je zwei innere, resp. je zwei äußere Punkte durch einen gewöhnlichen inneren resp. äußeren Weg verbindbar sind, und daß auch *jeder* Kurvenpunkt t mit *jedem* äußeren und *jedem* inneren Punkt durch einen Weg verbindbar ist, der von t abgesehen, nur äußere resp. innere Punkte enthält. Ein äußerer und ein innerer Punkt können daher so verbunden werden, daß der Verbindungsweg *nur einen* Kurvenpunkt enthält; einen muß er aber auch mindestens enthalten.

§ 8.

Allgemeine Eigenschaften der zu einer einfachen geschlossenen Kurve gehörigen Gebietsteilung.

1) *Ist $\mathfrak{T}$ eine einfache geschlossene Kurve, so fällt bei der zum Innern oder Äußeren gehörigen Gebietsteilung niemals ein Punkt eines Bereiches S_N mit einem Punkt eines Bereiches S_M zusammen.*

Man betrachte zunächst die zur Menge $\mathfrak{J}$ gehörigen Bereiche. Gäbe es nun einen den Bereichen S_M und S_N gemeinsamen Punkt, so könnte man zu diesem Punkt, wie in § 6, von m aus einen Weg sowohl durch S_M, wie durch S_N hindurchlegen, und diese beiden Wege würden ein Polygon liefern, das in seinem Innern, wie in seinem Äußern Punkte von $\mathfrak{T}$ enthält**). Das steht aber damit in Widerspruch, daß bei den hier betrachteten Mengen *jeder* Punkt t mit *jedem* innern und *jedem* äußern Punkt durch einen innern resp. äußern Weg verbunden werden kann. Daraus folgt noch, daß die sämtlichen Polygone $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ gewöhnliche Polygone sind.

Das gleiche folgt für die Bereiche, die zur Gebietsteilung der Menge $\mathfrak{A}$ gehören.

2) *Sei s' irgend ein punktfreies Intervall der Menge $\mathfrak{S}' = \{s_\nu'\}$* (§ 6), *und m irgend ein auf ihm liegender Punkt von $\mathfrak{M}$, so gibt es einen angebbaren Bereich S_N, dem m angehört.*

---

*) Ein einfaches Beispiel stellt auch ein in einem Rechteck enthaltenes endliches Stück der Kurve $y = \sin 1/x$ dar.

**) Wie z. B. ein Kreis mit einem seiner Radien.

Sei nämlich m' der Konstruktionspunkt von s'. Wenn dann (Fig. 12) der zu m' gehörige Bereich S' den Punkt m nicht enthält, so endet er in einem zwischen m und m' gelegenen Punkt m_1, der eine konkave Ecke eines gewissen Polygons $\mathfrak{P}^{(i)}$ (§ 6) ist. Das Intervall, das diesen Punkt m_1 enthält, gehört einer gewissen Menge $\mathfrak{S}_k$ an; es ist als solches durch s_K zu bezeichnen, und besitzt den Punkt m_1 als Konstruktionspunkt m_K, wo K eine Gruppe von $\varkappa$ Indizes bedeutet. Wenn dann der zugehörige Bereich S_K den Punkt m noch nicht enthält, so endet er in einem zwischen m_K und m gelegenen Punkt, der wieder ein Konstruktionspunkt m_L eines Intervalles s_L ist, usw. Ist nun δ das Minimum aller Abstände $\varrho(mm', \mathfrak{T})$ so hat jeder zu einem Punkt von mm' konstruierte Bereich mindestens die Breite δ, wie aus der Definition dieser Bereiche unmittelbar ersichtlich ist. Unsre Konstruktion kommt daher nach einer endlichen Zahl von Schritten zu Ende. Es gibt also auch einen Bereich S_N, der den Punkt m enthält.

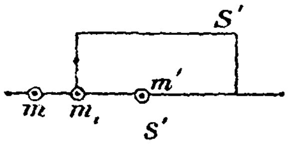

Fig. 12.

Der vorstehende Satz gilt auch für jedes Intervall irgend einer Menge $\mathfrak{S}^{(\mu)} = \{s_\nu^{(\mu)}\}$; also:

3) *Sei $s^{(\mu)}$ irgend ein punktfreies Intervall einer Menge $\mathfrak{S}^{(\mu)} = \{s_\nu^{(\mu)}\}$, und m ein auf ihm liegender Punkt von $\mathfrak{M}$, so gibt es einen angebbaren Bereich S_N, dem m angehört.*

Der Beweis wird ebenso geführt, wie der Beweis von Satz 1).

4) *Sei $\mathfrak{r}$ irgend ein rechteckiger Bereich, dessen Inneres zu $\mathfrak{M}$ gehört, so kann es nicht unendlich viele aneinandergrenzende Bereiche S_N geben, die das Rechteck $\mathfrak{r}$ durchsetzen.*

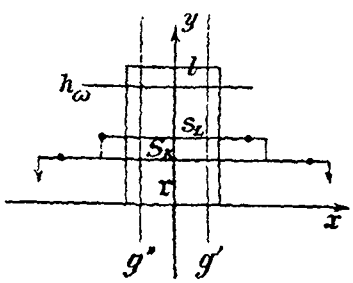

Fig. 13.

Angenommen, es gäbe unendlich viele solche Bereiche, sei S_K einer von ihnen, und s_L dasjenige auf ihm enthaltene punktfreie Intervall, das $\mathfrak{r}$ durchdringt. Wir wählen die zu s_L senkrechte Mittellinie von $\mathfrak{r}$ als y-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems und legen die x-Achse so, daß die im folgenden zu betrachtenden Bereiche positive Ordinaten besitzen (Fig. 13). Die Breite des Rechtecks $\mathfrak{r}$ sei $2d$. Ferner sei h_ω die Gerade, gegen die sich die Bereiche S_N verdichten, und es seien

$$y = \eta_\omega \quad \text{und} \quad y = e; \quad \eta_\omega \leqq e$$

die Gleichungen der Geraden h_ω und der oberen Grundlinie l von $\mathfrak{r}$.

Seien nun g' und g'' zwei durch die Gleichungen

$$x = d - \varepsilon, \quad x = -d + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < d$$

gegebene Geraden. Wenn dann der Konstruktionspunkt m_L des Intervalls s_L

zwischen g' und g'' liegt, so ist die Höhe h_L des zugehörigen Bereiches S_L im allgemeinen mindestens gleich ε. Nur in dem Fall, daß der Abstand des Bereiches S_L von der Geraden l kleiner als ε ist, kann auch $h_L < \varepsilon$ sein; es würde aber dann der Bereich S_L bis an l heranreichen. Da aber die Höhen der Bereiche gegen Null konvergieren, wenn es unendlich viele solche Bereiche gibt, so folgt, daß der Konstruktionspunkt m_L nur für eine *endliche* Zahl von Bereichen zwischen g' und g'' fällt. Da ε beliebig ist, so gilt dies auch für das Innere von $\mathfrak{r}$ selbst.

Sei nun der Bereich S_K so gewählt, daß für ihn und alle folgenden Bereiche dies nicht mehr der Fall ist; wir nehmen an, der Punkt m_L habe eine *positive* Abscisse. Der zugehörige Bereich S_L kann dann an sich noch außerhalb $\mathfrak{r}$ liegen; gemäß Satz 4) gibt es aber einen angebbaren Bereich, der in $\mathfrak{r}$ eindringt und daher auch $\mathfrak{r}$ durchdringt; wie aus den in § 4 angegebenen Eigenschaften dieser Bereiche hervorgeht, kann er nicht innerhalb $\mathfrak{r}$ endigen. Dieser Bereich (Fig. 14) sei S'; sei

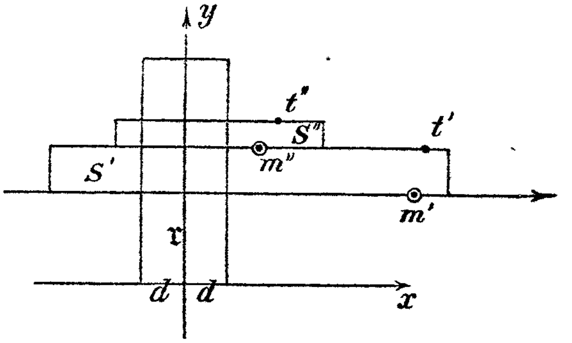

Fig. 14.

m' der Konstruktionspunkt, zu dem er gehört, ξ' dessen Abscisse, und h' die Höhe von S'. Gemäß seiner Definition enthält dieser Bereich auf derjenigen Seite, die $\mathfrak{r}$ durchdringt, im Intervall

$$\xi' - h' \cdots \xi' + h' + h_K{}^{*)}$$

mindestens einen Punkt t' von $\mathfrak{T}'$; ist ξ_t' seine Abscisse, so ist also

(1) $$\xi_t' \leqq \xi' + h' + h_K.$$

Mit demjenigen Intervall dieses Bereiches, das $\mathfrak{r}$ durchdringt, verfahren wir nun ebenso. Wenn der zu seinem Konstruktionspunkt gehörige Bereich noch außerhalb $\mathfrak{r}$ liegt, so gibt es einen angebbaren Bereich S'', der $\mathfrak{r}$ durchdringt. Der Konstruktionspunkt m'' dieses Bereiches kann dann ebenfalls eine positive Abscisse ξ'' haben; ist dies der Fall, so ist m'' Mitte eines Intervalls, dessen linker Endpunkt links von $\mathfrak{r}$ liegt, es ist also, wie man leicht findet,

(2) $$\xi'' < \frac{\xi_t' - d}{2} \leqq \frac{\xi' + h' + h_K - d}{2}.$$

Ferner enthält S'' auf der Gegenseite von m'' wieder einen Punkt t'', so daß diesmal

(3) $$\xi_t'' \leqq \xi'' + h''$$

*) Der Summand h_K entspricht der Möglichkeit, daß m' auch auf derjenigen freien Seite von S_K liegen kann, die zur y-Achse parallel ist, und deren Länge h_K ist.

ist. Hat auch der Konstruktionspunkt m''' des nächsten Bereiches S''', der $\mathfrak{r}$ durchsetzt, eine positive Abscisse ξ''', so folgt ebenso

$$(4)\qquad \xi''' < \frac{\xi_t'' - d}{2}, \quad \xi_t''' \leqq \xi''' + h''',$$

und falls sich dies ϱ-mal wiederholt, sodaß auch $\xi^{(\varrho+1)} > 0$ ist, so ist

$$(5)\quad \xi^{(\varrho+1)} < \frac{\xi'}{2^\varrho} + \frac{h' + h_K}{2^\varrho} + \frac{h''}{2^{\varrho-1}} + \cdots + \frac{h^{(\varrho)}}{2} - \frac{d}{2^\varrho} - \frac{d}{2^{\varrho-1}} - \cdots - \frac{d}{2}.$$

Diese Ungleichung zeigt, daß $\xi^{(\varrho)}$ nicht beständig positiv sein kann; man kann ja S_K so wählen, daß sogar

$$h_K + h' + h'' + \cdots + h^{(\varrho)}$$

beliebig klein wird.

Der Konstruktionspunkt $m^{(\varrho)}$ tritt daher für ein gewisses ϱ auf die linke Seite der y-Achse; er kann aber auch nicht immer links bleiben, er tritt alsdann wieder nach rechts und *dies wiederholt sich unaufhörlich.*

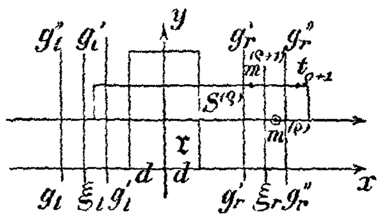

Fig. 15.

Wir projizieren jetzt (Fig. 15) die Punkte $m', m'', \cdots m^{(\varrho)}, \cdots$ auf die x-Achse. Die Projektionspunkte $\xi', \xi'', \cdots \xi^{(\varrho)}, \cdots$ besitzen links und rechts von der y-Achse je einen Grenzpunkt, dessen Abscisse ξ_l und ξ_r, absolut genommen, ein Minimum ist. Diese Punkte liegen nicht innerhalb der beiden Geraden g' und g'', und da ε beliebig war, so folgt

$$|\xi_l| \geqq d \quad \text{und} \quad |\xi_r| \geqq d.$$

Man nehme nun δ beliebig an und ziehe die Geraden g_l' und g_l'', deren Gleichungen

$$x = \xi_l + \delta, \quad x = \xi_l - \delta$$

sind, und die Geraden g_r' und g_r'' mit den Gleichungen

$$x = \xi_r - \delta, \quad x = \xi_r + \delta.$$

Gemäß der Definition von ξ_r und ξ_l kann man, welches auch δ sei, einen Index ϱ so bestimmen, daß für $\sigma \geqq \varrho$ kein Punkt $m^{(\sigma)}$ zwischen g_l' und g_r' fällt, und zugleich je unendlich viele Punkte zwischen g_l' und g_l'' und zwischen g_r' und g_r'' liegen. Man kann aber den Index ϱ noch der weiteren Bedingung unterwerfen, daß für *jedes* $\sigma \geqq \varrho$ die Abscissen $\xi^{(\sigma)}$ und $\xi^{(\sigma+1)}$ verschiedenes Zeichen besitzen. Sei z. B. $\xi^{(\varrho)} > 0$, sei wieder $S^{(\varrho)}$ der zu $m^{(\varrho)}$ gehörige Bereich, $h^{(\varrho)}$ seine Höhe, und möge der rechte Endpunkt $t_{\varrho+1}$ des Intervalles $s^{(\varrho+1)}$ von $S^{(\varrho)}$, das den Punkt $m^{(\varrho+1)}$ enthält, die Abscisse $\xi_{\varrho+1}$ besitzen. Wenn nun auch $\xi^{(\varrho+1)} > 0$ sein soll, so muß jedenfalls

$$\xi_{\varrho+1} - (\xi_r - \delta) > \xi_r - \delta + d$$

sein, wie leicht ersichtlich. Nun ist aber $\xi_{\varrho+1} \leqq \xi_t^{(\varrho)}$, und daher gemäß Gleichung (1)

$$\xi_{\varrho+1} \leqq \xi^{(\varrho)} + h^{(\varrho)} + h^{(\lambda)} < \xi_r + \delta + h^{(\varrho)} + h^{(\lambda)},$$

wo $h^{(\lambda)}$ die Höhe des Bereiches ist, auf dem der Punkt $m^{(\varrho)}$ liegt. Die obige Ungleichung führt daher auf

$$h^{(\varrho)} + h^{(\lambda)} > \xi_r + d - 3\delta, \tag{6}$$

was für hinreichend großes λ resp. ϱ niemals der Fall ist. Man kann daher ϱ in der angegebenen Weise bestimmen.

Da nun die Bereiche $S^{(\varrho)}$ und $S^{(\varrho+1)}$ beide das Rechteck $\mathfrak{r}$ durchdringen und da $m^{(\varrho+1)}$ Halbierungspunkt des in $t_{\varrho+1}$ endigenden Intervalles $s^{(\varrho+1)}$ ist, so folgt weiter, daß der Bereich $S^{(\varrho)}$ mindestens um das Stück

$$d_l = \xi_{\varrho+1} - \xi_l - 3\delta$$

über g_l'' nach links hinausragen wird. Da aber das Rechteck $\mathfrak{r}$ zu $\mathfrak{M}$ gehört, so muß, $\xi_{\varrho+1} \geqq d$ sein, also ist

$$d_l \geqq d - \xi_l - 3\delta. \tag{7}$$

Solcher Bereiche gibt es daher unendlichviele, und ebenso gibt es unendlichviele, die nach rechts um

$$d_r \geqq d + \xi_r - 3\delta \tag{8}$$

hinausragen.

Man unterwerfe ϱ endlich noch der weiteren Bedingung, daß für $\sigma \geqq \varrho$ nicht allein die Punkte $m^{(\sigma)}$ zwischen g_l' und g_l'' resp. zwischen g_r' und g_r'' fallen, sondern auch die durch sie bestimmten Punkte $t^{(\sigma)}$, was gemäß Gleichung (3) immer möglich ist.

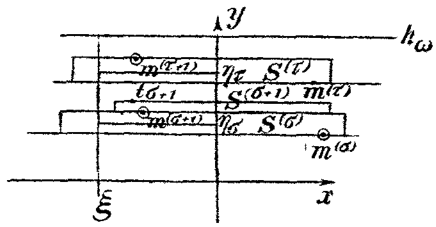

Fig. 16.

Seien nun (Fig. 16) $S^{(\sigma)}$ und $S^{(\tau)}$ zwei Bereiche, die die gleiche Lage haben, wie der eben bestimmte Bereich $S^{(\varrho)}$, sodaß also $m^{(\sigma+1)}$ und $m^{(\tau+1)}$ und zugleich $t^{(\sigma+1)}$ und $t^{(\tau+1)}$ zwischen g_l' und g_l'' liegen, während $S^{(\sigma)}$ und $S^{(\tau)}$ über g_l' mindestens um d_l hinausragen. Wählt man nun auf der y-Achse zwei Punkte η_σ und η_τ *innerhalb* $S^{(\sigma)}$ und $S^{(\tau)}$ und wählt ξ so, daß

$$\xi_l - d_l - \delta < \xi < \xi_l - \delta \tag{9}$$

ist, so bestimmen die Geraden

$$x = 0, \quad x = \xi, \quad y = \eta_\sigma, \quad y = \eta_\tau$$

ein Rechteck, das den Punkt $t^{(\sigma+1)}$ von $\mathfrak{T}$ im Innern enthält. Es muß also auch sein Umfang mindestens einen Punkt von $\mathfrak{T}$ enthalten, und der kann gemäß der Bestimmung des Rechtecks nur auf der Geraden $x = \xi$ liegen. Da es nun unendlichviele solche Bereiche $S^{(\sigma)}$ und $S^{(\tau)}$ gibt, so müssen sich diese Punkte gegen die Gerade h_ω häufen, also muß der

Schnitt von $x = \xi$ mit h_ω zu $\mathfrak{T}$ gehören, und zwar für jedes gemäß (9) bestimmte ξ.

Diese Folgerung enthält aber einen Widerspruch. Verbindet man nämlich zwei dieser Punkte, p_1 und p_2, mit einem *inneren* Punkt m durch je einen inneren Weg, so stellen diese beiden Wege im Verein mit der Strecke $p_1 p_2$ ein Polygon $\mathfrak{p}$ dar, auf das der Satz I resp. II zutrifft. Innerhalb dieses Polygons liegen nun aber Punkte von $\mathfrak{T}$. Denn ist p ein Punkt zwischen p_1 und p_2, so liegen auf der durch ihn parallel zur y-Achse laufenden Geraden Punkte von $\mathfrak{T}$ in beliebiger Nähe an p. Diese Punkte könnten aber von einem zur Menge $\mathfrak{A}$ gehörigen *äußeren* Punkt nicht durch einen äußeren Weg erreicht werden, da jeder solche Weg das Polygon kreuzen, und demnach Punkte von $\mathfrak{J}$ oder $\mathfrak{T}$ enthalten müßte. Damit ist der Satz 4) bewiesen.

5) *Je zwei äußere oder je zwei innere Punkte lassen sich durch Wege verbinden, die nur eine endliche Zahl von Bereichen der Gebietsteilung durchsetzen.*

Es genügt den Beweis für solche Wege zu führen, die einen beliebigen Punkt m mit dem Ausgangspunkt m_0 der Gebietsteilung verbinden.

Sei $\mathfrak{l}$ ein von m_0 zu einem Punkt m führender einfacher innerer resp. äußerer Weg und 2ϑ das Minimum aller Abstände $\varrho(\mathfrak{l}, \mathfrak{T})$, wo $\vartheta > 0$ ist. Wir ersetzen jede Strecke l von $\mathfrak{l}$ durch einen Streckenzug, dessen Seiten den Achsen parallel laufen, und dessen Punkte von l höchstens den Abstand ϑ besitzen. Der so konstruierte Streckenzug ist ebenfalls ein innerer resp. äußerer Weg $\mathfrak{l}'$ mit endlicher Streckenzahl. Dieser Weg wird den Bereich S_0 in einem Intervall s_0' kreuzen; es gibt dann eine bestimmte Strecke l_0' von $\mathfrak{l}'$, die den Kreuzungspunkt m_0' enthält, und ganz oder teilweise außerhalb von S_0 liegt. Das Intervall s_0' gehört einer gewissen Menge $\mathfrak{S}^{(\lambda)}$ an (§ 6); gemäß Satz 3) existiert daher ein wohldefinierter Bereich S_M', dem m_0' angehört, und in dem daher die Seite l_0' ganz oder teilweise enthalten ist.

Nur der Fall bedarf der weiteren Erörterung, daß der Kreuzungspunkt m'' von $\mathfrak{l}'$ mit S_M' ebenfalls noch auf l_0' enthalten ist. Er fällt dann in ein punktfreies Intervall $s^{(\nu)}$ einer gewissen Menge $\mathfrak{S}^{(\nu)}$, und gemäß Satz 3) gibt es einen Bereich S_P'', dem der Kreuzungspunkt m'' angehört, und in den daher die Strecke l_0' eintritt. Fällt nun auch der Kreuzungspunkt von $\mathfrak{l}'$ mit S_P'' in die Strecke l_0', so kann dies doch nicht unendlich oft geschehen. Dies folgt unmittelbar aus Satz 4). Zieht man nämlich zu l_0' zwei Parallelen, die von l_0' höchstens den Abstand $^1/_2\vartheta$ haben, so bestimmen sie einen Bereich $\mathfrak{r}$, der l_0' einschließt und ganz zu $\mathfrak{M}$ gehört, und auf den daher Satz 4) anwendbar ist.

Die Strecke l_0' kann daher nur eine endliche Zahl von Bereichen durchdringen .Da andrerseits gemäß Satz 3) die Konstruktion neuer Bereiche niemals abbrechen kann, so folgt nunmehr, daß man durch eine endliche Zahl von Schritten zu einem letzten wohlbestimmten Bereich der Gebietsteilung kommt, der den Endpunkt m im Innern oder auf dem Umfang enthält, womit der Satz bewiesen ist.

Durch die vorstehenden Sätze ist die Besonderheit der einfachen geschlossenen Kurve, resp. der zugehörigen Gebietsteilung vollständig charakterisiert. Sie genügen jedenfalls zur Ableitung der weiteren Folgerungen. Ehe ich hierzu übergehe, bemerke ich noch folgendes.

Ist die Menge $\mathfrak{T}$ *keine* einfache geschlossene Kurve, so kann, wie der Beweis von Satz 4) zeigt, die Notwendigkeit entstehen, die Konstruktion der Bereiche bis zu transfiniten Indizes fortzusetzen. Falls nämlich die Gerade h_ω das Rechteck $\mathfrak{r}$ kreuzt, werden sich die Bereiche, die den endlichen Indizes entsprechen, nur bis h_ω erstrecken; man hat dann mit dem auf h_ω liegenden punktfreien Intervall s_ω die Bereichkonstruktion von neuem zu beginnen*). Es gilt daher für eine solche Kurve auch nicht der Satz 5).

Bei einer *einfachen geschlossenen Kurve* bleibt man jedoch mit allen Konstruktionen im Endlichen. Diese für die folgenden Schlüsse wichtige Tatsache zeigt die Zweckmäßigkeit der hier gewählten Gebietsteilung. Sie versteht sich jedoch nicht von selbst und bedurfte eines ausführlichen Beweises, und dies um so mehr, als sie sich als die wesentliche Quelle der weiteren Resultate erweisen wird.

§ 9.

Eine Eigenschaft der Bereiche S_N bei unbegrenzt wachsendem ν.

Ich leite nunmehr einige Eigenschaften der Gebietsteilung ab, die sich auf die Bereiche S_N bei unbegrenzt wachsendem ν beziehen.

Ist die Menge $\mathfrak{T}$ keine einfache geschlossene Kurve, so kann es unendlich viele Bereiche S_N geben, die ein punktfreies Intervall von gegebener Länge enthalten. Ein einfaches Beispiel einer solchen Menge bildet z. B. die Kurve $y = \sin\frac{1}{x}$**). Für eine einfache geschlossene Kurve trifft dies jedoch nicht zu. Vielmehr besteht der Satz:

6) *Bei einer einfachen geschlossenen Kurve haben die Bereiche S_N der Gebietsteilung die Eigenschaft, daß mit wachsendem ν die Länge der auf ihnen liegenden punktfreien Intervalle unter jede Grenze sinkt.*

Der Beweis dieses Satzes ist etwas umständlich, weil es sich nämlich

---

*) Es ist nicht schwierig, sich derartige Kurven herzustellen; das in § 3 aus Fig. 2 abgeleitete Polygon stellt bereits eine derartige Kurve dar.

**) Auch das in § 2 erwähnte aus Figur 2 abgeleitete Polygon bildet bereits ein Beispiel einer solchen Menge.

wieder darum handelt, diejenigen Punktmengen auszuscheiden, für die der Satz nicht zutrifft. Wir beweisen ihn wie folgt:

Träfe der Satz nicht zu, so gäbe es für unendlich viele Indizes

$$\nu_1, \nu_2, \cdots \nu_\varrho, \cdots$$

mindestens je einen Bereich

$$S_{N_1}, S_{N_2}, \cdots S_{N_\varrho}, \cdots$$

der ein punktfreies Intervall enthielte, das größer als $2d$ ist. Dabei genügt es, Intervalle, die aus zwei oder drei Strecken bestehen, nur dann hierher zu rechnen, wenn mindestens eine dieser Strecken größer als $2d$ ist. Ich bezeichne diese Strecken jetzt durch r_ϱ. Es gibt dann auch unendlichviele dieser Strecken, die der x-Achse oder der y-Achse parallel laufen; es sei die x-Achse.

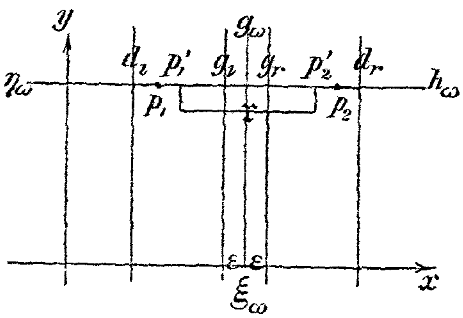

Fig. 17.

Wir projizieren wieder (Fig. 17) die Mittelpunkte μ_ϱ der Strecken r_ϱ in die Punkte ξ_ϱ der x-Achse. Diese Punkte haben mindestens eine Häufungsstelle ξ_ω; durch sie legen wir parallel zur y-Achse die Gerade g_ω. Man bestimme nun wieder zwei Geraden g_l und g_r durch die Gleichungen

$$x = \xi_\omega - \varepsilon, \qquad x = \xi_\omega + \varepsilon$$

und projiziere die zwischen ihnen liegenden Punkte μ_ϱ auf die y-Achse, so haben auch diese Projektionspunkte mindestens eine Grenzstelle η_ω, und es gibt unter ihnen unendlichviele Punkte

$$\eta', \eta'', \eta''', \cdots \eta^{(\sigma)}, \cdots$$

die sich in der vorstehenden Reihenfolge von derselben Seite her gegen η_ω verdichten. Seien

$$\mu', \mu'', \cdots \mu^{(\sigma)}, \cdots$$

die zugehörigen Halbierungspunkte und

$$R', R'', \cdots R^{(\sigma)}, \cdots$$

die entsprechenden Bereiche.

Man bestimme nun noch zwei Geraden d_l und d_r durch die Gleichungen

$$x = \xi_\omega - d + \varepsilon \quad \text{und} \quad x = \xi_\omega + d - \varepsilon,$$

so werden die sämtlichen Bereiche $R^{(\sigma)}$ den Streifen zwischen d_l und d_r durchsetzen und sich gegen eine durch η_ω gehende Gerade h_ω verdichten. Die zwischen d_l und d_r liegenden Punkte von h_ω können daher nicht zu $\mathfrak{M}$ gehören; dies steht, wie leicht ersichtlich, damit im Widerspruch, daß es für jeden Punkt von $\mathfrak{M}$ gemäß § 8 einen angebbaren Bereich S_N gibt, der ihn im Innern oder auf dem Umfang enthält.

Es müßte daher das ganze zwischen d_l und d_r liegende Stück von h_ω zu $\mathfrak{T}$ gehören. Man wähle zwei seiner Punkte p_1 und p_2, die symmetrisch zu g_ω liegen, und verbinde sie mit einem *inneren* Punkt i und mit einem *äußeren* Punkt a durch je einen inneren resp. äußeren Weg. Analog wie in § 8 schließt man dann, daß die beiden Polygone $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_a$, die durch $p_1 p_2$ und diese Wege bestimmt werden, nur *innere* resp. nur *äußere* Punkte enthalten. Sie liegen daher auf *verschiedenen* Seiten von h_ω, und zwar möge $\mathfrak{p}_i$ auf derselben Seite liegen, wie die Bereiche $R^{(\sigma)}$. Nun seien p_1' und p_2' zwei zwischen p_1 und p_2 symmetrisch zu g_ω gelegene Punkte, so gibt es für die Punkte von $p_1'p_2'$ ein von Null verschiedenes Minimum ϱ ihrer Abstände von den Wegen, die i mit p_1 und p_2 verbinden. Zieht man daher im Abstand ϱ', so daß $\varrho' < \varrho$ und zugleich $\varrho' < p_1 p_2$ ist, eine das Polygon $\mathfrak{p}_i$ durchsetzende Parallele zu h_ω, so wird durch sie und $p_1'p_2'$ ein Rechteck $\mathfrak{r}$ bestimmt, dessen Inneres zu $\mathfrak{M}$ gehört und dieses Rechteck würde von unendlich vielen Bereichen $R^{(\sigma)}$ durchkreuzt. Dies ist aber, wie wir sofort zeigen, unmöglich.

Mögen nämlich unter ihnen zunächst unendlich viele enthalten sein, für welche die Seite, die die Strecke r_λ enthält, näher zu h_ω liegt als die Gegenseite und sei $R^{(\lambda)}$ einer von ihnen. Falls nun für das punktfreie Intervall, dem r_λ angehört, der Konstruktionspunkt $m^{(\lambda)}$ in den Mittelpunkt fällt, so wird er bei hinreichend großem λ zwischen g_l und g_r enthalten sein, und der zugehörige Bereich müßte bis h_ω heranreichen. Es entsteht also ein Widerspruch. Fällt er nicht in den Mittelpunkt des Intervalls, so kann der zugehörige Bereich zunächst außerhalb des Rechtecks $\mathfrak{r}$ liegen; wir nehmen an, es sei rechts von $\mathfrak{r}$. Gemäß Satz I. von § 7 gibt es aber einen Bereich, der in $\mathfrak{r}$ eindringt, und falls er nicht bis h_ω heranreicht, wird er das Rechteck durchsetzen. Auf der das Rechteck $\mathfrak{r}$ durchziehenden Seite liegt dann rechts von $\mathfrak{r}$ ein Punkt t, und diese Seite enthält ein punktfreies Intervall, das $\mathfrak{r}$ durchzieht. Fällt dessen Konstruktionspunkt innerhalb $\mathfrak{r}$, so reicht der zugehörige Bereich bis h_ω. Fällt er außerhalb $\mathfrak{r}$, so gibt es einen Bereich, der in $\mathfrak{r}$ eindringt, und entweder bis h_ω heranreicht, oder $\mathfrak{r}$ durchsetzt; man gelangt also entweder zu einem bis h_ω sich erstreckenden Bereich oder zu einer unendlichen Folge angrenzender Bereiche, die $\mathfrak{r}$ durchsetzen, was in § 7 ebenfalls als unmöglich erkannt wurde.

Gibt es schließlich nur eine endliche Zahl von Bereichen, für welche die Strecke r_λ näher an h_ω liegt, als die Gegenseite, so gibt es unendlich viele, bei denen die Strecke r_λ den größeren Abstand von h_ω hat als die Gegenseite. Sind $R^{(\lambda)}$ und $R^{(\mu)}$ zwei von ihnen, so wiederhole man die vorstehenden Schlüsse für das zwischen $R^{(\lambda)}$ und $R^{(\mu)}$ liegende Gebiet. Bei hinreichend großem λ würde folgen, daß Bereiche existieren, die bis in den Bereich $R^{(\lambda)}$ hineinreichen, oder aber die durch § 7 ausgeschlossene Lage besitzen. Damit ist der bezügliche Satz bewiesen.

Aus dem somit bewiesenen Satz zieht man endlich die Folgerung, daß *auch die Seiten der Bereiche S_N mit wachsendem ν gegen Null konvergieren.* Daß dies für den Flächeninhalt der Fall ist, ist klar; für jede einzelne Seite bedarf es des Beweises.

Gäbe es unendlich viele Bereiche, bei denen eine Seite größer ist als $2d$, so gäbe es wieder unendlich viele, bei denen diese Seite derselben Achse parallel ist; sei es die x-Achse. Man projiziere wieder die Mittelpunkte dieser Seiten auf die x-Achse, und betrachte einen Grenzpunkt ξ_ω der so entstehenden Punktmenge. Wie oben, schließt man, daß die Bereiche, für welche die Projektionen ihrer Konstruktionspunkte $\mu^{(\varrho)}$ nahe bei ξ_ω liegen, gegen mindestens eine Gerade h_ω konvergieren müßten; auf ihr gäbe es wieder ein Stück, das zu $\mathfrak{T}$ gehörte, und ein wie vorstehend bestimmtes Rechteck $\mathfrak{r}$, dessen Inneres zu $\mathfrak{M}$ gehören müßte und das von unendlich vielen Bereichen $R^{(\sigma)}$ durchsetzt würde. Innerhalb von $\mathfrak{r}$ müßten aber andererseits Punkte t liegen, da die punktfreien Intervalle, die auf den Bereichen $R^{(\sigma)}$ enthalten sind, mit wachsendem Index, wie eben bewiesen, unter jede Grenze sinken. Also folgt:

7) *Bei einer einfachen geschlossenen Kurve haben die Bereiche S_N der zugehörigen einfachen Gebietsteilung die Eigenschaft, daß mit wachsendem ν jede ihrer Seiten unendlich klein wird.*

§ 10.

Die in $\mathfrak{T}$ überalldichte Teilmenge $\mathfrak{T}_r$.

Im § 6 haben wir eine unendliche Folge von Polygonen

$$\mathfrak{P},\ \mathfrak{P}',\ \mathfrak{P}'',\ \cdots,\ \mathfrak{P}^{\nu-1}\ \cdots,$$

sowie die auf ihnen gelegenen Intervallmengen

$$\mathfrak{S}_1,\ \mathfrak{S}_2,\ \cdots,\ \mathfrak{S}_\nu\ \cdots$$

eingeführt, und zwar besteht $\mathfrak{S}_\nu = \{s_N\}$ aus einer *endlichen* Menge konsekutiver Intervalle, die den Umfang des Polygons $\mathfrak{P}^{(\nu-1)}$ bilden, und zu der jedenfalls *alle auf $\mathfrak{P}^{(\nu-1)}$ liegenden punktfreien Intervalle $s_i^{(\nu)} \geqq \varepsilon_\nu$ gehören.* Die Endpunkte dieser Intervalle sind Punkte von $\mathfrak{T}$; sie mögen die Menge $\mathfrak{T}_\nu$ konstituieren. Es ist dann $\mathfrak{T}_\nu$ eine Teilmenge von $\mathfrak{T}_{\nu+1}$. Sei nun $\mathfrak{T}_r$ diejenige Menge, die alle Mengen $\mathfrak{T}_\nu$ enthält, sodaß

$$\mathfrak{T}_r = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{T}_\nu \tag{1}$$

ist, so ist $\mathfrak{T}_r$, wie sich zeigen wird, eine *in $\mathfrak{T}$ überall dichte* Menge, aus der durch Hinzufügung ihrer Grenzpunkte die Menge $\mathfrak{T}$ hervorgeht.

Dieser Beweis folgt, was ich vorausschicke, aus der oben gewählten Bezeichnungsweise der in $\mathfrak{S}_\nu$ eingehenden Intervalle s_N. Sie stellt eine Erweiterung des Dezimalsystems dar, und zwar in der Weise, daß die Basis beliebig ist und von Stelle zu Stelle wechseln kann*); auch können, wie im Dezimalsystem, die endlichen Brüche, die die Menge $\mathfrak{T}_r$ darstellen, als unendliche Brüche geschrieben werden. Die in § 6 eingeführte Bezeichnungsweise in Verbindung mit den Sätzen von § 9 liefert damit den geometrischen Ersatz für das im Gebiet der Analysis unmittelbar gegebene Dezimalsystem. Dies beweist ihre innere Zweckmäßigkeit, ja vielleicht Notwendigkeit; sie ist die Quelle, aus der die behauptete Eigenschaft von $\mathfrak{T}_r$ fließt. Die Konstruktion dieser Intervalle s_N und der in § 6 resp. § 9 enthaltene Nachweis ihrer formalen und materiellen Analogie mit dem Dezimalsystem dürfte das hauptsächlichste Hülfsmittel darstellen, das für die vorliegenden Untersuchungen zu schaffen war.

Die hiermit angedeutete Beziehung der Punkte von $\mathfrak{T}_r$ zu den Intervallen s_N wollen wir nunmehr genauer untersuchen resp. begründen.

Gemäß der über $\mathfrak{T}$ gemachten Annahme läßt sich *jeder* Punkt t mit dem Ausgangspunkt m der Gebietsteilung durch einen Weg $\mathfrak{l}$ verbinden, der, falls er unendlich viele Strecken enthält, in t seinen *einzigen* Grenzpunkt besitzt. Der Punkt m kann sowohl zu $\mathfrak{A}$ als auch zu $\mathfrak{J}$ gehören; wir werden für das folgende m als *inneren* Punkt wählen. Er liegt damit *innerhalb* aller Polygone $\mathfrak{P}^{(\nu)}$.

Liegt zunächst t *nicht* auf dem Umfang eines Polygones $\mathfrak{P}^{(\nu)}$, so wird der Weg $\mathfrak{l}$ *jedes* Polygon $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ kreuzen. Falls nötig, läßt er sich so reduzieren, daß er $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ nur *einmal* kreuzt; hierzu genügt es, m mit dem letzten Kreuzungspunkt von $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ durch einen innerhalb $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ verlaufenden Weg zu verbinden. Auf dem Umfang des Polygons $\mathfrak{P}^{(\nu-1)}$ sei s_N dasjenige Intervall, das den Kreuzungspunkt enthält, und p_N der Kreuzungspunkt, so wird durch den Weg eine unendliche Reihe von Intervallen

$$(2) \qquad s_i,\ s_{ik},\ s_{ikl},\ \cdots,\ s_N\ \cdots$$

definiert, und eine unendliche Folge von Punkten

$$(3) \qquad p_i,\ p_{ik},\ p_{ikl},\ \cdots,\ p_N,\ \cdots,$$

die nach Annahme in t ihren *einzigen* Grenzpunkt besitzen.

Die hier definierte Intervallfolge ist durch t *eindeutig* bestimmt. Gehörte nämlich zu einem von m nach t führenden Weg $\mathfrak{l}'$ die Intervallfolge

$$s_i',\ s_{ik}',\ s_{ikl}',\ \cdots,\ s_N',\ \cdots,$$

*) Eine solche bewußte Verallgemeinerung des Dezimalsystems dürfte sich zuerst bei Strauß finden, Acta math. Bd. 11, S. 13. Vgl. auch Brodèn, Math. Ann. Bd. 51, S. 302, sowie meinen Bericht über Mengenlehre, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. Bd. 8, 2, S. 102.

und wären für irgend ein ν die Intervalle s_N und s_N' verschieden, so würden die Wege $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ ein Polygon bestimmen, das mindestens einen auf dem Umfang von $\mathfrak{P}^{(\nu-1)}$ gelegenen Punkt von $\mathfrak{T}$ einschließt. Kreuzen sich nämlich $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ zwischen $\mathfrak{P}^{(\nu-1)}$ und t, so wäre dies ein gewöhnliches Polygon, kreuzen sich $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ nicht, ein Polygon mit dem Grenzpunkt t. Damit ist die Eindeutigkeit der Intervallfolge 2) erwiesen.

Dasselbe ist der Fall, wenn t auf dem Umfang des Polygons $\mathfrak{P}^{(\lambda-1)}$ liegt, aber nicht zur Menge $\mathfrak{T}_r$ gehört. Alsdann kann man t mit m durch einen gewöhnliehen Streckenzug verbinden, und erhält so eine zunächst endliche Reihe von Intervallen

$$(4) \qquad s_i,\ s_{ik},\ \cdots,\ s_L;$$

und zwar ist t *innerer* Punkt von s_L. Andererseits ist t in diesem Fall *gemeinsamer* Punkt aller Polygone

$$(5) \qquad \mathfrak{P}^{(\lambda-1)},\ \mathfrak{P}^{(\lambda)},\ \mathfrak{P}^{(\lambda+1)},\ \ldots,\ \mathfrak{P}^{(\lambda+\nu)},\ \ldots$$

und jedes dieser Polygone enthält ein wohldefiniertes Intervall, dem t als innerer Punkt angehört. Es wird also auch in diesem Fall durch t eine Intervallfolge

$$(6) \qquad s_i,\ s_{ik},\ \cdots,\ s_L,\ s_{Li},\ s_{Lik},\ \cdots$$

bestimmt; daß sie eindeutig ist, bedarf hier keines besonderen Beweises. Also folgt:

8) *Jeder Punkt t, der nicht zu $\mathfrak{T}_r$ gehört, bestimmt eindeutig eine Intervallfolge* $\{s_N\}$ *).

Wenn dagegen t ein Punkt von $\mathfrak{T}_r$ ist, so ist er *gemeinsamer Punkt* zweier auf einem Polygon $\mathfrak{P}^{(\lambda-1)}$ liegenden Intervalle s_L und $s_{L'}$. Er ist auch in diesem Fall auf allen Polygonen 5) enthalten, und bestimmt zunächst wieder die endliche Reihe 4). Jetzt kann man aber diese Reihe auf zwei verschiedene Arten zu einer unendlichen Reihe ergänzen. Sei t *Anfangspunkt* des Intervalles s_L, wo dies Intervall die in § 6 definierte Richtung hat. Es kann dann s_L auch noch dem Umfang von $\mathfrak{P}^{(\lambda)}$ angehören, alsdann erhält es gemäß § 6 die Bezeichnung s_{L0}. Gehört aber s_L nicht dem Umfang von $\mathfrak{P}^{(\lambda)}$ an, so entsteht aus ihm ein zu $\mathfrak{P}^{(\lambda)}$ gehöriger Linienzug, und dieser wird gemäß § 6 entweder ebenfalls durch s_{L0} bezeichnet, — falls er nämlich kein punktfreies Intervall enthält, das der Menge $\mathfrak{S}_{\lambda+1}$ angehört —, oder aber er zerfällt in gewisse Intervalle s_{Li}.

*) Man kann diesen Satz als eine Ausdehnnng des in § 7 angeführten Satzes ansehen, daß zwei Bereiche S_M und S_N keinen Punkt gemein haben. Der Satz von § 7 gilt dann für Punkte von $\mathfrak{T}_r$, der obenstehende auch für Punkte von $\mathfrak{T}$.

Dann wird t Anfangspunkt von s_{L1} sein. In analoger Weise behandelt man das so bestimmte Intervall s_{L0} resp. s_{L1}. Man erhält also auch hier eine unendliche Folge von Intervallen

$$(7) \qquad s_L, s_{Li}, s_{Lik}, \cdots, s_{LN}, \cdots$$

wo alle Indices $i, k, l, \cdots$, 0 oder 1 sind, sodaß t gemeinsamer Anfangspunkt aller dieser Intervalle ist. Das gleiche ergibt sich für das Intervall $s_{L'}$, nur mit der Maßgabe, daß in diesem Fall statt s_{L1} das Intervall $s_{L'\mu}$ zu wählen ist, wo (§ 6) μ den größten zulässigen Index darstellt. Die so bestimmte Intervallreihe sei wieder

$$(7\text{a}) \qquad s_{L'}, s_{L'i}, s_{L'ik}, \cdots, s_{L'N}, \cdots$$

wo $i, k, \cdots$ diesmal 0 sind oder den größten zulässigen Index bedeuten. Man hat also hier zwei unendliche Folgen von Intervallen, die beide den Punkt t bestimmen. Also folgt:

9) *Jeder Punkt von* $\mathfrak{T}_r$ *bestimmt zwei verschiedene Folgen von Intervallen* $\{s_N\}$, *von der Art, daß von einem gewissen Glied an* t *gemeinsamer Endpunkt aller dieser Intervalle ist.*

Von den Intervallen s_N der durch t bestimmten Folgen läßt sich zeigen, daß sie mit wachsendem ν unendlich klein werden. Gemäß Satz 6 bedarf dies nur für diejenigen Intervalle s_N eines Beweises, die (§ 6) nicht selbst punktfreie Intervalle $s_i^{(\nu)} \geqq \varepsilon_\nu$ sind, sondern zwischen je zwei solchen konsekutiven Intervallen liegen. Ist s_N ein solches, so enthält es eine endliche oder unendliche Menge punktfreier Intervalle $s_i^{(\nu)} < \varepsilon_\nu$. Sei s' das größte von ihnen, so gibt es eine kleinste Zahl ϱ, sodaß $s' \geqq \varepsilon_\varrho$ ist; daher wird s' ein Intervall s_R der Menge $\mathfrak{S}_\varrho$, und es zerfällt s_N in mindestens zwei Intervalle s_R und $s_{R'}$. Mit jedem dieser Intervalle tritt für einen gewissen Index σ resp. σ' das gleiche ein. Da nun die Intervalle $s_i^{(\nu)}$ auf s_N überall dicht liegen, so kann es keinen Teil von s_N geben, der bei allen Zerfällungen als Ganzes erhalten bleibt; woraus die Behauptung folgt, d. h.:

10) *Die Intervalle* s_N *der Mengen* $\mathfrak{S}_\nu$ *werden mit wachsendem* ν *unendlich klein.*

Beachtet man nun, daß ein Punkt t entweder Endpunkt resp. Grenzpunkt der auf den Intervallen s_N liegenden Punkte p_N war, oder daß diese Intervalle von einem bestimmten an den Punkt t als gemeinsamen Endpunkt besitzen, so folgt noch, daß t in *allen* Fällen Grenzpunkt von Endpunkten von Intervallen s_N, also von Punkten von $\mathfrak{T}_r$ ist. Also folgt

IV. *Die Endpunkte aller auf den sämtlichen Bereichen* S_N *liegenden punktfreien Intervalle* $\{s_i^{(\nu)}\}$ *bestimmen eine in* $\mathfrak{T}$ *überall dichte Menge* $\mathfrak{T}_r$.

Die Beziehung zwischen den Intervallen s_N und den Punkten von $\mathfrak{T}$ findet ihren Abschluß durch folgenden Satz:

V. *Jeder Folge* $\{s_N\}$ *von Intervallen*

$$s_i, s_{ik}, s_{ikl}, \cdots, s_N, \cdots$$

entspricht ein und nur ein Punkt von $\mathfrak{T}$.

Wie wir eben sahen, wird mit wachsendem ν jedes Intervall s_N unendlich klein. Da aber gemäß § 9, Satz 7 auch Breite und Höhe der Bereiche S_N mit wachsendem ν unendlich klein werden, so wird auch der Abstand der Intervalle der obigen Folge zuletzt unendlich klein, also auch der Abstand ihrer Endpunkte. Diese Endpunkte gehören zu $\mathfrak{T}$, sie bestimmen daher zum mindesten einen Grenzpunkt, der als solcher ebenfalls zu $\mathfrak{T}$ gehört. Falls nun die Intervalle s_N von einem bestimmten Glied an einen gemeinsamen Endpunkt besitzen, so bestimmen sie diesen Punkt, und nur diesen. Ist dies nicht der Fall, so schließt man die Eindeutigkeit des zu ihnen gehörigen Punktes t folgendermaßen. Die Folge 6) bestimmt mindestens einen Punkt von $\mathfrak{T}$; er sei t' und gehört nicht zu $\mathfrak{T}_r$. Andrerseits gehört zu t' eine und nur eine Folge; diese ist daher mit 6) identisch. Zu der durch t' bestimmten Folge gelangten wir aber oben so, daß wir einen Weg $\mathfrak{l}$ legten, der gewisse Punkte p_N und damit die sie enthaltenden Intervalle s_N definierte, und in t' seinen *einzigen* Grenzpunkt besitzt. Da nun die Intervalle s^N mit wachsendem ν unendlich klein werden, so besitzen ihre Endpunkte denselben Grenzpunkt, wie die Punkte p_N, also auch nur einen, womit der Satz bewiesen ist.

§ 11.

Die umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung der einfachen geschlossenen Kurve auf den Kreis.

Um den Punkt m, der den Konstruktionspunkt des Bereiches S bildet, legen wir einen Kreis $\mathfrak{K}$, der innerhalb S liegt, und bilden ihn folgendermaßen auf die Menge $\mathfrak{T}$ ab.

Gemäß § 6 liegen auf dem Umfang von S die λ konsekutiven Intervalle

(1) $$s_1, s_2, s_3, \cdots, s_\lambda,$$

deren Endpunkte die Teilmenge $\mathfrak{T}_1$ von $\mathfrak{T}$ bilden. Wir verbinden die Punkte von $\mathfrak{T}_1$ mit m; sie zerfällen den Kreis in λ *konsekutive* Kreisbögen, die wir durch

(2) $$k_1, k_2, k_3, \cdots, k_\lambda$$

bezeichnen. Ihre Endpunkte mögen die Menge $\mathfrak{K}_1$ bilden. Diese Menge $\mathfrak{K}_1$ beziehen wir so auf $\mathfrak{T}_1$, daß den Endpunkten von k_i die Endpunkte von s_i zugeordnet werden.

Beim Übergang von S zu $\mathfrak{P}'$ entsteht nach § 6 aus einem Intervall s_i entweder ein einziges Intervall s_{i0}, das auch mit s_i identisch sein kann, und stets dieselben Endpunkte hat wie s_i, oder es gehen aus ihm die μ Teilintervalle

$$s_{i1}, s_{i2}, \cdots, s_{i\mu}$$

hervor. Die Endpunkte aller so aus den Intervallen s_i abgeleiteten Intervalle s_{ik} bilden die Teilmenge $\mathfrak{T}_2$ von $\mathfrak{T}$. Demgemäß soll, falls aus s_i ein s_{i0} entsteht, k_i durch k_{i0} bezeichnet werden, sodaß $k_i = k_{i0}$ ist; im andern Fall teilen wir den Bogen k_i in μ der Einfachheit halber gleiche Teile

$$k_{i1}, k_{i2}, \cdots, k_{i\mu}.$$

Die Endpunkte aller dieser aus den Kreisbögen k_i entstehenden Bögen k_{ik} bilden die Menge $\mathfrak{K}_2$; wir beziehen sie so auf $\mathfrak{T}_2$, daß den Endpunkten von s_{ik} die Endpunkte von k_{ik} entsprechen.

In dieser Weise fahren wir fort; es entstehen so die auf dem Kreis $\mathfrak{K}$ liegenden Mengen

$$\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots, \mathfrak{K}_\nu, \cdots \tag{3}$$

die den auf den Polygonen $\mathfrak{P}^{(\sigma)}$ liegenden Mengen

$$\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \cdots, \mathfrak{T}_\nu, \cdots \tag{4}$$

entsprechen. Wird insbesondere durch

$$\mathfrak{K}_r = \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{K}_\nu \tag{5}$$

die Menge bezeichnet, die alle $\mathfrak{K}_\nu$ enthält, so sind die Mengen $\mathfrak{K}_r$ und $\mathfrak{T}_r$ eineindeutig aufeinander bezogen.

Von der Menge $\mathfrak{T}_r$ haben wir bereits gesehen, daß sie (§ 10) eine in $\mathfrak{T}$ überall dichte Menge ist, das gleiche gilt aber auch für die Menge $\mathfrak{K}_r$ in Bezug auf den Kreis $\mathfrak{K}$. Um dies nachzuweien, ist nur zu zeigen, daß es keine Folge $\{s_N\}$ gibt, bei der sich schließlich dauernd der neue Index 0 einstellt. Dies ergibt sich leicht als Folge der in § 6 enthaltenen Konstruktionsvorschrift, und zwar folgendermaßen.

Gemäß § 6 kann das Intervall s_N auf drei verschiedene Arten in ein Intervall s_{N0} übergehen. Es kann zunächst s_N einen Punkt m_N enthalten, doch so, daß der aus s_N entstehende Linienzug von $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ ein einziges Intervall s_{N0} bildet. Auf diesem Linienzug liegt dann ein *größtes* punktfreies Intervall s' und es existiert ein Index ϱ, sodaß $s' \geqq \varepsilon_\varrho$ ist, also gemäß § 6 s' ein Intervall der Menge $\mathfrak{S}_\varrho$ wird. In diesem Fall ist dann

ϱ derjenige Index, sodaß der bezügliche Linienzug zwar noch in die Menge $\mathfrak{S}_{\varrho-1}$, aber nicht mehr in die Menge $\mathfrak{S}_\varrho$ als *ganzes* Intervall eingeht; beim Übergang von $\mathfrak{S}_{\varrho-1}$ zu $\mathfrak{S}_\varrho$ zerfällt er daher in mindestens zwei Intervalle, deren eines s' ist.

Analog ist es, wenn s_N selbst ein punktfreies Intervall einer gewissen Menge $\mathfrak{S}_\varrho$ darstellt. Beim Übergang von $\mathfrak{S}_\varrho$ zu $\mathfrak{S}_{\varrho+1}$ entsteht dann aus ihm ein Linienzug, der entweder selbst aus mehreren Intervallen von $\mathfrak{S}_{\varrho+1}$ besteht, oder aber unter die vorstehende Betrachtung fällt.

Wenn endlich s_N nicht selbst ein Intervall s_ϱ darstellt, so enthält es wieder ein größtes Intervall s', das einer Menge $\mathfrak{S}_\varrho$ angehört; es wird daher s_N als ganzes Intervall zwar noch der Menge $\mathfrak{S}_{\varrho-1}$, aber nicht mehr der Menge $\mathfrak{S}_\varrho$ angehören.

Jeder Kreisbogen k_N muß daher für einen angebbaren Index ϱ in mindestens zwei gleiche Kreisbögen zerfallen, woraus der überall dichte Charakter der Menge $\mathfrak{K}_r$ hervorgeht.

Aus der eineindeutigen Beziehung der Mengen $\mathfrak{K}_r$ und $\mathfrak{T}_r$ kann ihre umkehrbar stetige Beziehung leicht geschlossen werden. Sei nämlich t ein Punkt von $\mathfrak{T}$, der nicht zu $\mathfrak{T}_r$ gehört, und seien

(6) $$\{t_r^{(\varrho)}\} = t_r,\ t_r',\ t_r'',\ \cdots,\ t_r^{(\varrho)},\ \cdots$$

irgend welche Punkte von $\mathfrak{T}_r$, deren Grenzpunkt t ist. Alsdann gibt es notwendig ein λ, sodaß t_r einem Intervall s_L' als Endpunkt angehört, ebenso ein μ, sodaß t_r' Endpunkt eines Intervalles s_M' ist, usw. Durch die Folge $\{t_r^{(\varrho)}\}$ wird daher eine Folge von Intervallen

(7) $$s_L',\ s_M',\ \cdots,\ s_R',\ \cdots$$

definiert, deren Endpunkte nach Annahme gegen t konvergieren. Andrerseits gehört zu t auch eine Folge

(8) $$s_i,\ s_{ik},\ \cdots,\ s_{ikl},\ \cdots,\ s_N,\ \cdots$$

und diese Folge enthält gewisse Intervalle

(9) $$s_L,\ s_M,\ \cdots,\ s_R,\ \cdots,$$

bei denen die Indicesanzahlen mit denen der Folge (7) übereinstimmen. Um die Beziehung zur Menge $\mathfrak{K}_r$ herzustellen, hat man die Folge (7) in die Form (8) überzuführen; dies kann auf folgende Weise geschehen.

In der Folge (9) ist der erste Index konstant; er sei i. Für die Folge (7) braucht dies nicht der Fall zu sein; es ist aber ausgeschlossen, daß ein von i verschiedener *erster* Index i' unendlich oft in ihr vorkommt. Wäre dies der Fall und wären

$$s',\ s'',\ s''',\ \cdots\ s^{(\varrho)},\ \cdots$$

die zugehörigen Intervalle, so müßten auch sie gegen t konvergieren, also auch irgend welche auf ihnen gelegenen Punkte $p^{(\varrho)}$; zugleich wäre t der einzige Grenzpunkt dieser Punkte. Sie müßten daher einen Weg $\mathfrak{l}'$ bestimmen, der von m nach t führt. *Aber dieser Weg kreuzt den Bereich S nicht auf demjenigen Intervall, wie der zur Folge* (8) *gehörige Weg* $\mathfrak{l}$; die Wege $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ würden also ein Polygon bilden, das einen Punkt von $\mathfrak{T}$ im Innern enthielte, was unmöglich ist. Daher muß in (7) der erste Index von einem bestimmten Glied an derselbe Index i sein, wie in (9) resp. (8). Damit ist der erste Index der Folge (8) bestimmt.

Man tilge jetzt aus (7) diejenigen Intervalle, die nicht den Index i enthalten. Von der übrigbleibenden Folge beweist man dann genau wie eben, daß sie nur eine endliche Zahl von Intervallen enthält, deren zweiter Index von dem zweiten Index k der Folge (8) verschieden ist. Für die Folge (7) existiert also ein angebbares Intervall, von dem an alle folgenden Intervalle die nämlichen Indices i und k enthalten, wie die Intervalle von (8), womit auch k bestimmt ist. In dieser Weise kann man fortfahren und so beliebig viele Indices von (8) bestimmen. Damit ist (7) in (8) übergeführt.

Den Intervallen von (8) entsprechen auf dem Kreis $\mathfrak{K}$ die Kreisbögen

$$k_i,\ k_{ik},\ k_{ikl},\ \cdots,\ k_N,\ \cdots, \tag{10}$$

die gegen *einen* bestimmten Punkt k konvergieren. Gegen diesen Punkt konvergieren nun auch die Punkte

$$k_r',\ k_r'',\ \cdots,\ k_r^{(\varrho)},\ \cdots\ . \tag{11}$$

Wegen der eineindeutigen Beziehung der Mengen $\mathfrak{K}_r$ und $\mathfrak{T}_r$ sind nämlich diese Punkte Endpunkte der Intervalle

$$k_{L'},\ k_{M'},\ \cdots,\ k_{R'},\ \cdots, \tag{12}$$

deren Indices mit denen der Folge (7) übereinstimmen. Da in ihr von einem bestimmten Gliede an der erste Index den Wert i hat, so sind die Kreisbögen von (12) von einem bestimmten Glied an sämtlich Teilbögen von k_i. Von einem andern Glied an sind sämtliche Kreisbögen von (12) Teilbögen von k_{ik} usw. Demnach bestimmen die Folgen (10), (11) und (12) denselben Punkt k. Es entspricht daher einem Punkt t, welches auch die ihn darstellende Folge sei, ein und nur ein Punkt k.

Analog gestaltet sich der Beweis in dem Fall, daß der durch die Folge $\{t_r^{(\varrho)}\}$ definierte Punkt t zur Menge $\mathfrak{T}_r$ gehört. Auch hier wird durch den Punkt t eine Folge (7) bestimmt; von ihr beweist man, daß ihre Indices von einem bestimmten Gliede an mit den Indices mindestens einer der beiden Folgen übereinstimmen, die in diesem Fall dem Punkte t entsprechen (§ 10).

In derselben Weise kann man zeigen, daß jedem Punkt k des Kreises $\mathfrak{K}$ ein und nur ein Punkt von $\mathfrak{T}$ zugehört. Der Beweis, daß eine Folge von der Form (7) immer eine Folge von der Form (8) bestimmt, gestaltet sich ebenso, wie der vorstehende.

Die Mengen $\mathfrak{K}_r$ und $\mathfrak{T}_r$ stehen also in der Beziehung, daß jedem Grenzelement der einen Menge ein und nur ein Grenzelement der anderen entspricht, womit die gegenseitige stetige Beziehung erwiesen ist. Also folgt:

VI. *Jede einfache geschlossene Kurve läßt sich umkehrbar eindeutig und stetig auf die Punkte eines Kreises abbilden.*